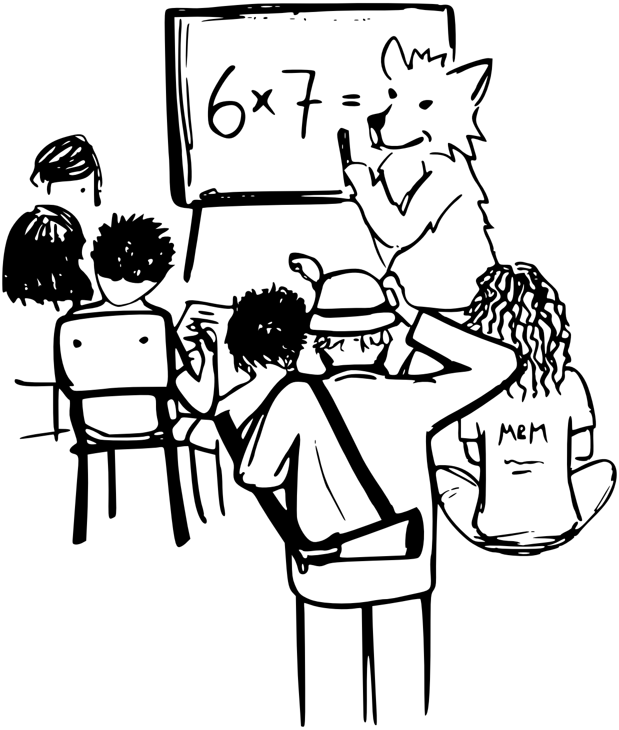
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXII / Číslo 6



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Drazí Lišáci,

v letošním předposledním čísle najdete mnoho zajímavého čtení. U většiny je autorem někdo z vás, našich řešitelů. Jsme rádi, že nám posíláte tolik článků, které stojí za to otisknout.

K tématu o volebních systémech dorazilo pět příspěvků a všechny nás moc potěšily. Chválíme Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Davida Žáčka za velmi propracovaný příspěvek a děkujeme všem pěti autorům. Doporučujeme vám si články o volebních systémech přečíst a třeba i zareagovat vlastním článkem.

V seriálu o teorii grup se krom jiného dostaneme například až k povídání o standardním modelu a zmíníme, proč má smysl uvažovat vesmír s deseti dimenzemi.

Na straně 26 najdete článek nazvaný Šachové diagramy, inspirovaný konferencí z podzimního soustředění.

Těšíme se na vaše články z vědeckých konferencí z jarního soustředění. To právě skončilo a pokud jste na něm nebyli, tak vězte, že bylo moc prima. Společně jsme si ho parádně užili. Ostatně, na webu najdete fotky.

Hezké jarní čtení přejí

vaši organizátoři

Jednoho dne
tě začne vábit les

Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 7. 6. 2016

Když Zdeněk sundal papírek od M z rozcestníku, chvíli na něj mlčky koukal. „Tak copak tam je?“ zeptal se po chvíli klidně Petr. Zdeněk na to odvětil, že si není úplně jistý. Petrovi přeběhl po čele mrak. Vykročil za Zdeňkem, aby se na ten záhadný papírek podíval také. Zdálo se, že je na papírku nějaká šifra. Vypadala jako spousta rozházených podivných černých a bílých symbolů a sem tam nějaký černý nic moc neříkající text. Jana roztáhla u rozcestníku karimatku a všichni se dali do luštění. Kolem chodili lidé a zvědavě i opovržlivě si je prohlíželi. Tomáš si naopak sem tam prohlížel kolemjdoucí. M nemůže být daleko a přece by si nenechal ujít příležitost sledovat je při luštění! Nicméně málokterý kolemjdoucí vypadal podezřele.

Mezitím už ostatní trochu pohnuli s šifrou. Z rozházených písmenek se nakonec podařilo vyluštit instrukce a nápovědu, co je tak zvláštního na těch černých a bílých číslech. Petra nakonec napadlo, podle jakých zákonitostí jsou čísla na obrázku obarvená. Přestože způsob obarvení už znali, napadl Zdeňka ještě jiný systém obarvování. Ale šlo tak čísla vůbec obarvit, aby splňovala dané podmínky?

Úloha 6.1 – Černá a bílá čísla (3b)

Každé přirozené číslo[1] obarvíme černě, nebo bíle tak, že součet každé různobarevné dvojice je černý, zatímco součin je bílý.

a) Jakou barvu má součin dvou bílých čísel?

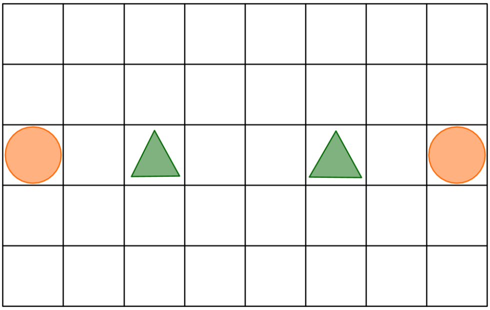
b) Charakterizujte všechna vyhovující obarvení.

V zajetí svého génia se Zdeněk nehodlal od rozcestníku zvednout dřív, než na to přijde. Když už měl řešení skoro na dosah ruky, ozvala se z dálky rána. Zdeněk trochu nadskočil, pak si ale uvědomil, co to bylo, a zase se uklidnil. Nabručeně zamumlal, že nemá rád myslivce, a ponořil se zpět do svých myšlenek. Jana se na něj otočila a zamyslela se. Pak mu ze stohu papírů jeden vytáhla a začala si něco kreslit. A kreslila a kreslila, přišel se podívat i Tomáš s Petrem, kteří si potřebovali dát od šifry pauzu. Jana jim nadšeně vysvětlovala, co by chtěla zjistit.

Úloha 6.2 – Honba za liškou (3b)

V lese o velikosti 40 polí stojí 2 myslivci (trojúhelníky) a před nimi prchají 2 lišky (kolečka), viz Obrázek 1. Lišky jsou velmi rychlé a chytré. Aby byl hon úspěšný, myslivci je musí chytit. Každý z myslivců se tedy v každém tahu posune o právě jedno pole vodorovně či svisle, v pohybu po úhlopříčce jim brání

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.



Obrázek 1: Počáteční rozestavení lišek a myslivců.

pravidelně vysazený les. V tu chvíli přestává být pozice lišek bezpečná, proto se každá z nich posune o právě jedno pole podle stejných pravidel jako myslivci. Nyní hon pokračuje opět pohybem myslivců a dál se pohyb lišek a myslivců pravidelně střídá. Liška je ulovena myslivcem, pokud se myslivec přesune na pole, na kterém právě stojí liška. Přesune-li se liška na pole, na kterém právě stojí myslivec, je též ulovena. Ulovená liška vypadává ze hry. Lišky mohou být uloveny postupně.

Poženou se myslivci za liškami donekonečna? Nebo lišky nakonec podlehnou myslivcům, ať se budou snažit sebevíc? Zjistěte, zda existuje pro lišky neprohrávající nebo pro myslivce vyhrávající strategie a popište ji.

Když dořešili liščí problém, byli na sebe náležitě hrdí. Až skoro zapomněli na Zdeňka, který stále řešil svá černobílá čísla. Jak se Petr rozptýlil u jiného úkolu, konečně ho napadlo něco, co by Zdeňka mohlo posunout dál. A také že ano. Za chvíli měli problém vyřešený. „No a co teď?“, zeptal se Tomáš. Zdeněk vytáhnul zpod karimatky papír. Přiznal se, že se mu podařilo z černobílých čísel vykoukat ještě nějaké opravdové instrukce, jenom je schovával před ostatními, aby si mohli nejdřív dořešit všechny ostatní otázky. Tomáš se z toho dal do smíchu a srdečně objal svého bláznivého kamaráda, pro kterého je asi matematika životním posláním. Dostal od něj papírek se souřadnicemi 50.0695050N, 14.4282081E a záludnou otázkou: „Kde je váš cíl?“ Jana okamžitě prohlásila … No přece tady! *a zabodla prst mezi dvě souřadnice. Vzápětí se ale zarazila. „A nebo taky ne… Ale každopádně bych se tam šla podívat!“*

Petr tedy znovu vytáhnul notebook a začal hledat, kam souřadnice směřují. Jenže jako vždy, nic není tak přímočaré, jak se zdá. K opraváři se s notebookem samozřejmě od rána nedostal.

Úloha 6.3 – Klávesnice podruhé (4b)

Vzpomínáte si, jak se tehdy rozbila klávesnice vašeho notebooku? Museli jste použít softwarovou klávesnici v podobě obdélníkové tabulky znaků, na které jste psali pomocí kurzoru, kterým jste pohybovali šipkami (spolu s `Enter`em jediné funkční klávesy) (viz Úloha 4 v čísle 22.4[2]). Klávesnice byla tenkrát tak hloupě navržená, že jste psaním strávili dlouhé hodiny. Zkušenost to byla natolik traumatizující, že jste se rozhodli navrhnout si vlastní klávesnici, na které půjde psát i dlouhé texty rychle.

Chcete tedy navrhnout klávesnici o rozměru 8×8 znaků tak, aby nejmenší nutný počet stisků šipek a `Enteru` k napsání zadaného textu[3] byl co nejmenší. Klávesnice rozlišuje velká a malá písmena (tedy `L` a `l` jsou dva různé znaky), mezera a interpunkční znaménka (tečka, čárka, vykřičník, otazník) jsou také plnohodnotné znaky, odřádkování ignorujte (tj. chovejte se k textu jako by byl napsaný celý na jedné řádce). Počet bodů, které za řešení obdržíte, se bude odvíjet od toho, kolik je třeba stisků kláves k napsání textu na vaší klávesnici (čím méně, tím lépe). Dále můžete dostat až dva body za vysvětlení toho, jak jste vaši klávesnici vytvořili.

Tentokrát se pomocí navržené klávesnice podařilo všechno mnohem rychleji. Jana u Petra celou dobu trpělivě seděla a sem tam se zeptala, k čemu je tohle a proč dělá tamto. Když Petr úkol dokončil, poprvé Janu políbil a za nimi se ozvalo Tomášovo a Zdeňkovo hlasité tleskání. Jana s Petrem vyskočili a dobrých deset minut kluky z legrace honili po okolí.

Nakonec se celí vysmátí sebrali a nastoupili na vlak.

Jak se tak Jana ptala Petra na to a ono o jeho počítači a na nastavení GPS, začalo jí to připadat jako čím dál zajímavější téma. Sice už u svých kamarádů GPS mnohokrát potkala, vlastně si ale nebyla jistá, jak přesně funguje. A tak si kamarádi ve vlaku krátili čas rozebíráním všech detailů o GPS, které je jen napadly.

Úloha 6.4 – Albertovy družice (4b)

Určování polohy pomocí GPS je založeno na přesném měření času v družicích. Aby bylo určování přesné, je potřeba brát v úvahu i relativistické jevy, a to dilataci času. Odvoďte, jak se změní frekvence signálu vysílaného družicí v důsledku obecné teorie relativity (tedy změny potenciálu gravitačního pole). Změní se frekvence i kvůli jinému jevu? Vysvětlete.

Kamarádi se zapovídali natolik, že skoro přejeli stanici. Rychle si nandali batohy a vyběhli z vlaku těsně předtím, než zavřel dveře. Pak ještě popojeli kousek tramvají a už stáli před tím správným domem. Přitom jim všem v hlavě zněla otázka „KDE JE VÁŠ CÍL?“.

Chtěl jim M naznačit, aby se přihlásili na Matfyz? Nebo jim chtěl ukázat, jak zábavná může matika, fyzika a informatika být? Nebo jak ještě skvělejší než řešit něčí úlohy je hledat odpovědi na vlastní otázky a diskutovat o nich? A nebo

[2] Do úlohy se nám bohužel vloudila chyba, neboť slovo `ahoj` v příkladu lze napsat na *osm* stisků, ne na pět. Všem se moc omlouváme za zmatení.

[3] Text je k dispozici na následující adrese: `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/22-6-3-klavesnice_vstupni-text.txt`

jim chtěl jen ukázat pěkný kousek naší země a pomoct jim najít nové bláznivé kamarády?

Přišli o kousek blíž ke dveřím Matfyzu a na nich stálo velkými písmeny: „ANO!“

Řešení úloh 4. série

Úloha 4.1 – Divné psaní (4b)

Zadání:

Vaším úkolem je dešifrovat následující vzkaz ve finštině (text byl před zašifrováním zbaven diakritiky, takže používá pouze anglickou abecedu). Je to substituční šifra. Úkolem není nalézt český překlad, ale možná za něj bodík navíc bude.

Cbfb wjjxjj ysfnthuvbutuz vs guxxs bz znxvs ystss. Wngsxxs cbfbh gpbksh nzuyyswgnnz wbukjz xnthus, vswsxss, tnuzss vs fjbtbs, yjhhs ynhguggs zn kbuksh wsphhss ypbg ybzucjbxugnycss fskuzhbs, wjhnz gjbysuinz fsshnhhs vs xjbzzbzzuuhhpnz wsgknvs. Gpwgpxxs cbfbh wnfssksh ksfsfskuzhbs hsxkns ksfhnz gpbysxxs gunzus, vswsxsz vs tnuzunz xugswgu. Hsxknxxs, wjz fskuzhbs bz xjbzzbggs kstnyysz, cbfbh nhguksh nzguguvsugnghu vswsxss. Cbfb cpghppwuz tsughsyssz vswsxsz ynhfuz cswgjugnz tszrnz xscu. Ypbg tnuzswsgkuh vs ksfkjh wnxcssksh cbfbvnz fskuzzbwgu, vbg vswsxss nu bxn hsfcnnwgu gsshskuxxs. Vswsxughs cbfb gjbguu csxxnfbcbfbzvswsxss. Cbfbz fjjszgjxshjg pwguzwnfhsughjj hsxknxxs vs cbhguz ynfwuhpg bz nfuhhsuz kstsuznz. Cbfb yjughjhhss hsxkuguz pwguystsughs nxsuzhs vs hsxku ynfwuhgnn cbfbxxn xsuthjyughs vs vbcs ksuz tnzruggsgbxkusyughs. Cbfb ynznhhss hsxknxxs zbfyssxughuwuz zbuz kuuinzznwgnz csuzbghssz. Zpwpuguz pxnughpzph xugsfjbwuzhs bz yjjhhszjh huxszznhhs ynfwuhhsksghu.

Řešení:

Naši agenti zjistili, že ukořistěná zpráva je zašifrována substituční šifrou. Budeme předpokládat, že jde o *monoalfabetickou* substituční šifru – tedy takovou, že se stejná písmena původního textu nahradí všechna tím samým písmenem. Luštění takové šifry je dost jednoduché na to, aby stálo za pokus, a navíc bychom nejspíš takto krátký text ani nebyli schopni rozluštit, pokud by byl zašifrovaný *polyalfabetickou* substituční šifrou (při jejím použití se substituce mění s pozicí nahrazovaného písmene ve zprávě; např. Vigenèrova šifra).

