Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXII / Číslo 5

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

v příspěvcích, které nám došly, jste se věnovali Volebním systémům a Rozpustilé rozpustnosti, my jsme se v seriálu o grupách zaměřili na kvantovou mechaniku. Vše najdete na webu, mnohé otiskujeme v tomto čísle.

Přečtěte si články vašich kolegů a zadání úloh a pošlete nám nějaké vaše bádání. Podle počtu bodů na konci této série vás totiž budeme zvát na jarní soustředění. Bližší informace k soustředění se po jarní rovnodennosti objeví na našem webu. Teď jen zopakujeme termín (23. 4.–1. 5.) a prozradíme, že spící lišák zajíce nechytí.

Rádi bychom vás, poněkud netradičně, pozvali do Brna: v sobotu 9. 4. se tam uskuteční soutěž InterSoB, která by mnohé z vás mohla zajímat. Více informací hledejte na `http://intersob.math.muni.cz/`.

Přejeme vám mnoho intelektuálních podnětů, ať už budete kdekoliv,

vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání páté série: 5. 4. 2016

Když čtyři kamarádi dorazili k rozcestníku a přečetli si nový vzkaz, byli z něj trochu rozpačití. M jim totiž dal na výběr ze tří cest. V podstatě se od rozcestníku mohli vydat kamkoliv jen ne zpátky. Kdo by taky chodil za dobrodružstvím zpátky? Mnoho možností vyvolalo mezi všemi dlouhou debatu. Tomáš byl pro pokračování rovně. Zdálo se mu, že tak nejlépe narazí na nějaký pension nebo hotel, kde by mohli přespat. Nicméně Zdeněk s Petrem navrhovali se nejdřív podívat doprava, protože tam vede naučná stezka. „Tam to přece nemůže být nuda!“ A protože Petr si užíval svou vůdčí pozici a měl silnou oporu v Janě, šlo se nakonec doprava.

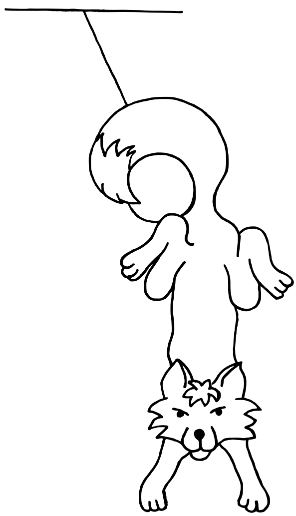
Úloha 5.1 – Platové dilema (2b)

Představte si skupinku státních zástupců, kteří by rádi zjistili, jaký je jejich průměrný plat, ale přitom žádný z nich nechce výši toho svého prozradit. Poradíte jim, jak jejich průměrný plat zjistit, aniž by se některý z nich dozvěděl výši platu někoho dalšího? Právníci nemají k dispozici žádný materiál, mohou využívat jen své hlavy.

Konec naučné stezky byl ve vesničce. Podle rozcestníku tam mělo být malé muzeum. Jana zajásala a vytrhla tím Zdeňka i Tomáše z jejich myšlenek. Petr chtěl zůstat venku. Muzea nebyla nic pro něj. Ostatní ho tam tedy nechali a šli dovnitř. Muzeum bylo opravdu malé. Zdeněk pokračoval nadšeně ve zkoumání všeho, až objevil lísteček u jednoho z exponátů. Vlastně ho to docela překvapilo, začínal totiž zapomínat, že jejich cestu řídí tajemný M. Lísteček ukazoval na jeden z exponátů a byla na něm fyzikální otázka! Geniální! Podal lístek Tomášovi s Janou a rozběhl se ven z muzea, aby si postavil vlastní model a mohl otestovat teorii. Petra to venku *zaujalo a když dojedl svačinu, šel Zdeňkovi pomoci. Za chvíli se připojili i ostatní a experimentální testování řešení úlohy jim zabralo dobré dvě hodiny. Nakonec se jim to ale podařilo.*

Úloha 5.2 – Neposedný míček (4b)

V homogenním gravitačním poli máme svislou pružinku s tuhostí k, na které je upevněna miska o hmotnosti m_1. Na misku, která je v klidu v rovnovážné poloze, hodíme míček o hmotnosti m_2. Z jaké výšky ho musíme pustit, aby se po odskoku a rozkývání misky na ni vrátil v okamžiku, kdy prochází miska rovnovážnou polohou směrem nahoru? Jak vysoko poté vyskočí? Jaké musí být podmínky pro hmotnosti m_1 a m_2? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné a trvají zanedbatelně krátkou dobu.



Protože mezi tím uběhla spousta času, rozhodli se, že se vydají stejnou cestou zpět a aby vyšli pro tentokrát vstříc Tomášovi, půjdou dál podél řeky. Hodili na záda batohy a svižným krokem se vrátili k rozcestníku. Petr šel v čele a provedl celou skupinu dále po červené, přes vyhlídky a kolem skal až ke zřícenině hradu. Cestovatelé nemohli odolat lezení po zídkách a kamenech, skákání mezi nimi a prozkoumání každého koutu. A M to věděl.
Když byl hrad dostatečně prolezený, rozložili si na jednom prostranství svačinu (Petr už si svůj příděl snědl, tak nic nedostal). Užívali si sluníčka a v tom si Petr vzpomněl na ještě jedno místo, kde zatím nebyli. Nenápadně poklepal Janě na rameno a pošeptal jí do ucha, jestli se tam s ním půjde podívat. Jana plná očekávání rychle spolykala svojí bagetu a vyrazila za Petrem. Snažili se jít co nejvíc potichu, aby se nenápadně ztratili ostatním z dohledu a užili si dobrodružství jenom spolu. Po chvíli našli na zemi kresbu. Vypadalo to jako nějaká funkce. Petr v první chvíli nečekaně vybuchl: „Sakra, to nás nenechá ani na chvíli v soukromí, bez žádných dalších přemýšlecích úloh? Nehledě na to, že přesně věděl, že sem dojdeme!“ Pak se ale zarazil, když viděl, že Janu funkce celkem zaujala. Podíval se na nakreslenou funkci podruhé, a potom usoudil, že by o její řešení neměli být ochuzení ani ti dva svačící myslitelé, a zaběhnul pro Tomáše se Zdeňkem. Těm se nejdřív nikam nechtělo, když věděli, že se Petr s Janou zase někam vypařili. Už si na to zvykali. Tomáš prohlásil: „Petře, já myslel, že jsme do toho šli spolu. Je sice fajn, že to mezi vámi jiskří, ale zkuste nás trochu míň ignorovat!“ Přesto se po chvíli nechal udobřit a šel se podívat s Petrem na funkci. Jana si zatím už připravila otázky, na které chtěla znát odpověď.

Úloha 5.3 – Rozklad funkce (4b)

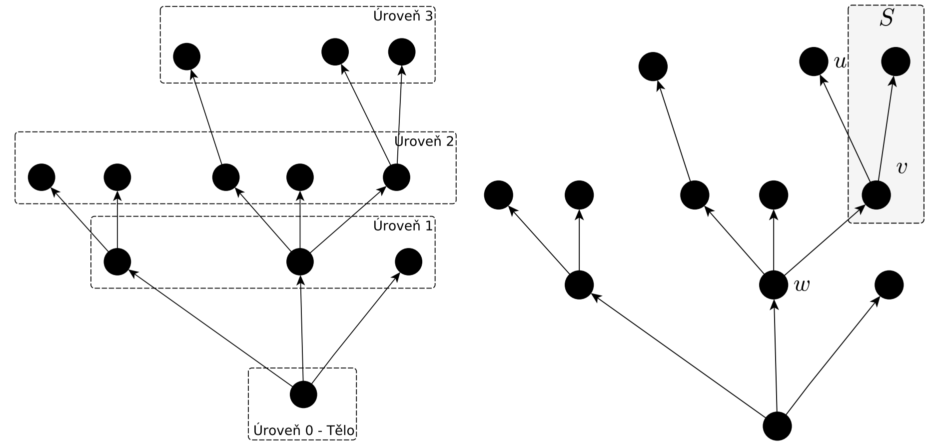
Nechť f je funkce definovaná na celé reálné přímce. Je známo, že se pak dá zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je sudá (má graf symetrický podle osy y) a druhá je lichá (má graf středově symetrický podle počátku). Dá se funkce f zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž každá má graf osově symetrický podle nějaké (ne nutně stejné) přímky?

Když vyřešili, co je zajímalo o funkci, znovu se sbalili a vyrazili dál. Aspoň věděli, že jdou správně, když je M pořád o krok napřed. Pokračovali kolem řeky.

V tu chvíli před sebou zahlédli mužskou postavu v dlouhém kabátě. Opravdu podivné, v tuhle dobu. Navíc zatím mnoho výletníků nepotkali. Kamarádi po sobě nenápadně pokukovali a bylo jasné, že se všem honí hlavou to samé. Přidali do kroku. Pána před nimi to ale vůbec nevzrušovalo. Bylo otázkou, jestli si jich vůbec všiml. „Být to On, tak o nás určitě už ví,“ namítla Jana. To ale nezastavilo kluky ve svižném kroku. Když pána míjeli, došla jim slova. Čekali, že se něco stane. Muselo se stát! Ale on jenom dál pokojně pokračoval v procházce. Když byli pár kroků před ním, začal si dokonce hvízdat. Petr sebral odvahu, otočil se a zastavil. Ostatní si stoupli krok za něj. Pán jako by stále netušil, o co jde. Petr na něj vyhrknul: „Tak už nás přestaňte vodit za nos, jste M?“ Pán se zastavil, urovnal si límec kabátu a usmál se. „M? Vidíte, dát se k tajným službám Británie mě zatím nelákalo. Ne, že by práce s Jamesem Bondem nebyla vzrušující…“, prohlásil, strčil ruce do kapes kabátu a než se Petr a ostatní stihli vzpamatovat, zmizel na cestě odbočující od řeky. Zdeněk se probral první a běžel tím směrem. Bohužel už nikoho nezastihnul. Vrátil se ke kamarádům a prohlásil: „To musí být On! Kdo jiný by odpověděl TOHLE?“ Jana stále pochybovala. „Třeba se s námi jenom nechtěl bavit.“ Tomáš se k ní přidal: „Taky když na někoho takhle bez pozdravu vyhrkneme takový nesmysl jako „Nevoďte nás za nos a řekněte nám, jestli jste M“, tak bych docela nějakou ironickou odpověď čekal.“ Ještě chvíli se vzrušeně dohadovali a nemohli se shodnout. „Třeba šel přece jenom na procházku.“ „Ale byl to opravdu podivný člověk.“ „Jenže teď je stejně zase v háji.“ „Jestli ho potkáme ještě jednou, už nám nesmí utéct!“ řekl rozhodně Petr, kterého už nikdo nemohl přesvědčit, že to M nebyl. Vymysleli tedy krátký bojový plán, a protože se začalo trochu smrákat, vyrazili dál. Aby jim nebyla dlouhá chvíle, začal Zdeněk vyprávět informatickou pohádku, kterou mu ve škole povídal kamarád a jejíž řešení ho trápí už několik dní.

Úloha 5.4 – *N*-hlavá saň (4b)

Chytrý Honza se rozhodl zachránit zakletou matfyzačku, kterou unesla strašlivá N-hlavá saň a hlídá ji ve svém doupěti pod Malostranským náměstím. Honza nechce nic ponechat náhodě, a tak si připravuje taktiku, jak saň porazit. Taková N-hlavá saň se skládá ze dvou základních částí – krků a uzlů. Každý krk vždy spojuje dva uzly. Nejdůležitějším uzlem je tělo. Z toho vyrůstá několik krků, na



(a) Příklad N-hlavé saně **(b)** Před useknutím hlavy u

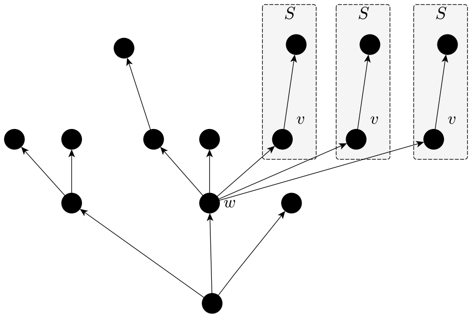
Obrázek 1: Saně

konci každého je uzel, ze kterého může vyrůstat několik krků atd. (viz Obrázek 1a). Každý uzel má úroveň, podle toho, jak daleko je od těla, tedy tělo je na úrovni nula, uzly spojené s krkem jsou na úrovni jedna, uzly, které jsou dva krky daleko od těla jsou na úrovni dva a tak dále.

