

Zadání úloh 4. série – str. 2 • Řešení úloh 2. série – str. 5

Řešení témat – str. 10

Dr.^{MM}Marian Poljak: Postřehy ke hře – str. 10

Dr.^{MM}Petr Šimůnek: Základní pravidla a poznatky – str. 12

Doc.^{MM}Dominik Krasula: Rozdělování do volebních obvodů – str. 15

Dr.^{MM}Klára Stefanová, Mgr.^{MM}Dominika Jurdová:

Měření rychlosti diabolky – str. 21

Mgr.^{MM}Sára Rosecká: Termosky – str. 29 • Seriál: Molekuly – str. 31

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Naši milí čtenáři,

v lednu organizátory M&M překvapily tři věci: sníh v Praze, blížící se zkouškové období a počet došlých účastnických řešení. Za sníh i za vaše řešení jsme moc rádi. Abyste mohli s takovou vervou řešit i nadále, nové číslo jsme pro vás doslova nabili obsahem. Reagujte na ně, rozvíjejte je, bojte zažité představy.

Motivací vám může být například to, že je již znám termín jarního soustředění: 23. 4. až 1. 5. 2016. Volili jsme ohleduplně – maturanti, počítáme i s vámi.

Kdo by se s matfyzáky chtěl potkat dříve než na soustředění, může zavítat 11. února na *Jeden den s fyzikou*. Více informací tradičně na <http://mff.cuni.cz/verejnost>.

Na závěr ještě tipy na zajímavé čtení: Nový seriálový článek na straně 31 je tentokrát praktický a věnuje se molekulám. A ještě před ním najdete povedené články Mgr.^{MM}Sáry Rosečeké, Dr.^{MM}Kláry Stefanové a Mgr.^{MM}Dominiky Jurdové, shrnující konfery ze soustředění. Autorky chválíme a vám všem přejeme hezké čtení.

vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání třetí série: 1. 3. 2016

Čtveřice výletníků se na sebe významně podívala, a přestože Zdeněk s Tomášem a Petrem neměli o Janině zkoumání rychlosti deště ani potuchy, pochvala jim lichotila. Jana se pro sebe usmála, schovala svůj vzkaz pro M, protože už evidentně všechno věděl, a tiše se dmula pýchou. Měla zase plno energie a nadšení vydat se na další cestu. Na lístku stálo, že se mají na rozcestí vydat doprava. Po chvilce chůze se dostali na vyhlídku, kde na ně čekal první dnešní úkol. Tomáš se trochu unaveně posadil a sledoval ostatní, jak hledají všechny instrukce. Tohle spaní ve stanu ho příliš nezaujalo a radši by si řešil hádanky někde v suchu doma. Po chvilce hledání měli ostatní kompletní úkol a mohli se do něj pustit.

Úloha 4.1 – Divné psaní (4b)

Vaším úkolem je dešifrovat následující vzkaz ve finštině (text byl před zašifrováním zbaven diakritiky, takže používá pouze anglickou abecedu). Je to substituční šifra. Úkolem není nalézt český překlad, ale možná za něj bodík navíc bude.

Cbfb wjxxjj ysfnthvbutuz vs guxxs bz znxvs ystss. Wngsxxs cbfbh gpbksh nzuyyswgnnz wbukjz xnthus, vswsxss, tnuzss vs fjbtbs, yjhhs ynhguggs zn kbuksh wsphhss ypbg ybzucjbxugnycss fskuzhbs, wjhnz gjbysuinz fssnhhs vs xjbzzbzzu-uhhpnz wsgknvs. Gpwppxs cbfbh wnfssksh ksfskuzhbs hsxkns ksfhnz gpbys-xxs gunzus, vswsxs vs tnuzunz xugswgu. Hsxknxxs, wjz fskuzhbs bz xjbzzbggs kstnyysz, cbfbh nhguksh nzguguvsgnghu vswsxss. Cbfb cpghppwuz tsughsyss vswsxs ynfhuz cswgjugnz tszrnz xscu. Ypbg tnuzswgkuh vs ksfkjh wxcssksh cbfbvz fskuzzbwgu, vbg vswsxss nu bxn hsfennwgu gshskuxxs. Vswsxughs cbfb

gjbguu csxxnfbcbfbzvswsxss. Cbfbz fjjszgjxshjg pwguzwnfhsughjj hsxknxxx vs cbhguz ynfwhupg bz nfuhsuz kstsuznz. Cbfb yjughjhss hsxkuguz pwguystsughn nxsuzhs vs hsxku ynfwhugn cbfbxxn xsuthjyugh vs vbcs ksuz tnruggsgbku-syugh. Cbfb yznzhss hsxknxxx zbfyssxughuwuz zbus kuuinzznwgzn csuzbgssz. Zpwpuguz pxnughpzh xugsfjbwuzhs bz yjjhshzjh hukszznhhs ynfwhhsksgu.

Tomáš se na chvíli přidal k luštění, ale když skončili, výsledek ho zklamal. „Vždyť tam nejsou žádné instrukce, kam pokračovat! Nechal nás tady luštit nějaký náhodný text, který ani nevíme, jestli byl určený pro nás, a přitom nám neřekl, kam pokračovat. Aspoň že tam dole jezdí vlak, budu se mít jak dostat domů!“ To vyburcovalo Petra: „Přece se tak snadno nevzdáš!? Podívej se kolem sebe, třeba tu něco ještě bude.“ Přátelé se otočili a v tu chvíli zaslechli sotva znatelné zašustění zmoklých listů a zahlédli pohyb. Před nimi ležel na zemi papír. Mnohem úsečnější, naškrábanější a méně propracovaný než obvykle. Petr papíru nevěnoval pozornost. Bez zaváhání vběhnul mezi stromy, kde tušil jejich průvodce, a dobrou čtvrt hodinu pročesával podezřelý kousek lesa. Nic. M byl rychlejší. Někteří jeho společníci zůstali u papíru, jiní se přidali k hledání. Když Jana viděla, jak dlouho už nic nenašli a že stopa už dávno vychladla, prohlásila: „Proč ho vlastně tak honíme? Taky bych ho ráda potkala, ale třeba má důvod, proč si s námi zatím jen dopisuje. A podívejte, na lístku je další trasa, tak na co čekáme?“

Cesta byla popsána trochu méně jasně, než doteď. M jim radil, aby se nějak dostali dolů k řece a kus zpátky. Prý tam určitě objeví způsob, jak se dostat přes řeku. To bylo něco pro Petra. Vedl celou skupinku dolů místy po neznačené cestě na jih, místy úplně mimo cesty. Nakonec se ale dostali k velké silnici křížící se s železnicí, kde už dříve byli. „No a co teď? Žádný most?“, nabručeně poznamenal Tomáš. „To bychom měli moc jednoduché, pojďme se podívat k té řece“, povídal Zdeněk. Tomáš se otráveně loudal vzadu, zatímco Jana zahlédla na řece menší loď, která je nakonec převezla na druhou stranu.

Kupodivu Tomášovi náladu nezlepšila ani loďka, ani další lístek, který našli na sloupu za řekou. Ve vesnici si začal stěžovat, že by si dal nějaké pořádné jídlo, kofolu a že ho bolí nohy. „To teda omuluješ brzo“, usmála se Jana, když si vzpomněla, jak tohle slovo v horách používal její kamarád, když básnila o kilech meruňkového jogurtu a kuřeti na smetaně. „Přece se teď s tím nebudeme zdržovat, máme velké poslání!“ Tomáš ale začal nanovo: „Já bych si tak zaplavoval doma v bazénu! Že já jsem radši nezůstal tam nebo nejel se sestrou k moři!“

Úloha 4.2 – Kruhový bazén (3b)

Máme zapuštěný bazén kruhového půdorysu o poloměru R (index lomu vody n_2 , index lomu vzduchu n_1). Do jaké maximální hloubky se může potopit plavec, aby ve světelném kruhu nad sebou teoreticky viděl celý prostor nad hladinou? (Uvažujeme zcela rovnou vodní hladinu.)

Když ho Jana viděla, poprosila velícího Petra, aby dal pár minut pauzu, a slíbila Tomášovi, že si na nějakém příhodném místě uvaří oběd a odpočinou. Po pauze se

vydali podle instrukcí vesnicí na sever, víceméně pořád po červené značce, až se dostali ze zástavby znovu ke skalám. Byla tam krásná cesta podél řeky, sem tam prolézání, spousta výhledů a oni skoro zapomněli, že u potoka měli odbočit doprava. Vzpomněli si, až když už ho minuli, ale naštěstí Tomáš už hodnou chvíli vyhlížel místo na oběd, tak si potok pamatoval. Vrátili se k němu a podél potoka dorazili ke studánce. Protože už jim docházela voda, rychle se k ní vrhli a z malého proudu naplnili všechny láhve. Jana si sedla k vaření a Zdeněk jí pomáhal krájet suroviny. Tomáš zatím pomalu bloumal po okolí, když v tom se rozzářil. Za studánkou ležela hromada svíček a sirky. Zavolal na Petra, aby si s ním zahrál hru, kterou právě vymyslel.

Úloha 4.3 – Hra se svíčkami (4b)

Na stole je pevně umístěno 2016 svíček. Dva hráči hrají následující hru. V každém tahu hráč rozsvítí nebo zhasne jednu ze svíček, ale nesmí to provést tak, aby se rozsvícené svíčky ocitly ve stejném rozestavení, jako už někdy dřív ve hře. Hráči se střídají v tazích a prohrává ten hráč, který už nemůže provést tah. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Když se dojedlo a dohrálo (ono s 2016 svíčkami jim to zabralo pořádně dlouho), vydali se všichni spokojeně na další cestu. Chvillemi jim už bylo skoro jedno, kam je M směřuje, ale užívali si cestu během krásného dne, běhali kolem skal, lezli po nich a hráli všemožné hry. Přitom se stalo, že se Jana s Petrem oddělili od ostatních a dlouze si povídali. Petr byl Janě stále sympatičtější, povídal jí o svých cestách, jak rád hraje na housle a baví ho divadlo. Už skoro hltala každé jeho slovo, čehož si Petr po chvíli všimnul a lichotilo mu to. V tom se ale zarazil, když si uvědomil, že se vlastně tak trochu ztratili. Po chvíli volání, na které ale nikdo neodpovídal, začala Jana panikařit. „Jak se teď dostaneme zpátky? Nemáme mapu a dokonce i kompas zůstal u Zdeňka! Aspoň zpátky k řece kdybychom se dostali, podle té už někam dojdeme. . . “ V tu chvíli Petr sundal batoh, vytáhnul z něj svůj moderní notebook, který dokonce uměl přijímat i GPS, a dal se do práce. Než ale stihnul najít, co potřeboval, technika zklamala.

Úloha 4.4 – Klávesnice (3b)

Potkala vás nešťastná nehoda – vašemu notebooku se rozbila klávesnice a touchpad. Situace ale není tak zoufalá, z kláves fungují šipky a **Enter**, navíc jste zrovna měli zapnutou softwarovou klávesnici. Softwarová klávesnice je obdélníková tabulka znaků s kurzorem. Kurzor vždy ukazuje na jeden znak a lze jím po tabulce pohybovat pomocí šipek. Stiskem klávesy **Enter** se vypíše znak, na který ukazuje kurzor. Text **ahoj** by bylo možno napsat na následující klávesnici (hvězdičkou je označena počáteční pozice kurzoru) jako:

Enter, →, Enter, →, Enter, ←, ↓, Enter

a*	h	o
b	j	a
r	3	g

Jelikož lenost je hybnou silou pokroku, chcete se při psaní co nejméně nadřít. Proto potřebujete vymyslet algoritmus, který pro zadaný text a zadanou klávesnici najde nejmenší počet stisků skutečných kláves (tj. šipek a **Enteru**), pomocí kterého lze text na klávesnici napsat. Pro klávesnici z příkladu a slovo **ahoj** nám stačí pět stisků kláves. Samozřejmě chcete, aby byl algoritmus co nejefektivnější¹. O klávesnici můžete předpokládat, že bude používat nějakou rozumně malou sadu znaků, například ASCII. A nezapomeňte, znaky se na klávesnici mohou opakovat!