Klasickým způsobem luštění substitučních šifer je frekvenční analýza. Spočítáme výskyty znaků v šifrovaném textu, podělíme počty jeho délkou a získáme relativní četnosti. Ty porovnáme se známými hodnotami[4] pro domnělý jazyk zprávy (v našem případě přičteme četnosti znaků s diakritikou (ä, ö) k četnostem odpovídajících znaků bez ní (a, o)), viz tabulka 1. Pokud je zpráva dostatečně dlouhá, dokážeme rekonstruovat substituci i automaticky.

[4] Relativní četnosti znaků ve finštině: `http://practicalcryptography.com/cryptanalysis/letter-frequencies-various-languages/finnish-letter-frequencies/`

Finština	a	i	n	t	e	s	o	l	u	k	m	r	v	j
	15,8	10,8	8,8	8,8	8,0	7,9	6,1	5,8	5,0	5,0	3,2	2,9	2,2	2,0
Šifra	s	u	h	z	g	b	n	x	f	w	k	j	y	c
	17,6	9,6	8,7	8,6	7,2	7,1	6,9	6,1	4,1	4,1	3,6	3,5	3,1	2,8

Tabulka 1: Relativní četnosti 14 nejčastějších znaků ve finštině a zašifrovaném textu (v procentech).

Jenže naše zpráva zřejmě není dost dlouhá. Můžeme si být docela jistí substitucí (s → a) a (u → i), ale dále už jsou rozdíly mezi četnostmi ve finštině a v šifře příliš velké (vzhledem k rozdílům mezi sousedními četnostmi znaků v šifře) na to, aby se dala substituce spolehlivě určit. Můžeme do hry zapojit také bigramy, či obecně n-gramy, tedy n-tice sousedních znaků v textu, ale obecně pro větší n potřebujeme delší zprávu, aby rozložení n-gramů dostatečně odpovídalo jejich rozložení v jazyce.

Bylo tedy zapotřebí dalšího snažení. Pár příkladů pro inspiraci: Dr.$^{\mathsf{MM}}$Klára Stefanová si všimla, že slovo `vs` v šifře díky známé substituci (s → a) původně končilo na `a` a ve finštině neexistuje jiné takové dvoupísmenné slovo než `ja`. Získala tak substituci (v → j). Z častých finských koncovek `alla`, `ella`, `illa` odvodila, že dvojice `xx` před koncem slov bude `ll`. Dr.$^{\mathsf{MM}}$Anna Mlezivová se zaměřila na zdvojená písmena obecně a Bc.$^{\mathsf{MM}}$Jana Pallová zkoumala finské spojky, krátká slova a shluky souhlásek a samohlásek.

Důležitým krokem pak většinou bylo vyhledat částečné řešení na webu nebo jej prohnat překladačem a zjistit tak substituci pro zbylá písmena, případně opravit ta už dosazená.

Viděli jsme, že ruční rekonstrukce substituce může být docela mravenčí práce. Nemohli bychom ji nechat sestrojit počítač, pokud možno bez našich zásahů?

Ukážeme si jednu nepříliš chytrou metodu, která ale alespoň v tomto případě fungovala. Nejprve si seženeme *slovník* – co největší seznam finských slov.[5] Pomocí něj budeme odhadovat, jestli je naše substituce správná. Postupně pro každý znak x vyskytující se v šifře určíme znak y, kterým se bude nahrazovat, následovně: Projdeme všechny znaky y z finštiny, kterými se zatím nic nenahrazuje, zkusíme vždy substituci rozšířit o (x → y) a zašifrovaný text částečně přeložit. Např. pokud zatím máme částečnou substituci (u → a), (n → r), slovo `ysfnthuvbutuz` přeložíme na `ysfrthavbataz`. Pro každé částečně přeložené slovo S ověříme, jestli existuje doplnění substituce takové, abychom úplně přeložené slovo našli ve slovníku. (Projdeme každé slovo ve slovníku o stejné délce jako S po znacích zleva doprava. Pokud příslušný znak slova S ještě není přeložen, rozšíříme substituci o tuto dvojici znaků a celé S dopřeložíme. Pokud je příslušný znak S již přeložen, musejí se znaky shodovat. Neshodují-li se, toto slovo nevyhovuje, zahodíme změny substituce a jdeme na další slovo. Dojdeme-li až na konec slova, našli jsme pro S

[5] Např. z `https://invokeit.wordpress.com/frequency-word-lists/`

oporu ve slovníku. Nezapomeneme vrátit substituci do stavu před S.) Vybereme pro x takové y, aby se co nejvíce slov z textu dalo při nějakém doplnění substituce najít ve slovníku.

Tento algoritmus našel substituci, která se od té správné lišila jen ve dvou málo četných znacích (`r` a `i`, celkem 4 výskyty).

Podobný přístup zvolil Bc.[MM]Jan Gocník. K zašifrovaným slovům našel ve slovníku ta, na která by se mohla přeložit (např. `cbfb` na `aili`, `eini`, `jere`, …) a pro každé písmeno vyskytující se v šifře spočítal, kterému písmenu odpovídá v kolika slovech ve slovníku. Pak rozšířil svou substituci o nahrazení ($x \to y$), které mělo největší počet výskytů; přednostně však řešil nahrazování písmene, kterému zbývalo méně než sedm možností, na co se přeložit (pokud takové bylo). Pak přepočítal výskyty po aplikování tohoto nového pravidla a určil další nahrazení.

Dr.[MM]Jan Pokorný šifru luštil pomocí knihovny pycipher pro jazyk Python. Jeho algoritmus nejprve odhadl substituci na základě frekvenční analýzy. Následně zkoušel prohazovat dva náhodné znaky substituce a prohození přijal, pokud se zvýšilo *skóre* – součet logaritmů relativních četností (ve finštině) jednotlivých 4-gramů v dešifrovaném textu vynásobený -1 (neboť $\log p < 0$ pro $p \in (0,1)$).[6] Ve chvíli, kdy přeložený text dostatečně připomínal finštinu, byla správnost klíče ověřena pomocí Google Translatoru.

Správná substituce, ke které se většina došlých řešení nakonec dobrala, je tabulce 2.

Šifra	b	c	f	g	h	i	j	k	n	p	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Finština	o	p	r	s	t	d	u	v	e	y	g	a	h	i	j	k	l	m	n

Tabulka 2: Substituce, která zprávu dešifruje.

S ní konečně můžeme zprávu dešifrovat, doplnit diakritiku, přeložit a číst:

Poro kuuluu märehtijöihin ja sillä on neljä mahaa. Kesällä porot syövät enimmäkseen koivun lehtiä, jäkälää, heinää ja ruohoa, mutta metsissä ne voivat käyttää myös monipuolisempaa ravintoa, kuten suomaiden raatetta ja luonnonniittyjen kasveja. Syksyllä porot keräävät vararavintoa talvea varten syömällä sieniä, jäkälän ja heinien lisäksi. Talvella, kun ravintoa on luonnossa vähemmän, porot etsivät ensisijaisesti jäkälää. Poro pystyykin haistamaan jäkälän metrin paksuisen hangen läpi. Myös heinäkasvit ja varvut kelpaavat porojen ravinnoksi, jos jäkälää ei ole tarpeeksi saatavilla. Jäkälistä poro suosii palleroporonjäkälää. Poron ruuansulatus yksinkertaistuu talvella ja pötsin merkitys on erittäin vähäinen. Poro muistuttaa talvisin yksimahaista eläintä ja talvi merkitsee porolle laihtumista ja jopa vain hengissäselviämistä. Poro menettää talvella normaalistikin noin vii-

[6] Toto skóre je vlastně cross-entropie (chybí jen vydělení počtem všech 4-gramů v textu), používaná na porovnání dvou pravděpodobnostních rozdělení (v našem případě rozdělení 4-gramů v textu a ve finštině). Pro diskrétní pravděpodobnostní rozdělení p a q je jejich cross-entropie definovaná jako $H(p,q) = -\sum_x p(x) \log q(x)$.

denneksen painostaan. Nykyisin yleistynyt lisäruokinta on muuttanut tilannetta merkittävästi.

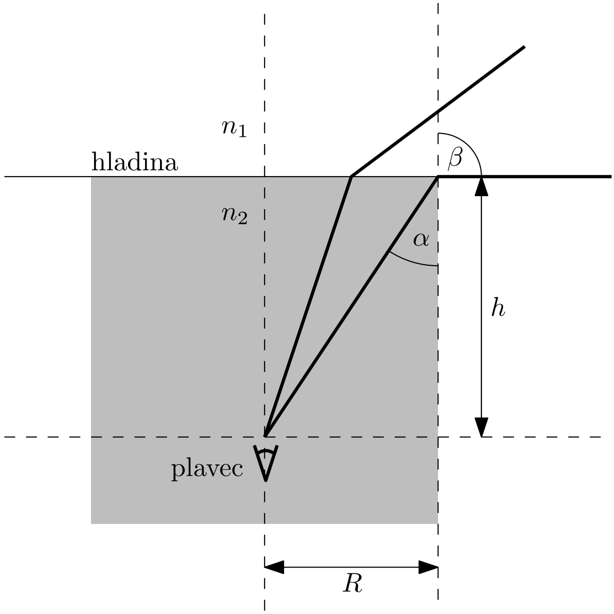
Sob je přežvýkavec a má čtyři žaludky. V létě sobi jedí převážně březové listy, lišejníky, seno a trávu, ale v lesích mohou jejich stravu doplňovat i bažinné vachty a jiné traviny. Na podzim si vytvářejí tukové zásoby na zimu, kromě lišejníků a sena se živí i houbami. V zimě, kdy je jídla nedostatek, sobi vyhledávají hlavně lišejníky. Jsou schopni je vycítit pod metrovou vrstvou sněhu. Pokud mají nedostatek lišejníků, spokojí se i s trávou a polokeři. Ze všech lišejníků preferují Dutohlávku horskou (finský název doslova „Lišejník sobí“, pozn. překl.). V zimě je zažívání sobů zjednodušeno, bachor ztrácí svůj význam. Sobi v zimě připomínají monogastrická zvířata (s jedním žaludkem, pozn. překl.). Zima pro ně znamená úbytek na váze a pouhé přežívání. Obvykle ztratí až pětinu své tělesné hmotnosti. Dnes rozšířené přikrmování ale situaci výrazně změnilo. (Volně podle Bc.MM Jana Gocníka a Dr.MM Jana Pokorného.)

Matěj

Úloha 4.2 – Kruhový bazén (3b)

Zadání:
Máme zapuštěný bazén kruhového půdorysu o poloměru R (index lomu vody n_2, index lomu vzduchu n_1). Do jaké maximální hloubky se může potopit plavec, aby ve světelném kruhu nad sebou teoreticky viděl celý prostor nad hladinou? (Uvažujme zcela rovnou vodní hladinu.)

Řešení:
Vzhledem k symetrii bazénu platí, že aby byla hloubka potopení maximální, měl by se plavec nacházet uprostřed bazénu. Celý prostor nad hladinou bude teoreticky vidět, pokud existuje takový paprsek směřující od plavce k hladině, že se na



Obrázek 2: Bazén

rozhraní optických prostředí voda/vzduch láme pod úhlem 90° – nazveme jej mezní paprsek. Pro lepší představu umístíme plavce na hladinu doprostřed bazénu a budeme ho potápět, hledané maximální hloubky potopení dosáhne v okamžiku, kdy se mezní paprsek bude lámat právě na okraji bazénu. Situace je znázorněna na obrázku 2.

Nyní stačí vhodně zformulovat Snellův zákon pro naši úlohu, tedy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_2},$$

kde $\sin\beta = 1$ a n_2, n_1 jsou indexy lomu vody a vzduchu. Užitím Pythagorovy věty dostaneme

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{n_1}{n_2},$$

nyní stačí ekvivalentními úpravami vyjádřit hloubku h a dostaneme

$$h = R \cdot \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1}.$$

Pokud uvážíme skutečné hodnoty indexů lomu pro vzduch přibližně $n_1 \doteq 1{,}00$ a vody $n_2 \doteq 1{,}33$, dostaneme přibližnou hodnotu hloubky maximálního potopení $h \doteq 0{,}88R$.

Dominigga

Úloha 4.3 – Hra se svíčkami (4b)

Zadání:

Na stole je pevně umístěno 2016 svíček. Dva hráči hrají následující hru. V každém tahu hráč rozsvítí nebo zhasne jednu ze svíček, ale nesmí to provést tak, aby se rozsvícené svíčky ocitly ve stejném rozestavení, jako už někdy dřív ve hře. Hráči se střídají v tazích a prohrává ten hráč, který už nemůže provést tah. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Řešení:

Vyhrávající strategii má první hráč. Může si například vybrat jednu svíčku a po celou dobu hry ji stále zhasínat a rozsvěcet. Druhý hráč s touto žárovkou nemůže provést nic (jinak by se vrátil do již navštívené pozice) a nezbývá mu než zhasínat a rozsvěcet ostatní svíčky. Tím ovšem umožňuje prvnímu dál zhasínat a rozsvěcet jeho svíčku, neboť mění celkovou pozici svíček. Poté, co druhému dojdou všechny pozice ostatních svíček, prohrává.

Pepa

Úloha 4.4 – Klávesnice (3b)

Zadání:

Potkala vás nešťastná nehoda – vašemu notebooku se rozbila klávesnice a touchpad. Situace ale není tak zoufalá, z kláves fungují šipky a `Enter`*, navíc jste zrovna měli zapnutou softwarovou klávesnici. Softwarová klávesnice je obdélníková tabulka znaků s kurzorem. Kurzor vždy ukazuje na jeden znak a lze jím po tabulce pohybovat pomocí šipek. Stiskem klávesy* `Enter` *se vypíše znak, na který ukazuje kurzor. Text* `ahoj` *by bylo možno napsat na následující klávesnici (hvězdičkou je označena počáteční pozice kurzoru) jako:*

`Enter`, $\rightarrow$, `Enter`, $\rightarrow$, `Enter`, $\leftarrow$, $\downarrow$, `Enter`

a^*	h	o
b	j	a
r	3	g

Jelikož lenost je hybnou silou pokroku, chcete se při psaní co nejméně nadřít. Proto potřebujete vymyslet algoritmus, který pro zadaný text a zadanou klávesnici najde nejmenší počet stisků skutečných kláves (tj. šipek a `Enter`*u), pomocí kterého lze text na klávesnici napsat. Pro klávesnici z příkladu a slovo* `ahoj` *nám stačí osm stisků kláves. Samozřejmě chcete, aby byl algoritmus co nejefektivnější.*[7] *O klávesnici můžete předpokládat, že bude používat nějakou rozumně malou sadu znaků, například ASCII. A nezapomeňte, znaky se na klávesnici mohou opakovat!*

[7] O tom, jak efektivitu algoritmů nějak měřit, se můžeš dozvědět v následujícím povídání od našich kamarádů z KSP: `http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/25/cook1.html`

Řešení:
Nejdříve si situaci trochu zjednodušíme tím, že nedovolíme, aby jakékoliv písmenko bylo na klávesnici více než jednou. Potom existuje jen jediný způsob jak dané slovo napsat – z počáteční pozice se přesuneme na jedinou klávesu s prvním písmenkem textu, poté na jedinou klávesu s druhým písmenkem textu a tak dále. Jak spočítat počet stisků? Počet stisků `Enteru` je stejný jako počet písmen v textu, zajímavé jsou tedy jen „přesuny“ kurzoru. Všimněme si, že vzdálenost (tj. počet stisků šipek nutný k přesunu mezi nimi) mezi dvěma klávesami můžeme snadno spočítat jen z jejich polohy na klávesnici – pokud klávesa k_1 je v x_1-tém sloupci a y_1-tém řádku a klávesa k_2 v x_2-tém sloupci a y_2 řádku, pak jejich vzdálenost[8] je

$$\mathrm{d}(k_1, k_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Bude se nám tedy hodit pro každé písmenko umět rychle najít, kde se na klávesnici nachází. Protože možných písmenek na klávesnici je málo (viz předposlední věta zadání),[9] můžeme si vyrobit pole (tabulku) indexované všemi možnými písmenky,[10] která se na klávesnici mohou vyskytovat, obsahující souřadnice písmenka na klávesnici (pokud se tam vyskytuje).