Honza chce saň zabít tím, že jí postupně usekne všechny hlavy (to jsou uzly, ze kterých nevede žádný krk do vyšší úrovně). Jakmile sani zbývá jen tělo, zemře. V každém kroku si Honza vybere jednu hlavu a usekne ji. Ale ouha, sani hlavy dorůstají. Předpokládejme, že v K-tém kroku usekne Honza hlavu u, označíme si v uzel, ze kterého vede krk do u a S budeme říkat celé struktuře krků a uzlů, která vyrůstá z v (včetně v, ale bez u). Ještě si označíme w ten jediný uzel spojený krkem s v takový, že w je na nižší úrovni než v. Potom saň sice přijde o hlavu u, ale zároveň z w vyroste K nových kopií S. Usekne-li Honza hlavu, která vyrůstá přímo z těla, pak sani nic nedoroste. Příklad, jak může takové useknutí hlavy proběhnout, je na Obrázku 1b a 2. Krom dorůstání může hlava vzniknout z libovolného uzlu, který přišel o všechny krky vedoucí do vyšší úrovně.

Ukažte, že Chytrý Honza dokáže zabít každou N-hlavou saň.

Než problém vyřešili, ocitli se u dalšího rozcestníku. Skoro si ani nevšimli, že je značka vedla přes řeku a že jsou zase ve městě, i když malém. Zdeněk se vrhnul k rozcestníku s výkřikem: „Ať mi upadnou obě nohy, jestli tady taky není vzkaz!“ Chvíli mu trvalo ho najít, protože skrýše byly čím dál důmyslnější, ale Zdeněk měl dobrý cit pro vzkazy od M, a když byl přesvědčený, že někde musí být, vždy ho tam nakonec našli.



Obrázek 2: Po useknutí hlavy u sani vyrostly nové hlavy

Řešení úloh 3. série

Úloha 3.1 – Výběr čísel (3b)

Zadání:
Rozhodněte, jestli pro libovolných 101 přirozených čísel menších nebo rovných 200 lze vždy vybrat 2 čísla tak, aby jedno dělilo druhé.

Řešení:
Rozdělíme si čísla 1, ... 200 do 100 různých množin $M_1, ..., M_{100}$, kde k-tý prvek množiny M_n je určen vztahem $2^{k-1}(2n-1)$. Jednotlivé množiny jsou omezené shora číslem 200 a vypadají následovně:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 128\} \\
M_2 &= \{3, 6, 12, 24, 48, \ldots, 192\} \\
M_3 &= \{5, 10, 20, 40, \ldots, 160\} \\
&\vdots \\
M_{99} &= \{197\} \\
M_{100} &= \{199\}
\end{aligned}$$

Ukážeme, že každé z čísel od 1 do 200 spadá právě do jedné z definovaných množin. Pokud chceme umístit do nějaké množiny liché číslo, jedná se o nejmenší člen množiny (dané číslo můžeme rozložit na $2n-1$, z čehož získáme, že patří do množiny M_n). Jestliže chceme do nějaké množiny umístit sudé číslo, víme, že se nebude jednat o nejmenší člen. Toto číslo ale můžeme vydělit dvěma. V případě, že tím získáme liché číslo, našli jsme nejmenší člen množiny, do které patří i naše sudé číslo. Pokud po dělení dvěma dostaneme opět sudé číslo, budeme ho dělit dvěma tak dlouho, dokud nedostaneme liché číslo, které je již nejmenším členem množiny. Tím je i dokázáno, že každé číslo je právě v jedné množině.

Pokud jakkoliv vybereme 101 čísel menších rovno 200 (tedy z množin M_1 až M_{100}), budou podle Dirichletova principu alespoň dvě čísla ze stejné množiny, tedy jedno dělí druhé.

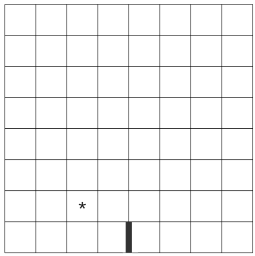
Tím jsme dokázali, že ze 101 čísel menších rovno 200 lze vždy vybrat dvě čísla tak, aby jedno dělilo druhé.

Míša

Úloha 3.2 – Cestička ve čtverci (2b)

Zadání:

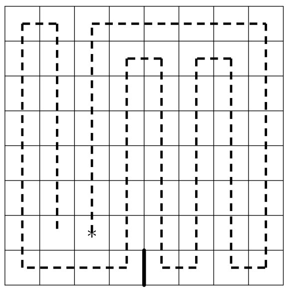
Stojíš ve čtverci 8×8 *na místě vyznačeném hvězdičkou (viz obrázek vpravo), tvým úkolem je projít všechna políčka ve čtverci tak, aby tvou trajektorii tvořilo 15 úseček, které se vzájemně nekříží. Po čtverci se můžeš pohybovat jen vodorovně či svisle a pohyb ti ztěžuje nepřekonatelná zeď.*



Řešení:

Jedním z možných řešení je projít každým druhým tahem co největší možnou část některého sloupce. Vytvoříme si tedy svislé části trajektorie (ve sloupcích). Abychom se dostali přes nepřekonatelnou zeď, musíme spojit dva sloupce, které se zdí sousedí v horní části čtverce, ne však v prvním řádku, protože poté bychom se z levé části čtverce znovu nedostali, a pak bychom tam spotřebovali příliš mnoho tahů.

Spojíme tedy ony sloupce ve druhém řádku (držíme se toho, že se snažíme projít co největší možnou část sloupců). Další zřejmé propojení sloupců je pomocí řádku pod hvězdičkou – osmým řádkem propojíme první či druhý sloupec se čtvrtým sloupcem a první s druhým sloupcem propojíme v prvním řádku. Aby trajektorie byla celistvá, nezbývá než propojit třetí a osmý sloupec v prvním řádku, šestý a sedmý sloupec v druhém řádku, pátý s šestým a sedmý s osmým sloupcem v osmém řádku. Celá trajektorie viz obrázek vpravo.



Kristý

Úloha 3.3 – Chodníčky v parku (3b)

Zadání:

Ve městě je obdélníkový park a tímto parkem teče potůček. Po obou březích vedou chodníčky, ale nikde v parku přes potůček nevede most. Oba chodníčky vedou stále právě 2,5 m *daleko od středu potůčku. Potůček do parku vtéká na východě (kolmo na okraj parku), v parku se nějak klikatí a poté vytéká směrem na sever (opět kolmo na okraj parku). Klikatění potůčku dostanete na vstupu jako posloupnost rovných úseků (popsaných jejich délkou) a zatáček (popsaných poloměrem zakřivení potůčku a úhlem, o který je potůček zakřiven – kladné číslo představuje zatáčku doprava, záporné doleva). Napište program nebo popište algoritmus s co nejmenší časovou složitostí, který vypíše, po kterém břehu a o kolik metrů je cesta podél potůčku kratší. Můžete předpokládat, že trasa potůčku v parku je „rozumná“, tedy potůček:*

- *nikdy neprotíná sám sebe ani se nepřibližuje sám k sobě na méně než* 5 m
- *nikdy neopisuje oblouk s poloměrem menším než* 2,5 m
- *se nikde mimo začátek a konec svého průtoku parkem nepřibližuje na méně než* 2,5 m *k okraji parku*

Řešení:

Na rovných úsecích se délky chodníčků nijak neliší, budou nás tedy zajímat jen zatáčky. Když potůček zatočí doprava s poloměrem r o úhel α (v radiánech), délky chodníčků vzdálených stále $d = 2{,}5\,\mathrm{m}$ od středu potůčku budou v tomto úseku rovny

$$2\pi(r+d)\frac{\alpha}{2\pi} = \alpha(r+d)$$

na levém břehu a

$$2\pi(r-d)\frac{\alpha}{2\pi} = \alpha(r-d)$$

na pravém. Jejich rozdíl pak bude

$$\alpha(r+d) - \alpha(r-d) = \alpha(r+d-r+d) = 2d\alpha.$$

Vidíme, že rozdíl nezávisí na poloměru zatáčky, nýbrž jen na jejím úhlu. Navíc vyjde stejně, i pokud potůček zatáčí doleva (lišit se budou jen ve znaménku schovaném v α). Protože potůček vtéká do parku kolmo na východě, vytéká kolmo na severu a nikde se nekříží, nasčítají se úhly všech n zatáček na $\pi/2$ (neboli pravý úhel). Celkový rozdíl délek je pak

$$\sum_{i=1}^{n} 2d\alpha_i = 2d\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 5\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m}$$

(přibližně 7,85 m), o tolik je delší chodníček na levém břehu. Náš „algoritmus“ se tedy vůbec nebude dívat na popis úseků, jen v konstantním čase vypíše tento výsledek.

Matěj

Úloha 3.4 – Rychlost deště (4b)

Zadání:

Změřte rychlost padání deště (případně sněhu). Padají všechny kapky (vločky) stejně rychle? Na základě změřené hodnoty odhadněte velikost kapek.

Řešení:

Ako už vyplýva zo zadania ide o experimentálnu úlohu. Najlepšie na meranie bude, ak si zvolíme stálu dráhu s, na ktorej budeme merať čas, za ktorý sneh alebo kvapka prejde túto dráhu. Čas môžeme merať pomocou stopiek, ale je potrebne si uvedomiť, že človek má reakčnú dobu oko-ruka približne 0,25 s, takže pri dvoch stlačeniach stopiek je výsledná absolútna odchýlka zmeraného času až 0,5 s. Najlepšie riešenie je použiť kameru a nejaký program na úpravu videí kde si môžeme pozerať video po jednotlivých snímkoch. Ak bude kamera snímať rýchlosťou 30 snímkov za sekundu, dostaneme odchýlku iba 0,03 s. Čím viac meraní prevedieme tým lepšie určíme priemerný čas $\bar{t}$ a priemernú odchýlku $\Delta\bar{t}$. Je treba takisto určit odchýlku meradla Δt.

Výslednú strednú relatívnu odchýlku času vypočítame pomocou vzťahu

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2}.$$

Priemernú rýchlosť už jednoducho vypočítame pomocou vzťahu

$$\bar{v} = \frac{s}{\bar{t}},$$

stredná relatívna odchýlka rýchlosti bude daná vzťahom

$$\sigma_{\bar{v}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{t}})^2 + \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2},$$

kde Δs je absolútna odchýlka dráhy.

Sníh

Odporová sila sa musí pri stálej rýchlosti pádu rovnať tiažovej sile:

$$F_{\mathrm{o}} = F_{\mathrm{g}}$$
$$\frac{1}{2}C\rho_{\mathrm{p}}S\bar{v}^2 = mg,$$

kde C je súčiniteľ odporu, pre jednoduchosť použijeme hodnotu tohoto súčiniteľa okrúhlu dosku, teda asi 1,2; ρ_p hustota vzduchu, S veľkosť našej vločky, m hmotnosť vločky. Pre naše hľadané S:

$$S = \frac{2mg}{C\rho_\mathrm{p}\bar{v}^2}.$$

Hodnotu m je potrebné vyhľadať v literatúre, alebo odmerať, ale tak presne váhy asi bežne doma nikto nemá. Vypočítanú plochu vločky S môžeme porovnať s hodnotou získanou iným spôsobom, napríklad z mikroskopickej fotografie vločky.

Dažď

Pre dažďové kvapky platí to isté, čo pre snehové vločky, akurát súčiniteľ odporu C je pre kvapku podstatne menší ($\approx 0{,}1$), S je obsah prierezu, teda kružnice, a m si môžeme určiť ako $V \cdot \rho$, kde objem V je objem jednej kvapky, ktorú pre jednoduchosť budeme pokladať za guľu, a ρ je hustota vody.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C\rho_\mathrm{p}S\bar{v}^2 &= mg \\ \frac{1}{2}C\rho_\mathrm{p}\pi r^2\bar{v}^2 &= \frac{4}{3}\pi r^3\rho g \\ r &= \frac{3C\rho_\mathrm{p}\bar{v}^2}{8\rho g} \end{aligned}$$

Relatívna ochýlka polomeru σ_r bude dvojnásobkom relatívnej odchýlky rýchlosti σ_v, ale len za predpokladu, že berieme ostatné veličiny (C, ϱ_p, ϱ, g) ako pevne určené.

Na záver je dobré pripomenúť, aké zjednodušenia sme použili: snehovú vločku pokladáme za okrúhlu dosku, kvapku dažďa zas za guľu, v našom usporiadaní sa vzduch nepohybuje, teda nefúka vietor a bez výhrad používame Newtonov vzťah pre odpor prostredia, ktorý však platí iba približne.