Po dlouhém hraní si s rozbitou klávesnicí se Petrovi konečně podařilo najít jejich polohu na mapě. Tajuplně se usmál a ukázal směrem, kterým se dostanou zpět k řece. Na cestě už na ně netrpělivě čekali Tomáš se Zdeňkem. Společně se vydali dál až k rozcestníku, kde byly další instrukce a vzkaz.

Řešení úloh 2. série

Úloha 2.1 – Hledání minima

(4b)

Zadání:

Existuje funkce, o které víš, že na uzavřeném intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ reálných čísel splňuje následující:

1. je všude definována
2. jejím oborem hodnot je podmnožina reálných čísel
3. má právě jedno lokální minimum²
4. nikde není konstantní

Tvůj úkol je jednoduchý: najdi takový interval $\langle a; b \rangle$, který toto minimum ob-
sahuje, a přitom $b - a \leq 1/1\,000\,000$. Bohužel nevíš, jak je funkce definována. Na-
štěstí ale máš kouzelnou krabičku, které můžeš zadat libovolné reálné číslo a ona
ti s naprostou přesností prozradí funkční hodnotu v tomto bodě. Chvilku jí to ale
trvá, takže úkol chceš splnit na co nejméně použití krabičky. Za obzvláště efektivní
řešení budou bonusové body.

¹O tom, jak efektivitu algoritmů nějak měřit, se můžeš dozvědět v následujícím povídání od našich kamarádů z KSP: <http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/25/cook1.html>

²Existuje tedy nějaké x_0 (ono minimum), pro které platí, že na celém intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ je funkce klesající a na celém intervalu $\langle x_0, 1 \rangle$ je zase rostoucí.

Řešení:

Nejdříve se domluvme na následujícím značení:

- x_{\min} bude námi hledaný bod, ve kterém nabývá funkce f minima na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$
- x_1, x_2, x_3, \dots budou námi vybrané hodnoty x , pro které jsme zjistili hodnotu $f(x)$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Pozorování: To, že známe $f(x)$ pro nějakou jednu hodnotu x_1 , nám o x_{\min} nic neřekne, x_{\min} může být menší, rovno, nebo větší než x_1 . Pokud ale známe $f(x)$ pro dvě hodnoty x_1 a x_2 , tak už něco o x_{\min} víme. Když $f(x_1) \leq f(x_2)$, tak $x_{\min} < x_2$ (a naopak). Rozmyslete si situaci $f(x_1) = f(x_2)$, zejména to, že nám to počet dotazů na krabičku nikdy nezvýší.

Pokud známe hodnoty $f(x)$ pro $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a $f(x)$ je nejmenší pro x_k , tak platí, že $x_{k-1} < x_{\min} < x_{k+1}$.

Naším cílem bylo 1 000 000-krát zpřesnit náš odhad na to, kde se x_{\min} nachází. Kdybychom se to pokusili udělat „najednou“, budeme potřebovat 1 999 999 použitých krabiček. My ale výsledky z krabičky dostáváme postupně. Pokud se pokusíme dvakrát za sebou zpřesnit náš odhad 1 000-násobně, tak nám bude stačit jen $2 \cdot 1\,999 = 3\,998$ použití krabičky. Na tři stonásobná zpřesnění budeme potřebovat $3 \cdot 199 = 597$ použití krabičky, na šest desetinásobných zpřesnění $6 \cdot 19 = 114$ použití krabičky, ...

Trocha experimentování ukáže, že ideálním postupem je 20 zpřesnění na $2/4$ původního rozsahu. Pokaždé použijeme krabičku třikrát, celkem 60-krát.

To je ale vše za předpokladu, že se nám nijak nepovede „recyklovat“ informace z předchozího kroku. Pokud nedošlo k tomu, že se nám dvě zjištěné hodnoty rovnaly, tak nám jedna z hodnot zůstane „uvnitř“ námi prohledávaného rozsahu.

Tento zbývající bod nám (pokud rozdělujeme interval rovnoměrně) vyjde přesně doprostřed nového rozsahu, což nám prohledávání ještě o kousek zlevní na 41 dotazů celkem (v prvním kroku není co recyklovat).

To ale ještě pořád není ideální řešení! Co když nebudeme dělit interval rovnoměrně? Pokud se zeptáme na dva body opravdu blízko u středu intervalu, umíme interval téměř půlit na dva dotazy. Takže teoreticky bychom mohli zpřesňovat 20-krát za pouhých 40 dotazů.

Co kdybychom uměli současně dělit interval nerovnoměrně a přitom recyklovat předtím zjištěné hodnoty? Řešením je použití zlatého řezu, tedy čísla $\phi = 0,6180339887\dots$, které splňuje vlastnost $\frac{1}{1+\phi} = \phi$. Pro názornost předpokládejme, že jsme v prvním kroku. Interval od 0 do 1 rozdělíme zlatým řezem z obou stran a krabičky se zeptáme na $f(x)$ pro $x_1 = \phi$ a $x_2 = 1 - \phi$. Tímto docílíme zpřesnění na ϕ -násobek původního rozsahu za 2 dotazy. To není nic extra, ale následně si stačí všimnout, že ten jeden bod, který nám zůstal v rozsahu, umíme bezproblémově recyklovat, protože

$$\frac{1}{1+\phi} = \phi \Leftrightarrow 1 = \phi + \phi^2 \Leftrightarrow \frac{1-\phi}{\phi} = \phi,$$

díky čemuž nám bude stačit 29 zpřesnění za celkem 30 dotazů.

Existují ještě pokročilejší optimalizační algoritmy, ale tam už jsou rozdíly natolik malé, že nám už nezvládnou ušetřit ani jeden dotaz.

Matej

Úloha 2.2 – Dvě kružnice a obdélník (3b)

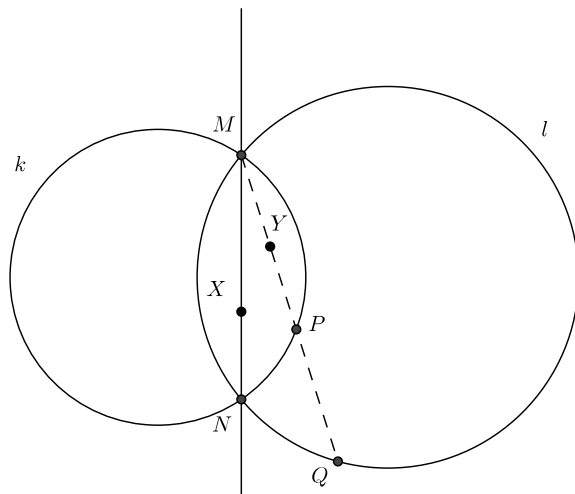
Zadání:

Dvě kružnice k, l se protínají v bodech M a N . Necht $ABCD$ je obdélník, přičemž vrcholy A a C leží na k , vrcholy B a D leží na l . Dokaž, že průsečík úhlopříček obdélníka $ABCD$ leží na úsečce MN .

Řešení:

Připomeňme si nejprve, co je to mocnost bodu ke kružnici. Konkrétně uvažme nějaký bod A uvnitř kružnice k a libovolnou přímku procházející skrz A , která protne k v nějakých bodech P, Q . Potom mocností A ke kružnici k budeme rozumět součin $|AP| \cdot |AQ|$; toto číslo je nezávislé na volbě přímky.

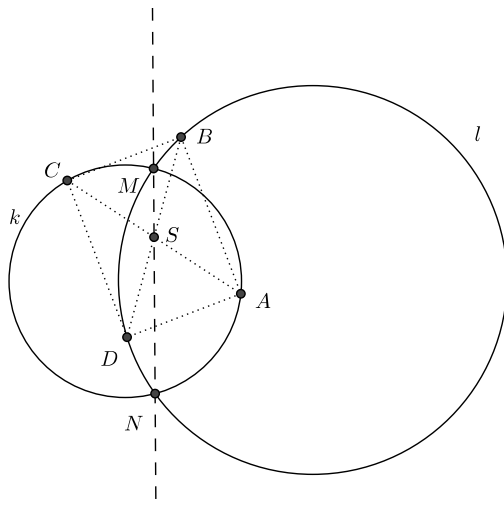
Prozkoumejme nyní mocnosti bodů na úsečce MN vůči kružnicím k a l . Pro nějaký takový bod X je jeho mocnost vůči oběma kružnicím $|XM| \cdot |XN|$. Zkusme naopak zvolit nějaký bod Y ležící uvnitř kružnic k i l , ale mimo úsečku MN . Polopřímka MY protne k a l v různých bodech P a Q , proto i mocnost bodu Y ke kružnici k bude rozdílná od té k l . Pro body uvnitř obou kružnic tedy platí, že ty na úsečce MN jsou přesně ty se stejnou mocností k oběma kružnicím. Naše úvahy by bylo možné zobecnit, platí, že body se stejnou mocností k oběma kružnicím jsou právě ty na přímce MN ; tato přímka se pak nazývá chordála.



Obrázek 1: Body na úsečce MN jsou právě ty, které mají ke k i l stejnou mocnost a zároveň leží uvnitř obou kružnicích.

Nyní již k samotné úloze. Povšimněme si, že průsečík úhlopříček obdélníku S jistě leží uvnitř obou kružnic k a l a platí pro něj tedy naše předchozí pozorování. Nyní již stačí spočítat, že mocnost S ke kružnici k je $|SA| \cdot |SC|$ a ke kružnici l $|SB| \cdot |SD|$. Průsečík úhlopříček obě úhlopříčky pólí, takže mocnosti jsou stejné a S leží na úsečce MN , což bylo dokázat.

Vašek



Obrázek 2: Bod S má stejnou mocnost k oběma kružnicím.

Úloha 2.3 – Papiňák

(3b)

Zadání:

Potřebujete si rychle uvařit jídlo. Nemáte tlakový hrnec, pouze jednoduchý s pokličkou. Jaké maximální teploty v něm můžete dosáhnout, když mezi hrnec a pokličku dáte těsnění a na pokličku si sednete? Jak těžká (nebo zatížená) by musela být poklička, abyste v hrnci dosáhli stejné teploty jako v papiňáku? Sami odhadněte potřebné číselné parametry.