Celý algoritmus tedy nejdříve projde klávesnici a vybuduje tabulku s pozicemi písmen, poté postupně projde celý text, podívá se, jaké písmenko v textu následuje, spočítá vzdálenost mezi ním a kurzorem a následně přesune kurzor. Díky tabulce nám zpracování jednoho písmenka bude trvat $\mathcal{O}(1)$, tedy $\mathcal{O}(L)$ na celý text (kde L je délka textu). Konstrukce tabulky písmen nám zabere $\mathcal{O}(N)$, kde N je počet kláves, celkem nám to bude tedy trvat $\mathcal{O}(L + N)$.

Co se změní, pokud se mohou písmenka na klávesnici vyskytovat vícekrát? Hlavním problémem je, že dopředu nevíme, která z možných cest po klávesnici je ta nejkratší. Na první pohled by se mohlo zdát, že bychom se mohli zkusit na klávesnici podívat jako na graf a použít nějaký z algoritmů na hledání nejkratší cesty v grafu, leč zde narazíme. Jednak chceme, aby naše cesta navštívila nějakou zadanou posloupnost kláves, a jednak nám nevadí, když některé klávesy navštívíme vícekrát – s tím si rychlé grafové algoritmy snadno poradit neumí.

Jedno z možných řešení je sestavit nějaký chytřejší graf než ten, kde jsou vrcholy klávesy a hrany vedou mezi sousedními klávesami. Většina došlých řešení tento postup použila, nicméně ukážeme zde trochu jiný postup, který je s tím grafovým v zásadě ekvivalentní (je asymptoticky stejně rychlý a má i velmi podobný průběh), ale je jednodušší na implementaci, a navíc se nezdržuje konstrukcí grafu.

Myšlenka je snadná – budeme postupovat stejně, jako když jsme neměli více stejných kláves, jediný rozdíl bude v tom, že budeme pracovat se všemi klávesami

[8] Takzvaná *Manhattanská* vzdálenost.

[9] Je sice pravda, že z hlediska asymptotické složitosti je jedno jak je abeceda velká (dokud je její velikost konstanta), takže teoreticky může být abeceda velká jakkoliv, ale zkuste si někdy pořídit pole o 2^{64} prvcích pro Unicode…

[10] Písmenka v počítači jsou všehovšudy jen čísla a některé programovací jazyky (např. Céčko) se k nim tak dokonce i chovají.

s daným písmenkem. Předpokládejme, že už napsaný text končí písmenem a. Potom si budeme pro každou klávesu $a_0, \ldots, a_k$ s písmenem a pamatovat nejmenší počet stisků nutný k napsání textu tak, že při psaní skončíme na této konkrétní klávese (označme si tuto hodnotu $\mathrm{p}(a_i)$). Další písmeno b napíšeme snadno. Buďte $b_0, \ldots, b_l$ všechny klávesy s písmenem b. Pak $\mathrm{p}(b_i)$ spočítáme jako nejmenší $\mathrm{p}(a_j) + \mathrm{d}(a_j, b_i)$, přes všechna možná a_j. Zpracování dalšího písmena nám tedy zabere $\mathcal{O}(kl)$ času. Opět se nám bude hodit tabulka, která pro dané písmeno obsahuje všechny jeho výskyty na klávesnici.

Celý algoritmus tedy bude vypadat následovně: Spočítáme tabulku výskytů písmen T, to zabere $\mathcal{O}(N)$ času. Budeme si udržovat množinu K všech kláves, na kterých je poslední napsané písmenko, spolu s $\mathrm{p}(k)$ pro každou klávesu k z K. Na začátku bude K obsahovat klávesu s kurzorem c a $\mathrm{p}(c) = 0$. Postupně budeme brát písmena z textu a pro každé z nich (označme si ho opět a) nejdřív z T získáme množinu K_a všech kláves s tímto písmenem (v $\mathcal{O}(1)$). Poté pro každé $k \in K_a$ spočítáme $\mathrm{p}(k)$ (dohromady $\mathcal{O}(|K| \cdot |K_a|)$) a pokračujeme s $K = K_a$. Po napsání posledního písmenka textu najdeme nejmenší počet stisků na napsání celého textu jako nejmenší $\mathrm{p}(k)$ pro $k \in K$.

Jak to celé bude rychlé? Označme si M nejvyšší počet kláves, které mají stejný znak. Pak jeden krok bude trvat nejhůře $\mathcal{O}(M^2)$, celý algoritmus tedy spotřebuje $\mathcal{O}(LM^2 + N)$ času, v nejhorším případě (pro $M = N$) až $\mathcal{O}(LN^2)$.

Důkaz korektnosti jen náznakem – pokud v i-tém kroku jsou hodnoty $\mathrm{p}(k)$ pro $k \in K$ nejmenší počty stisků, na které se dá napsat prvních i písmen textu, pak totéž platí i v $(i+1)$-ním kroku, a jelikož jsme začínali s touto podmínkou splněnou ($\mathrm{p}(c) = 0$), tak na konci algoritmus vydá kýžený výsledek.

$\mathcal{O}(N)$*dra*

Řešení témat

Téma 1 – Pojďte pane, budeme si hrát

K tématku došlo řešení od Doc.[MM]Petra Šimůnka. Ten se ve svém článku zabývá metodou tzv. kradení strategií, kterou můžeme ilustrovat třeba na piškvorkách. Intuitivně tušíme, že v piškvorkách má výhodu začínající hráč. Jak toto ukázat formálně?

Předpokládejme nejprve, že oba hráči mohou místo nakreslení dalšího symbolu na papír vynechat tah. Dále nechť má druhý hráč vyhrávající strategii, tedy pokaždé, kdy je na řadě, může zahrát tah, který povede k jisté výhře. Nyní si ale všimněme, že pokud první hráč svůj tah vynechá, sám se stává druhým hráčem. Pak by ale také mohl používat vyhrávající strategii svého protivníka (ukradl by mu strategii). Oba hráči výherní strategii mít nemohou, tedy ji nemůže mít ani druhý hráč a při správné hře tak ten první nemůže prohrát. V opravdových piškvorkách je situace jen o málo složitější – je potřeba si uvědomit, proč kolečko navíc prvnímu hráči nevadí, a následně opakovat předchozí úvahy.

Jakým způsobem metody kradení strategie využívá Doc.$^{\mathsf{MM}}$Petr Šimůnek se můžete dočíst na našem webu.[11]

Vašek

Téma 2 – Volební systémy

K tématu nově dorazilo hned pět příspěvků. Jedním z probíraných témat se stal většinový volební systém. Doc.$^{\mathsf{MM}}$Dominik Krasula uvádí několik argumentů ve prospěch tohoto systému. Hlavní motivací bylo vyrovnat dřívější kritické komentáře k většinovému systému, které byly založeny na jeho znevýhodňování menších stran. Mezi hlavní argumenty patřila možnost disproporčního zvýšení síly malých stran v situacích, kdy právě jejich volba vstupu do koalice rozhodne o tom, která strana bude mít nadpoloviční většinu. Dále má ve většinovém systému vítězná strana lepší šance uskutečnit své programové cíle. Zároveň se minimalizuje šance, že se do vlády dostanou extrémistické strany, a celé politické spektrum se posune více do středu. V článku Doc.$^{\mathsf{MM}}$Dominika Krasuly můžete (kromě podložení vyjmenovaných výhod většinového systému) nalézt také zajímavé ohlédnutí za historií vzniku demokracie.

Dr.$^{\mathsf{MM}}$Jan Pokorný začíná naopak kritikou většinového systému, poté však ukazuje některé jeho aspekty, kvůli kterým se stále v některých zemích používá. Jako hlavní výhodu vidí jistotu lokálního reprezentanta. Poté popisuje dva volební systémy, které slučují proporcionalitu počtu výsledných mandátů a získaných hlasů s jistotou, že se do úřadu dostanou politici z daných oblastí. Popis těchto volebních systémů si můžete přečíst níže. Ve svém článku popisuje Dr.$^{\mathsf{MM}}$Jan Pokorný také zajímavý jev zvaný gerrymandering, který funguje v USA. Celý článek vřele doporučujeme k přečtení na webu témátka.

Dr.$^{\mathsf{MM}}$Klára Stefanová se ve svém článku zabývá přepočítáním výsledků voleb z roku 2006. Tehdy vznikla patová situace, kdy vládní koalice a opozice měly stejný počet mandátů. Kdybychom nebrali v úvahu jednotlivé volební obvody a vzali stát jako jeden celek, získaly by vládní strany 105 křesel v parlamentu a patová situace by byla vyřešena. Velmi by si tehdy přilepšila Strana zelených, která s přibližně stejným počtem získaných hlasů jako KDU-ČSL původně ve srovnání s touto stranou obdržela pouze poloviční počet mandátů. Dr.$^{\mathsf{MM}}$Klára Stefanová se dále zabývala změnou volebního kvóra při volbách do Evropského

[11] `https://mam.mff.cuni.cz/problem/2014/`

parlamentu (EP). Hlavní motivací byl fakt, že současná 5% hranice je ve srovnání s ostatními zeměmi EU postavena poměrně vysoko. Při snížení volebního kvóra na 4 % by se do EP dostali Piráti a při snížení na 3 % by na jeden mandát dosáhla i Strana zelených.

Velmi propracovaný příspěvek dorazil od Mgr.^{MM}Davida Žáčka, ve kterém se nachází upřesnění a opravy některých informací a výpočtů z předchozích příspěvků. Důležitá je oprava počítání Hagenbach-Bischoffovy kvóty, kde je nutné použít nikoli celkový počet hlasů, ale pouze hlasy pro strany, které splnily 5% volební klauzuli. Mgr.^{MM}David Žáček dále doplňuje informace o způsobu volby prezidenta v USA, rozhodování o zastoupení jednotlivých zemí v EP a použitém volebním systému při volbách do EP. David dále správně poznamenává, že přerozdělení volebních obvodů na přibližně stejně velké celky je obtížný problém. Navrhuje použít jako volební obvody oblasti NUTS-2, jelikož by tak na každý obvod připadlo alespoň 17 mandátů, což už je podle autora rozumný počet, při kterém mají šanci se prosadit i menší strany.[12] Jako špatný příklad současného dělení uvádí autor Karlovarský kraj, kde při rozdělování pěti mandátů nemají menší strany velkou šanci na úspěch. Autor podotýká, že s podobně velkými volebními obvody by se náš systém velmi přiblížil většinovému.

Poslední příspěvek od Doc.^{MM}Petra Šimůnka popisuje volební systém Demokracie 2.1, ve kterém mají voliči k dispozici více hlasů a zároveň i hlas záporný. Tento systém posléze aplikuje na volby v Německu z roku 1932. Jak by volby při použití tohoto novodobého systému dopadly se můžete dočíst v plném znění jeho článku.

Mrzí nás, že z kapacitních důvodů nebylo možné otisknout více článků či jejich částí. Všechny články nicméně najdete na webu tématka, doporučujeme je k přečtení a těšíme se na vaše další příspěvky.

Anet

Většinový systém a jak ho opravit (13b)

Dr.^{MM}Jan Pokorný

Pozn. red.: Z prostorových důvodů otiskujeme pouze druhou část článku.

Všude dobře, v lokále nejlíp

Ukázali jsme si tedy, že systém většiny neboli First Past the Post (FPTP) z principu nedodržuje poměry hlasů pro dané strany a přidělených mandátů, nutí voliče „taktizovat“ při volbě a zároveň podporuje omezení politické plurality. Proč tedy vlastně státy jako USA, UK nebo Popcornia tento systém zvolily?

Systém většiny má něco, co D'Hontova metoda nenabídne: a to jistotu lokálního reprezentanta. Ať žiji kdekoliv v Británii, mám jistotu, že v mém okrsku se nachází politik, za kterým můžu jít a on může s mým návrhem, který jsem

[12] Zároveň se tím úplně nezruší možnost jednotlivých oblastí dostat do parlamentu lokální zástupce.

přednesl, až do Parlamentu. Kdybychom volby v Británii místo toho vyměnili za poměrový systém, tato vlastnost by se ztratila… Nebo ne?

Rozebereme si dva systémy sčítání hlasů, které umožňují oblastem volit si lokální zástupce a přitom složení parlamentu poté víceméně odpovídá poměrům obdržených hlasů. Jsou to metody s tak obšírnými názvy, že jsem si je netroufl přeložit do češtiny: „Mixed-member proportional representation" (MMP) a „Single transferable vote" (STV).

You da real MMP

Systém MMP vznikl v Německu a adoptovalo ho například i Rumunsko, Lesotho nebo Nový Zéland. Systém je to vlastně velmi jednoduchý: jedná se jen a pouze o kombinaci dvou systémů, které už známe, a to systému většinového a systému poměrového.

Reprezentantů v parlamentu je v tomto systému dvakrát tolik co okrsků. Volby probíhají stejně jako ve většinovém systému: voliči v každém okrsku hlasují o tom, kdo bude zastávat post lokálního reprezentanta. Zatím je to tedy skoro stejné jako většinový systém, až na to, že zaplníme pouze polovinu parlamentu.

Nyní přijde ten trik: během voleb voliči odevzdávají kromě lístku s hlasem pro kandidáta na lokálního reprezentanta ještě lístek se stranou, která je má reprezentovat v parlamentu – tedy obdobně jako v poměrových volebních systémech. Zbývající polovina parlamentu se rozdělí na základě těchto hlasů D'Hondtovou metodou. Pro osvěžení, tato metoda funguje tak, že každé straně počítáme „skóre", které je na začátku rovno počtu hlasů, které obdržela, a iterativně vždy vezmeme stranu s nejvyšším skóre, přidělíme jí další mandát a její nové skóre vypočítáme podle vzorce:

$$\text{nové skóre} = \frac{\text{počet získaných hlasů}}{\text{počet dosud získaných mandátů} + 1}$$

Vtip v tomto případě je, že už ve výchozím postavení nějaké mandáty přidělené jsou: tím, že byli voleni lokální reprezentanti, kteří taktéž mají nějakou stranickou příslušnost. Proto se na začátku skóre každé strany nerovná počtu hlasů, které dostala, ale vypočítáme ho podle vzorečku. Pro názornost tento systém zavedeme v Popcornii[13]:

V Popcornii byli jako lokální reprezentanti (opět) zvoleni všude kandidáti Modrých – toto se nemohlo změnit, protože první část volby je stejná jako u FPTP. Na hlasech pro lokální reprezentanty opět pozorujeme silný politický dualismus vzhledem k tomu, že voliči „taktizují" (viz 3a). Hlasy pro politickou stranu však vypadaly trochu jinak (viz 3b).