Kubo

Řešení témat

Téma 1 – Pojďte pane, budeme si hrát

K tématku přišlo další řešení od Dr.$^{\mathsf{MM}}$Petra Šimůnka, jemuž se podařilo zdokonalit program pro analýzu různých her, jeho nejnovější článek a programy můžete najít na naší webové stránce.

Zatímco to ještě nedávno pro prvního hráče vypadalo bledě (např. Dr.$^{\mathsf{MM}}$Marián Poljak dokázal, že není dobrý nápad začínat výběrem čísla 4), nyní se možná prvnímu hráči blýská na lepší časy. Dr.$^{\mathsf{MM}}$Petr Šimůnek se domnívá, že začít číslem 5 je pro prvního hráče vyhrávající strategie. To souhlasí s již ukázaným faktem, že hra začínající tahy 5 a 4 je pro prvního hráče vyhraná. Jak jsou na tom další hry? Co například umíte říci o hře začínající tahy 5 a 6?

Vašek

Téma 2 – Volební systémy

Do redakce nám přišel článek od Dr.$^{\mathsf{MM}}$Kláry Stefanové, ve kterém řeší dva problémy nedořešené v minulých číslech.

Prvním z nich je problém pohyblivého voličstva. Klára jej řešila na výsledcích voleb z října 2013. Přesunula 10 % voličů ČSSD z Jihomoravského kraje do Prahy. Pohyb voličů uvažovala strategicky z pohledu vládní koalice a došla k zajímavému výsledku: při použití D'Hondtovy metody se pozice vládnoucí koalice upevnila na úkor opozice, při použití Hagenbach-Bischoffovy kvóty však nikoli.

- Klára uvažovala možnost využít aktivních voličů jen pro jednu stranu. Co kdyby stejnou možnost měly i strany v opozici? Dokázaly by se snížení počtu křesel ubránit? Zvládly by to i za předpokladu, že by neměly dopředu informaci o tom, odkud kam chce ČSSD voliče přesouvat, a jen se snažili maximalizovat počet získaných křesel?

V další části příspěvku Klára uvádí, jak by dopadly volby, kdyby byl stát chápán jako jeden volební okrsek, viz Tabulka 1. Zároveň uvádí: *Zajímavé by bylo přepočítat získané hlasy po volbách v roce 2006, kdy došlo k volebnímu patu, vládnoucí koalice a opozice měly stejný poměr hlasů 1:1, a byl velký problém sestavit vládu. I když nakonec byla sestavena, nebyla velmi stabilní.*

- Zkus zrealizovat Klářin návrh.

Ráda bych se vrátila ještě k článku Mgr.$^{\mathsf{MM}}$Lukáše Belzy, který navrhl vlastní způsob přepočítávání hlasů založený na originální myšlence – co kdyby počet zastupitelů nebyl pevný? Lukáš navrhuje z celkového počtu hlasů nejdříve vyřadit hlasy pro strany, které nedosáhly na úroveň volebního kvóra. Tento počet se pak zaokrouhlí na tři platné číslice, vydělí dvěma a zaokrouhlí. Stejný postup se provede s hlasy pro jednotlivé strany. Případná nerozdělená místa se určí losem.

	okrsky	celek
ČSSD	50	48
TOP 09	26	27
ODS	16	19
KDU-ČSL	14	15
Úsvit	14	15
ANO 2011	47	42
KSČM	33	34

Tabulka 1: Srovnání výsledků voleb (počet křesel v parlamentu) z října 2013 (okrsky) s přepočítáním hlasů pro celistvý stát tvořený jediným volebním okrskem (celek)

V článku Lukáš na volbách z roku 2006 ukazuje, že při rozdělení hlasů pomocí tohoto systému je rozdíl mezi „nejdražšími" a „nejlevnějšími" křesly pouze 560 hlasů, oproti rozdílu přes 20 000 hlasů při použití D'Hondtovy metody.

- Dokázali byste nějak formálněji porovnat Lukášův systém s klasickými metodami počítání hlasů? Co kdyby bylo možné pro každou metodu vybrat takový počet křesel (řekněme v rozmezí 50–499, ve kterém se pohybuje popisovaný systém), aby rozdíl mezi maximálním a minimálním potřebným počtem hlasů pro získání mandátu byl co nejmenší? Jak by srovnání s Lukášovou metodou dopadlo poté?

Některé články opět přinesly více otázek než odpovědí, ale přesto si dovolím přijít ještě s jednou doplňující otázkou:

- Představte si, že místo hlasování pro kandidáta můžete volit i **proti** kandidátovi. Možností, jak takové antihlasy aplikovat by bylo více: každý volič má právě jeden hlas či antihlas, všichni mají hlas a antihlas, … Který by byl podle vás nejvhodnější? K jakému politickému spektru by pravděpodobně takové systémy vedly?

Těšíme se na další zajímavé články.

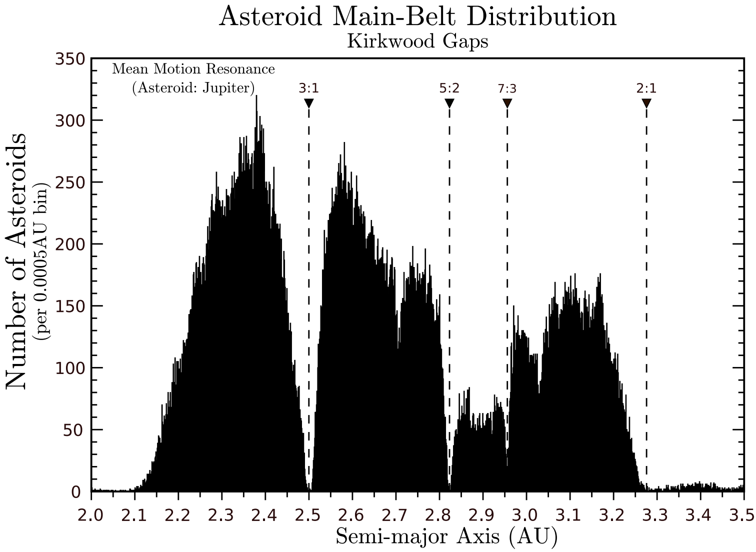
Anet

Téma 3 – Kosmický kulečník

K tomuto tématu došel příspěvek od Dr.MM Petra Šimůnka. V článku se zabýval zmizením Jupiteru a převážně tím, co by se stalo s jeho měsíci. I když bylo jeho řešení téměř správné, článek kvůli chybným údajům nyní neotiskneme. Následující článek již dříve zaslal Bc.MM Marco Souza de Joode.

Stále zbývá mnoho nevyřešených problémů. Téměř nikdo se nezabýval zmizením našeho Měsíce. Co by se po jeho zmizení stalo v krátkodobém i dlouhodobém měřítku? Také se můžete zabývat novým problémem, a to objevením nového tělesa ve Sluneční soustavě.

Viktor



Obrázek 3: Rozložení množství asteroidů podle vzdálenosti od Jupiteru, zdroj [1]

Co kdyby Jupiter zmizel (7b)

Bc.^{MM}Marco Souza de Joode

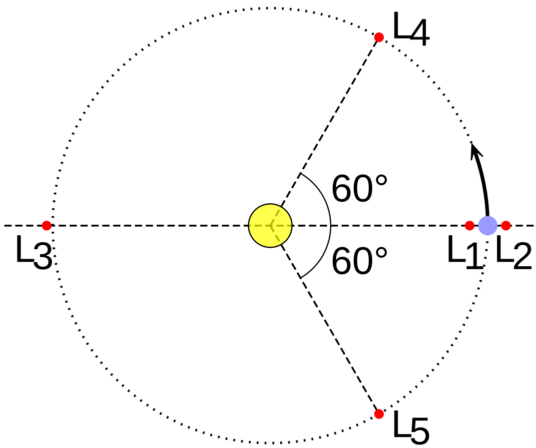
Člověk si řekne, prostě nějaká planeta tam kdesi daleko, jaký to na mě má vliv? Tady ale nechci mluvit o astrologii či jiném šarlatánství, ale o fyzice drastických následků zmizení nejhmotnější planety ve Sluneční soustavě.

Úvahy na úvod

Změny v pásu asteroidů

První věc je, že Jupiter udržuje pás asteroidů „rozdrobený“. Na obrázku 3 je histogram znázorňující rozložení hmoty v pásu asteroidů [1]. Mezery mezi plochami jsou tam proto, že jakékoli těleso, co by se nacházelo v tomto prostoru, by se tam neudrželo kvůli Jupiterově gravitaci. Díky těmto mezerám nemůže vzniknout planeta [2].

Tato planeta by asi nebyla moc velká, protože celková hmotnost všech těles v pásu asteroidů je zhruba $3 \cdot 10^{21}$ kg, což je něco málo více než 4 % hmotnosti Měsíce nebo o trochu více než hmotnost největšího měsíce Pluta, Charonu [3]. Domnívám se, že by na nás toto těleso nemělo nijak zásadní vliv (je malé a relativně daleko). Čas vzniku takovéto planety odhaduji tak na 10 milionů let, protože už se netvoří z plynu, ale z relativně velkých kusů pevného materiálu. Takže by to nebyla okamžitá změna.



Obrázek 4: Rozmístění liberačních center soustavy Slunce-Jupiter

Trojani

Oblasti označené písmeny L na obrázku 4 jsou librační centra, ve kterých je správný poměr gravitační síly středového a obíhajícího tělesa, takže vůči dvěma tělesům (Slunce, Jupiter) zůstávají nehybná [4]. Body L1, L2 a L3 jsou velice malé a jakákoli odchylka může způsobit „vykolejení“, ale centra L4 a L5 jsou velice rozměrná a stabilní, jak je dokázáno v [5]. Proto se v těchto bodech na oběžné dráze Jupiteru nacházejí Trojani, skupina asteroidů sdílející s Jupiterem jednu oběžnou dráhu. Celková hmotnost Trojanů se odhaduje na jednu pětinu hmotnosti pásu asteroidů, takže zhruba $6 \cdot 10^{20}$ kg [6]. Gravitační síly Jupiteru a Slunce jsou v rovnováze, co by se tedy stalo ve chvíli kdy by Jupiter zmizel? Zbyla by gravitace Slunce. **Tudíž by do vnitřní sluneční soustavy (k nám) letělo přes milion asteroidů** větších než jeden kilometr [6]. Trojani ale nepoletí jen tak, cestou můžou odmrštit asteroidy z pásu asteroidů. Každopádně, takový Trojan má celkem masivní moment hybnosti, takže by neletěli přímo do Slunce (a vnitřní sluneční soustavy), ale udělali by takovou spirálu. *Pozn. red.: Zde se autor mýlí. Tělesa sluneční soustavy obíhají téměř vždy po elipse nebo hyperbole a navíc není pravda, že by Trojani zamířili do středu Sluneční soustavy kvůli přitažlivosti Slunce.*

Měsíce

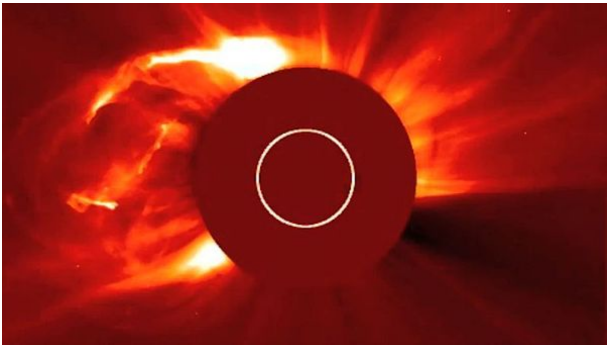
Toto je obzvlášť zajímavé, protože měsíce kolem Jupiteru obíhají velkou rychlostí a mají relativně velkou hmotnost. Veškeré následující výpočty a úvahy se budou vztahovat k měsíci Callisto, protože má hmotnost 10^{23} kg [7], se kterou se velice dobře počítá. Takže kdyby Jupiter náhle zmizel, Callisto by obíhalo kolem dokola dalších 6,3 sekundy (následky gravitace nejsou okamžité, šíří se rychlostí světla) a následně by se pohybovalo rovnoměrným přímočarým pohybem. Jsou dvě možnosti, kam by se Callisto a ostatní měsíce mohly vydat: dovnitř sluneční soustavy nebo do vnější sluneční soustavy. Obě možnosti jsou velice zajímavé a převelice vzrušující. Začnu možností vnitřní:

Callisto obíhá Jupiter rychlostí 8,2 kilometrů za sekundu [7]. Touto rychlostí by se nadále pohybovalo směrem do vnitřní sluneční soustavy, navíc by bylo urychlováno gravitací. *Pozn. red.: Autor zapomenul přičíst oběžnou rychlost Jupiteru, kterou se společně se svými měsíci pohybuje Sluneční soustavou.* Jaká by byla zdánlivá velikost pásu asteroidů z pohledu Jupiteru a jeho měsíců? Tloušťka pásu asteroidů je jeden milion kilometrů, vzdálenost Jupiteru od pásu je zhruba jedna astronomická jednotka. To by byly odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a nás zajímá úhel při Jupiteru. To je protilehlá ku přilehlé, takže tangens. Spočítáme 1/150 a dostaneme $0{,}00\overline{6}$, což jde převést na $0^\circ\ 0'\ 24''$. To je celkem malé, ale protože je rovina sluneční soustavy totožná (s přimhouřenýma očima) s rovinou oběhu Jupiterových měsíců, a navíc jsou přitahovány jeho gravitací, řekněme, že se dostane až k pásu asteroidů. Narazí měsíc do nějakých asteroidů? Nastanou v pásu dramatické změny? Pás asteroidů je relativně „řídké" prostředí: V průměru se od Vás nachází asteroid tak **3 miliardy metrů**, a hmotnost takového asteroidu bude zhruba **3 miliardy kilogramů** (dle [3] a vlastních výpočtů). Jakou silou bude Callisto asteroidy přitahovat? Použijeme Newtonovu rovnici

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Dosadíme a dostaneme sílu $0{,}002\,\mathrm{N}$. Dejme tomu, že m_1 je Callisto, m_2 je asteroid a že se Callisto působením této síly nepohne. Jaké zrychlení bude mít asteroid? Protože $F = ma$, $a = F/m$. Dosadíme $0{,}002\,\mathrm{N}$ a $3 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$. Dostaneme $6{,}6 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Velice malé. Takže předpokládám, že by jakýkoli měsíc **proletěl pásem asteroidů, aniž by si čehokoli všiml** (to znamená, že by s sebou nepřivlekl tělesa z pásu asteroidů). Letěl by do středu sluneční soustavy přitahován Sluncem.

Myslím si, že by mohly nastat změny v Kuiperově pásu a dál. Hustota je také malá, ale jeho délka je mnohem větší (zhruba dvacetkrát) [8]. Proto si myslím, že není zcela absurdní uvažovat, co by se stalo, kdyby se měsíc přiblížil k takovémuto tělesu. Jedna smysluplná úvaha by byla, že zapůsobí gravitační prak: Měsíc **vmrští komety svou gravitací** do vnitřní sluneční soustavy. Další zajímavý jev: když hmotné těleso proletí mezi spoustou menších těles, působí na sebe (všechna) tělesa gravitační silou, která jim dá zrychlení. Dejme tomu (a taky tomu tak i nejspíš je), že hmotné těleso (měsíc) sice menší tělíska urychlí, ale protože velice rychle proletí, tělíska jej nemohou dostihnout. Kdyby měsíc prolétl oblastí plnou komet (nepohybujících se) komety by se začaly pohybovat vůči místu, kde velké těleso bylo. Jako celek by to vypadalo, že se komety rozjíždějí pod pravým úhlem vůči trajektorii tělesa, slabě zakřiveně směrem tam, kde větší těleso je nyní.



Obrázek 5: Slunce zasažené kometou

Bombardování Slunce

Všechna tato tělesa (měsíce co letí ke Slunci, Trojani, možná i nějaké rozhozené asteroidy) by dřív nebo později byla upražena. Když kometa zasáhne Slunce, je to neskutečná podívaná (Obrázek 5). Toto bylo způsobeno kometou o hmotnosti zhruba 10^9 kg. Kdyby to byl měsíc, ani si nedokážu představit, co by se stalo. Vše by bylo pravděpodobně větší a ničivější. Kdyby ale tato erupce vystřelila směrem k Zemi (kdyby měsíc přilétal směrem od nás), byli bychom zasaženi. Přirovnal bych to ke Sluneční bouři roku 1859 [11], která škvařila telegrafní dráty, ale mnohem horší. Bohužel se mi nepodařilo k těmto jevům najít žádné rovnice, takže můžu pouze odhadovat. Mimo měsíců by do Slunce zahučel víceméně celý pás asteroidů, které mají podobnou hmotnost jako kometa, co způsobila jev na fotce. Jenomže by jich bylo kolem milionu, více méně naráz. Tento jev není vůbec prozkoumaný, protože měsíce a celé roje asteroidů běžně nekončí ve hvězdách. Je známým faktem, že mnoho komet se dostává na dráhu končící záhubou Sluncem. Podle studie [9] až 6 % krátkoperiodických komet se v průběhu 10^5 let dostane do blízkosti několika tisíc kilometrů od Slunce [10], ale nikdy se nic takového nepozorovalo u asteroidů, nýbrž to bylo pouze matematicky předpovězeno. *Pozn. red.: Pád tělesa do Slunce by nastal jen s malou pravděpodobností, protože by se musela excentricita jeho oběžné dráhy velmi změnit oproti původní hodnotě.*

Bez záštity

Jupiter bývá často ilustrován a vysvětlován jako kosmický vysavač, který nás chrání před kometami a jinými tělesy, co by se na nás řítily. Tyto popisy jsou sice trochu přehnané, ale částečně mají pravdu, Jupiter nás chrání před hrozbami Kuiperova pásu. Pravda je, že ač Jupiter mnoho komet odmršťuje (a jen velice zřídka polyká, jak si lidé často myslí), také **přitahuje** komety, které by tu jinak nebyly [12]. Například kometa Lexell: Jupiter ji vtáhl z vnějších oblastí sluneční soustavy a odmrštil ji přímo k nám (stalo se tak v roce 1770 a naštěstí kometa Zemi minula, ale jen o 0,015 AU [12] [13]). Na obhajobu Jupitera musím dodat, že kometu Lexell v roce 1779 odmrštil do vnější sluneční soustavy, a od dob Messiera, který ji prvně pozoroval, ji svět nespatřil [12].

Celková změna těžiště soustavy

Planety neobíhají kolem Slunce, ale kolem těžiště celé Sluneční soustavy (které se nachází uvnitř Slunce, protože tvoří hlavní část hmotnosti soustavy). Já bych si myslel, že když by Jupiter (jako nejhmotnější planeta) zmizel, celé těžiště by se posunulo jinam. Jenže Slunce je opravdu velice hmotné. Podíl hmotnosti Jupiteru a Slunce je 0,001. Myslím si tedy, že by se s těžištěm naší soustavy nic výrazného nestalo.

Zmizení

Veškeré předešlé úvahy se zabývaly takovým scénářem, kde se Jupiter prostě vypaří. Ze zákona zachování hmoty dobře víme, že Jupiter si nemůže zčistajasna zmizet. Zamýšlel jsem se tedy nad způsoby, jak se Jupiteru zbavit (Samozřejmě, stejně jako vše ostatní co tady píšu, by se nikdy nemohlo stát.)

Možnost 1 – Exploze: Planety zpravidla nevybuchují, ale kdyby se to povedlo, bylo by to mnohem více devastující než cokoli předtím. Jádro Jupiteru o desetinásobku hmotnosti Země by bylo rozprášeno po celé sluneční soustavě. Za nějakou dobu by to nepochybně (tady nejde o pár asteroidů, ale o jádro obrovské planety) zasáhlo i Zemi. Spočítal jsem, kolik kilogramů Jupiterova jádra zasáhne Zemi: Spočítám si objem vrstvy sféry o poloměru 5 AU a o tloušťce jednoho metru. Mezi tento objem rozdělím hmotnost jádra Jupiteru. To bude hustota (kdyby všechna hmota byla jenom v jednom metru tloušťky). Tuto hustotu vynásobím s povrchem Země a dostanu množství hmoty, co zasáhne zemi. *(Pozn.: Hustota by se měla vynásobit plochou průmětu Země do roviny vrstvy letícího materiálu, tedy πR^2, kde R je poloměr Země.)* Výsledky vycházejí následovně: každý metr čtvereční země zasáhne 11 kg jádra Jupiteru (letící skutečně nepředstavitelnou rychlostí) a celkově na povrch země 3×10^{15} kg. Mnohonásobně více hmoty by dopadlo na povrch Slunce, a jsme opět u problémů.

Možnost 2 – Temná hmota: Kdyby se k Jupiteru podařilo propašovat těleso podobného charakteru, ale z antihmoty, mohli bychom se Jupiteru zbavit. Kolik energie by se uvolnilo? Dosadíme do $E = mc^2$ a dostaneme výsledek zhruba 10^{44} J. *Pozn. red.: Temná hmota a antihmota jsou ve skutečnosti odlišné typy hmoty.*

Možnost 3 – Termonukleární hoření: Pokud bychom na Jupiter působili dostatečně velkým tlakem, mohli bychom dosáhnout fúze. Tento případ je alespoň představitelně proveditelný – v teorii by šel na rozdíl od ostatních provést. Účinnost termojaderné fúze je $\eta = 0,01$. Použijeme vzorec $E = mc^2\eta$, dosadíme a dostaneme hodnotu 10^{42} J.

Závěr

Kdyby Jupiter zmizel, nastaly by nebezpečné změny, jako přeuspořádání pásu asteroidů, zvýšená hrozba z vnější sluneční soustavy, a dle mého názoru hlavně Trojani, kteří by se přesunuli sem a tím nás mohli ohrozit.

Zdroje

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Kirkwood_gap – obrázek a zdůvodnění mezer v pásu asteroidů

[2] http://www.universetoday.com/112464/why-isnt-the-asteroid-belt-a-planet/ – proč nevznikne planeta namístě pásu asteroidů

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid_belt – hmotnost pásu asteroidů, porovnání s jinými tělesy, hustota pásu asteroidů

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point – librační centra, matematický popis center L1, L2, L3

[5] http://www.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Thomas_Greenspan-Stability_of_Lagrange_points.pdf – matematický popis vlastností libračních center L4 a L5.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Jupiter_trojan – hmotnost Trojanů

[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Callisto – Callisto, hmotnost a rychlost

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Kuiper_belt – Kuiperův pás

[9] http://www.nature.com/nature/journal/v371/n6495/pdf/371314a0.pdf – asteroidy do slunce

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Sungrazing_comet – komety s extrémně malým periheliem

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_storm_of_1859 – Sluneční bouře roku 1859

[12] http://www.nytimes.com/2009/07/26/weekinreview/26overbye.html?_r=0 – kosmický vysavač + kometa Lexell

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Lexell%27s_Comet – kometa Lexell

Téma 5 – Rozpustilá rozpustnost

K tématu se nyní sešly tři nové příspěvky. Dr.MM Klára Stefanová se rozhodla navázat na svůj předchozí příspěvek, kdy zkoušela porovnat rozpustnost vybraných kuchyňských látek ve vodě při pokojové teplotě a teplotě mezi 70 a 80 °C, a to hned dvěma dalšími příspěvky! Radost nám udělala především příspěvkem na téma „Lze rozpustit gumového medvídka?“. Pokud vás zajímá odpověď na tuto otázku, její příspěvek naleznete hned za tímto komentářem. Oceňujeme však i odvahu, s kterou se pustila do svého druhého příspěvku „Teorie rozpustnosti“, ve kterém diskutovala hlavní faktory ovlivňující rozpustnost látek a jakým způsobem tak činí. Mgr.MM Lukáš Belza pak zkoumal rychlost rozpouštění běžných kuchyňských látek jako cukr a sůl, ale například také léků v závislosti na teplotě vody a mechanické dopomoci mícháním. Všechny příspěvky i s komentáři naleznete na našich stránkách a pod Klářiným příspěvkem pak i nějaké další otázky k zamyšlení.

Peťa

Jak rozpustit gumového medvídka (7,7 b)

Dr.MM Klára Stefanová

V úvodním představení tématka byla položena otázka, zda lze rozpustit gumového medvídka. Odpověď zní samozřejmě, že ano, pokud vezmete správné chemikálie.