Řešení:

Představme si situaci, kdy sedíme na pokličce, ve které není žádná díra a mezi ní a hrncem je těsnění. Existuje maximální síla, kterou může působit plyn v hrnci, aby poklička neuletěla nahoru. Zvrchu působí na pokličku tíhová síla mg a tlaková síla atmosféry p_0S , kde p_0 je standardní atmosferický tlak a S je plocha pokličky. Zesponu na ni působí ona maximální síla, která je rovna tlakové síle plynu $S \cdot p_{\max}$. Z toho můžeme vypočítat maximální tlak v hrnci

$$p_{\max} = \frac{mg}{S} + p_0.$$

Deformaci pokličky a hrnce zanedbáváme. Budeme počítat se standardním tlakem $p_0 = 100 \text{ kPa}$ a pokličkou o průměru $d = 17,5 \text{ cm}$. Typická hmotnost člověka s pokličkou je přibližně $m = 70 \text{ kg}$. Maximální tlak je tedy

$$p_{\max} = 129 \text{ kPa.}$$

Když obsah hrnce zahříváme, dojde po určité době ke vzniku syté páry. Tlak této syté páry závisí pouze na teplotě – má jeden stupeň volnosti, funkce $p(t)$ nezávisí na objemu.³ Pokud tuto funkci známe, můžeme z ní vyjádřit maximální teplotu t . Naneštěstí neexistuje její analytické vyjádření a hodnotu musíme zjistit např. z tabulek. Hodnota teploty varu vody odpovídající maximálnímu tlaku p_{\max} je přibližně

$$t = 107,2^\circ\text{C.}$$

Vidíme, že tato teplota je jen o málo větší než teplota varu vody za standardních podmínek (přibližně 100°C). Abychom dosáhli teplot běžných v tlakových hrncích $120^\circ\text{C} - 130^\circ\text{C}$, musíme vyvinout tlak přibližně $p_{\max} = 200 \text{ kPa}$ až 270 kPa . Hmotnost pokličky vypočítáme z rovnice pro maximální tlak:

$$m = \frac{(p_{\max} - p_0)S}{g}.$$

Pro dané tlaky to jsou hmotnosti 246 kg až 416 kg . Pokud však použijeme menší hrnec, např. s průměrem $d = 14 \text{ cm}$, budou potřebné hmotnosti v rozmezí 157 kg až 267 kg . Na to už budou stačit dva až tři vzrostlejší lidé.

Poznámka k došlým řešením:

Někteří z řešitelů považovali plyn v hrnci za ideální a počítali se stavovou rovnicí

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Tento předpoklad je však chybný, protože o ideálním plynu můžeme hovořit až při vyšších teplotách kvůli silnému silovému působení mezi molekulami vody, navíc se při vypařování a kondenzaci mění molární množství, které by v rovnici mělo také figurovat

Viktor

Úloha 2.4 – Mince na podnose (3b)

Zadání:

Někdo vám zavázal oči a postavil vás před čtvercový podnos, na kterém je v každém rohu jedna mince. Můžete otočit libovolné z těchto mincí a dát ruce pryč. Pokud pak budou všechny lícem nahoru, splnili jste úkol; v opačném případě se podnosem otočí o neznámý počet čtvrtotáček a začne se od začátku. Nedokážete zjistit

³Teplota t odpovídá bodu varu – po jejím překročení se veškerá kapalina přemění na plyn.

hmatem, která strana mince je která. Jak to provedete, pokud nechcete spoléhat na náhodu?

Řešení:

Abychom mohli úkol převést na úkol, kdy stačí dosáhnout stejného otočení všech mincí, v každém lichém tahu otočíme všechny mince. Pokud jsou všechny mince na začátku stejně otočené, ale lícem dolů, pak vyhraje již po prvním tahu. Dále mohu mít mince otočené buď dvě a dvě stejně, nebo tři stejně a jednu jinak. V prvním případě mohou být stejné mince vedle sebe nebo po úhlopříčce. Otočím nejprve dvě mince na úhlopříčce, poté dvě mince vedle sebe (tímto krokem mohu převést otočení na dvě stejné na úhlopříčce) a poté opět dvě mince na úhlopříčce. Pokud po žádném z těchto kroků nevyhraje, pak jsou otočené tři mince stejně a jedna jinak. Otočím tedy libovolnou jednu minci. Pokud po tomto kroku nevyhraje, pak jsme problém převedli na problém se dvěma a dvěma stejně otočenými mincemi, který umíme vyřešit.

Kristýj

Řešení témat

Téma 1 – Pojdme pane, budeme si hrát

Otiskujeme řešení Dr.^{MM}Mariana Poljaka a Dr.^{MM}Petra Šimůnka. Zatímco se Dr.^{MM}Marian Poljak zabýval zejména teoretickými aspekty problému, Dr.^{MM}Petr Šimůnek si napsal program, pomocí něž dokáže simulovat různé průběhy hry. Dokumentace a jeho další postřehy ohledně hry jsou bohužel příliš rozsáhlé, než aby se vešly do tohoto čísla, uvádíme tedy pouze část jeho příspěvku. Stejně tak neuvádíme článek od Doc.^{MM}Domínika Krasuly, který dokazuje, že každá hra musí skončit. Všechny tyto příspěvky najdete na webové stránce našeho korespondenčního semináře.

Petr Šimůnek se také zabývá některými teoretickými otázkami, někdy však jeho argumentace není úplně zjevná. Jsou všechny jeho argumenty korektní? Také se dovolává věty Ernsta Zermela, kterou můžete najít na anglické Wikipedii⁴. Jak tato věta souvisí s naším problémem?

Vašek

Postřehy ke hře (10b)
Dr.^{MM}Marian Poljak

Začněme zjevným. Bude-li obarveno červeně jedno číslo, smažou se všechny jeho násobky.

Co se stane, budou-li obarvena dvě nesoudělná čísla, řekněme a a b ? Čísla $b, 2b, \dots, ab$ dávají navzájem různé zbytky po dělení číslem a . (Kdybychom pro spor předpokládali opak, tedy že některá dvě různá čísla, např. kb a lb , dávají

⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo's_theorem_\(game_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo's_theorem_(game_theory))

stejný zbytek po dělení a , pak musí být číslo $(k-l)b$ dělitelné a , což nelze, jelikož $(k-l)$ je menší než a a čísla a, b jsou z předpokladu nesoudělná.)

Nyní stačí k číslům $b, 2b, \dots, ab$ (která jdou vytvořit sečtením několika červených běček) přičítat násobky červeného a . Od každého zbytku smažeme všechna vyšší čísla než ab , která dávají po dělení a tento zbytek. A protože máme všechny možné zbytky, smažeme vlastně všechna čísla vyšší než ab .

Budou-li některá dvě červená čísla navzájem nesoudělná, hra je konečná, jelikož nám zbude na tabuli pouze konečně mnoho čísel, která můžeme dále obarvovat/mazat.

Co když čísla a, b nebudou nesoudělná? Označme $a = dx$, $b = dy$, kde d je největší společný dělitel čísel a, b a x, y jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Potom jejich sčítáním zřejmě můžeme dostat pouze taková čísla, která jsou násobky d . A všech násobků d větších než největší společný násobek čísel a, b (čímž je dxy), můžeme dosáhnout. Důkaz je v podstatě identický s důkazem u nesoudělných a, b . Sečtením násobků čísel dx, dy dokážeme totiž dosáhnout všech násobků d vyšších než dxy , právě když dovedeme sečtením násobků čísel x, y dosáhnout všech čísel vyšších než xy . Celá situace je pouze „vynásobená“ číslem d , tuto úpravu skutečně můžeme považovat za ekvivalentní, přestože poněkud pofidérní. Druhá část této ekvivalence je již dokázaná, proto platí i naše tvrzení. Můžeme tedy vyvodit obecný závěr.

Jsou-li obarvena červeně nějaká dvě čísla a, b , jsou také smazána všechna čísla dělitelná největším společným dělitelem a, b , která jsou vyšší než nejmenší společný násobek a, b .

Pozn. red.: vynechali jsme rozbor hry (4,5), neboť Dr.^{MM} Petr Šimůnek uvádí podobný rozbor.

Co kdyby první dva tahy byly 4, 6? Tentokrát přežije nekonečně mnoho čísel, jelikož jsou čísla 4 a 6 soudělná dvojkou. Situace bude následující:

1 2 3 4 5 6 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 ...

Smazání tohoto nepříjemného nekonečna lichých čísel se ujme první hráč hned následujícím tahem, nechce-li obarvit dvojkou a zkat. Může to udělat tak, aby vyhrál? Pokud smaže 5, nepřítel odpoví tahem 7 a vyhraje. Pokud smaže 7, nepřítel odpoví tahem 5 a opět vyhraje. Přestože má první hráč v tuto chvíli nekonečno možností, nachází se v prohrávající situaci. Druhému hráči si totiž stačí popárovat čísla podobným stylem, jako jsme si už „popárovali“ 2, 3 a 5, 7 v tomto případě. Tj. obarví-li nepřítel jedno z nich, já obarvím to druhé a pošlu ho zpátky do prohrávající situace, kam patří. Druhý hráč si může čísla popárovat následujícím způsobem: (5,7), (9,11), (13,15), ... První hráč si může barvit jak chce, druhý ale bude svými protitahy nadále udržovat sudý počet lichých čísel nad čtyřkou. (Všechny tyto dvojice tahů zajistí, aby byla smazána všechna vyšší čísla než ta právě obarvovaná.) Proto, až umřou všechna lichá čísla větší než 4 a jediná nesmazaná bílá čísla budou 1, 2, 3, ocitne se první hráč na tahu. Ups ^_^

Zjistili jsme tedy vlastně, že obarvení čtyřky je pro prvního hráče prohrávající tah!

Zkusme se nyní ještě zamyslet nad tím, jestli hra musí nutně skončit. Předpokládejme, že máme již obarvená čísla $a = dx$, $b = dy$. Chceme-li obarvit další číslo dělitelné d , bude toto číslo muset být menší než dxy (všechna vyšší taková čísla jsou už smazána). Čísel menších než dxy je ale konečně mnoho. Má-li tedy hra mít vůbec nějaké ambice být nekonečnou, musí v ní jít obarvit nekonečně mnoho čísel větších než dxy . Žádné z těchto čísel ovšem není dělitelné d . Je zřejmé, že dokud jsou všechna červená čísla dělitelná nějakým společným dělitelem větším než 1, zbývá nám na tabuli nekonečně mnoho čísel. V podstatě můžeme říct, že obarvováním čísel větších než dxy tak nějak snižujeme tohoto největšího společného dělitele všech červených čísel. A bude-li se tento největší společný dělitel rovnat jedné, pak už pravděpodobně umíme smazat tolik čísel, že jich zbyde pouze konečný počet.

Hra určitě může trvat libovolně dlouho, budeme-li mazat postupně čísla od 420^{420} , tak uděláme 420^{420} tahů. Myslím si ale, že hra musí po nějakém konečném počtu tahů skončit, i když nemám žádný důkaz (kromě neexaktního hudební v předchozím odstavci).

Základní pravidla a poznatky (7b)

Dr.^{MM} Petr Šimůnek

V tomto článku se budu věnovat základním pravidlům hry.