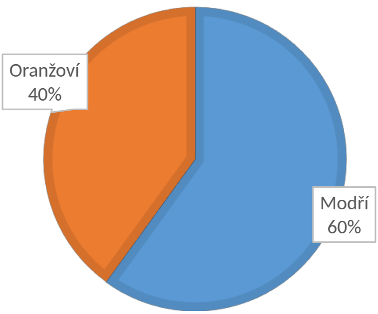
Jak to, že politický dualismus je rázem fuč? Jednoduché: protože hlas pro politickou stranu podléhá poměrovému systému, vyplatí se vždy volit naši „oblíbenou" stranu. Ukážeme si to na parlamentu Popcornie – popcornijský parlament

[13] Popcornia je stát, ve kterém jsou preference voličů rozložené stejně, jako na obrázku 3b. Zároveň jsou voliči po státě rovnoměrně rozmístění.

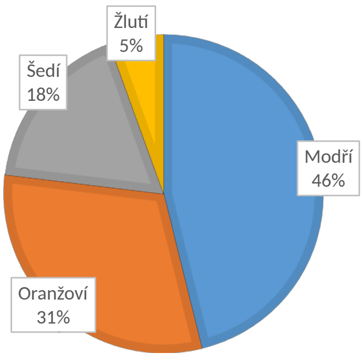
má 18 křesel, na počátku je uveden počet získaných hlasů každou stranou a počet mandátů obsazených „lokálními reprezentanty“. (V Popcornii jsou všichni lokální reprezentanti Modří.) Dále pak vidíte jednotlivé iterace D’Hondtovy metody, přičemž nejvyšší skóre v každém řádku je tučně:

	Modří	**Oranžoví**	**Žlutí**	**Šedí**
Hlasů	46.00 %	31.00 %	5.00 %	18.00 %
mandátů	9	0	0	0
Skóre	46 / 10 = 4.6	**31**	5	18
	4.6	31 / 2 = 15.5	5	**18**
	4.6	**15.5**	5	18 / 2 = 9
	4.6	31 / 3 = **10.34**	5	9
	4.6	31 / 4 = 7.75	5	**9**
	4.6	**7.75**	5	6
	4.6	31 / 5 = **6.2**	5	6
	4.6	31 / 6 = 5.17	5	**6**
	4.6	**5.17**	5	18 / 4 = 4.5
Celkem mandátů	**9**	**6**	**0**	**3**
% mandátů	50.00 %	33.00 %	0.00 %	17.00 %
delta %	4.00 %	2.00 %	−5.00 %	−1.00 %

Gallagherův index pro tyto volby vychází 4,80 – což je poměrně dobré skóre. Můžeme si povšimnout, že MMP lehce favorizuje větší strany (to plyne jednak z volby lokálních zástupců, která podporuje politický dualismus, jednak z podstaty D’Hondtovy metody), i tak ale jde o skvělý výsledek. Každý okrsek si zvolil lokálního zástupce a přitom ve výsledku je parlament poměrově obsazený.



(a) Hlasy pro lokální reprezentanty.



(b) Tento graf se mi líbí. Hlasy pro politickou stranu.

Obrázek 3: Předpokládané počty hlasů v Popcornii při použití systému MMP.

Tento systém tedy umožní poměrové zastoupení, ale stále má jednu vadu: volba lokálních zástupců stále podléhá politickému dualismu a kandidáti menších stran na lokálního zástupce nemají šanci uspět. Řešení tohoto problému nabízí další volební systém, který si tady popíšeme: „Single transferrable vote“, neboli systém jednoho přenositelného hlasu.

STV ftw

Systém Single transferrable vote se využívá v parlamentních volbách v Irsku, na Maltě a v Indii, v senátních volbách v Austrálii a Pákistánu a v mnoha lokálních volbách po celém světě. Soudí se, že tento systém vytvořil v roce 1821 britský matematik Thomas Wright Hill.

STV staví na myšlence: jak docílit toho, aby co nejméně hlasů přišlo nazmar? „Hlasem, který přišel nazmar,“ přitom myslíme takový hlas, který v systému „vítěz bere vše“ buďto: a) dostal kandidát, který vyhrál, „navíc“ nebo b) dostal kandidát, který nevyhrál. Proč by nás tyto hlasy měly zajímat? Inu, opět se dostáváme k problému „strategizování“ při volbách. Člověk by měl při volbách jednoduše dát hlas preferované straně/kandidátovi, aniž by se musel bát toho, že by jeho hlas mohl ve skutečnosti jeho zájmy poškodit; viz případ Fialové strany výše.

Řešením, které se nabízí pro problém Fialové strany zmíněný výše, je vícekolový systém: jednoduše pro N stran proběhne série $N-1$ voleb, kdy v každých volbách je vyřazena strana s nejméně hlasy a její voliči mají v příštím kole šanci svůj hlas přidělit jinému kandidátovi. Toto s sebou bohužel nese hlavně technické nevýhody; komu by se taky chtělo pořádat tolik voleb a komu by se chtělo jít tolikrát k volbám…

Obrázek 4: Volební lístek systému STV (zdroj: Wikimedia Commons, upraveno)

Metoda STV nabízí řešení: místo toho, abychom na volebních lístcích kroužkovali jednoho našeho „favorita“, máme šanci kandidáty očíslovat podle svých preferencí – tedy například voliči Fialových můžou jako druhou volbu uvést Modré. Tím pádem můžeme volby vyhodnotit podle prvních voleb voličů. Poté vyřadíme jednoho z kandidátů: toho, který dostal nejméně hlasů, a postupujeme s „druhým kolem“. Rozdíl v tomto případě je, že nemusíme svolávat další volby, protože data už máme – stačí jen hlasy pro vyřazenou stranu započíst jako hlasy pro stranu, která je uvedena jako „druhá volba“, a vyhodnotit výsledek.

Systém v tomto stavu už je použitelný, například v prezidentských volbách atp., kde se volí pouze jeden kandidát. Pro volby, kde je potřeba poměrové rozdělení zástupců podle obyvatelstva, se ještě musí přikročit k jedné modifikaci: volební okrsky tak, jak jsme je měli, sloučíme po trojicích[14]. Nyní si každý celek

[14] Může to být i jiný počet než tři, ale hezky se to na třech ukazuje

bude volit celkem tři zástupce.

Volby proběhnou stejným způsobem: voliči očíslují kandidáty podle svých preferencí (ani není nutné očíslovat úplně všechny kandidáty).

Poté je určena kvóta, kolik hlasů musí kandidát dostat, aby byl zvolen; o tom si více povíme později, pro teď se pouze shodneme na tom, že jeden ze tří kandidátů bude nutně zvolen, pokud dostane třetinu hlasů.

Poté každému kandidátovi přidělíme tolik hlasů, kolik voličů jej zaškrtlo jako svou první volbu. Pokud tímto nějaký kandidát získá třetinu všech hlasů, tak jej ihned označíme za zvoleného. Veškeré hlasy, které kandidát získal „navíc“ (tj. nad rámec všech hlasů) jsou poté přerozděleny (v poměru podle všech hlasů, které kandidát obdržel) podle jejich další volby (tj. nejvýše hodnoceného kandidáta, který ještě nebyl zvolen nebo vyřazen). Pokud tedy kandidát A získal 41 % hlasů (a stačilo mu 33 %), přičemž polovina uvedla jako druhou volbu kandidáta B a druhá polovina kandidáta C, získá B i C každý 4 % navíc. Toto je provedeno naráz pro všechny kandidáty, kteří získali více hlasů, než je kvóta. Pokud nastane situace, kdy žádný kandidát nedosáhne na kvótu, kandidát s nejmenším počtem hlasů je vyřazen a jeho hlasy jsou přerozděleny. Tento postup se opakuje, dokud nejsou zaplněna všechna křesla.

Nyní se ale vraťme k určení kvóty, tedy počtu hlasů, které musí kandidát získat. Metoda, kterou jsme k tomu použili, se nazývá Hare quota a vypočítá se podle následujícího vzorce[15]:

$$\left\lfloor \frac{\text{odevzdané hlasy}}{\text{počet volených zástupců}} \right\rfloor$$

Tento druh kvóty má ovšem nevýhodu – strany, jejichž kandidáti získali většinu hlasů, totiž ve výsledku nemusejí získat většinu křesel. Proto se ve světě častěji používá tzv. Droop quota, která se vypočítá jako:

$$\left\lfloor \frac{\text{odevzdané hlasy}}{\text{počet volených zástupců} + 1} + 1 \right\rfloor$$

Slovně přitom Droop quota můžeme definovat jako „minimální počet hlasů, který musí kandidát obdržet, aby byl jistě zvolen“: například pro 3 volené zástupce je jasné, že nemůže nastat situace, kdy by 4 různí kandidáti měli každý více než 25 % hlasů.

Nevýhodou Droop quota je, že lehce favorizuje větší strany: je to kvůli přičtení jedničky k potřebnému počtu hlasů. Odstranění přičtení jedničky ze vzorce by sice tuto chybu napravilo, ale poměrně vzácně by poté mohla nastat situace, že na kvótu najednou dosáhne více kandidátů, než je počet křesel[16]. I přes tuto limitaci se však tato kvóta v historii používala; případné remízy se řešily losem.

Pro názornost si tedy předveďme, jak by vypadalo sčítání hlasů v Popcornii, v jistém nejmenovaném jihovýchodním okrsku. Kandidují tři politické strany:

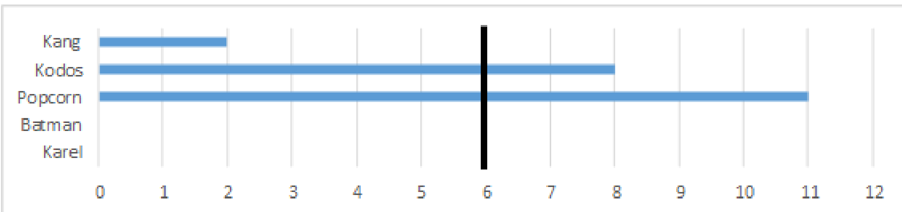
[15] Tento druh závorek značí zaokrouhlení dolů.

[16] Například pro náš případ by to znamenalo 4 kandidáty, každý s přesně 25 % hlasů.

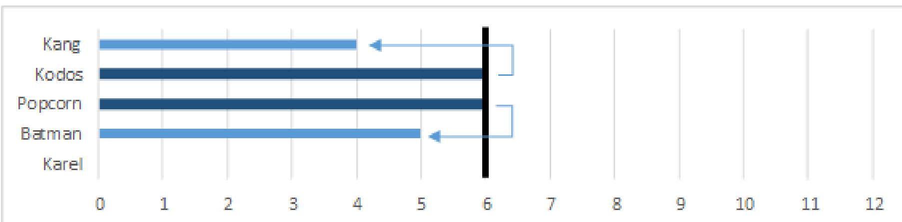
strana Zelených (Kang a Kodos), Modrých (Popcorn) a Černých (Batman a Karel).

Sešly se nám následující hlasy:

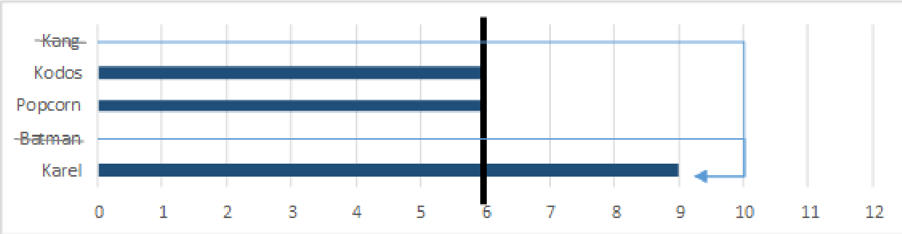
Droop quota pro tyto volby vychází 6. Po prvním sečtení vyjdou hlasy takto:



Popcorn i Kodos jsou ihned zvoleni; přebytečné hlasy Popcorna jdou dle hlasovacích lístků k Batmanovi, hlasy pro Kodos jdou ke Kangovi:



Nyní nastává situace, kdy nemůže být žádný kandidát zvolen, je tedy provedena eliminace kandidáta s nejméně hlasy. Tím je nebohý Kang a všechny hlasy pro něj se přesunou k další volbě: tou je podle hlasovacích lístků Karel. To stále nevyřešilo situaci, takže je eliminován i Batman a i jeho hlasy jsou přesunuty ke Karlovi. Karel tedy získá celkem 9 hlasů a poslední křeslo připadne jemu.



Všimněme si, že ve volbách získal křeslo i Karel, i když byl u všech uveden až jako třetí volba. Tedy došlo ke konsenzu: voliči se na Karlovi „shodli“.
Pokud by stejná volba probíhala např. pomocí D'Hondtovy metody, voliči by museli taktizovat a výsledky voleb by mohly skončit zcela jinak. Pokud se tento systém aplikuje na celou zemi, zvolení lokální zástupci z každého okrsku vytvoří parlament, který je mnohem reprezentativnější než při volbě většinovým systémem.

Závěr

Ukázali jsme si, jak funguje (či nefunguje) většinový volební systém, jak se dá měřit proporcionalita voleb a jak učinit volby proporcionálními, i když volíme lokální zástupce. Všechny uvedené systémy se v současné době někde ve světě používají; jak ty dobré, tak ty špatné. Bohužel, u speciálních volebních systémů je vyžadován jiný typ hlasovacích lístků, a proto je nemůžeme zkusit „zpětně“ aplikovat na historická data jiných volebních systémů.
A obyvatelé Popcornie žili šťastně v míru a pokoji.

Zdroje a doporučená „literatura“

1. Seriál *Adam Ruins Everything*, díl 01x07 – Voting : Adam Conover z College Humor s dávkou nadsázky vysvětluje problémy s volebním systémem USA.

2. Hra *The Redistricting Game* vás nechá si vyzkoušet Gerrymandering na vlastní kůži: `http://redistrictinggame.org/game.php`

3. Kanál na YouTube *C. G. P. Grey*, který smysluplně vysvětluje různé politické systémy a problémy: `https://www.youtube.com/user/CGPGrey`

4. *Vox – Gerrymandering*:
   `http://www.vox.com/cards/gerrymandering-explained`

5. Následující stránky na Wikipedii:
   `https://en.wikipedia.org/wiki/United_Kingdom_general_election,_2015`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Gallagher_Index`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/First-past-the-post_voting`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Mixed-member_proportional_representation`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Single_transferable_vote`

```
https://en.wikipedia.org/wiki/Cow_tipping
https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_the_Hare_and_Droop_quotas
```

Téma 4 – Komprese mapových dat

K tématu dorazil jeden příspěvek od Doc.$^{\mathsf{MM}}$Petra Šimůnka. Ten rozšiřuje svůj předchozí příspěvek a zabývá se dělením mapy na sektory.