Jistotou by v tomto pokusu bylo použití kyseliny sírové. Ta má však mnoho nevýhod. S klesajícím počtem starých akumulátorů v autě, které jí potřebují dolévat, klesá i počet míst, kde lze koupit v podobě 38% roztoku. S případným nákupem se spojena i nenízká pořizovací cena a v období okolí Vánoc je lákavější investovat do jiných komodit, než jsou nebezpečné chemikálie. Dalším místem, kde by se dala sehnat, je školní laboratoř. Bohužel díky jednomu zákonu se školní laboratoře téměř hermeticky uzavřely a studentům je do nich odepřen přístup. Poslední a asi největší nevýhodou je skladování a nebezpečí při manipulaci, kdy se i v domácích podmínkách musí dodržovat velmi přísné podmínky, jinak by došlo k velmi nepříjemnému poleptání. Z těchto důvodů jsem se rozhodla tuto chemikálii nevyužít a medvídky mučit v jiných tekutinách.

Pro účely svého pokusu jsem si sehnala následující chemikálie: toluen, organické rozpouštědlo olejů (s velkou pravděpodobností se jedná o xylen), aceton a kyselinu chlorovodíkovou (15% roztok). Obětmi mého pokusu se stali medvídci prodávaní v balení s názvem SugarLand Mega Bears (Gummy bears), bohužel byl zbytek balení zlikvidován rychleji, než jsem si stihla zdokumentovat složení těchto medvídků.

Nyní se krátce zmíním o charakteru jednotlivých potenciálních rozpouštědel.

Toluen (methylbenzen) je čirá těkavá kapalina, která není rozpustná ve vodě. Se vzduchem tvoří třaskavou směs. Využívá se především na výrobu teploměrů a jako rozpouštědlo barev a laků. Pro člověka je nebezpečný. Jeho vdechování způsobuje podráždění očí a dýchacích cest a tlumí činnost centrální nervové soustavy a oběhového systému. Je hojně zneužíván narkomany, kteří vdechují jeho páry. Bohužel tak činí v nevětraných prostorách a celkově za podmínek takových, aby umocnily účinky toluenu na lidské tělo, a vzhledem k tomu, že není možné tento plyn přesně dávkovat, není ojedinělé, že tato činnost končí smrtí zúčastněného.

Xylen je obecné označené směsi tří derivátů benzenu (*pozn. red.: resp. methylbenzenu*) (methylová skupina je na benzen (*pozn. red.: methylbenzen*) navázána v poloze ortho-, meta-, para-). Jedná se o čirou tekutinu, nasládlého zápachu a hořlavou. Tato směs se v průmyslu využívá jako rozpouštědlo a čistidlo v mnoha odvětvích, namátkou v tiskařství jako rozpouštědlo, kde nahrazuje nebezpečnější toluen, nebo jako čistidlo při výrobě oceli. Získává se při rafinaci ropy. I tato těkavá látka bývá zneužívána jako droga.

Aceton, triviálně dimethylketon (*pozn. red.: systematicky dimethylketon nebo propan-2-on, triviálně aceton*), je bezbarvá kapalina, kterou lze poznat podle specifického zápachu. Má velmi zajímavou vlastnost, a to, že je s vodou neomezeně mísitelný. Se vzduchem tvoří výbušné směsi. Díky své chemické struktuře je velmi reaktivní a je hojně využíván v organických syntézách, stojí na počátku výroby mnohých plastů, barev a laků. V domácnostech ho nalezneme nejčastěji jako odlakovač laku na nehty. Dech, který je cítit po acetonu, má být brán jako podezření, že dotyčná osoba trpí cukrovkou. Ve vysokých koncentracích může být nebezpečný, ale při běžné manipulaci a dodržování základní bezpečnostních pravidel nebezpečí nehrozí.

Kyselina chlorovodíková (HCl), též známá jako solná kyselina, je velmi silná bezkyslíkatá anorganická kyselina. Jedná se o těkavou bezbarvou látku, která může být mírně nažloutlá, pokud je nedokonale vyčištěna a obsahuje železité ionty. Její páry mají štiplavý zápach a při vdechnutí mohou způsobovat poleptání sliznice. Reaguje s neušlechtilými kovy a v koncentrovaném stavu způsobuje korozi. V lidském těle se vyskytuje v žaludku, kde pomáhá zabíjet bakterie přítomné v potravě. (*pozn. red.: Má tam však i další důležité role, např. udržováním nízkého pH zvyšuje aktivitu pepsinu, enzymu rozkládajícího bílkoviny, či umožňuje využívat železo a vitamíny z potravy.*) Využívá se v mnoha odvětvích chemické výroby. Geologové ji využívají k detekci vápence. Její směs s kyselinou dusičnou tvoří lučavku královskou, která je schopná rozpustit zlato nebo platinu.

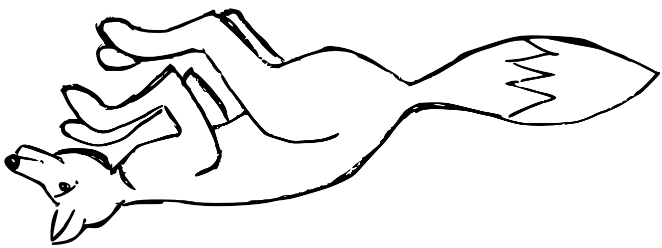
Samotný pokus probíhal tak, že jsem medvídky na 48 hodin naložila do lázně s vybranou chemikálií a počkala, co to s nimi udělá. Pokus probíhal ve vyčištěných skleničkách po přesnídávkách. A výsledky jsou následující. Toluen na první pohled nezpůsobil medvídkovi žádnou újmu. Byl pouze zmrzlý jako všichni přeživší. Avšak poté, co byla oběť vytažena na sníh a chvíli ponechána svému osudu, vytvořila se na jejím povrchu bílá krusta, která se na jiném z medvídků nevyskytla. Tento děj dokazuje, že medvídek nějakým způsobem s toluenem reagoval a vzniklá látka poté reagovala buď se vzduchem, nebo s vodou (sněhem). V případě ponoření do xylenu a acetonu se na první ani na druhý pohled nestalo s medvídkem nic. Pouze byl oproti svým druhům, kteří nebyli podrobeni mučení, mírně ztvrdlý, což bylo způsobeno tím, že pokus z bezpečnostních důvodů probíhal v garáži, kde je v zimních měsících podstatně nižší teplota než v domě. V nálevu kyseliny chlorovodíkové se medvídek úspěšně rozpustil. Původně jsem se domnívala, že reakce bude velmi rychlá, ale nakonec trvala celé dva dny. Jediné, co dokazovalo, že medvídek v kyselině byl naložen, byla barva vzniklého roztoku, který měl stejné zbarvení jako gumový medvídek.

Tímto pokusem jsem si ověřila domněnku, že je možné medvídka rozpustit v kyselině chlorovodíkové. Bohužel se mi však nepovedlo si potvrdit hypotézu, že všechny použité látky způsobí gumové postavičce nějakou viditelnou újmu, je možné, že by se tak stalo po delší době namočení. Při práci jsem dodržovala všechna nutná bezpečnostní opatření.

Zdroje:

`https://cs.wikipedia.org/wiki/Kyselina_chlorovod%C3%ADkov%C3%A1`
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Toluen`
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Xylen`

Klára ve svém příspěvku uvádí, že gumového medvídka lze rozpustit, záleží však na použitém rozpouštědle. Experimentálně pak ukázala, že vhodným rozpouštědlem může být například kyselina chlorovodíková. Otázkou však zůstává, proč se gumový medvídek rozpustil právě a jen v kyselině chlorovodíkové, zatímco v toluenu, xylenu ani acetonu k rozpuštění nedošlo? Jaké další chemikálie by mohly být vhodným rozpouštědlem gumových medvídků? Proč? Čím je způsobeno, že rozpuštění gumového medvídka je tak problematické, zatímco cukr, jeho hlavní složka, se rozpustí např. ve vodě poměrně rychle a ve velkém množství? Jak je to obecně s rozpustností proteinů, sacharidů a lipidů? A co když je „smícháme“ např. v nějaké buněčné membráně? Uměli byste rozpustit list nějaké rostliny či část lidského těla (vlas, nehet atp.)?



Seriál: Spin

V tomto díle se od chemie přesuneme k něčemu trochu základnějšímu – ke kvantové mechanice. Nejprve ale tradičně řešení úloh z minula.

Zadání:

Urči výběrová pravidla pro amonný kationt $NH_4^{\oplus}$. Porovnej s výsledky pro neutrální molekulu amoniaku. Přiřazovat vibrace k délkám vazeb a úhlům mezi nimi nemusíš. (4b)

Řešení:

Začneme určením grupy symetrie amonného kationtu. Sice tušíme, co dostaneme, protože molekula má tvar tetraedru a s tím už jsme se setkali, ale na procvičení… Amonný kationt není lineární; má více hlavních os (čtyři trojčetné, $n = 3$); pětičetné osy nemá; čtyři trojčetné osy má; tři čtyřčetné osy nemá; tři čtyřčetné reflexní osy má; takže mu přísluší bodová grupa symetrie T_d.

Najdeme si a doplníme tabulku charakterů. Grupa T_d má ireducibilní reprezentace A_1, A_2, E, T_1 a T_2. Reprezentace T_1 a T_2 jsou třírozměrné, proto v posledních dvou sloupcích nacházíme trísložkové vektory. Určíme si počty atomů ležících na jednotlivých prvcích symetrie. Můžeme si pomoci obrázky z druhého čísla. V identitě leží všech pět atomů; na trojčetných osách dusík a jeden z vodíků; na dvojčetných osách pouze dusík (procházejí středy hran čtyřstěnu); stejně tak na reflexních osách, v rovinách symetrie leží atom dusíku a dva atomy vodíku. Charaktery většiny prvků grupy najdeme v minulém čísle, dopočteme jen

$$\chi^0\left(S_4\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - 1 = -1 \text{ a } \chi^0\left(S_4^3\right) = 2\cos\left(\frac{3\cdot 2\pi}{4}\right) - 1 = -1\,.$$

T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_v$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2+y^2+z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2-x^2-y^2, x^2-y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)
n_R	5	2	1	1	3		
$\chi^0(R)$	3	0	-1	-1	1		
$\chi(R)$	15	0	-1	-1	3		

Pak spočteme příspěvky jednotlivých ireducibilních reprezentací ve $3N$ reprezentaci:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{24}\Big[1\cdot 15\cdot 1 + 8\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 1 + 6\cdot(-1)\cdot 1 + 6\cdot 3\cdot 1\Big] = 1,\\
a_2 &= \frac{1}{24}\Big[1\cdot 15\cdot 1 + 8\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 1 + 6\cdot(-1)\cdot(-1) + 6\cdot 3\cdot(-1)\Big] = 0,\\
e &= \frac{1}{24}\Big[1\cdot 15\cdot 2 + 8\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot 2 + 6\cdot 0\cdot 1 + 6\cdot 3\cdot 0\Big] = 1,\\
t_1 &= \frac{1}{24}\Big[1\cdot 15\cdot 3 + 8\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 6\cdot(-1)\cdot 1 + 6\cdot 3\cdot(-1)\Big] = 1,\\
t_2 &= \frac{1}{24}\Big[1\cdot 15\cdot 3 + 8\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 6\cdot(-1)\cdot(-1) + 6\cdot 3\cdot 1\Big] = 3,
\end{aligned}
$$