Určitě nic nepokážeme, když si nejprve cvičně zkusíme několik her. Můžeme si všimnout několika věcí:

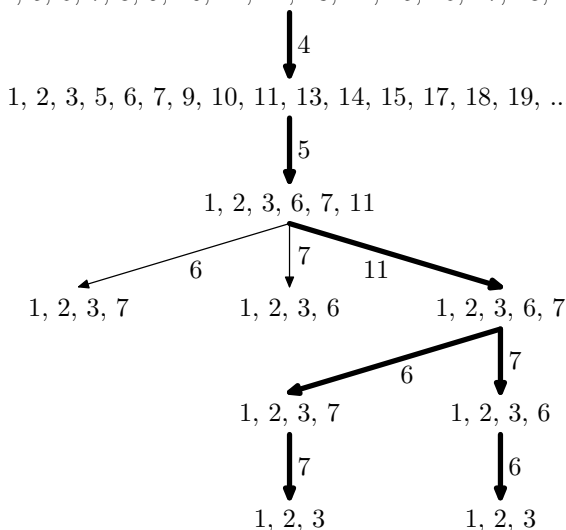
1. Předpokládejme, že nikdo nechce prohrát (oba chtějí vyhrát).
2. Druhého hráče donutíme ke škrtnutí 1 tím, že mu škrtneme všechna ostatní čísla.
3. Pokud je vyškrtnuta 2 a 3, tak už zbývá pouze 1.
4. Pokud tedy druhý hráč škrtně jedno z těchto čísel, my škrtneme to druhé a on pak musí škrtnat 1 (a naopak).
5. Skutečným cílem hry je tedy donutit druhého hráče ke škrtnutí 2 nebo 3 tím, že mu škrtneme všechna ostatní čísla.

Je tedy na čase představit si nějakou konkrétní hru, například hru (4, 5) ze zadání (viz Obr. 3).

Na prvním řádku je výchozí situace (všechna čísla), na druhém po vyškrtnutí 4 (po tahu hráče 1) a na třetím je situace po vyškrtnutí čísla 5 (po tahu hráče 2). A nyní má hráč 1 na vybranou ze 3 možností, může škrtnout 6 nebo 7, nebo 11. Po vyškrtnutí prvních dvou čísel nám už pak zbude pouze 1 číslo (1, 2 a 3 nadále

nepočítáme). Po škrtnutí čísla 11 nám však zbývají ještě 2 čísla (6 a 7) a jak vidíme, tak hráč číslo 2 nemůže vyškrtnout obě tyto čísla naráz, tudíž tam jedno nechá a to vyškrtně hráč číslo 1 a vyhraje. A jelikož tedy ve 3. tahu (druhém tahu hráče 1) existuje možnost, jak on vyhraje, nebere si tuto možnost, kdy vyhraje a stane se vítězem.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...



Obrázek 3: Strom hry (4, 5)

Všimněme si však, že pokud škrtneme čísla 4 a 6, tak vyškrtneme všechna sudá čísla (až na 2, ale to nás tak nevzrušuje, vzhledem k tomu, že o číslech 2 a 3 se vlastně vůbec nebavíme). Ale to důležitější je, že nevyškrtnutých čísel je nekonečně mnoho (všechna lichá). To je větší problém a nám pro začátek bude stačit, když se vždy budeme zabývat uzavřenými skupinami. (Tedy zvolíme si nejprve několik čísel na začátek, která budou vyškrtnuta tak, aby byl počet nevyškrtnutých čísel konečný).

Všimněme si rovněž, kdy dostaneme uzavřenou skupinu: Když jsme škrtnuli 4 a 6, tak jsme ji nedostali, když škrtneme 8 a 4 tak rovněž ne a při 10 a 12 také ne. Ale i tak existuje pouze nějaké největší sudé číslo a ta nakonec vymizí, poté přijdou na řadu lichá. A po zvolení jakéhokoli lichého čísla se nám pak skupina uzavře a jakmile je skupina uzavřená, hra musí skončit. Hra tedy musí skončit, ale nemůžeme říci kdy, počet tahů může být libovolně velký.

A nyní si představme, že jsme právě škrtnuli poslední číslo a zbývá už pouze 1, 2 a 3. Jsme ve vítězné pozici? Ano! A co když je v této pozici druhý hráč? Vyhrál? Ano! Jsme tedy v nevítězné pozici. A co když jsme v pozici, že všechny naše tahy vedou k vítězným pozicím druhého hráče? Poté jsme také v nevítězné pozici. Pokud ale nějaký z našich tahů vede k nevítězné pozici druhého

hráče, tak naše pozice je vítězná! Můžeme se takto například dostat k číslům 6, 7 a 11. A takto samozřejmě můžeme jít dále a dále a dojít tak až k prvnímu tahu. Problém je, že to není nic jednoduchého. Ale vyplývá z toho, že pro jednoho hráče je hra vyhraná. Viz důkaz Ernsta Zermela o tom, že hra dvou hráčů je pro jednoho hráče předem vyhraná.

Všimněme si, že pokud máme opravdu hodně čísel, tak je těžké a zdlouhavé rozhodovat se, která čísla jsou vyškrtnutá. Jak se tedy můžeme snadno rozhodnout? Všimněme si, že pokud právě vyškrtneme nějaké číslo k , tak pokud od čísla, o které se zajímáme, odečteme k , tak na základě toho, jestli je toto číslo vyškrtnuto, nebo ne, můžeme snadno určit, jestli je vyškrtnuté nebo ne. Tak můžeme i snadno zajistit, že nebudeme počítat s čísly, se kterými nemáme.

Téma 2 – Volební systémy

Do 4. čísla došly dva příspěvky, oba se z části zabývaly rozdělením státu do volebních okrsků. Příspěvek Dr.^{MM} Kláry Stefanové doplňuje její předchozí článek o konkrétní příklad z voleb v roce 2006. Klára přepočítala, že kdyby byla použita metoda Sainte-Laguë nebo Hagenbach-Bischoffova kvóta, menší strany by v některých krajích získaly hlasy na úkor větších a díky tomu by vládnoucí koalice získala nadpoloviční většinu.

V dalším bodě článku autorka přerozdělila volební obvody tak, aby měly co nejpodobnější počet voličů. Klára však poznamenává, že takové rozdělení je stejně „spravedlivé“ jen za předpokladu, že je v obvodech srovnatelná volební účast.

- *Jak by dopadly volby, kdybychom hlasy počítali podle nově vzniklých volebních obvodů?* ⁵

Článek se dále zabývá prezidentskými volbami a zmiňuje další varianty poměrného systému: Další systém využívá dvoukolové volby. Do druhého kola však nepostupují právě dva kandidáti, ale ti co přesáhli zisk hlasů ve výši 12,5%. Pokud by se tento systém používal při volbách v lednu 2013, do druhého kola by kromě Karla Schwarzenberga a Miloše Zemana postoupil ještě Jiří Dienstbier s Janem Fischerem. Tito dva kandidáti měli přibližně stejný počet hlasů a jejich zisk se pohyboval okolo 16%.

Klára také zpochybňuje spravedlivost možnosti, jak se občan může stát kandidátem na prezidenta, konkrétně možnosti sbírat hlasy poslanců a senátorů. Uvádí při tom alternativní možnosti, jak získat kandidaturu, používané v zahraničí.

V závěru článek pojednává o dalším problému voleb do Evropského parlamentu (EP), kterým jsou odlišné podmínky pro vstup strany do EP. Podmínky se liší volebním systémem používaným v dané členské zemi a také výškou volební klauzule.

Doc.^{MM} Dominik Krasula ve svém článku řeší problém s hlasováním pro stranu ve volbách do místních zastupitelstev, který uvedla ve svém článku Tereza Špalková. Nejdříve zmiňuje dva důvody, proč není vhodné vyřešit situaci tak, že při by

⁵Nové rozdělení na volební obvody najdete na webu tématu v plném znění článku.

zaškrtnutí strany byl počet přidělených hlasů vždy stejný, bez ohledu na počet jejích kandidátů. Prvním důvodem je, že veřejné mínění o straně se projevuje nejen počty hlasů ve volbách, ale také počtem členů. Druhým důvodem je to, že by toto pravidlo vedlo k tomu, že by pro kandidáty bylo výhodnější vstupovat do malých stran, protože tam dostanou více hlasů při zaškrtnutí strany.

Počet hlasů, které dostane strana s H kandidáty, by měl být podle Dominika $g(H) \cdot H$, pro funkci $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$, která splňuje následující podmínky:

1. je nerostoucí
2. $g(N) = N$, kde N je počet kandidátů nejmenší strany účastnící se voleb
3. pokud $K > M$, pak $K \cdot g(K) = M$, kde M je celkový počet mandátů

Podrobnější zdůvodnění, proč má funkce splňovat výše zmíněné podmínky najdete v plném znění článku na webu. Příspěvek se dále zabývá rozdělováním státu do volebních obvodů, tuto část otiskujeme níže.

Rozdělování do volebních obvodů (8b)

Doc.^{MM} Dominik Krasula

Úvod

Tendence rozhodovat volby podle výsledků v jednotlivých volebních obvodech, kde z různých obvodů je zvolen různý počet poslanců či mají obvody různou váhu, je celkem pochopitelná. Pokud by se bral jen celkový počet hlasů z celé republiky, vedlo by to strany k protežování velkých měst a ignoraci regionálních problémů. Když jsou obvody rozdělovány i podle velikosti území, způsobuje to sice jisté nerovnosti ve volebním systému pro strany, ale dává to lidem z oblastí s nízkou hustotou osídlení možnost ve volbách slyšitelně projevit svůj názor. Velkým problémem však samozřejmě je, jak toto rovnoměrně vyvážit. Přeci jen chceme, aby hlasy z daného obvodu zvolily počet kandidátů, který zhruba odpovídá početnímu zastoupení voličů z daného obvodu vůči celé republice. Podstata problémů tkví v tom, že rozdělujeme nedělitelné komodity, takže můžeme použít jen velmi omezený počet možných rozdělení, přičemž počet možných rozdělení množin (stát ve volební obvody), k nimž chceme komodity přidělovat, je velmi vysoký.

Alabamský paradox

Paradox se poprvé objevil v Americe v roce 1880, tehdy zjistili, že pokud by se celkový počet křesel zvýšil, připadlo by Alabamě o jedno křeslo méně, než kdyby ke zvýšení nedošlo. Normálně bychom přitom očekávali, že větší počet celkových mandátů počet přidělených křesel danému státu buď nechá nezměněn, nebo jej zvýší.

Zarážející na tom je, že Americký volební systém z těch let vypadá celkem rozumně a není lehké si uvědomit, že může vést k tomuto výsledku. Pojďme si jej blíže popsat:

- a) Každému státu je přiděleno racionální číslo R , které je rovno poměru počtu obyvatel (již mohou hlasovat) daného státu vůči počtu obyvatel celých Spojených států vynásobenému počtem mandátů. Tedy přesné férové rozdělení. Pokud je ve státu 6/53 obyvatel Ameriky, získal by podle tohoto 6/53 mandátů.
- b) Nyní každý stát dostane dolní celou část jemu přiděleného čísla R . Tedy pokud má stát dostat 4,2 mandátů, tak dostane 4.
- c) Každý stát, jemuž nebyl přidělen žádný mandát, dostane jeden mandát. Takže pokud mu bylo přiděleno 0,8 mandátu, tak získá dohromady jeden.
- d) Zbylé mandáty se rozdělí mezi státy, které měly $R > 1$, a to tak, že se budou přednostně dávat těm s větší desetinnou částí. Máme-li tedy dva státy, jeden má $R = 1,52$ a druhý 1,43, tak přednostně získá křeslo ten, který má $R = 1,52$.

Pojďme si to ukázat na příkladu. Rozdělujeme deset křesel. Máme tři státy. Ve dvou máme šest hlasujících a ve třetím pouze dva. Jaká bude tedy hodnota R pro první stát? $R_A = R_B = 10 \cdot 6/14 = 4,29$, $R_C = 10 \cdot 2/14 = 1,43$.

Státy A a B mají tedy po druhé fázi každý 4 zástupce a stát C má jednoho. Zbývá nám ještě jedno křeslo. To přidělíme státu C, protože má největší desetinnou část.