Jethro

Dělení mapy na sektory (10b)

Doc.^{MM}Petr Šimůnek

Připomeneme si, jak jsem v minulém čísle navrhoval sektor:

```
// sektor
y_sector_1; x_sector_1; m;
id_1; y_1-y_sector_1; x_1-x_sector_1;
id_2; y_2-y_sector_1; x_2-x_sector_1;
id_m; y_m-y_sector_1; x_m-x_sector_1;
```

Souřadnice y_{sector_1} zabírají nějaké bity n_y, x_{sector_1} pak nějaké n_x, podle mě je nejlogičtější, aby se dělily stejně (*Pozn. redakce: Je to opravdu nejlogičtější? Umíte najít příklad, kde to výhodné nebude?*), tudíž $n_y = n_x$. A nakonec m (počet souřadnic) bude mít nějakou velikost. Díky tomu, že počet souřadnic je uveden, tak nepotřebujeme žádný symbol end_{sector}. Pokud bychom například dělili sektory podle prvních 6 bitů, tak každou souřadnici uvnitř sektoru zmenšíme o 6 bitů, (max je 36 bitů, pokud jedeme do 360° (*Pozn. redakce: Proč zrovna 36 bitů?*)), takže v tomto případě by zbylo 30 bitů na souřadnici uvnitř sektoru. Pokud se podíváme na data, tak vidíme, že v jednom sektoru by bylo mnoho čísel a každé by se zmenšilo o 6 bitů, což opravdu stojí za zmínku, jelikož informace o sektoru jsou oproti tomu zanedbatelné.

A toto mě přivedlo na novou myšlenku, a to, že by bylo možná lepší rozdělit mapu na sektory a ty na podsektory a ty opět na podsektory a takto třeba 5× nebo 6×. Navíc nebude potřeba na začátku každého podsektoru psát absolutní souřadnice, ale pouze nějaké relativní oproti počátku sektoru.

Napadlo mě, že by nejprve mohly mít rozděleny y-ové souřadnice a poté by byly rozděleny x-ové souřadnice, že by zde byl řádek mapy, pak další atd. Takto by ale data ztrácela lokální dekomprimovatelnost, jelikož bychom vždy museli přečíst několik řádků celé mapy, abychom dostali jen malý úsek z nich. (*Pozn. redakce: Nešlo by toto nějak opravit?*) Proto bude lepší rozdělit mapu na sektory, postupně udávat jejich výčet a poté tyto sektory rozdělit na podsektory a opět udělat výčet a tak dále…

Struktura sektoru na každé úrovni kromě poslední bude následující:

```
y_sector_i; x_sector_i; pocet_bodu_v_sektoru
hlavicka prvniho podsektoru
```

Struktura sektoru na poslední úrovni bude shodná s původní strukturou uvedenou na začátku příspěvku. Celý soubor tedy bude vypadat následujícím způsobem:

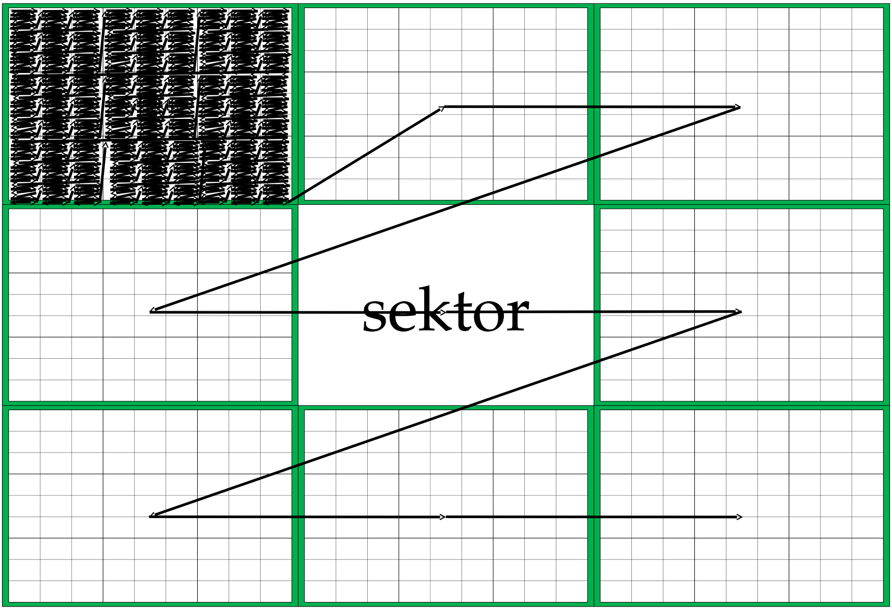
```
1. sektor
1. podsektor 1. sektoru
1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
1. podpodpodsektor 1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
1. bod podpodpodsektoru
2. bod podpodpodsektoru
3. bod podpodpodsektoru
... (dalsi body podpodpodsektoru)
2. podpodpodsektor 1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
... (body podpodpodsektoru)
... (dalsi podpodpodsektory)
2. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
... (podpodpodsektory)
2. podsektor 1. sektoru
... (podpodsektory)
2.sektor
... (podsektory)
... (dalsi sektory)
```

Vznikne nám taková stromová struktura. Nyní si potřebujeme nějak určit, jaká bude nejlepší velikost pro sektory.

Uveďme si příklad: řekněme, že pracujeme na nějaké podrobné mapě, takže ať uděláme sektory jakkoliv, tak vždy se v nich budou vyskytovat nějaké body. Nechť bude číslo podsektoru určeno 3 bity každé souřadnice (např. 20. až 22. bit, což je $(2^3)^2$ podsektorů). Na začátku budou souřadnice sektoru[17] a počet bodů sektoru m nebo počet podsektorů. Dále nám přibudou jednotlivé podsektory. Ty budou mít 2×3 bity navíc a k tomu ještě nějaké bity na počet bodů. Toto může záležet na úrovni, ale bitů nebude řádově víc než 20. To bychom měli bity, které budeme mít navíc, naopak ale všechny body v podúrovních budou o 3 bity menší. A tato ušetřená velikost bude v našem příkladu $3m$. Což bude výrazně víc, než kolik přidají data kódující podúrovně.

Efektivita ale bude klesat s počtem podsektorů. Pokud bychom třeba kódovali pouze město Brno, nebo mapu Pražského hradu, tak by bylo nejvýhodnější nejprve rozdělit mapu na malé sektory a poté udat souřadnice pouze toho sektoru, kde se něco nachází, tím by nám velice krátkým kódem vypadla třeba až polovina

[17] Může se jednat rovněž i o podsektor a souřadnice budou relativní oproti začátku onoho sektoru, ale pro zjednodušení nám to stačí takto.



Obrázek 5: Rekurzivní rozdělení mapy na sektory a podsektory

všech dat, poté bychom opět aplikovali výše uvedené rozsektorování, dokud by se to ještě vyplatilo.

Nevýhodné se stane rozdělování pokud by už další podsektory byly malé a obsahovaly málo bodů, jelikož poté by už kód pro podsektor zabíral více místa, než pokud bychom body jen vypsali.

Příloha

K příloze (`http://ulozto.cz/x6iVCRQp/preview-22-00-04-04-xlsx`). Jsou zde 4 listy: „Zpracování“, „Mapa“, „Pořadí dat“ a „Test výpočtu“.

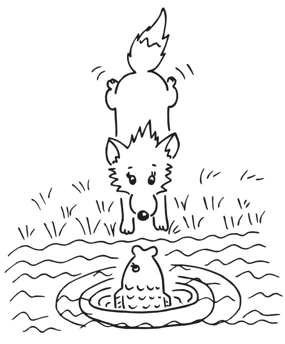
- „Zpracování“ obsahuje několik testovacích souřadnic a ty jsou postupně převedeny na čísla a nakonec podle nastavení rozsekány na podsektory, celý proces je podrobněji popsaný tam.
- „Mapa“ je pouze vizualizací mapy s dělením 3, 3, 3, 5.
- „Pořadí dat“ ukazuje, v jakém pořadí jsou body z mapy zapsány do souboru.
- „Test výpočtu“ obsahuje 1000 náhodně vygenerovaných čísel, které zařazujeme do sektorů. Jedná se o zjednodušení, jelikož zde máme pouze čísla od 0 do 2^x (x si můžeme zvolit od 2 do 18) na pouze jedné ose. Celý problém

je i jinak výrazně zjednodušen (pouze sektory, žádné podsektory, ...), ale můžeme si zde spočítat, o kolik se liší různé varianty velikostně. Jedná se pouze o náhodně generovaná čísla (1000 čísel se náhodně vygeneruje, poté se odstraní ta, která se opakují).

Poznámka na závěr

Sektory mají tu výhodu, že pokud se pohybujeme uprostřed nějakých velkých sektorů, tak jsou data krásně lokálně dekomprimovatelná. Pokud se však pohybujeme na přechodech velkých sektorů (třeba pokud bychom měli rozdělenou ČR na 2 sektory a my byli na oné hranici), tak by 2 sousední body od sebe mohly být vzdáleny i statisíce řádků dat a je otázka, jestli by to vůbec zvládala paměť. Je otázka, jestli bychom nechtěli udělat něco takového, že některé body by se tu třeba vyskytovaly i víckrát a sektory se překrývaly, ale toto opět záleží na naších preferencích, hardwaru a implementaci. (*Pozn. redakce: potřeba paralelně číst z několika málo míst obvykle není problém, ale je dobré na tento problém poukázat.*)

Téma 5 – Rozpustilá rozpustnost



K tématu zatím přišly příspěvky experimentálně zkoumající vliv teploty a míchání na rozpustnost vybraných kuchyňských látek a léků. Hlavní faktory ovlivňující rozpustnost látek byly diskutovány též teoreticky. Volba správného rozpouštědla pak byla experimentálně ověřována na gumových medvídcích. Stále však zůstává mnoho nezodpovězených otázek, a tak i mnoho prostoru pro další experimenty a teoretické úvahy. Můžete se zaměřit třeba na nasycené roztoky a změnu jejich vlastností oproti samotnému rozpouštědlu. Jak se např. změní vodivost, pH, bod varu, hustota či viskozita vody ve srovnání s nasyceným roztokem cukru? S rozpuštěním se však nesetkáváme jen v kuchyni, ale také v přírodě kolem nás a také v samotném lidském organismu. Máte představu, co všechno ovlivňuje rozpustnost kyslíku a oxidu uhličitého v krvi? A jak je možné, že se jedním a tímtéž rozpouštědlem (krví) transportují různě polární látky (např. sacharidy i lipidy)? V čem byste rozpouštěli ulitu hlemýždě a v čem mravence či mouchu?

Peťa

Konference Seleška 2015

Šachové diagramy (10 b)

Bc.[MM]*Lenka Kopfová, Mgr.*[MM]*Zuzana Svobodová, Dr.*[MM]*Jan Václavek*

Úvodem

V tomto článku se budeme zabývat šachovými partiemi, nikoli však z běžného šachového hlediska. Rozebereme netradiční šachové situace a pokusíme se o takzvanou zpětnou analýzu, například určit několik posledních tahů či zda mohla být provedena rošáda. Řešení se nebudeme snažit dosáhnout vyhodnocením všech možností, ale povšimnutím si nějaké atypičnosti či použitím nějakého triku. K pochopení článku je nezbytná znalost pohybu šachových figur, o které se dočtete v následujícím odstavci.

Základní tahy figur, šach a mat

Král chodí pouze o jedno políčko (výjimkou je rošáda, o ní více dále) a to v kterémkoli směru, nesmí však vstoupit na pole ohrožované soupeřovou figurou.

Pěšec může jít ze základní pozice o jedno nebo dvě políčka dopředu, každý další pohyb je vždy pouze o jedno políčko, a to buď ve směru dopředu, je-li před ním volné pole, popřípadě šikmo dopředu, když bere figuru soupeře. Když pěšec dojde na poslední pole šachovnice, přemění se v koně, střelce, věž nebo dámu podle přání svého hráče.

Dáma se pohybuje po sloupci, řadě nebo diagonále o libovolný počet polí, nemůže přeskočit figuru.

Střelec se pohybuje pouze po diagonále, nemůže přeskočit figuru.

Jezdec se pohybuje do L, to znamená, že jeho pohyb se skládá z pohybu o dvě pole po sloupci nebo řadě, na kterých stojí, a následně z pohybu o jedno pole ve směru kolmo na předchozí pohyb. Na polích mezi jeho výchozí a konečnou pozicí může stát figura či figury.

Věž se pohybuje ve sloupci nebo v řadě o libovolný počet polí, nemůže přeskočit figuru.

Šach nastává tehdy, je-li pole, na kterém stojí král, ohroženo soupeřovou figurou, to znamená, že v příštím tahu může tato figura vstoupit na královo pole.

Mat nastane tehdy, nemůže-li hráč zlikvidovat svým nejbližším tahem ohrožení svého krále a král zůstane dál v šachu.

Rošáda

Pohyb, při kterém se zároveň pohybuje král a věž. Král se posune o dvě pole ve směru k libovolné z věží a tato věž následně krále přeskočí a postaví se na jeho sousední pole ve stejné řadě. Zároveň musí platit, že králem ani věží nebylo dosud taženo, není mezi nimi žádná figura a král nesmí začínat pohyb z šachu ani při rošádě nesmí přejít přes pole ohrožené nepřátelskou figurou.

Braní mimochodem

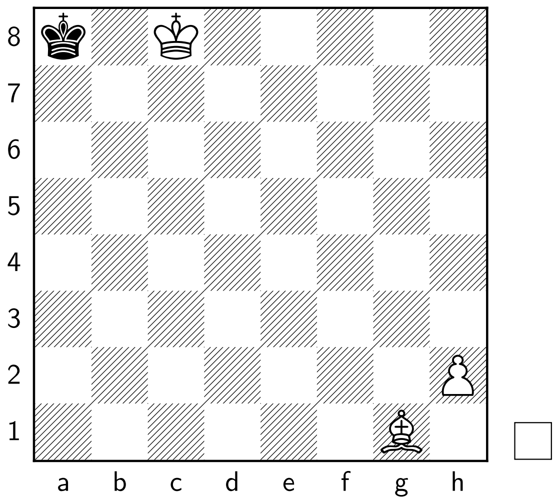
Pokud se pěšec hráče 1 posune ze základní pozice o dvě pole, může ho hráč 2 v bezprostředně následujícím tahu sebrat svým pěšcem, jako kdyby se pěšec hráče 1 posunul místo o dvě pouze o jedno pole. (Pěšec hráče 2 musí být v takové pozici, aby mohl brát soupeřova pěšce, kdyby se býval posunul pouze o zmíněné jedno pole.)

Monochromatické šachy

Specifickou variantou šachů jsou tzv. monochromatické šachy. Jedná se o hru v šachy, kde se figury pohybují pouze po barvě, na které stojí v úvodním rozestavení (například pěšcem je tedy možné táhnout pouze o dva na začátku a také vyhazováním jiných figur).