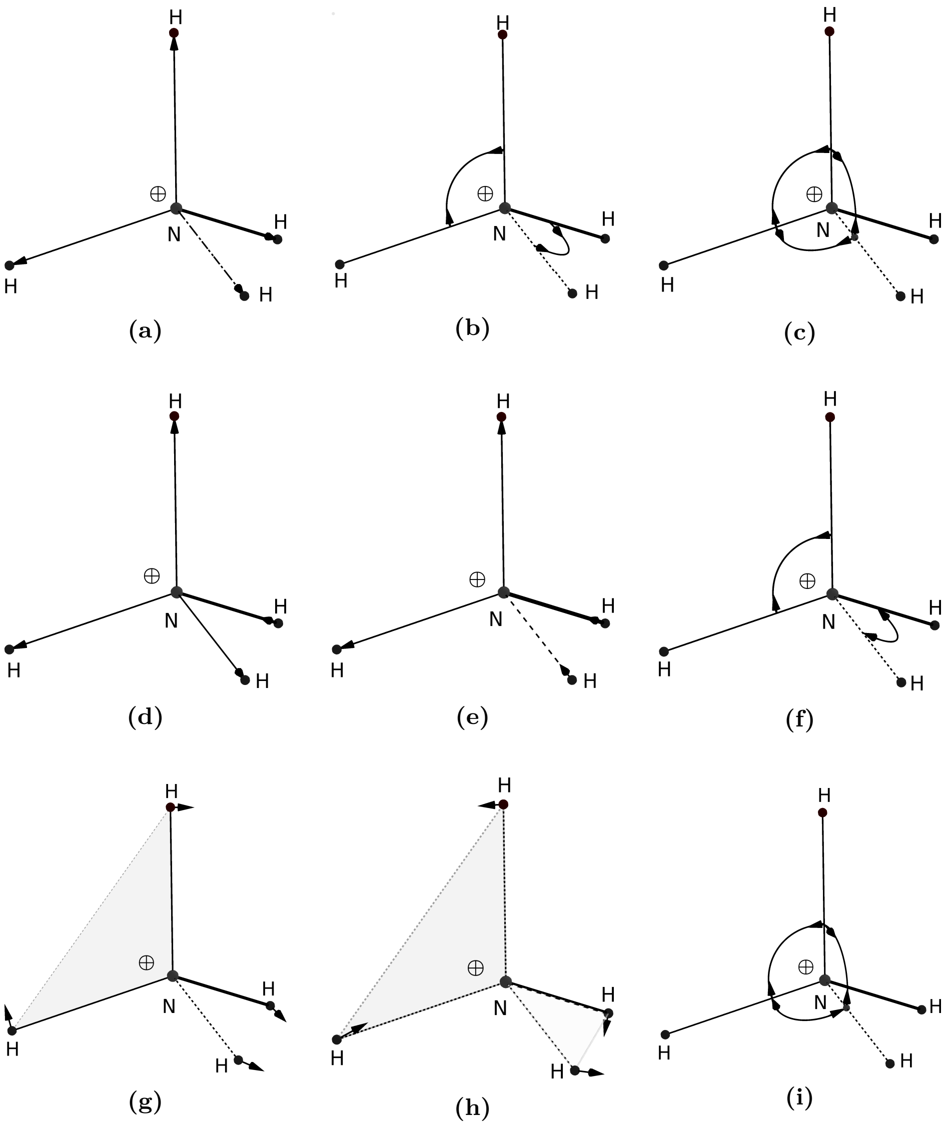
Reprezentace $3N$ se tedy rozkládá jako $R^{3N} = A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus 3T_2$. Translacím přísluší trojrozměrná ireducibilní reprezentace T_2 a rotacím T_1, na vibrace tak zbývá $R^{vib} = A_1 \oplus E \oplus 2T_2$. Vibrace příslušná A_1 je jedna, bude pozorovatelná jen Ramanovou spektroskopií a je symetrická vůči hlavní ose a zrcadlení. Reprezentaci E přísluší dvě vibrace a opět budou pozorovatelné jen Ramanovou spektroskopií, o jejich symetrii nic nevíme. Reprezentaci T_2 přísluší šest vibrací, které budou pozorovatelné oběma spektroskopiemi a jsou antisymetrické vůči rovinám zrcadlení.

Máme tedy celkem šest přechodů v infračerveném absorpčním spektru a devět v Ramanově spektru. Pro neutrální molekulu amoniaku jsme měli v každém spektru jen čtyři přechody. Je tedy zřejmé, že tyto dvě velmi blízké molekuly od sebe dokážeme snadno odlišit.

A které že vibrace to jsou? Reprezentaci A_1 přísluší symetrická změna délek vazeb (Obr. 6a). Reprezentaci E patří dvě vibrace, jednak je to vibrace, kdy dvě protější dvojice atomů vodíku se k sobě přibližují, tedy zmenšuje se úhel mezi jejich vazbami na dusík (Obr. 6b), a ve druhé se úhly okolo jedné vazby zmenšují, zatímco ostatní se zvětšují, vibrace tak připomíná otevírání a zavírání deštníku (Obr. 6c). Reprezentaci T_2 patří všechny antisymetrické vibrace, můžete si je prohlédnout na obrázcích 6d až 6i.

A teď už ke dnešnímu tématu. *Spin* je fyzikální veličina pevně definovaná pro všechny elementární částice. Je to jejich vnitřní parametr, který řídí jejich chování. Je zcela zásadní například pro chemii nebo pro některé jevy v pevné látce (magnetismus, supravodivost). A přesto jej nelze dobře připodobnit k ničemu, co známe z makrosvěta. Existují sice nějaká znázornění spinu, vesměs jsou ale zavádějící. Zkusme se o to proto nesnažit a prostě jej přijměme jako fakt.

Každé částici je přiřazena určitá hodnota spinu a tato určuje její chování. Pokud si tedy částice rozdělíme do vhodných skupin podle toho, jak se chovají, zjistíme, že mají něco společného i hodnoty jejich spinu. Primárně částice dělíme na *fermiony* a *bosony*. Dva stejné fermiony nesmí být ve zcela identickém stavu,



Obrázek 6: Vibrace kationtu amonného. Reprezentaci A_1 přísluší obrázek (a), reprezentaci E obrázky (b) a (c), zbylé obrázky pak reprezentaci T_2.

takže pokud mají být na stejné energetické hladině, musí mít jiný průmět spinu[1]. Bosonů naopak může být v identickém stavu kolik chce. Dál se liší tím, co udělá prohození dvou takovýchto částic s vlnovou funkcí systému.

Vlnová funkce je pojem kvantové mechaniky. *Kvantová mechanika* je fyzikální teorie založená na několika ústředních tvrzeních, *postulátech*, ze kterých je odvozena. Tyto postuláty nelze odnikud odvodit, prostě je předpokládáme. A protože kvantová mechanika popisuje svět velmi dobře, tak se všeobecně uznává, že předpokládáme správně. Prvním z nich je právě *postulát o vlnové funkci*: „Stav zkoumaného systému, popsaného sadou parametrů p, je v čase t_0 popsán vlnovou funkcí $\phi(p, t_0)$." Jelikož vlnová funkce v sobě musí obsahovat všechny informace o celém systému, není její „hodnotou" číslo, ale vektor – stavový vektor $|\psi(t_0)\rangle$. Není to ale vektor jaké znáte, na kartézském prostoru. Je to vektor na prostoru všech možných vlnových funkcí systému, a bází tohoto prostoru jsou opět vhodně zvolené funkce. Vektor značíme v kvantové mechanice pomocí takzvaných *braketů*, to jsou špičaté závorky jedním $\langle \cdot |$ (bra-, takový vektor píšeme jako řádek) nebo druhým směrem $| \cdot \rangle$ (-ket, takový vektor píšeme jako sloupec). Stavový vektor můžeme vynásobit libovolným komplexním číslem a stále bude popisovat stejný stav. Proto jej obvykle normujeme, tedy násobíme takovým číslem, aby měl velikost jedna. Násobky jednoho stavového vektoru sice popisují stejný stav, bylo by ale poněkud otravné, pokud by se nám působením některých operátorů tato velikost měnila. Proto i operátory často obsahují normovací konstanty.

Prohození dvou stejných bosonů $\psi(b_1, b_2, t) = \psi(b_2, b_1, t)$ neudělá nic, vlnová funkce je tedy vůči němu symetrická, naopak prohození dvou stejných fermionů $\psi(f_1, f_2, t) = -\psi(f_2, f_1, t)$ změní znaménko vlnové funkce a ta je tudíž vůči této operaci antisymetrická. Bosony mají celočíselný spin a fermiony poločíselný[2].

Mezi bosony patří především *intermediální bosony* – to jsou částice, které zprostředkovávají nějakou interakci. Typickým příkladem je foton[3]. Intermediální bosony mají velikost spinu 0 nebo 1.[4] Nejznámějšími fermiony jsou elektrony, protony a neutrony. Elektron patří mezi tzv. *leptony*[5]. Leptony mají spin 1/2. Proton a neutron patří mezi *baryony*, tedy částice, které se skládají ze tří *kvarků*. Kvarky mají spin 1/2 a jsou elementární stavební kameny pro těžší částice, nevyskytují se samostatně. Protože baryony obsahují tři kvarky, záleží, jak se v nich spiny poskládají; výsledná částice může mít spin 1/2 nebo 3/2. Další možnou kombinací, do které se mohou kvarky poskládat, je spojení kvarku a antikvarku. Takové částice nazýváme *mezony*. Mezony mohou mít spin 0 nebo 1, patří tedy mezi bosony.

---

[1] Spin je vektorová veličina, to znamená, že má i nějaký směr. Tento směr ale neznáme. Jediné, co můžeme zjistit, je průmět spinu do nějakého směru. To uděláme tak, že v tomto směru aplikujeme magnetické pole. V interakci s polem se uplatní jen složka v jeho směru.

[2] Poločíselná hodnota se dá napsat jako $(2n - 1)/2$, kde n je celé číslo.

[3] Dále máme ještě gluony, W a Z bosony, Gibbsův boson a možná graviton – pokud skutečně existuje.

[4] Nulový spin má jen Higgsův boson, ostatní známé intermediální bosony mají spin 1

[5] Leptony: elektron, mion a tauon a jim příslušná neutrina

V předchozích odstavcích jsme spin brali jen jako vlastnost částice, teď si ho zavedeme kvantově mechanicky. Spin jako takový je vnitřní stupeň volnosti částice. Pozorovatelné fyzikální veličiny s ním spojené jsou průměty spinu do jednotlivých směrů s_x, s_y a s_z a kvadrát spinu $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$. *Postulát o operátorech* nám říká, že každá měřitelná veličina A je popsatelná operátorem $\hat{A}$, který působí na stavový vektor $\hat{A}|\psi\rangle$. Operátor lze napsat jako čtvercovou matici, která se po převrácení podél diagonály (transpozice, $\hat{A}^{\mathrm{T}}$) a komplexním sdružení[6] všech svých prvků nezmění ($\hat{A}^{(\mathrm{T}*)} = \hat{A}$).[7]

Jak vypadá operátor spinu? Operátory průmětu spinu 1/2 do jednotlivých směrů jsou:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y \quad \text{a} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z\,,$$

kde $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta a σ_x, σ_y a σ_z jsou generátory spinové grupy pro danou velikost spinu částice:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operátory průmětu spinu pro částice se spinem 1 jsou:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operátor kvadrát spinu je (pro spin 1/2):

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2 &= \frac{\hbar^2}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) = \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \\
&= \frac{3\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pro daný systém nelze libovolně přesně změřit všechny pozorovatelné veličiny. To, zda můžeme znát přesně nějaké dvě veličiny zároveň, nám řekne *komutátor* jejich operátorů. Komutátor objektů a a b, $[a, b]$, je definován jako $[a, b] = ab - ba$. Pokud je komutátor nulový, $ab = ba$, tedy a a b vzájemně komutují, pak veličiny jim příslušné můžeme zároveň přesně změřit[8]. Komutační relace pro operátory spinu jsou

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = \sum_k i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k\,,$$

[6]Prvek $a + bi$ se změní na $a - bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka; značíme $\hat{A}^*$

[7]Říkáme, že je hermitovská, $\hat{A}^{(\mathrm{T}*)}$ značíme $\hat{A}^\dagger$.

[8]Nejznámějším příkladem komutačních relací jsou *Heisenbergovy relace neurčitosti* mezi polohou a hybností.

kde $\epsilon_{ijk} = 0$, pokud jsou alespoň dva koeficienty shodné, jinak $\epsilon_{ijk} = 1$ nebo -1 podle permutace indexů. Komutátor libovolného operátoru průmětu s operátorem kvadrátu spinu je nulový.

$$\left[\hat{S}^2, \hat{S}_i\right] = 0$$

Důsledkem tedy je, že nelze přesně změřit dva různé průměty spinu současně, maximálně průmět do jednoho směru a kvadrát.

Podle *postulátu o kvantování* jsou jediné měřitelné hodnoty fyzikální veličiny A *vlastní čísla* a_n operátoru $\hat{A}$. Každému vlastnímu číslu a_n přísluší stav systému popsaný vlastním vektorem $|\psi_n\rangle$ operátoru $\hat{A}$. Vlastních čísla a vektory operátoru získáme řešením rovnice:

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

Spočteme si vlastní čísla a vektory operátoru $\hat{S}_z$ pro spin $\frac{1}{2}$:

$$\hat{S}_z|\psi\rangle = s_n|\psi\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = s_n\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

Tady zavádíme stavový vektor popisující spin jako dvousložkový vektor (u, v). To proto, že průmět spinu jedné částice se spinem $-1/2$ má dva možné stavy, $+1/2$ a $-1/2$. Koeficient u pak přísluší zastoupení stavu $+1/2$ a koeficient v zastoupení stavu $-1/2$.

V prvním kroku převedeme všechny členy rovnice na druhou stranu.