Nyní stejná situace, ale celkový počet křesel je 11. Potom $R_A = R_B = 11 \cdot 6/14 = 4,71$, $R_C = 10 \cdot 2/14 = 1,57$. Situace po druhé fázi je stejná. Ale tentokrát nám zůstávají ještě dvě křesla. Státy A a B mají větší desetinnou část než stát C, proto si zbylá dvě křesla rozdělí státy A, B. Stát C má tedy méně přidělených křesel, než když se jich rozdělovalo deset.

Než začneme přemýšlet, jak upravit volební systém, aby neobsahoval Alabamský paradox, ukážeme si, že tyto snahy jsou marné. V roce 1982 matematici Michel Balinski a Peyton Young dokázali, že nelze sestavit systém přidělování mandátů mezi tři a více států, který by splňoval tyto tři podmínky:

1. Každý stát získá buď horní celou část nebo dolní celou část čísla R . Tedy pokud státu přísluší 1,42 mandátů, získá buď jeden nebo dva.
2. Nemůže dojít k Alabamskému paradoxu, tedy nárůst celkového počtu mandátů nesníží u žádného státu počet mandátů mu přidělených.
3. Nemůže dojít k populačnímu paradoxu. Tedy pokud A získá více hlasů a B méně, nedojde k přesunu křesel od A k B.

Je těžké představit si, jak může dojít k porušení podmínky 3. Problém nastává, pokud máme dva státy, jeden s malým a jeden s velkým počtem hlasů. Systém používaný v Česku (či v minulosti používaný systém) tuto podmínku splňuje. Nelze však dodržet zároveň s ní podmínku 1 i podmínku 2. Existují systémy, kde je dodržena zároveň podmínka 1 a 2 a systémy, kde zároveň 2 i 3, konkrétně třeba v Česku používaný systém.

Téma 3 – Vesmírný kulečník

S řešením úloh druhé série k nám nepřišla žádná řešení tohoto tématka, a proto vám přinášíme tento krátký studijní text. Můžete z něj čerpat při výpočtu dráhy měsíců po zmezení planety.

Keplerova záludná úloha

Planety ve Sluneční soustavě jsou vázány gravitační silou, která byla popsána v 17. století anglickým vědcem Isaacem Newtonem. Podle něj jsou každé dva hmotné objekty přitahovány silou

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

kde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta, M a m jsou hmotnosti objektů a r je jejich vzdálenost. Gravitace je vždy přitažlivá síla.

Uvažujme, že je hmotnost M mnohem větší než m . Potom se těžší těleso téměř nebude pohybovat. Pohyb menšího tělesa můžeme popsat v polárních souřadnicích, kde se těžší těleso nachází v centru, následující rovnici:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

kde φ je úhel mezi spojnicí obou těles a kladnou poloosou x , p je parametr dráhy, ε je numerická excentricita a platí

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon^2 - 1 = \frac{2L^2}{G^2M^2m^3}E,$$

kde E je celková energie soustavy těles a L je moment hybnosti, který je definován vztahem

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad L = |\vec{L}| = mrv \sin \alpha,$$

kde α je úhel mezi spojnicí obou těles a vektorem rychlosti. Velikost i směr momentu hybnosti se při působení pouze vzájemné gravitační síly zachovávají.

Soustava má potenciální energii rovnou

$$V = -G \frac{Mm}{r}.$$

Opravdu je záporná a to proto, že jsme za nulovou hodnotu zvolili situaci, kdy jsou jednotlivé objekty oddělené, a k tomu jim musíme pro oddálení dodat energii. Zároveň má menší těleso kinetickou energii rovnou

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde v je jeho rychlost. Celková energie tedy je

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}.$$

Tato energie se stejně jako moment hybnosti zachovává.

Jak tomu můžeme rozumět? Energie může být kladná, záporná, nebo nulová:

1. $E > 0$, tedy $\varepsilon > 1$... pokud se těleso dostane do nekonečné vzdálenosti, potenciální energie bude nulová a stále zbyde energie na kinetickou část. Takové těleso se bude pohybovat po hyperbole.
2. $E = 0$, tedy $\varepsilon = 1$... tento mezní případ odpovídá parabolické dráze. V nekonečnu má těleso nulovou rychlost.
3. $E < 0$, tedy $0 \leq \varepsilon < 1$... takové těleso se nikdy nemůže dostat do nekonečna, protože by muselo mít zápornou kinetickou energii, což pochopitelně nemůže nastat. Bude se pohybovat po elipse. Speciálním případem je pohyb po kružnici, kdy $\varepsilon = 0$.

Vidíme, že se těleso pohybuje po hyperbole, parabole nebo elipse, tedy kuželosečkách, v jejichž ohnisku je těžší těleso. Pohyb po elipse se dá popsat dalšími parametry jako velká a malá poloosa atd., ale o tom se dočtete v každém textu o pohybu planet ve Sluneční soustavě.

Viktor

Téma 4 – Komprese mapových dat

K tématu přišel jeden příspěvek od Dr.^{MM} Petra Šimůnka. Ten se ve svém příspěvku krátce zabývá ukládáním čísel, hlavní část svého článku však věnuje komprimaci pomocí rozdělení bodů do sektorů a použití relativních souřadnic uvnitř těchto sektorů. Zabývá se také problémy při zobrazování mapy a navrhuje řešení některých z nich. Otiskujeme část jeho článku zabývající se sektory.

Mapa bude rozdělena na sektory, na začátku datového úseku každého sektoru budou počáteční souřadnice y x a následně budou udávány pouze relativní souřadnice k těmto prvním (výchozím, absolutním) souřadnicím. Zápis dat bude vypadat asi nějak takto:

souřadnice absolutního bodu sektoru; počet souřadnic v sektoru;
relativní souřadnice 1. bodu v sektoru; 2. bodu, ...:

```
// 1. sektor
y_sector1; x_sector1; m;
id_1; y_1 - y_sector1; x_1 - x_sector1;
id_2; y_2 - y_sector1; x_2 - x_sector1;
...
id_m; y_m - y_sector1; x_m - x_sector1;
// 2. sektor
y_sector2; x_sector2; n;
id_m+1; y_m+1 - y_sector2; x_m+1 - x_sector2;
...
id_m+n; y_m+n - y_sector2; x_m+n - x_sector2;
```

Problémy tu jsou hned dva, ten menší: jak velké mají být sektory. To se dá vypočítat. Za druhé, co s křivkami a plochami? Pokud se křivka nachází v jednom sektoru, o nic více méně nejde, pokud ve více sektorech, nastává problém. V tomto případě bude určitě potřeba křivku nebo plochu rozdělit do jednotlivých sektorů – což samo o sobě bude trochu složitější úkon. Navíc to vyprodukuje další data. Je ale jasné, že na nějaké sektory musíme data tak jako tak rozdělit.

Jedna z možností jak tento problém řešit je, že každý bod by měl svoje ID, tudíž na začátku bychom měli pouze výčet bodů (rozdělených do sektorů) a poté by byly pouze seznamy čar a objektů. Zde by hodně záleželo, které segmenty navigace chceme šetřit nejvíce, takže krátce k optimalizaci. Zatím jsme si přibližně načrtli, jak nějak by data mohla být uchovávána, teď bychom se mohli krátce vrátit k ostatním komponentám. Již dříve jsme zmínili, že nechceme, aby se nám do paměti navigace načítala všechna data. Tento problém jsme vyřešili tím, že jsme mapu rozdělili na sektory. Co když ale mapu oddálíme? Je několik možností, jak to řešit:

- Pro jiné rozlišení nakreslíme novou mapu, ale to by asi vyprodukovalo poměrně dost nových dat.
- Před každou souřadnicí vyhradíme nějaké místo (2 až 4 bity) které budou určovat důležitost souřadnice a s postupným oddalováním budou souřadnice a ostatní věci mizet postupně a ne všechny najednou.

Nakonec tedy napíši, jak si myslím, že by data mohla po uložení přibližně vypadat. Seznam bodů byl již výše, zbývá seznam křivek a ploch. Řetězec `id_kxy` udává, že ID y -tého bodu křivky je kx , obdobně u ploch:

```
// seznam křivek
id_k1; d; id_k11; id_k12; id_k13; ...; id_k1d;
id_k2; e; id_k21; id_k22; id_k23; ...; id_k2e;
```

```
// seznam tvarů
id_t1; t; id_t11; id_t12; id_t13; ...; id_t1t;
id_t2; u; id_t21; id_t22; id_t23; ...; id_t2u;
```

Samozřejmě by také záviselo na kvalitě procesoru, RAM, programátora... Asi ideální postup by byl, kdyby program vždy zjistil, jaké sektory má vykreslit, zapamatoval si všechny body zde, poté zjistil jaké z těchto bodů tvoří křivky a tvary a poté si načetl i zbývající body potřebné pro vykreslení křivek a tvarů a následně je všechny vykreslil. Jinak tvary se automaticky budou vracet do 1. bodu (tím se uzavřou). Pokud bychom chtěli dát bodům priority, bylo asi nejvhodnější je dát na konec každého bodu. Druhou variantou je dát každé křivce a tvaru prioritu a poté ještě nakonec zapsat výčet ID a priorit těch bodů, které nejsou součástí křivek a tvarů.

- *V části článku se Petr zabýval tím, jak čísla ukládat efektivněji než pomocí znaků s jednotlivými číslicemi. Zamyslete se nad různými možnostmi reprezentace souřadnic. Jak můžeme čísla ukládat a kolik to zabere paměti? Berte také v úvahu případnou ztrátu přesnosti.*
- *Jakým způsobem by bylo vhodné ukládat body a křivky, aby se s nimi daly provádět operace popsané v článku? Zkuste navrhnout datovou strukturu pro ukládání jednotlivých prvků a funkce s ní pracující. Zdůvodněte také, které ze zadaných podmínek (viz 2. číslo) vaše struktura splňuje.*
- *Jak zvolit správnou velikost sektoru? Na čem bude záviset? Byly by z nějakého důvodu výhodnější jiné než obdélníkové sektory?*
- *Zkuste také něco reálně naprogramovat. Inspirujte se publikovaným článkem a implementujte ho nebo si vymyslete vlastní algoritmus.*

Téma 5 – Rozpuštěná rozpustnost

K tématu přišel jeden příspěvek od Dr.^{MM}Kláry Stefanové. Klára testovala rozpustnost vybraných kuchyňských látek (káva Nescafé Gold, čaj Babička Růženka, modré potravinářské barvivo a blíže nespecifikovaný prášek na výrobu limonády) ve vodě za pokojové teploty a teploty mezi 70 a 80 °C. Látky nechala samovolně rozpouštět, roztoky nemíchala. U všech testovaných látek pozorovala světlejší odstíny barev vzniklých roztoků za pokojové teploty. U některých látek dokonce za dobu pozorování nedošlo k rozpuštění veškerého přidaného množství. Za vyšších teplot se roztoky naopak vyznačovaly sytějšími barvami, rozpuštěním celého objemu přidané látky, rychlejším průběhem procesu a často také uživatelsky přívětivější chutí. Svými experimenty tak Klára potvrdila, že většina látek se rozpouští „lépe“ (dojde k rozpuštění většího množství) a rychleji při vyšší teplotě rozpouštědla, resp. vody.