Příklady

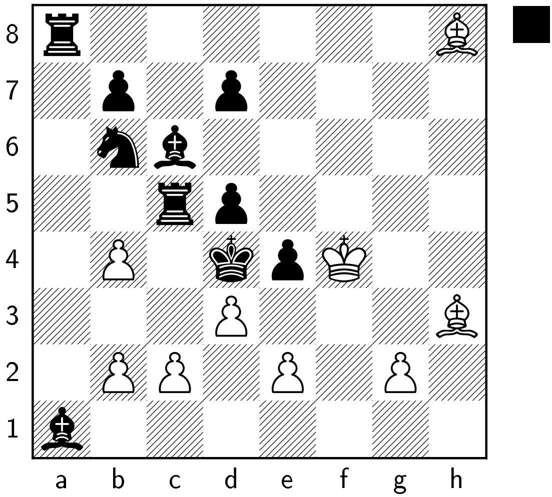
Bílý je na tahu. Jaký byl jeho poslední tah (při tomto otočení šachovnice bílý musel začínat dole)?



Řešení:
Poslední tah hrál černý, musel tedy táhnout svou jedinou figurkou – králem. Na jeho nynější pozici se tak mohl dostat pouze z políček a7, b7 nebo b8. Z políček b7, b8 však nemohl táhnout, protože by tak oba králové museli stát vedle sebe, což nelze. Černý tedy ve svém posledním tahu musel hrát králem z políčka a7

na a8. Na této pozici ho ale ohrožuje bílý střelec na g1. Jak k tomuto šachu mohlo dojít? – bílý ve svém předchozím tahu nemohl šachovat tahem střelce na g1 – černý král by tak musel být v ohrožení už dříve. Muselo tedy jít o odtažný šach (hráč šachuje soupeřova krále nikoliv figurkou, kterou právě zahrál, ale tou, která byla skryta za ní). Ale ani jednou bílou figurou na šachovnici tohoto nešlo dosáhnout. Jediná zbývající možnost je, že bílý měl ještě jednu figurku, kterou mu následně černý král sebral na poli a8 a tzv. po něm zametl stopy. A vzhledem k tomu, že tato figurka musela tahem na a8 dát odtažný šach, mohlo se jednat pouze o jezdce. Poslední tah bílého tak musel být jezdcem z b6 na a8. (Na závěr ještě poznamenejme, že pokud by bílý začínal nahoře, k výše zmíněnému šachu by mohlo dojít i tahem bílého pěšce z g2 na g1 a přeměnou na střelce.)

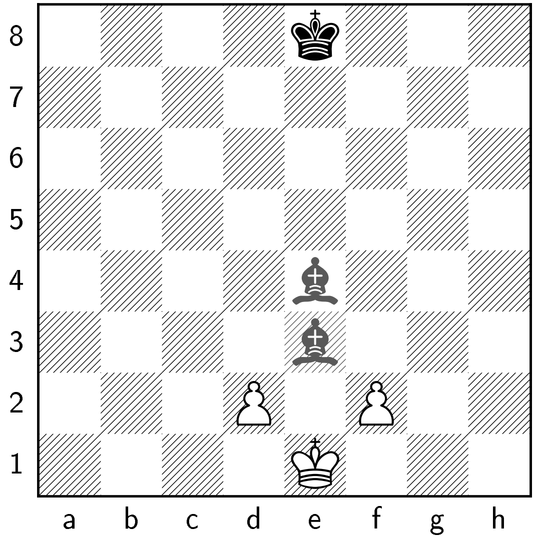
Jaká je orientace šachovnice (pokud uvažujeme všechna čtyři možná otočení)? A kolik minimálně figur bylo přeměněno? (Úloha naší vlastní výroby!). Pozn. očíslování šachovnice na obrázku nemusí odpovídat skutečné orientaci šachovnice.



Řešení:
Střelec na h8 šachuje černého krále na d4, černý hráč je tudíž na tahu. Bílý tedy ve svém posledním tahu musel dát šach, zřejmě ho ale nemohl dát tahem střelce na h8. Také se nemohlo jednat o odtažný šach, protože bílý na šachovnici nemá figuru, kterou by toho mohl dosáhnout. Zbývá poslední možnost a to, že poslední tah bílého byla přeměna pěšce na střelce (buď z h7 nebo z g8). Bílý tak musel začínat buď vlevo nebo dole. Rozeberme nejdříve případ, kdy by bílý začínal vlevo. Podívejme se na rozestavění bílých pěšců. Mohli se do této pozice dostat? Na začátku je každý pěšec v jednom řádku, na to, aby se mohl přesunout do řádku jiného, potřebuje nutně vyhodit některou černou figurku. Nejnižší možný počet přesunů bílých pěšců, při kterých se mohli dostat do dané pozice, je z obrázku devět. Na šachovnici však zbývá ještě devět černých figur, takže tato pozice není dosažitelná a bílý musel začínat dole. Nyní se podívejme na druhou část úlohy. Víme, že minimálně střelec na h8 je přeměněný. Dále pak střelec na a1 se sem nemohl dostat jinak než přeměnou (pěšec na b2 je v počáteční pozici). Všimněme

si také bílého střelce na h3. Jeho počáteční pozice je f1 a z této pozice se neměl jak dostat do zbytku hracího pole, protože pěšci na e2 a g2 jsou v původním postavení; musí být tedy také přeměněný. A ze stejného důvodu pak i černý střelec na c6, jehož počáteční pozice je c8. O ostatních figurkách už s jistotou neumíme zjistit, zda byly v průběhu partie přeměněny. Ale určitě musely být přeměněny alespoň čtyři figurky.

Monochromatická úloha: černý střelec je buď na e3 nebo e4. Na které z těchto pozic musí skutečně být?



Řešení:
Při monochromatických partiích se každá figurka může pohybovat pouze po políčcích, jež mají stejnou barvu jako to, na kterém začínala. Přímým důsledkem tohoto je, že v libovolné situaci monochromatické partie musí být vždy alespoň jedna figurka na černém poli a alespoň jedna na poli bílém (všechny ty vyhozené musely být sebrány figurkou pohybují se pouze po stejné barvě polí jako ony, tedy vždy musí zbýt alespoň jedna figura dané barvy, která vyhodila ty ostatní). Ve výše ukázané úloze jsou na černých políčkách dva pěšci a král, z jejich postavení ale plyne, že se od začátku hry nepohnuli ze svých startovních pozic. Tyto figurky tak nemohou být těmi, které vyhodily některé ostatní, pohybující se po černých polích, a proto černý střelec musí stát na černém poli, tedy na e3.

A co dál?

Šachový diagram? Udělej si sám!

Jak si vytvořit vlastní šachovou úlohu? Jednoduše, například uplatněním kombinace následujících triků:

1. Použití netradičních situací jako je braní mimochodem či rošáda.

2. Dvojitý šach.

3. Různé možnosti ohrožení krále – šach může nastat dvěma způsoby:

   (a) Hráč zaujme figurou novou pozici a z této pozice ohrožuje soupeřova krále.

   (b) Hráč přesune figuru a tím dá prostor tomu, aby jiná jeho figura ohrožovala soupeřova krále (tzv. odtažný šach).

4. Střelec stojí v základní pozici. V druhé řadě šachovnice jsou v diagonálním směru od střelce pěšci rovněž v základní pozici. Máme jistotu, že střelec se za celou hru nepohnul, protože neměl kudy opustit základní pozici.

Kde se dozvím víc?

Zaujalo-li vás toto téma, další úlohy a nápady je možno najít například na těchto stránkách:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Retrograde_analysis`

`http://www.mathpuzzle.com/retrograde.html`

popřípadě v této literatuře:

The Chess Mysteries of Sherlock Holmes, Raymond M. Smullyan

The Chess Mysteries of the Arabian Knights, Raymond M. Smullyan

Poděkování

Děkujeme Vaškovi Rozhoňovi, který vedl naši práci v rámci soustředění M&M.

Reference

- `http://www.mathpuzzle.com/retrograde.html`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Retrograde_analysis`
- `http://www.chess.cz/www/mladez/metodika/zakladni-sachovy-vycvik/2_lekce.html`
- `http://www.filiphofer.com/cs/sachy-pravidla/`
- `https://cs.wikipedia.org/wiki/Braní_mimochodem`
- *Konfera Šachové diagramy, soustředění M&M*

Seriál: Zákony zachování

V minulém díle jsme se zabývali spinem. Za úkol jste měli vyřešit složení dvou spinů 1. Rozděleno do podúkolů:

- Najdi vlastní čísla a vlastní vektory operátorů (s_z). (1b)
- Napiš posunovací operátory pro spin 1. (1b)
- Najdi bázi vektorového prostoru, pro kterou budou mít matice operátoru kvazidiagonální tvar a popiš, co je výsledkem. (1,5b)
- Ukaž, že matice alespoň dvou operátorů jsou v této bázi skutečně kvazidiagonální. (1,5b)

Řešení:
V minulém díle jsme prozradili podobu operátorů průmětu spinu pro spin 1:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nejprve vlastní čísla operátoru $\hat{S}_z$:

$$\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = s_n\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hbar - s_n & 0 & 0 \\ 0 & -s_n & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar - s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

Sestavíme sekulární rovnici problému.

$$\det\begin{pmatrix} \hbar - s_n & 0 & 0 \\ 0 & -s_n & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar - s_n \end{pmatrix} = s_n(\hbar^2 - s_n^2) = 0$$

Vidíme, že její řešení jsou $s_n \in \{-\hbar, 0, \hbar\}$. Teď dosadíme za s_n do sekulární rovnice a najdeme vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar & 0 \\ 0 & 0 & -2\hbar - s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hbar v \\ -2\hbar w \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \uparrow$$

$$\begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar u \\ 0 \\ -\hbar w \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \hat{s}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\hbar & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\hbar u \\ -\hbar v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \hat{s}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \downarrow$$

Výsledné bázové vektory prostoru spinových stavů jsme si označili šipkami, jako pro spin 1/2. Prostřední průmět spinu jsme označili vodorovnou šipkou, aby se při aplikaci posunovacích operátorů nepletl s nulou, která značí neexistující stav. Napíšeme si posunovací operátory.

$$\sigma_+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sigma_- = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} - i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Planckovu konstantu budeme v řešení vynechávat. Dál ověříme, že posunovací operátory dělají, co mají.

$$\sigma_+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\,, \quad \sigma_+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \sigma_+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \sigma_-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \sigma_-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Pomocí posunovacích operátorů už můžeme sestavit novou bázi prostoru spinových stavů dvou částic se spinem 1. Začneme nejvyšším spinovým stavem $|\uparrow\uparrow\rangle$.

$$\begin{aligned}
\sigma_-|\uparrow\uparrow\rangle &= \sigma_-^1\hat{1}^2|\uparrow\uparrow\rangle + \hat{1}^1\sigma_-^2|\uparrow\uparrow\rangle = \\
&= |\rightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\rightarrow\rangle \\
\sigma_-\left(|\rightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\rightarrow\rangle\right) &= |\downarrow\uparrow\rangle + |\rightarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle = \\
&= |\downarrow\uparrow\rangle + 2|\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \\
\sigma_-\left(|\downarrow\uparrow\rangle + 2|\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right) &= 0 + |\downarrow\rightarrow\rangle + 2|\downarrow\rightarrow\rangle + 2|\rightarrow\downarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle + 0 = \\
&= 3\left(|\downarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle\right) \\
\sigma_-\left(|\downarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle\right) &= 0 + |\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle + 0 \Rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle \\
\sigma_-|\downarrow\downarrow\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Získali jsme kvintuplet. Teď najdeme nejvyšší stav, který ještě nemáme popsaný, a to tak, že zkusíme přeskládat druhý stav z kvintupletu: $|\rightarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\rightarrow\rangle$. Skutečně je kolmý na všechny vektory kvintupletu. Aplikováním operátoru σ_+ ověříme, že je to skutečně vrchní stav nějakého multipletu.

$$\sigma_+\left(|\rightarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\rightarrow\rangle\right) = |\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle = 0$$

A multiplet dotvoříme posunováním tohoto stavu dolů.

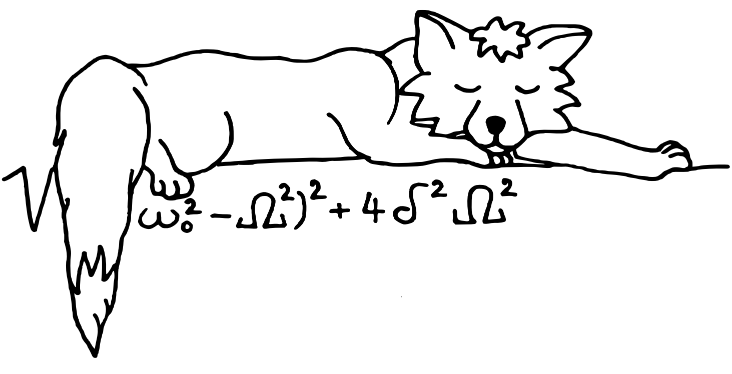
$$\begin{aligned}
\sigma_-\left(|{\rightarrow}{\uparrow}\rangle - |{\uparrow}{\rightarrow}\rangle\right) &= |{\downarrow}{\uparrow}\rangle + |{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle - |{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle - |{\uparrow}{\downarrow}\rangle = |{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\uparrow}{\downarrow}\rangle \\
\sigma_-\left(|{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\uparrow}{\downarrow}\rangle\right) &= 0 + |{\downarrow}{\rightarrow}\rangle - |{\downarrow}{\rightarrow}\rangle - 0 = |{\downarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle \\
\sigma_-\left(|{\downarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle\right) &= 0 + |{\downarrow}{\downarrow}\rangle - |{\downarrow}{\downarrow}\rangle - 0 = 0
\end{aligned}$$

Dalším multipletem je tedy triplet. Stále nám jeden stav chybí. Podle naší kuchařky můžeme chybějící stav zkusit natipovat, ale tentokrát to není tak intuitivní. Pokud se to někomu povedlo, gratuluji, já jsem musela obecně hledat poslední stav, který je na všechny ostatní kolmý. Napíšeme skalární součiny se všemi dosud nalezenými bázovými vektory v původní bázi ($a|{\uparrow}{\uparrow}\rangle$, $b|{\uparrow}{\rightarrow}\rangle$, $c|{\uparrow}{\downarrow}\rangle$, $d|{\rightarrow}{\uparrow}\rangle$, $e|{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle$, $f|{\rightarrow}{\downarrow}\rangle$, $g|{\downarrow}{\uparrow}\rangle$, $h|{\downarrow}{\rightarrow}\rangle$, $i|{\downarrow}{\downarrow}\rangle$) a položíme je rovné nule. Odtud nám vyjdou koeficienty pro jednotlivé kombinace spinu.

$$\begin{aligned}
|{\uparrow}{\uparrow}\rangle \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & a &= 0 \\
\left(|{\rightarrow}{\uparrow}\rangle + |{\uparrow}{\rightarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & b + d &= 0 \\
\left(|{\downarrow}{\uparrow}\rangle + 2|{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\uparrow}{\downarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & c + 2d + g &= 0 \\
\left(|{\downarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & f + h &= 0 \\
\left(|{\rightarrow}{\uparrow}\rangle - |{\uparrow}{\rightarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & b - d &= 0 \\
\left(|{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\uparrow}{\downarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & c - g &= 0 \\
\left(|{\downarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle\right) \cdot (a,b,c,d,e,f,g,h,i) &= & h - f &= 0
\end{aligned}$$