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} - s_n\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} - s_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}s_n & 0\\ 0 & s_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2} - s_n & 0\\ 0 & -\frac{\hbar}{2} - s_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Taková rovnice má obecně více řešení. V druhém kroku řešíme tzv. *sekulární rovnici*, tedy rovnici, která nám určuje, pro která s_n je původní rovnice řešitelná. V ní vystupuje *determinant* matice v původní rovnici.[9]

$$0 = \det\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2} - s_n & 0\\ 0 & -\frac{\hbar}{2} - s_n\end{pmatrix} = \left(\frac{\hbar}{2} - s_n\right)\left(-\frac{\hbar}{2} - s_n\right) - 0 \cdot 0 = s_n^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

[9] Determinant je součet součinů všech takových permutací prvků matice, kde bereme vždy z každého řádku i sloupce právě jeden prvek. Každý sčítanec má navíc před sebou faktor $+1$ nebo -1 podle toho, jestli permutace prvků je sudá nebo lichá. Obecný postup výpočtu determinantu najdete na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Determinant`. Pro matice 2×2 je roven $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, pro matici 3×3 pak $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

$$\Rightarrow s_n = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Takže částice se spinem 1/2 může mít průmět spinu $+\hbar/2$ nebo $-\hbar/2$. Obecně pro částice se spinem s jsou možné hodnoty průmětu $\{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$. Každému vlastnímu číslu je přiřazen *vlastní vektor* a všechny jeho násobky. Najdeme je tak, že vlastní čísla dosadíme do rovnice 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} \hbar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\hbar v_1 \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} \hbar u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Vektory normujeme na velikost 1 a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \uparrow, \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow$$

Tyto vektory jsou jednou z možných bází prostoru prostoru vlnových funkcí, popisujících spin – první z nich reprezentuje průmět spinu $+1/2$ a druhý $-1/2$.

Zmínili jsme, že σ_x, σ_y a σ_z jsou generátory spinové grupy. Dosud jsme pracovali s konečnými maticemi a s generátorem jsme se setkali jen u cyklických grup. Tam platilo, že jakýkoli prvek g grupy G se dal napsat jako α-tá „mocnina“ generátoru X (ve smyslu opakovaného provedení grupové operace). Jednou z „mocnin“ byl i jednotkový prvek. U nekonečných grup se k jednotkovému prvky nikdy nedostaneme. Příkladem je grupa celých čísel s operací sčítání: Jejími generátory jsou $+1$ a -1, jejich opakovanou aplikací dostaneme libovolné celé číslo. Podobně generovaným spojitým grupám říkáme *Lieovy grupy.*

A jakouže grupu generují matice σ_x, σ_y a σ_z? Jde o grupu rotací ve spinovém prostoru $SU(2)$. Jejími prvky jsou čtvercové matice dimenze 2. Jsou unitární (odtud U ve zkratce), to znamená, že jejich determinant je v absolutní hodnotě roven jedné. Dále mají nulový součet prvků na diagonále (odtud S jako speciální). Tyto vlastnosti mají na svědomí, že matice nemění velikost vektoru, na který působí. Z těchto vlastností také plyne, že generátory této grupy musí být hermitovské matice. A hle, to je podmínka na kvantové operátory definovaná v postulátu o operátorech.

Grupa $SU(2)$ je tedy sjednocením tří „přímek“ v prostoru matic spojených s jednotlivými generátory. Pokud bychom navíc přidali i všechny lineární kombinace generátorů, získali bychom prostor. Pro něj už neplatí grupová pravidla $SU(2)$, má ale svoje. Jsou na něm definovány dvě operace: lineární kombinace a komutátor. Této struktuře říkáme *Lieova algebra* $SU(2)$.

Matice σ_x, σ_y a σ_z jsou jednou z možných bází Lieovy algebry $SU(2)$. Můžeme ale najít i jiné báze. Velmi užitečné je nahradit libovolné dvě matice, typicky σ_x

a σ_y, jejich lineárními kombinacemi $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$ a $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$[10]. Podívejme se, co jednotlivé matice dělají s bázovými vektory prostoru spinů:

$$\sigma_+ = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_- = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_x u_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \sigma_x u_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_y u_1 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}, \qquad \sigma_y u_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_z u_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_z u_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix},$$
$$\sigma_+ u_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_+ u_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_- u_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \qquad \sigma_- u_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Protože stavový prostor je v kvantové mechanice stavěn tak, že každý násobek vlastního vektoru je fyzikálně tentýž vektor, budeme v dalších výpočtech konstanty vynechávat a vektory budeme psát v jejich nejjednodušším tvaru s malými celými čísly.

Vidíme, že σ_x, σ_y, σ_z vektor otáčejí. Můžete si sami ověřit, že dvojí působení jedné matice na vektor jej vrátí zpět. Matice σ_+ a σ_- se takto nechovají. Matice σ_+ posune průmět spinu $-1/2$ na $+1/2$, tedy nahoru ($\uparrow$), její aplikovaní na průmět spinu $+1/2$ dá nulový (neplatný) výsledek – žádný vyšší průmět spinu už není k dispozici. Matice σ_- naopak posune průmět spinu $+1/2$ na $-1/2$, tedy dolů ($\downarrow$), a její aplikovaní na průmět spinu $-1/2$ dá nulový (neplatný) výsledek, protože žádný nižší průmět spinu už není k dispozici. Operátorům s nimi spojeným říkáme *posunovací operátory*. Krom samotné matice obsahují ještě normovací faktor, aby nám vždy vyšla správně velikost výsledného vektoru (jednotková).

Máme tedy popsanou jednu částici se spinem $1/2$. Teď zkusíme dvě takové částice popsat zároveň – uděláme *kartézský součin* jejich spinových prostorů a také jejich spinových algeber $s_1 \otimes s_2$. Kartézský součin vytvoří z dvourozměrných vektorů $s = (u, v)$ čtyřrozměrné vektory, popisující spinové souřadnice první i druhé částice $s = (u_1u_2, u_1v_2, v_1u_2, v_1v_2)$. Za bázi tohoto prostoru můžeme zvolit vektory $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0,)$, $(0,0,1,0)$ a $(0,0,0,1)$. Můžeme si je také zapsat podle toho, jaký spin má která částice $|\uparrow_1\uparrow_2\rangle$, $|\uparrow_1\downarrow_2\rangle$, $|\downarrow_1\uparrow_2\rangle$ a $|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$. Potřebujeme převést i matice, které mezi spinovými vektory operují. Od takových matic chceme, aby působily na oba spiny nezávisle. Tady zaveďme $\sigma_2 = (\sigma^1\hat{1}^2 + \hat{1}^1\sigma^2)/\sqrt{D}$, kde

[10] Tento výběr vede sice ke stejnému výsledku, jako jakýkoli jiný, ale nejkratší cestou.

horní index označuje, na kterou z částic působíme, jednička žádnou změnu, odmocnina z dimenze prostoru je normovací konstanta (kterou budeme vynechávat) a dvojka v dolním indexu značí matici působící na dvojici spinů. Ukážeme si to na příkladu matice σ_y:

$$\sigma_y \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv \\ iu \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_y^1 \hat{1}^2 \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_1 v_2 \\ v_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv_1 u_2 \\ -iv_1 v_2 \\ iu_1 u_2 \\ iu_1 v_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{1}^1 \sigma_y^2 \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_1 v_2 \\ v_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iu_1 v_2 \\ iu_1 u_2 \\ -iv_1 v_2 \\ iv_1 u_2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{2,y} \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_1 v_2 \\ v_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv_1 u_2 - iu_1 v_2 \\ -iv_1 v_2 + iu_1 u_2 \\ iu_1 u_2 - iv_1 v_2 \\ iu_1 v_2 + iv_1 u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{2,y} = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Vzpomeňme si na teorii reprezentací. Naše matice nemá kvazidiagonální tvar, ale vhodnou volbou báze prostoru, na který působí, tedy prostoru spinů, by mohlo být možné ji na něj převést. Ve spinovém počtu existuje technika jak takovou bázi najít, a to pomocí posunovacích operátorů. Začneme s nějakým krajním stavem, nejvyšším nebo nejnižším (všechny částice mají průmět spinu maximální, nebo všechny minimální). Na tento stav budeme působit posunovacími operátory. My si vybereme stav $(1,0,0,0) = |\uparrow\uparrow\rangle$. Pokud na takový stav budeme působit operátorem σ_+, dostaneme nulu, protože vyšší stav není:

$$\sigma_+ |\uparrow\uparrow\rangle = \left(\sigma_+^1 \hat{1}^2 |\uparrow\uparrow\rangle + \hat{1}^1 \sigma_+^2 |\uparrow\uparrow\rangle\right) = 0|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle 0 = 0$$

Pokud na něj zapůsobíme operátorem σ_-, dostaneme nižší stav. Tento můžeme dále posouvat dolů, dokud nedojdeme k nule – další nižší stav už není (na konci zápis vektoru ve staré bázi).

$$\begin{aligned} \sigma_- |\uparrow\uparrow\rangle &= \left(\sigma_-^1 \hat{1}^2 |\uparrow\uparrow\rangle + \hat{1}^1 \sigma_-^2 |\uparrow\uparrow\rangle\right) = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle = (0,1,1,0)\,, \\ \sigma_- \left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right) &= \left(\sigma_-^1 1^2 \left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right) + 1^1 \sigma_-^2 \left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right)\right) = \\ &= 0 + |\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle + 0 = |\downarrow\downarrow\rangle = (0,0,0,1)\,, \\ \sigma_- |\downarrow\downarrow\rangle &= \left(\sigma_-^1 1^2 |\downarrow\downarrow\rangle + 1^1 \sigma_-^2 |\downarrow\downarrow\rangle\right) = |0\downarrow\rangle + |\downarrow 0\rangle = 0 \end{aligned}$$

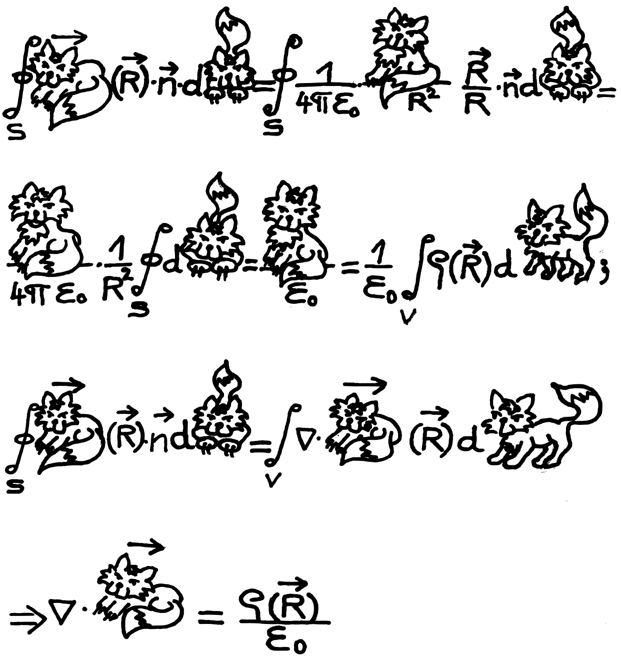
Tak jsme získali tři vektory nové báze: $|\uparrow\uparrow\rangle$, $(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$ a $|\downarrow\downarrow\rangle$. Skupině bázových vektorů, které jsou mezi sebou propojeny posunovacími operátory, říkáme *multiplet*. V tomto případě jsme získali *triplet*. Ještě nám nějaký bázový vektor chybí, najdeme jej tak, že hledáme nějaký jednotkový vektor, který je kolmý na všechny předchozí. Nejjednodušší způsob, který většinou vede ke kýženému výsledku, je poupravit druhý vektor z prvního multipletu, plus vyměníme za mínus, tedy $(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle)$. Ověříme, že je kolmý na zatím nalezené bázové vektory – jejich skalární součin je nulový.

$$\begin{aligned}
(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) \cdot |{\uparrow\uparrow}\rangle &= (0,1,-1,0)\cdot(1,0,0,0) = 0+0+0+0 = 0\,,\\
(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) \cdot (|{\downarrow\uparrow}\rangle + |{\uparrow\downarrow}\rangle) &= (0,1,-1,0)\cdot(0,1,1,0) = 0+1-1+0 = 0\,,\\
(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) \cdot |{\downarrow\downarrow}\rangle &= (0,1,-1,0)\cdot(0,0,0,1) = 0+0+0+0 = 0
\end{aligned}$$

Ano, je to náš vektor. Pokud by nebyl, museli bychom hledat obecně jednotkový vektor kolmý na dosud nalezené. Zkusíme na něj aplikovat posouvací operátory:

$$\begin{aligned}
\sigma_-(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) &= \left(\sigma_-^1\hat{1}^2(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) + \hat{1}^1\sigma_-^2(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle)\right) =\\
&= 0 - |{\downarrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\downarrow}\rangle - 0 = 0\,,\\
\sigma_+(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) &= \left(\sigma_-^1\hat{1}^2(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle) + \hat{1}^1\sigma_-^2(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle)\right) =\\
&= |{\uparrow\uparrow}\rangle - 0 + 0 - |{\uparrow\uparrow}\rangle + 0 = 0
\end{aligned}$$

Vidíme, že tento vektor nejde nikam posunout, jde o *singlet.* Protože $3+1=4$, máme už nové bázové vektory všechny. V této bázi už mají všechny matice σ blokový charakter, pro ukázku σ_y.