Zkuste zjistit, proč se většina látek lépe a rychleji rozpouští v teplé vodě. Platilo by to samé i u oleje, či kyseliny chlorovodíkové? U jakých látek je naopak závislost na teplotě opačná? Jaký tvar by měla závislost maximálního množství vybrané látky, které se ještě rozpustí ve 100 ml určitého rozpouštědla (např. vody), na teplotě rozpouštědla? Budou mít jiné rozpouštěné látky jiný tvar závislosti?

Peťa

Konference Vávrovka 2015

Měření rychlosti diabolky (10b)

Dr.^{MM} Klára Stefanová, Mgr.^{MM} Dominika Jurdová

Abstrakt

Během této konference jsme se zabývali měřením rychlosti diabolky vystřelené ze vzduchovky. Pro měření jsme použili dvě následující metody: měření pomocí výchylky kyvadla a měření pomocí zvukových vln. Při měření kyvadélkem jsme používali pouze jeden druh diabolek a při využití zvukových vln jsme porovnávali dva různé druhy diabolek. Dále jsme porovnávali hybnosti a energie diabolek zjištěné výpočty z naměřených hodnot.

Tento článek vznikl jako shrnutí naší konference o měření rychlosti diabolky a chtěli bychom podat nástin další možnosti řešení tohoto problému. Konference probíhala na jarním soustředění M&M pod vedením Viktora Skoupého. Jednotlivé způsoby popíšeme a případně doplníme výsledky měření.

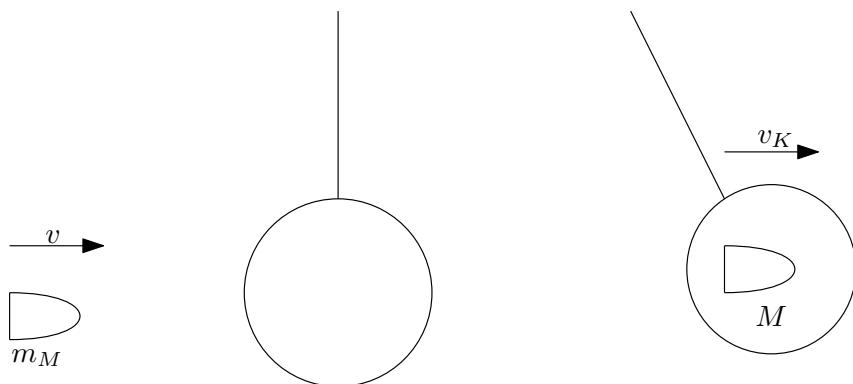
Diabolky a vzduchovka

Ke střelbě jsme používali dva druhy diabolek. První druh, pracovní označený jako modré, byl drážkovaný; druhý, s pracovním označením červené, měl hladký povrch. Oba dva druhy byly s plochou hlavou, to znamená, že jejich průraznost nebyla až tak velká a byly určeny převážně k hobby střelbě. Pro potřeby našeho měření bylo potřeba zjistit hmotnost diabolky. K tomuto účelu jsme používali kapesní váhu. Diabolky jsme vážili ve skupinách po dvaceti a měření desetkrát opakovali pro jiných dvacet diabolek. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

	hmotnost[g]	odchylka[g]
modrá	0,508	0,003
červená	0,553	0,002

Tabulka 1: Hmotnosti diabolek

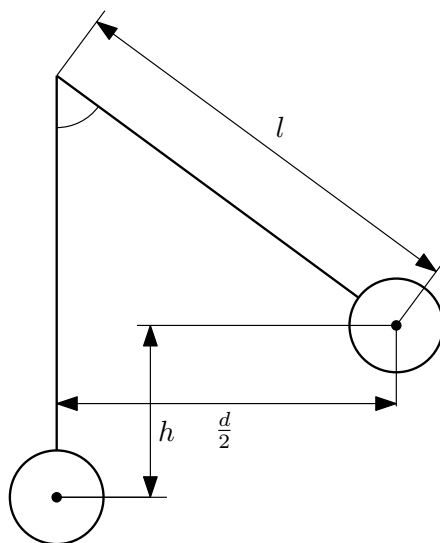
Hmotnost modré diabolky označíme jako m_M a červené jako m_C . V jednom z měření jsme se snažili porovnat vlastnosti těchto diabolek.



(a) Situace diabolka-kyvadélko před zasažením kyvadélka diabolkou

(b) Situace diabolka-kyvadélko po zásahu kyvadélka diabolkou

Použitá vzduchovka byla s největší pravděpodobností určena k rekreační střelbě na cíl. Hlaveň měla délku $k = (526 \pm 1)$ mm. Na této dráze jsou urychlovány diabolky. Na jakou rychlost? To bylo předmětem našeho pokusu. Dále nás také zajímala hybnost diabolky a její kinetická energie. Z hlediska zaměřování jsme si museli vystačit pouze s klasickým hledáčkem, na pušce nebyla instalována optika pro zaměřování.



Obrázek 5: Východí situace pro určování hybnosti za pomoci změny potenciální energie

Měření pomocí výchylky kyvadla

První metoda, kterou jsme použili k měření hybnosti diabolky, byla metoda měření pomocí výchylky kyvadélka. Hlavní princip této metody spočívá v tom, že když diabolka narazí do kyvadélka, platí zákon zachování hybnosti. Matematicky lze tedy říci, že platí následující:

$$p_D = m_M v = M v_K,$$

kde M je hmotnost kyvadélka a v_K je rychlost pohybu tohoto kyvadélka. V našem případě budeme nejprve počítat hybnost diabolky a až poté z tohoto údaje dopočítáme rychlost. Hybnost lze také vyjádřit ze vzorce pro energii:

$$E = \frac{p^2}{2M} = Mgh,$$

kde h je výškový rozdíl mezi amplitudou výchylky kyvadélka a jeho rovnovážnou polohou. Z tohoto vztahu si vyjádříme vztah pro hybnost, který ve výpočtech budeme používat:

$$p = M \sqrt{2g \left(l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2} \right)},$$

kde l je délka závěsu kyvadélka a d je vzdálenost mezi dvěma amplitudami výchylky.

Samotný sběr dat probíhal tak, že jsme kyvadélko umístili do vzdálenosti $s = (6,6 \pm 0,05)$ m od hlavně vzduchovky. Kyvadélko bylo vyrobeno z modelíny, která byla vyztužena kusem provázku, aby při zásahu nedošlo k jeho rozlétnutí na několik kusů. Poté jsme do kyvadélka stříleli. Po každém úspěšném zásahu (úspěšnost se pohybovala okolo 30 %) jsme došli změřit vzdálenost d . Měření ztěžoval vítr, který mírně vychyloval závaží, což ovlivnilo jak samotnou úspěšnost střelby, tak i přesnost měření vzdálenosti d . Další nepřesnosti jsme nasbírali tím, že jsme k závaží vybíhali až po zásahu, protože před zásahem byla možnost, že bychom byli zasaženi my sami, což nebylo žádoucí. Naměřené hodnoty jsme zapisovali, poté jsme je standardně zpracovali a došli k jedné hodnotě: $d = (0,36 \pm 0,03)$ m. Ještě bylo potřeba vyřešit otázku, zda má kyvadélko stálou hmotnost. Kyvadélko jsme zvážili před a po pokusu. Hodnoty se od sebe moc nelišily, i když bylo kyvadélko několikrát zasaženo. Vysvětlení, proč se tomu tak dělo, je poměrně jednoduché s ohledem na průběh pokusu. Při některých neúspěšných pokusech docházelo k pouhému zavadení diabolky o kyvadélko a následném odletu menšího množství modelíny. Tyto odlety snižovaly hmotnost kyvadélka a zásahy ji zvyšovaly, tyto protichůdné procesy byly během pokusu téměř v rovnováze. Odchylku hmotnosti kyvadla lze považovat za zanedbatelnou v porovnání s chybami ostatních veličin. Naměřené a dopočítané hodnoty naleznete v tabulce 2.

Chyby vznikaly především při měření vzdálenosti d . K měření jsme vybíhali až po výstřelu, abychom minimalizovali možnost zasažení našich osob (velmi žádoucí věc). Za bezpečnost jsme zaplatili nepřesnostmi měření. Než jsme dorazili

ke kyvadélku vzdálenost mezi rovnovážnými polohami se zmenšila, protože došlo k utlumení kmitání kvůli odporu vzduchu. Další faktorem, který snižoval přesnost měření bylo proudění vzduchu neboli vítr. Ten mírně stáčel kyvadélko do strany a tím pádem jsme nemohli měřit vzdálenost d v rovině rovnoběžné s rovinou kmitání kyvadélka. Odchylku měření u hybnosti jsme určovali následujícím způsobem:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial M}\sigma_M\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial l}\sigma_l\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial d}\sigma_d\right)^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial M} = \sqrt{2g \left(l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right)}$$

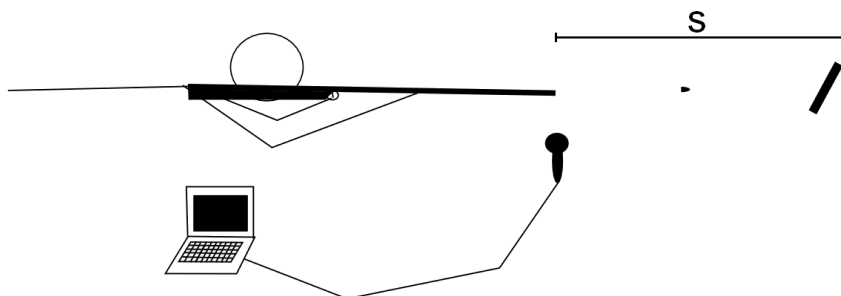
$$\frac{\partial p}{\partial d} = \frac{dM\sqrt{g}}{4\sqrt{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\sqrt{l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{M\sqrt{g}}{\sqrt{2}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}}{\sqrt{l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}}$$

Relativní odchylka sledovaných veličin (hybnost, kinetická energie a rychlost) se pohybovala mezi 9-18 %, což nečiní metodu nijak zvlášť přesnou. Tyto chyby by se daly určitými postupy redukovat. Například bychom mohli střílet v místnosti nebo při bezvětří a k odečítání vzdáleností používat kamerový záznam, který by nám umožnil zjišťovat hodnoty ihned po výstřelu. Toto zpřesnění by vyžadovalo umístění nějaké jednotkové stupnice v blízkosti kyvadélka, která by nám umožnila hodnoty odečíst.

	modrá diabolka	
hmotnost diabolky [g]	0,508 ± 0,003	
délka závěsu [m]	0,93 ± 0,01	
vzdálenost rovnovážných poloh [m]	0,36 ± 0,03	
hmotnost závaží [g]	105 ± 1	
hybnost [kg · m · s ⁻¹]	0,062 ± 0,005	9 %
rychlost diabolky [m · s ⁻¹]	122 ± 11	9 %
kinetická energie [J]	3,8 ± 0,7	18 %

Tabulka 2: Změřené vlastnosti modré diabolky



Obrázek 6: Schéma pokusu při měření rychlosti pomocí zvuku

Měření pomocí zvuku

Další metodou, kterou jsme použili, bylo měření časového úseku mezi výstřelem a nárazem do určitého předmětu, který byl ve vzdálenosti $s = (6,60 \pm 0,05)$ m. Podstatou této metody je zaznamenání zvukových vln výstřelu a nárazu do předmětu. K tomuto účelu jsme použili mikrofon a záznamový program. Předmětem, který jsme zasahovali, bylo víčko od zavařovací sklenice, které při zásahu vydalo poměrně výrazný zvuk a současně se jedná o relativně snadný cíl.