Výsledkem je vektor $|{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\uparrow}{\downarrow}\rangle$. Pomocí posunovacích operátorů ukážeme, že je opravdu koncem i začátkem singletu.

$$\begin{aligned}
\sigma_+\left(|{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\uparrow}{\downarrow}\rangle\right) &= |{\rightarrow}{\uparrow}\rangle + 0 - |{\uparrow}{\rightarrow}\rangle - |{\rightarrow}{\uparrow}\rangle + 0 + |{\uparrow}{\rightarrow}\rangle = 0 \\
\sigma_-\left(|{\downarrow}{\uparrow}\rangle - |{\rightarrow}{\rightarrow}\rangle + |{\uparrow}{\downarrow}\rangle\right) &= 0 + |{\downarrow}{\rightarrow}\rangle - |{\downarrow}{\rightarrow}\rangle - |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle + 0 + |{\rightarrow}{\downarrow}\rangle + 0 = 0
\end{aligned}$$



Na závěr si ukážeme matice některých operátorů v této bázi. Posunovací operátory jsou jednodušší, tam už máme výsledek rozepsaný výše.

$$\sigma_{2+}\begin{pmatrix} |{\uparrow\uparrow}\rangle \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle + 2|{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\downarrow}\rangle \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle - |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |{\uparrow\uparrow}\rangle \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle + 2|{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ 0 \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{2-}\begin{pmatrix} |{\uparrow\uparrow}\rangle \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle + 2|{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\downarrow}\rangle \\ |{\rightarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle - |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |{\rightarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\rightarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle + 2|{\rightarrow\rightarrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\rightarrow}\rangle + |{\rightarrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\downarrow}\rangle \\ 0 \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{2+} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{2-} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Tím bychom měli zadání splněné. Ale ukážeme si ještě působení operátoru $\hat{S}_z$ pro dva elektrony – σ_{2z}.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}$$

Matice σ_z se tedy chová tak, že spin nahoru nezmění, nulový průmět spinu (námi značený šipkou doprava) vynuluje a u spinu dolů změní znaménko.

$$\sigma_{2z}\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\rightarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle + 2|\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\rightarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rightarrow\rangle - |\rightarrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle - |\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \left(\sigma_z^1 1^2 + 1^1\sigma_z^2\right)\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\rightarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle + 2|\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\rightarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rightarrow\rangle - |\rightarrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle - |\rightarrow\rightarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ 0 + |\uparrow\rightarrow\rangle \\ -|\downarrow\uparrow\rangle + 0 + |\uparrow\downarrow\rangle \\ -|\downarrow\rightarrow\rangle + 0 \\ -|\downarrow\downarrow\rangle \\ 0 - |\uparrow\rightarrow\rangle \\ -|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \\ -|\downarrow\rightarrow\rangle - 0 \\ -|\downarrow\uparrow\rangle - 0 + |\uparrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle + 0 \\ |\downarrow\uparrow\rangle + 0 - |\uparrow\downarrow\rangle \\ 0 - |\rightarrow\downarrow\rangle \\ -|\downarrow\downarrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle - 0 \\ |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \\ 0 + |\rightarrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle - 0 - |\uparrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2|\uparrow\uparrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\rightarrow\rangle \\ 0 \\ -|\downarrow\rightarrow\rangle - |\rightarrow\downarrow\rangle \\ -2|\downarrow\downarrow\rangle \\ |\rightarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\rightarrow\rangle \\ 0 \\ -|\downarrow\rightarrow\rangle + |\rightarrow\downarrow\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorém Noetherové

Nejprve si ukážeme, že aplikace transformace na stavový vektor i na operátory je skutečně v pořádku.

Mějme nějakou grupu G transformací, které například převádějí různé soustavy souřadnic mezi sebou, takže různá otočení, zrcadlení, posunutí, … Každému jejímu prvku g přísluší operátor $\hat{g}$. Změna souřadnic působí na stavový vektor:

$$g : |\psi\rangle \to |\psi'\rangle, \text{ kde } |\psi'\rangle = \hat{g}|\psi\rangle$$

Změní se i operátory příslušné měřitelným veličinám ($\hat{A}$)? Typicky ano, se starými operátory by nám to ale nefungovalo. Jak to napravit, aby to fungovalo? Podobnostní transformací:

$$\hat{A} \to \hat{A}', \text{ kde } \hat{A}' = \hat{g}\hat{A}\hat{g}^{-1}$$

Mělo by být jedno, jestli nejdřív provedeme měření (působíme na stavový vektor operátorem měřitelné fyzikální veličiny) a pak teprve změníme souřadnou soustavu, nebo naopak.

$$\hat{A}'|\psi'\rangle = \left(\hat{g}\hat{A}\hat{g}^{-1}\right)(\hat{g}|\psi\rangle) = \hat{g}\hat{A}\left(\hat{g}^{-1}\hat{g}\right)|\psi\rangle = \hat{g}\left(\hat{A}|\psi\rangle\right)$$

Pokud se hamiltonián $\hat{H}$, nejdůležitější operátor kvantové mechaniky, transformací g nezmění, říkáme, že je problém vůči transformaci symetrický. To nastává právě tehdy, když operátor transformace $\hat{g}$ s Hamiltoniánem komutuje.

$$\hat{H} = \hat{g}\hat{H}\hat{g}^{-1} \Leftrightarrow \left[\hat{H}, \hat{g}\right] = 0$$

A pokud se Hamiltonián nezmění aplikací žádného prvku grupy G, říkáme, že problém je symetrický vůči celé grupě.

Důsledkem takové symetrie je degenerace řešení Schrödingerovy rovnice: Je-li řešením stavový vektor $|\psi_i\rangle$ příslušný energii E_i, je řešením i $\hat{g}|\psi_i\rangle$ také příslušný energii E_i. Energetická hladina je degenerovaná a pokud známe jeden stav, který k ní přísluší, aplikací grupy dokážeme najít všechny ostatní. Přesně to jsme dělali pomocí posunovacích operátorů na prostoru spinů: Pro dvě částice se spinem 1/2 máme singletní a tripletní stav. Jim přísluší určité energie E_S a E_T a ireducibilní reprezentace spinové grupy, přičemž tripletní stav je degenerovaný. Pomocí posunovacích operátorů jsme pak dokázali z jednoho libovolného stavu v rámci tripletu získat všechny ostatní.

Tahle metoda je naprosto obecná a ke spoustě problémů se dá najít grupa G, která jej více či méně šikovně popisuje. Existuje i přístup, kdy celý Hilbertův prostor (tedy prostor všech možných stavových vektorů systému) považujeme za podprostor příslušný nějaké ireducibilní reprezentaci nějaké opravdu velké grupy $\bar{G}$. Říká se jí *dynamická grupa*. Neví se, jestli obecná dynamická grupa pro kvantovou mechaniku existuje, ale rozhodně existují vědci, kteří ji hledají. Pro některé vybrané systémy ale dynamická grupa existuje. Pracovali jsme s nimi při hledání molekulových vibrací.

Symetrií fyzikálního systému vůči nějaké grupě se budeme zabývat i v tomto díle seriálu. Tento pojem totiž figuruje v jedné z nejdůležitějších vět fyziky, *teorému Noetherové*:

„Je-li daný fyzikální systém symetrický vzhledem k nějaké Lieově grupě o n spojitých parametrech, pak tento systém vykazuje zachování n fyzikálních veličin.“

Tedy zákony zachování ve fyzice souvisí se symetrií.

Dají se najít všelijaké zákony zachování, které platí jenom někde a někdy (jenom v určitých systémech), např. zákon zachování hmotnosti nebo mechanické energie, ale jsou i zákony zachování, které platí naprosto obecně, tedy vždy a všude.

Asi vás napadne, že každý systém by měl být symetrický vůči transformacím soustavy souřadné – a skutečně, z těchto transformací plynou některé velmi známé a důležité zákony zachování. Probereme si je postupně podle druhu.

Homogenita prostoru znamená symetrii fyzikálních zákonů vůči posunutí soustavy souřadné. Ať už jsme doma, ve škole, na Marsu nebo v jiné galaxii, Newtonův gravitační zákon bude všude $F = \varkappa\frac{m_1 m_2}{d^2}$. Proto si můžeme zvolit počátek soustavy souřadné libovolně, fyzikální zákony na absolutních souřadnicích nezávisí. Lieova grupa všech posunutí je v našem třídimenzionálním prostoru taktéž třídimenzionální, takže s homogenitou prostoru souvisí zachování tří fyzikálních veličin nebo jedné vektorové (zachovávají se všechny tři složky vektoru nezávisle). Touto veličinou je *hybnost*.

Izotropie prostoru znamená symetrii fyzikálních zákonů vůči otočení soustavy souřadné. Můžeme si libovolně zvolit směry souřadných os, dokud budou navzájem kolmé a soustava bude pravotočivá[18]. Otáčet také můžeme kolem tří různých os, proto i Lieova grupa otočení je třírozměrná a souvisí s ní zachování vektorové veličiny ve smyslu zachování všech složek vektoru. Tímto vektorem je *moment hybnosti*.

Homogenita času znamená symetrii vůči posunu v čase. Můžeme si libovolně zvolit počátek času. Čas má jenom jednu dimenzi, takže s touto symetrií souvisí zachování skalární veličiny – *celkové energie systému*. Tady zdůrazňuji, že jde o energii celého systému, protože jednotlivé objekty si mohou energii mezi sebou předávat (to i platí o hybnosti a momentu hybnosti). Také je důležité slovo „celková“, tedy nejen energie mechanická, ale i teplo, energie chemických vazeb, energie hmoty ($E = mc^2$) nebo cokoli jiného, co v daném problému může hrát roli.

Běžně předpokládáme, že fyzikální zákony jsou nezávislé na volbě soustavy souřadné i v případě, že přecházíme mezi soustavami pohybujícími se vůči sobě rovnoměrně přímočaře. V klasické fyzice se takovým převodům souřadnic říká *Galileiho transformace*, v relativistické fyzice *Lorenzova transformace*. Zmíněné transformace můžeme shrnout do šestidimenzionální *Lorenzovy grupy*. Doteď platilo, že ke každé dimenzi grupy jsme měli rovnici tvaru $A = konst.$, jejíž platnost se zachovávala. Tady obecně nelze jednoduše ukázat na veličinu, která se má zachovávat. S Lorenzovou grupou souvisí *zachování platnosti pohybových rovnic*. Máme tedy obecně platné rovnice pro přímou i úhlovou rychlost, které ale nejsou tak jednoduché jako $A = konst.$ Kromě speciálního případu,[19] kdy se nemění hmotnost systému. Tehdy se zachovává rychlost těžiště systému. Sjednocení Lorenzovy grupy a homogenity prostoru a času říkáme *Poincarého grupa*.

Důsledkem těchto symetrií je, že fyzikální zákony nemohou záviset na absolutních souřadnicích a čase, jen na relativních. Třeba v Newtonově gravitačním zákoně nemáme souřadnice dvou těles, ale jejich vzájemnou vzdálenost. U všech časových vývojů nepracujeme s časem na hodinách, ale s časem od začátku pokusu, od nějakého známého stavu – místo hodin používáme stopky. Dalším důsledkem je, že Hamiltonián (operátor energie) nesmí explicitně záviset na čase. (Smí ale záviset na veličinách, které se s časem mění.)

Ze zákona zachování fyzikální veličiny A ve tvaru $A = konst.$ plyne *rovnice kontinuity* pro veličinu A. Pokud se někde hustota ϱ veličiny A zvětšila, musela se

[18] Představte si, že v místě, kde stojíte, je počátek kartézské soustavy. Osa x nechť směřuje přímo vpřed, osa y nechť směřuje vlevo a osa z nechť směřuje vzhůru.

[19] Výrazem speciální případ ve fyzice myslíme situace, o kterých předpokládáme něco navíc. Dovoluje nám to využívat různé aproximace. Příkladem je nerelativistická fyzika, která je speciálním případem relativistické fyziky pro situace, kdy se všechna tělesa v systému pohybují výrazně pomaleji než světlo. Není výjimkou, že se setkáváme prakticky jen s tím speciálním případem, takže je vlastně velmi běžný.

také jinde zmenšit a musela se z místa na místo přesunout tokem $\vec{j}$.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\,, \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$\vec{\nabla}$ je vektorový diferenciální operátor zvaný *nabla*. Obvykle se píše bez šipky, pro naše účely je ale lepší zdůraznit jeho vektorový charakter.

Například ze zákona zachování hmotnosti (který platí jenom ve speciálních případech, ale přesto je užitečný) plyne rovnice kontinuity používaná pro kapaliny.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Symetrie časoprostoru už jsme vyčerpali.[20] Různých zachovávajících se veličin je ale ještě mnoho. Další důležitou skupinou symetrií jsou *kalibrační symetrie*. Jsou to symetrie rovnic popisujících fyzikální zákony vůči určitým kalibračním transformacím.

Každou sílu F můžeme zapsat pomocí příslušného potenciálu α a příslušné vlastnosti tělesa a. Kalibrační transformace mění potenciál α způsobem, který nezmění výslednou sílu na dané těleso. Ukážeme si to na elektromagnetické interakci.

Elektrické a magnetické pole můžeme popsat různými veličinami, na střední škole se vetšinou používá intenzita elektrického pole $\vec{E}$ a magnetická indukce $\vec{B}$. Stejně tak můžeme použít elektrickou indukci $\vec{D}$ a intenzitu magnetického pole $\vec{H}$, z předchozích veličin se vypočtou pomocí materiálových konstant – permitivity ε a permeability μ.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\,, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Další možností je použít *elektrostatický potenciál* $\varphi\,(\vec{x})$ a *elektromagnetický potenciál* $\vec{A}\,(\vec{x})$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Teď vytvoříme kalibrační transformaci pomocí libovolně zvolené funkce času a polohy $f\,(\vec{x}, t)$ a transformujeme pomocí ní oba potenciály.

$$\varphi' = \varphi + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t} f\,, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla} f$$

Ukážeme, že takovouto transformací se fyzika systému (intenzita elektrického pole a magnetická indukce) nezmění.

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\varphi + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t} f\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} - \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla} f\right) = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

[20] Čas vůči otočení symetrický není, to vidíme v běžném životě neustále.

V první rovnici se členy s funkcí f navzájem vyruší, ve druhé používáme vektorovou identitu $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} X = 0$. Tvar interakce částic splňuje kalibrační symetrii. Důsledkem kalibrační symetrie elektromagnetického pole je existence fotonu, jakožto částice zprostředkovávající elektromagnetickou interakci.

Podle teorému Noetherové by měly i kalibrační symetrie souviset s nějakými zachovávajícími se veličinami. Pro elektromagnetickou interakci je to *zachování elektrického náboje.*

Podobnou formu kalibrační symetrie mají i další interakce. Pro silnou jadernou interakci plyne z kalibrační symetrie existence *gluonu* a *zákon zachování barvy*[21]. Pro slabou jadernou interakci kalibrační symetrie produkuje slabé intermediální bosony a souvisí s ní *zákon zachování počtu leptonů.* Problém je ale v tom, že kalibrační symetrie slabé interakce produkuje jen nehmotné intermediální částice a slabé bosony jsou ve skutečnosti velmi těžké. Tento problém vyřešila až teorie zavádějící úplně nové pole a novou intermediální částici – *Higgsovo pole* a *Higgsův boson.* Higgsovo pole popisuje míru spontánního narušení symetrie.