Víme, že operátor působící na dva spiny získáme jako součet $\hat{\sigma}_{2,y}(\hat{\sigma}^1\hat{1}^+\hat{1}^1\hat{\sigma}^2)$. Dále víme, že:

$$\sigma_y \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv \\ iu \end{pmatrix}$$

Takže u nahrazujeme $-iv$ a v nahrazujeme iu.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{2,y}\begin{pmatrix} u_1u_2 \\ u_1v_2 + v_1u_2 \\ v_1v_2 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} &= (\hat{\sigma}^1\hat{1}^2 + \hat{1}^1\hat{\sigma}^2)\begin{pmatrix} u_1u_2 \\ u_1v_2 + v_1u_2 \\ v_1v_2 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -iv_1u_2 \\ -iv_1v_2 + iu_1u_2 \\ iu_1v_2 \\ -iv_1v_2 - iu_1u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -iu_1v_2 \\ +iu_1u_2 - iv_1v_2 \\ iv_1u_2 \\ iu_1u_2 + iv_1v_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -i(u_1v_2 + v_1u_2) \\ 2i(u_1u_2 - v_1v_2) \\ i(u_1v_2 + v_1u_2) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Z toho už vidíme tvar matice σ_y:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 2i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že má kvazidiagonální tvar. Převedení ostatních matic do tohoto tvaru si můžete ověřit sami. Podařilo se nám tedy tuto reprezentaci rozdělit na dvě, jednu třídimenzionální T a jednu jednodimenzionální S: $2 \otimes 2 = S \oplus T$. Reprezentace spinové grupy má tolik dimenzí, kolik má operátor projekce spinu do libovolného směru možných vlastních čísel. Tady vidíme, že pro dva elektrony jsou čtyři možné stavy rozdělené jako 3+1, a to skutečně má svůj fyzikální význam. Sloučením dvou elektronů nám může vzniknout singletní stav S, který má spin 0, nebo tripletní stav T se spinem 1. Singletní stav může mít průmět spinu do libovolného stavu jenom 0, tripletní 1, 0 nebo -1. Singlet a triplet mezi sebou mohou jen omezeně přecházet, jsou velmi stabilní.[11]

V elektronových obalech atomů a molekul skutečně pozorujeme rozlišitelné multipletní stavy (míru spárování elektronů) a omezeně mezi nimi jde přecházet tak, že se orbitaly a elektrony přeskládají. Pro většinu atomů a molekul se sudým počtem elektronů má singletní stav nejnižší energii, proto běžně pozorujeme u molekul nulový spin, jsou ale výjimky. Jednou z nich je molekula kyslíku, která je

[11] Takový přechod je *zakázaný*, takže k němu dochází s malou pravděpodobností, jak jsme si už říkali u výběrových pravidel.

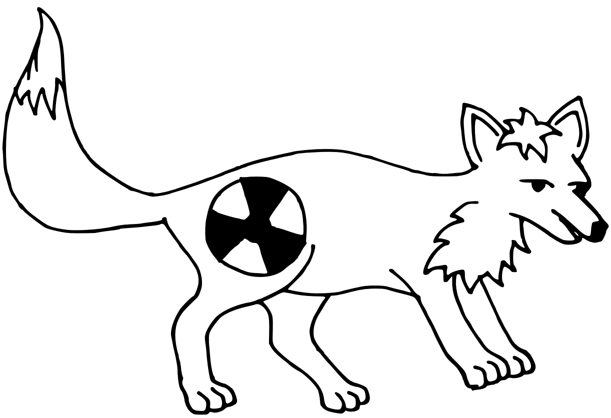
v základním stavu tripletní. Atomy či molekuly s lichým počtem elektronů (typicky jedním nespárovaným elektronem), *radikály*, pak mají spin poločíselný.

Tohle skládání samozřejmě platí pro všechny částice se spinem 1/2. Pokud skládáme mezony z kvarků, můžeme také získat tripletní i singletní částice. Nazývají se *vektorové* a *skalární*. Například mezon složený z kvarků up a anti-down se značí π^+ pokud je singletní, neboli skalární, a ϱ^+ pokud je tripletní, neboli vektorový. Tyto dvě částice je možné rozlišit.

Úloha 5.5 – Teorie grup IV (5b)

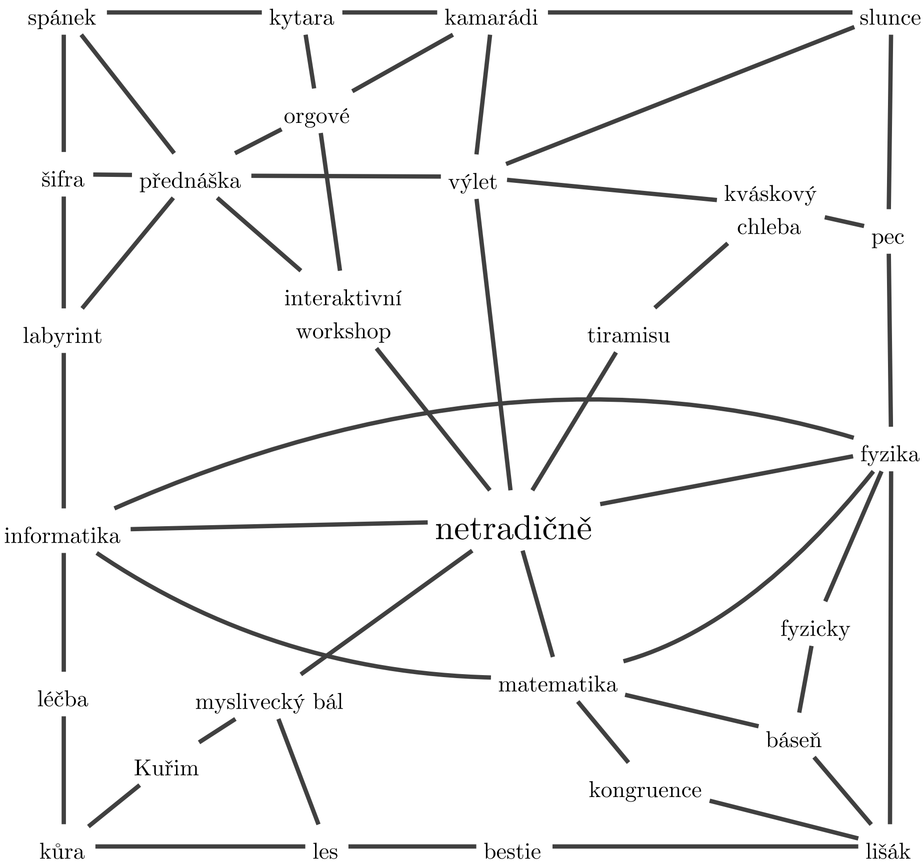
Zpracuj dvojici částic se spinem 1. To znamená:

1. Najdi vlastní čísla a vlastní vektory operátoru $\hat{S}_z$ (1b)
2. Napiš posunovací operátory pro spin 1. (1b)
3. Najdi bázi, pro kterou budou mít matice operátorů kvazidiagonální tvar, a popiš, co je výsledkem. (1,5b)
4. Ukaž, že matice alespoň dvou operátorů jsou v této bázi skutečně kvazidiagonální. (1,5b)



Hádanka na závěr

Graf je množina vrcholů V (zde značena slovy) a množina hran E mezi nimi (zde značena spojnicemi). Označme všechny vrcholy zde uvedené jako P. P je podmnožina všech vrcholů V.



Pak platí, že

$$(\exists s, s \in V)(\forall x, x \in P)((s, x) \in E):$$

`https://mam.mff.cuni.cz/soustredeni/pripravujeme/`

Ty $\in s$?

Výsledková listina 3. čísla

				Úlohy										
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**5**	**t1**	**t2**	**t3**	**t5**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$P. Šimůnek	3	85,6	1,5	2,1	3,0	3,3	3,9			5,5		19,3	69,6
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Stefanová	4	79,2							5,5		11,7	17,2	54,2
3.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$D. Krasula	3	135,9	1,5					4,0				5,5	33,9
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Belza	4	31,1	1,0	2,0	3,0						4,1	10,1	31,1
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$T. Domes	3	70,0		2,0	3,0							5,0	27,0
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$M. Poljak	4	63,0										0	25,0
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Václavek	4	51,5	3,0	2,1								5,1	21,5
8.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$P. Souček	4	110,7	2,3	2,0								4,3	20,7
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Souza de Joode	Z8	19,3		2,0								2,0	19,3
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	2	45,0	1,0	2,0								3,0	19,0
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$D. Chytilová	2	18,8	1,7	2,0								3,7	18,8
12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Pallová	1	13,8										0	13,8
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$D. Jurdová	4	23,0										0	13,0
14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Pokorný	4	60,3		2,0	3,0							5,0	12,3
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$S. Rosecká	4	20,0										0	12,0
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Domes	1	11,6										0	11,6
17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$P. Hudec	2	11,5										0	11,5
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Zika	4	13,7	1,5	0,0								1,5	10,7
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$P. Petráš	4	10,4										0	10,4
20.–23.	J. Gocník	4	9,6										0	9,6
	L. Kundratová	1	9,6	0,5	2,1								2,6	9,6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	2	27,6										0	9,6
	T. Špalková	3	9,6										0	9,6
24.	T. Večeřa	1	8,9										0	8,9
25.	O. Buček	2	8,8	1,0	2,0								3,0	8,8
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	2	14,6		2,1								2,1	8,6
27.–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Dittrich	4	47,1	2,3	2,0								4,3	8,1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$A. Kostelecká	4	10,1	2,5									2,5	8,1
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	2	33,1										0	8,1
30.	A. Jandová	1	8,0										0	8,0
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$D. Žáček	3	18,9										0	7,9
32.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$O. Knopp	2	18,6		2,1								2,1	7,6
33.–34.	T. Piskovský	1	6,4		2,0								2,0	6,4
	Z. Sýkora		6,4		2,0								2,0	6,4
35.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$E. Mlynárčiková	3	17,2										0	6,2
36.	T. Hladíková	2	6,1										0	6,1
37.	M. Koval	1	5,9										0	5,9
38.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$S. Lukeš	3	27,2		2,0								2,0	5,2
39.	M. Horváth		4,6										0	4,6
40.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$P. Šťastný	3	36,2	2,2	2,0								4,2	4,2
41.	A. Šámal	2	6,6										0	3,6
42.–44.	F. Chocholatý	1	3,5										0	3,5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Doležalová	4	31,5										0	3,5
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$P. Turinský	3	16,5										0	3,5
45.	M. Šedová	2	3,2										0	3,2
46.	D. Štípková	3	3,1	0,1	2,0								2,1	3,1
47.–50.	L. Hrubčík		3,0		2,0	1,0							3,0	3,0
	A. Neubauerová	2	8,0	1,0	2,0								3,0	3,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Vala	2	11,0										0	3,0
	F. Zajíc	3	8,0										0	3,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	5	t1	t2	t3	t5	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy										
51.–52.	A. Andrýsková	3	2,6										0	2,6
	K. Řezáčová	1	2,6										0	2,6
53.	T. Pálková		2,3										0	2,3
54.	J. Bartoš	1	2,1										0	2,1
55.–56.	K. Moudrá	3	2,0										0	2,0
	J. Pospíšil	2	2,0										0	2,0
57.–58.	K. Tulingerová	1	1,6										0	1,6
	A. Štrpka	1	1,6										0	1,6
59.	N. Petruny	2	1,3										0	1,3
60.	S. Burešová	2	8,0										0	1,0
61.	M. Miček	1	0,6	0,0	0,0		0,1						0,1	0,6
62.–63.	M. Balla	1	0,1										0	0,1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Paidar	2	19,1										0	0,1
64.	J. Marek		0,0										0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`

matfyz