Samotné měření probíhalo tak, že ve vzdálenosti s bylo umístěno víčko opřené o pařez, aby bylo ve stabilní poloze. Nejprve jsme uvažovali o použití papírových terčů, ale ty při zásahu nevydávají téměř žádný zvuk. Mikrofon, kterým jsme zaznamenávali zvuk, jsme umístili co nejbližší hlavni, abychom snížili chybu měření. Úspěšnost střelby dosahovala téměř 100 %. Jedna ze střel byla tak přesná, že zasáhla již vytvořené otvory po předchozích zásazích tak, že nebylo možné zachytit zvukovou vlnu. Celkem jsme použili 4 velká víčka kvůli vysokému stupni jejich poškození. Při měření jsme použili dva druhy diabolek, aby bylo možné porovnat jejich hybnosti.

Čas, který byl naměřen, nebyl faktickou dobou letu, protože byl ovlivněn dobou přenosu zvukového signálu od zasazeného víčka. Rychlost diabolky pak byla dáno tímto vztahem:

$$v = \frac{1}{\frac{t_1}{s} - \frac{1}{v_z}},$$

kde t_1 je naměřená doba a v_z rychlost šíření zvuku při teplotě $t_v = 17^\circ\text{C}$. Tuto rychlost jsme vypočítali pomocí vzorce $v_z = (331,57 + 0,67t[^\circ\text{C}]) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vzorec převzat z Wikipedie⁶), s námi změřenou teplotou jsme došli k hodnotě $v_z = 341,889 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dobu letu t_1 jsme určovali odečtením časových hodnot z vykresleného zvukového záznamu programem Audacity. Naměřené hodnoty jsou zaneseny v tabulce 3.

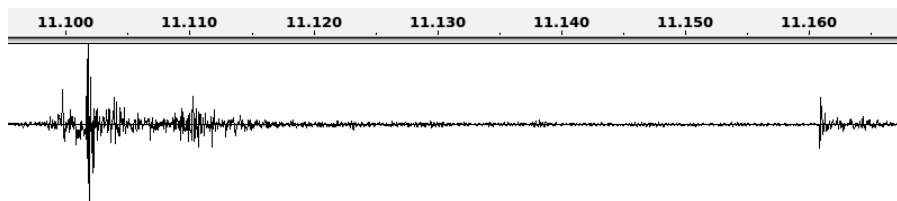
⁶ https://cs.wikipedia.org/wiki/Rychlosti_zvuku

výstřel [s]	dolet [s]	čas [s]
22,1752	22,2324	0,0572
11,108	11,1608	0,0528
5,5332	5,5907	0,0575
7,5525	7,6104	0,0579
8,569	8,6267	0,0577
10,3416	10,3986	0,057
12,0321	12,0893	0,0572
12,8527	12,9038	0,0511
6,4814	6,5361	0,0547
7,6844	7,7434	0,059

(a) modrá diabolka

výstřel [s]	dolet [s]	čas [s]
9,7161	9,7746	0,0585
4,7438	4,8019	0,0581
4,5537	4,6129	0,0592
10,2184	10,2753	0,0569
8,0914	8,1491	0,0577
5,6488	5,7066	0,0578
6,9201	6,979	0,0589
4,7721	4,8296	0,0575
5,4229	5,4818	0,0589

(b) červená diabolka

Tabulka 3: Naměřené hodnoty**Obrázek 7:** Záznam jednoho z výstřelů pomocí programu Audacity

	modrá		červená	
hmotnost [g]	0,508 ± 0,003		0,553 ± 0,002	
doba letu [s]	0,056 ± 0,002	4,60 %	0,058 ± 0,002	3,50 %
rychlost [m·s ⁻¹]	179 ± 13	7,00 %	170 ± 9	5,20 %
hybnost [kg·m·s ⁻¹]	0,091 ± 0,006	7,00 %	0,094 ± 0,004	5,20 %
kinetická energie [J]	8,1 ± 1,1	14,00 %	8,0 ± 0,9	10,50 %

Tabulka 4: Porovnání hodnot pro modrou a červenou diabolku

Poté jsme dopočítali hybnost pomocí vzorce: $p = mv$ a kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. V tabulce 4 jsou pro porovnání vyneseny hodnoty pro modrou i červenou diabolku.

Chyby měření vznikaly při zaznamenávání zvukového signálu. Jedna ze vzniklých chyb byla způsobena umístěním mikrofону, který nebylo možné dát přímo k hlavni, protože by mohlo dojít k jeho poškození. Další z chyb vznikala při odcítání časových úseků ze záznamu. Na výše znázorněném obrázku 5 můžeme vidět, že nebylo jednoduché jednoznačně určit přesnou chvíli výstřelu a nárazu. Zvukový záznam mohl být také mírně ovlivněn okolními ruchy. Odchytku měření u rychlosti určíme následujícím způsobem:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t_1} \sigma_{t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \sigma_s\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = -\frac{1}{s \left(\frac{t_1}{s} - \frac{1}{v_z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{t_1}{\left(t_1 - \frac{s}{v_z}\right)^2}.$$

Relativní chyba u zjišťovaných veličin (rychlost, hybnost a energie) se pohybovala mezi 5–14 %. Tato chyba je při námi použitým vybavení akceptovatelná a výsledky lze proto považovat za relevantní.

Tato metoda nám umožnila porovnat dva druhy diabolek. Jako rychlejší vyšla z tohoto pokusu modrá diabolka. Tato diabolka má na svém povrchu drobné drážky, jinak se rozměrově na první pohled neliší od své hladké verze, pracovně označené jako červená. Modrá diabolka má sice vyšší rychlost, ale má nižší hybnost, protože rozdíl v hmotnostech diabolek je větší než rozdíl mezi rychlostmi. Hodnoty kinetické energie lze v rámci odchylek měření považovat za srovnatelné. Drážky na modré diabolce slouží především ke snížení odporu vzduchu, toto umožní diabolce dolétnout dále s menšími ztrátami rychlosti. Drážky umožňují lepší proudění vzduchu v okolí pohybující se diabolky.

Měření pomocí dvou rotujících kotoučů

Na tuto metodu nám nezbyl dostatek času, proto jsme ji neprovedli. Další z překážek, která zabránila jejímu provedení, byla její technická náročnost.

Pokus bychom tuto metodu prováděli, potřebovali bychom dva kotouče ze stejného snadno prostřelitelného materiálu (např. papír) ve vzdálenosti l , které by se otáčely se stejnou periodou T a známou počáteční fází ϕ (v našem případě $\phi_1 = \phi_2 = 0$). Po výstřelu diabolka nejprve narazí do kotouče č. 1, poté urazí za čas t vzdálenost l a narazí do kotouče č. 2. Během doby t opiše kotouč č. 2 úhel α [rad]. Tento úhel nám pomůže zjistit čas t , a to takto:

$$t = \frac{\alpha}{2\pi} T.$$

Ze získaného času t a známé vzdálenosti l snadno dopočítáme rychlost diabolky v :

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi l}{T\alpha}.$$

Tato metoda nám umožňuje přímo zjistit rychlost diabolky v . Její hybnost bychom poté mohli zpětně dopočítat pomocí známého vzorce $p = mv$.

I tato metoda má nějaké nedostatky. První a asi největší z nich je již zmiňovaná technická náročnost oproti dvěma dříve zmíněným metodám. Je nutné sestavit takové zařízení, které umožní otáčet kotouče stále stejně rychle a zároveň je současně zastavit, aby nedocházelo ke zkreslení velikosti úhlu α . K tomuto účelu bychom mohli využít soustavu cívka-magnet a využít otáčivého efektu elektromagnetické indukce způsobené střídavým proudem přiváděným na cívku. Další problém nastane při hledání vhodné frekvence otáček kotoučů. Mohlo by dojít k tomu, že kotouč č. 2 by opsal více než jednu otáčku, aniž bychom to zaregistrovali, což by výrazně zkreslilo výsledky. Z tohoto důvodu bychom měli mít aspoň přibližný odhad rychlosti v , abychom eliminovali tyto nepřesnosti a zrychlili průběh měření.

Chyby během měření mohou nastat během měření velikosti úhlu α . Při nevhodně zvoleném materiálu kotoučů může dojít k výraznějšímu zpomalení diabolky nebo se její rychlost sníží natolik, že začne padat po trajektorii šikmého vrhu. Zpomalení diabolky však není možné úplně eliminovat, bude k němu docházet vždy při nárazu do kotouče č. 1, při vhodně zvoleném materiálu bude toto zpomalení téměř zanedbatelné.

Obecně je tato metoda velmi technicky náročná a vyžaduje aspoň částečný odhad rychlosti diabolky. Bylo by však možné ji použít jako metodu, která zpřesňuje předchozí měření.

Závěr

Výchylkou kyvadla jsme změřili rychlost jednoho druhu diabolek (drážkovaných). Výsledná hodnota je

$$v_M = (122 \pm 11) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pomocí zvuku a jeho přenosu vzduchem jsme měřili rychlosti dvou druhů diabolek (s drážkami a bez nich) a porovnali je. Výsledná hodnota drážkovaných diabolek je

$$v_M = (179 \pm 13) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výsledná hodnota hladkých diabolek je

$$v_C = (170 \pm 9) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Porovnáním výsledků při měření pomocí zvuku jsme si ověřili, že drážky v diabolce umožňují lepší proudění vzduchu v jejím okolí, což má za následek její větší rychlost.

Konference Seleška 2015

Termosky

(8 b)

Mgr.^{MM}Sára Rosecká

Na konfeře spolupracovali:

Mgr.^{MM}Dominika Jurdová, Bc.^{MM}Peter Pavel Arthur Petráš

Izolanty

Izolanty jsou látky (materiály), které od sebe odráží teplo. Pokud máme dokonale izolující nádobu, molekuly, které narazí do nádoby s určitou rychlostí, se od nádoby odrazí a nepředají nádobě žádnou energii, molekuly se tedy odrážejí s dokonale pružnou srážkou. S největší pravděpodobností se i odrazí stejnou rychlostí (musíme zachovat jejich energii).

Příprava, materiály

Měli jsme k dispozici materiály, které najdeme v domácnosti a venku v přírodě. Srovnávali jsme chladnutí cca 60 °C vody v plechovce obalené termotříčkem, vzduchem (plechovka byla umístěna v hrnci), hrncem plným listí (mokrého, suchého), zmačkaným papírem (noviny), ... Tyto pokusy jsme následně opakovali v jámě vykopané na míru plechovky. Všechny hodnoty jsme porovnávali s plechovkou, která nebyla obalena a vzduch kolem ní mohl volně proudit. Vodu jsme ohřívali v rychlovarné konvici a následně ji přelávali do plastové konvice, kde jsme ji nechali chladit na 60 °C. Teplotu v konvici jsme měřili termokamerou a teplotu v plechovkách jsme měřili tepelným čidlem (DS18B20).

Výroba

Plechovky byly válcového tvaru, jeden z podstavných kruhů měl z větší části odříznuté víko tak, abychom ho mohli otevírat a zavírat. Doprostřed víka jsme udělali přibližně kruhovou díru, jejíž velikost odpovídala průměru čidla, které jsme do termosky dávali. Poté jsme z drátků vytvořili „stojánek“ na čidlo. Tento stojánek držel čidlo ve svislé poloze vůči dnu a uprostřed termosky. Tím jsme chtěli docílit co nejobjektivnějšího měření, protože voda proudí a uprostřed zůstává nejdéle teplá. Poté jen stačilo sehnat dostatečné množství obalových materiálů a těmi obalit termosku těsně před instalací celého měření.