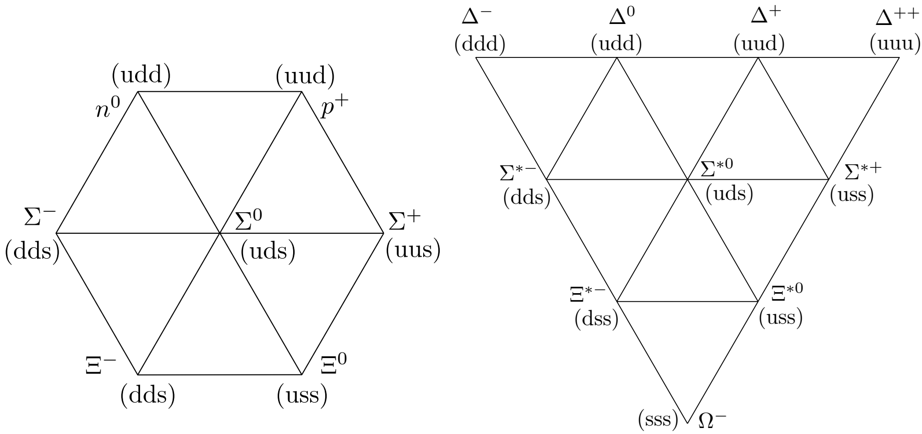
Spontánní narušení symetrie v životě pozorujeme celkem běžně. Postavíme třeba tužku na špičku. Naprosto dokonalou symetrickou tužku na naprosto rovnou vodorovnou desku stolu. Taková situace je rotačně symetrická, všechny směry okolo tužky jsou ekvivalentní. Ale tužka si jeden z nich spontánně náhodně vybere a tímto směrem spadne. Symetrie se spontánně naruší, protože nesymetrická situace má výrazně nižší energii. Jiným příkladem je chlazení ferromagnetického materiálu, třeba oceli. Při vysoké teplotě máme v oceli spoustu maličkých domén, ve kterých mají atomy stejnou magnetizaci. Dohromady se ale magnetizace jednotlivých domén vyruší a kus oceli je navenek nezmagnetovaný. Všechny směry magnetického pole, do kterého bychom takový kus oceli vložili, jsou ekvivalentní, situace je symetrická. Když ale takový kus oceli chladíme, odebíráme mu energii, a tak ho nutíme zaujímat energeticky výhodnější uspořádání. Rozhraní mezi jednotlivými doménami jsou energeticky náročné. Proto si ocel spontánně vybere nějaký náhodný směr a všechny domény se přemagnetují právě do tohoto směru. Symetrie je porušená, různé směry magnetického pole už nejsou ekvivalentní.

Stav vesmíru a fyzikálních zákonů tak, jak je pozorujeme, tedy nezávisí jen na elementárních zákonech jako takových, na rovnicích, podle nichž se řídí. Závisí i na tom, které konkrétní řešení se realizuje.

Standardní model

V minulém díle jsme se zmínili o různých typech elementárních částic. Už víme, že máme intermediální bosony zprostředkovávající interakce a základní fermiony, z nichž se skládá hmota. Základními fermiony jsou leptony a kvarky. A z kvarků se skládají těžší částice – hadrony, které mohou být jak fermiony, pak se jim říká baryony, tak bosony, těm říkáme mezony. Těchto částic je ale opravdu hodně a brzy vznikla potřeba udělat v nich pořádek. A to nejlépe takový pořádek, který dává fyzikálně nějaký smysl. Tímto pořádkem je *Standardní model.*

[21] Barva je třírozměrná veličina a popisuje „náboj“ částic pro silnou jadernou interakci.



Obrázek 6: Baryony seskupujeme do multipletu podle spinu a isospinu. Z kvarků u, d a s můžeme složit spoustu různých baryonů. Vlevo oktuplet částic se spinem $\frac{1}{2}$ (takže muže mít průměty $+\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$) a vpravo dekuplet částic se spinem $\frac{3}{2}$ (odpovídá vyššímu multipletu ve spinu), v jednotlivých řádcích najdete multiplety podle isospinu. Hvězdičky značí excitovaný stav částice, v našem případě fakt, že částice patří do vyššího multipletu.

Standardní model vychází z pozorování, že existují skupiny částic, které si jsou velice podobné. Většinu parametrů mají úplně stejných, jejich hmotnosti se liší jen velmi málo a mají jiný elektrický náboj. Příkladem je proton a neutron nebo trojice Σ^-, Σ^0 a Σ^+. Zjistilo se, že se tyto skupiny dají popsat pomocí obdoby spinových posunovacích operátorů. Vyskytují se v určitých multipletech a pro některé systémy můžeme vytvořit více multipletů. Veličině, kterou v multipletech posouváme, se pro podobnost se spinem říká *isospin*.

Poskládání do multipletu bylo vysvětleno právě tím, že hadrony jsou složeny z nějakých menších částic se spinem $\frac{1}{2}$ – tak byly předpovězeny kvarky. Kvarky se vyskytují výhradně jako součást hadronu, neexistují samostatně. Většina jejich vlastností jako náboj, isospin, hmotnost, atd. byla zahrnuta pod pojem *vůně*. Vůně jsou tedy dnes známá jména kvarků: up, down, strange, charm, true, beauty. Byla jim přidělena i *barva* – vlastnost, kterou přímo nepozorujeme, ale funguje skrze ni silná jaderná interakce. Všechny částice, které jsou schopny samostatné existence, jsou bezbarvé. To, že existuje nějaká nová trojrozměrná vlastnost, bylo prokázáno na základě statistického rozdělení výsledků experimentu: Při srážce elektronu s pozitronem vzniká dvakrát více hadronů než mion-antimionových párů.

V minulém díle při práci se spiny jsme předpokládali, že předem víme o skládání kvarků do baryonu. Jak ale teď vidíme, kvarky byly objeveny díky teorii grup.

Supersymetrie

Je vždy dobré, pokud se podaří více symetrií sjednotit do jedné grupy, fyzikální teorie se tak stává obecnější a je pak pravděpodobnější, že to už je ono. Nejde jen o nějaká přiblížení typu sférický kůň ve vakuu. Ideální je pak mít *Teorii všeho.* Proto se fyzici snažili najít nějakou grupu, do které by se daly zahrnout časoprostorové i kalibrační symetrie. To nijak rozumně nejde. Můžeme je ale sjednotit do *supergrupy.*

Supergrupa je struktura se dvěma sektory. V *sudém sektoru* jsou prvky běžné Lieovy grupy generované množinou generátorů $\{A_1, \ldots, A_n\}$, pro které platí komutační relace

$$[A_i, A_j] = \sum_k c_{ijk} A_k$$

kde c_{ijk} jsou nějaké strukturní koeficinety. *Lichý sektor* je tvořen jinou Lieovou grupou s množinou generátorů $\{B_1, \ldots, B_n\}$, pro které platí *antikomutační relace*:

$$\{B_i, B_j\} = \sum_k c_{ijk} A_k$$

Antikomutátor je definován jako $\{a, b\} = ab + ba$. Sudý sektor je tedy s lichým propojený – jednak antikomutačními relacemi svých generátorů, a jednak vzájemnými komutačními relacemi generátorů obou sektorů:

$$[A_i, B_j] = \sum_k c_{ijk} B_k$$

Nějakou supergrupu se podařilo najít. Pokud si za generátory vezmeme *kreační* a *anihilační* operátory bosonů a fermionů (z předchozích dílů tušíme, že bosony budou sudé a fermiony liché), bude to matematicky fungovat. Této teorii se říká *teorie supersymetrie.*

Kreační a anihilační operátory si můžete představit jako obdobu posunovacích operátorů u spinu. Kreační operátor fotonu a_f způsobí přidání jednoho fotonu do systému a příslušný anihilační operátor $a_f^\dagger$ způsobí jeho odebrání. Pro bosonové anihilační a kreační operátory dál platí:

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\,, \quad [a_i, a_j] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0$$
$$\delta_{ij} = 1 \text{ pro } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Obdobně jsou definovány i anihilační a kreační operátory pro fermiony. Platí pro ně:

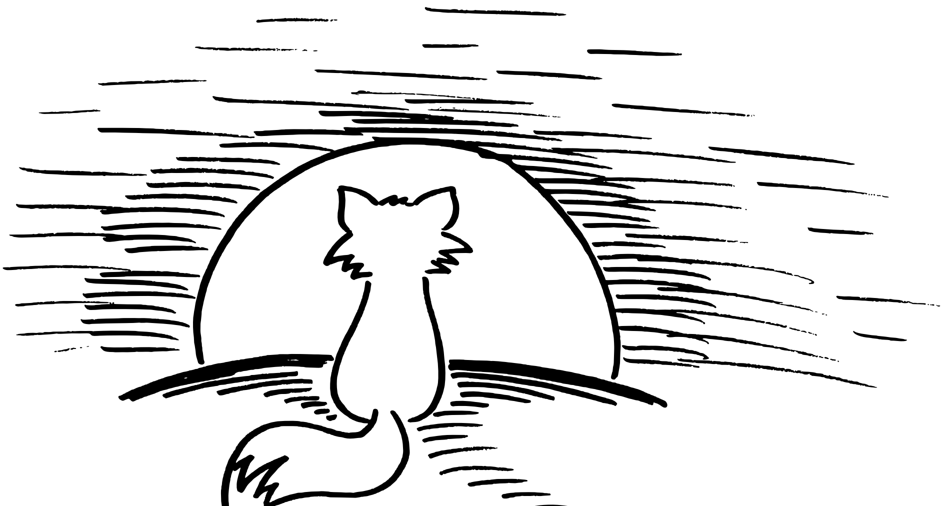
$$\left\{b_i, b_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}\,, \quad \{b_i, b_j\} = \left\{b_i^\dagger, b_j^\dagger\right\} = 0$$

Taková teorie ale vyžaduje uspořádání elementárních částic do fermion-bosonových párů. K fotonu by muselo existovat fermionové fotino, ke gluonu gluino, k elektronu bosonový selektron, ke kvarku skvark, atd. Žádné takové částice se nepozorují. Tahle teorie ale zatím nebyla zavržena, protože když něco nevidím, tak to ještě neznamená, že to není. Třeba je jen potřeba se dívat lépe, nebo úplně jinak.

Teorie grup a symetrie hrají roli i v teoriích supergravitace a superstrun. Tyto teorie mají ale zase tu nemilou vlastnost, že vyžadují alespoň deset prostorových dimenzí. Z těchto mnoha dimenzí vidíme jenom tři, ostatní mají být zkolabované, a tvořit pole známých interakcí.

Úloha 6.5 – Teorie grup V (5b)

Vymyslete nějaký „zákon zachování“, který neplatí, a popište situaci, kdy neplatí. Body dostanete dle náročnosti a originality.



Výsledková listina 4. čísla

				Úlohy										
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**s**	**t2**	**t3**	**t4**	**k**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$P. Šimůnek	3	118,6	1,0	3,0	3,0	0,5	2,5		7,0	10,0		27,0	96,6
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Stefanová	4	93,6	5,5	2,9				6,0				14,4	68,6
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Belza	4	40,6	2,0	2,5	4,0	1,0						9,5	40,6
4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$D. Krasula	3	141,4						5,5				5,5	39,4
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Václavek	4	68,3		2,8	4,0						10,0	16,8	38,3
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Pokorný	4	84,3	5,5	2,5		3,0		13,0				24,0	36,3
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$T. Domes	3	70,9		0,9								0,9	27,9
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$M. Poljak	4	63,0										0	25,0
9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	2	50,5	5,5									5,5	24,5
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$D. Žáček	3	33,9						15,0				15,0	22,9
11.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$P. Souček	4	110,7										0	20,7
12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Souza de Joode	Z8	19,8	0,5									0,5	19,8
13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Pallová	1	19,3	5,5									5,5	19,3
14.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$D. Chytilová	2	18,8										0	18,8
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$L. Kundratová	1	18,1	5,5	3,0								8,5	18,1
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Gocník	4	15,1	5,5									5,5	15,1
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	2	31,6			4,0							4,0	13,6
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$D. Jurdová	4	23,0										0	13,0
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	2	18,1	0,5	3,0								3,5	12,1
20.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$S. Rosecká	4	20,0										0	12,0
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$S. Lukeš	3	33,7		1,5	3,0	2,0						6,5	11,7
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Domes	1	11,6										0	11,6
23.–24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$P. Hudec	2	11,5										0	11,5
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Vala	2	19,5	5,5	3,0								8,5	11,5
25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Zika	4	13,7										0	10,7
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$P. Petráš	4	10,4										0	10,4
27.–28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$L. Kopfová	1	19,0									10,0	10,0	10,0
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Z. Svobodová	4	38,0									10,0	10,0	10,0
29.	T. Špalková	3	9,6										0	9,6
30.	T. Večeřa	1	8,9										0	8,9
31.	O. Buček	2	8,8										0	8,8
32.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$P. Turinský	3	21,5		3,0		2,0						5,0	8,5
33.–35.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Dittrich	4	47,1										0	8,1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$A. Kostelecká	4	10,1										0	8,1
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	2	33,1										0	8,1
36.–37.	A. Jandová	1	8,0										0	8,0
	J. Suchánek	2	8,0							8,0			8,0	8,0
38.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$O. Knopp	2	18,6										0	7,6
39.–40.	T. Piskovský	1	6,4										0	6,4
	Z. Sýkora	1	6,4										0	6,4
41.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$E. Mlynárčiková	3	17,2										0	6,2
42.	T. Hladíková	2	6,1										0	6,1
43.	M. Koval	1	5,9										0	5,9
44.	M. Horváth		4,6										0	4,6
45.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$P. Šťastný	3	36,2										0	4,2
46.	A. Šámal	2	6,6										0	3,6
47.–48.	F. Chocholatý	1	3,5										0	3,5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Doležalová	4	31,5										0	3,5
49.	M. Šedová	2	3,2										0	3,2
50.	D. Štípková	3	3,1										0	3,1

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	s	t2	t3	t4	k	$\sum_0$	$\sum_1$
51.–53.	L. Hrubčík		3,0										0	3,0
	A. Neubauerová	2	8,0										0	3,0
	F. Zajíc	3	8,0										0	3,0
54.–55.	A. Andrýsková	3	2,6										0	2,6
	K. Řezáčová	1	2,6										0	2,6
56.	T. Pálková		2,3										0	2,3
57.	J. Bartoš	1	2,1										0	2,1
58.–59.	K. Moudrá	3	2,0										0	2,0
	J. Pospíšil	2	2,0										0	2,0
60.–61.	K. Tulingerová	1	1,6										0	1,6
	A. Štrpka	1	1,6										0	1,6
62.	N. Petruny	2	1,3										0	1,3
63.	S. Burešová	2	8,0										0	1,0
64.	M. Miček	1	0,6			0,0							0,0	0,6
65.–66.	M. Balla	1	0,1										0	0,1
	Bc.$^{\text{MM}}$J. Paidar	2	19,1										0	0,1
67.	J. Marek		0,0										0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`

matfyz