Postup měření

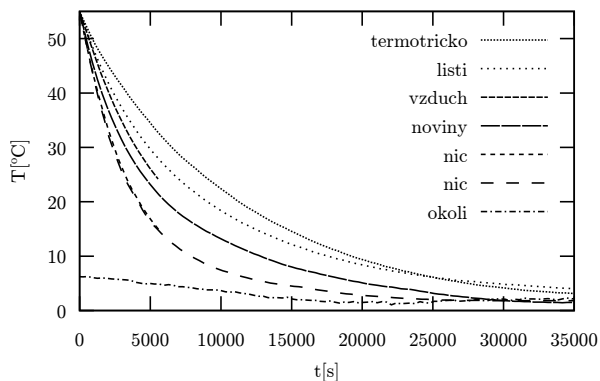
V rychlovarné konvici jsme uvařili vodu. Pro sledování změny teploty nám stačila nižší teplota než teplota blížící se bodu varu, proto jsme vodu přelili do plastové konvice a v ní jsme pravidelně měřili teplotu vody termokamerou. Když voda dosáhla požadované teploty, vzali jsme plechovku, obalový materiál a čidla a šli ven.

Venku jsme vybrali vhodné místo (vždy stejné) a na něj postavili termosku obalenou daným materiálem. Otevřeli jsme víko plechovky a nalili jsme do ní horkou vodu. Víko jsme zavřeli a dírou jsme prostrčili čidlo, zároveň jsme čidlo ukotvili v držáku, který byl přichycen k plechovce. Obalili jsme plechovku daným izolačním materiálem. Detektory jsme připojili k počítači, ve kterém běžel program, který ihned vykresloval graf s danými hodnotami a zároveň data ukládal pro další zpracování.

Výsledky

Na vzduchu

Z grafů nám vycházely přibližně klesající exponenciely. Na vzduchu má nejméně klesající tendenci křivka, která odpovídá termotričku, následuje listí, poté vzduchová bublina v hrnci, zmačkané noviny.



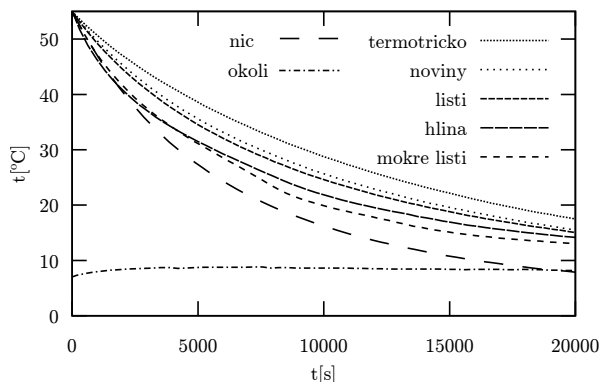
Obrázek 8: Chladnutí termosek na vzduchu

V zemi

V zemi je celková klesající tendence menší než na vzduchu. Za stejný časový úsek se žádná plechovka v zemi obalená izolačním materiálem nedostala na teplotu vzduchu, na rozdíl od měření na vzduchu. V zemi se rovněž osvědčilo termotričko jako nejlepší izolant, dále znovu zmačkané noviny (nyní již pouze vyplňovaly zbylé místo mezi zemí a plechovkou, nebyly v hrnci), suché listí, nejhůř ze všech materiálů dopadla hlína, která na tom byla velmi podobně jako mokré listí.

Závěr

Z našeho měření jsme zjistili, že nejlepším izolantem v zimě (teplota kolísala mezi 0 – 10 $^{\circ}\text{C}$) je termotričko schované v zemi. Nejhorším izolantem byly zmačkané noviny na vzduchu. Z výsledků vyplývá, že až nám bude zima, tak si na sebe můžeme



Obrázek 9: Chladnutí termosek v zemi

vykopat jámu (čímž se zahřejeme) a pak si do ní vlézt nejlépe v termoprádle. Na rozdíl například od použití papíru, který se hodí maximálně tak na podpal.

Seriál: Molekuly

Už máme dostatečný teoretický základ, takže v tomto díle už opravdu bude nějaká fyzika (a chemie). Opět ale začneme řešením úloh z minula:

1. Urči řád grupy a jejich prvků a najdi co nejvíc podgrup a všechny třídy grupy D_{3h} . (2b)

Řešení:

Grupa D_{3h} obsahuje prvky $e, c_3, c_3^2, s_3, s_3^2, \sigma_h, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, c_A, c_B$ a c_C . Je jich dohromady 12, řád grupy D_{3h} je tedy $g_{D_{3h}} = 12$.

Probereme si jednotlivé prvky a určíme jejich řády. Řád identity e je vždy 1. O řádu trojčetné osy už jsme minule také mluvili, ten je 3. Složitější to bude s řádem trojčetné reflexní osy:

$$(s_3)^2 = c_3^2$$

$$(s_3)^3 = c_3^2 \bullet s_3 = \sigma_h$$

$$(s_3)^4 = \sigma_h \bullet s_3 = c_3$$

$$(s_3)^5 = c_3 \bullet s_3 = s_3^2 (s_3)^6 = s_3^2 \bullet s_3 = e$$

Řád trojčetné reflexní osy je tedy 6. Řád rovin zrcadlení a dvojčetných os je 2.

Podgrupy grupy D_{3h} je skutečně hodně, jsou to:

- $\{e\}$ (značí se C_1)
- $\{e, c_3, c_3^2\}$ (značí se C_3)
- $\{e, \sigma_A\}, \{e, \sigma_B\}, \{e, \sigma_C\}, \{e, \sigma_h\}$ (tyto grupy se značí C_s)
- $\{e, c_A\}, \{e, c_B\}, \{e, c_C\}$ (tyto grupy se značí C_2)
- $\{e, c_3, c_3^2, s_3, s_3^2, \sigma_h\}$ (značí se C_{3h})
- $\{e, c_3, c_3^2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ (značí se C_{3v})
- $\{e, c_A, \sigma_A, \sigma_h\}, \{e, c_B, \sigma_B, \sigma_h\}, \{e, c_C, \sigma_C, \sigma_h\}$ (tyto grupy se značí C_{2v})
- $\{e, c_A, c_B, c_C, c_3, c_3^2\}$ (tato grupa se značí D_3)

Rozdělení grupy na třídy tady ukážeme pomocí tabulky všech konjugací (Tab. 5).

Třídy grupy D_{3h} tedy jsou: $\{e\}, \{c_3, c_3^2\}, \{s_3, s_3^2\}, \{\sigma_h\}, \{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}, \{c_A, c_B, c_C\}$. Počty prvků tříd (1, 2, 2, 1, 3, 3) jsou děliteli řádu grupy (12).

x	e	c_3	c_3^2	s_3	s_3^2	σ_h	σ_A	σ_B	σ_C	c_A	c_B	c_C
$x \bullet e \bullet x^{-1}$	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
$x \bullet c_3 \bullet x^{-1}$	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3^2	c_3^2	c_3^2
$x \bullet c_3^2 \bullet x^{-1}$	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3^2	c_3	c_3	c_3
$x \bullet s_3 \bullet x^{-1}$	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3^2	s_3^2	s_3^2
$x \bullet s_3^2 \bullet x^{-1}$	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3^2	s_3	s_3	s_3
$x \bullet \sigma_h \bullet x^{-1}$	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h	σ_h
$x \bullet \sigma_A \bullet x^{-1}$	σ_A	σ_B	σ_C	σ_B	σ_C	σ_A	σ_A	σ_A	σ_A	σ_A	σ_A	σ_A
$x \bullet \sigma_B \bullet x^{-1}$	σ_B	σ_C	σ_A	σ_C	σ_A	σ_B	σ_B	σ_B	σ_B	σ_B	σ_B	σ_B
$x \bullet \sigma_C \bullet x^{-1}$	σ_C	σ_A	σ_B	σ_A	σ_B	σ_C	σ_C	σ_C	σ_C	σ_C	σ_C	σ_C
$x \bullet c_A \bullet x^{-1}$	c_A	c_B	c_C	c_B	c_C	c_A	c_A	c_C	c_B	c_A	c_C	c_B
$x \bullet c_B \bullet x^{-1}$	c_B	c_C	c_A	c_C	c_A	c_B	c_C	c_B	c_A	c_C	c_B	c_A
$x \bullet c_C \bullet x^{-1}$	c_C	c_A	c_B	c_A	c_B	c_C	c_B	c_A	c_C	c_B	c_A	c_C

Tabulka 5: Tabulka všech konjugací grupy D_{3h}

2. Napiš nějakou 3D reprezentaci grupy všech dvojitých rotací rovnostranného trojúhelníka a ukaž, jestli je ireducibilní. (3b)

Řešení:

Ukázky z vašich řešení si necháme napříště. Naopak v tomto čísle přinášíme originální návrhy grup z vašich řešení druhé série.

Dr.^{MM}Petr Šimůnek a Mgr.^{MM}Anna Mlezivová shodně navrhli grupu symetrií čtverce. Ta obsahuje devět operací: identitu, čtyřčetnou rotační osu procházející středem čtverce, dvě roviny zrcadlení obsahující úhlopříčky a dvě

procházející středy stran čtverce. Roviny zrcadlení jsou ekvivalentní s dvojitými rotacemi kolem úhlopříček resp. os stran. Doc.^{MM}Dominik Krasula navrhl originální cyklickou grupu, tedy množinu několika přirozených čísel a operaci sčítání modulo jiné číslo – všiml si, že do ní není nutné zařazovat všechna přirozená čísla menší než číslo, které používáme k operaci modulo. Jeho grupa je množina $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ s operací $+ \pmod{10}$.

Teď, když už máme zavedený pojem reprezentace, můžeme teorii grup na něco skutečně aplikovat. Prvním příkladem bude určování výběrových pravidel ve spektroskopii, konkrétně si to ukážeme na spektroskopii molekulových vibrací.

Každá molekula je v neustálém (tepelném) pohybu, pohybuje se jako celek, otáčí se, deformuje se její tvar. Všechny tyto pohyby se dají popsat jako změny souřadnic jejích atomů. Pro N -atomovou molekulu má takový prostor dimenzi $3N$ (každý atom má souřadnice x, y a z). $3N$ je i počet stupňů volnosti pohybu takové molekuly. Tyto stupně volnosti pohybu se dají rozdělit na několik druhů. Prvním je pohyb molekuly jako celku, *translace* – translační stupně volnosti jsou tři a obvykle se popisují kartézskými souřadnicemi těžiště molekuly. Dalším specifickým pohybem je *rotace* molekuly jako celku, rotacím také přísluší tři stupně volnosti – obvykle je popisujeme jako otočení kolem os procházejících těžištěm molekuly. Zbývá nám $3N - 6$ stupňů volnosti na různé deformace molekuly, těm říkáme *vibrační* stupně volnosti. Souřadnice vibračních stupňů volnosti se popisují různými způsoby, nejnázornější je soustava souřadnic spojená s délkami chemických vazeb v molekule a úhly mezi nimi (vazebnými úhly).

Trochu speciálním případem je např. molekula oxidu uhličitého CO_2 , kde se vazebný úhel považuje za úhel přímý. Molekula pak leží celá v jedné ose symetrie, označme si ji jako osu z . Rotace celé molekuly kolem os x a y je potom totéž, takže je to jeden stupeň volnosti. Naopak vazebný úhel 180° se může měnit v rovině xz i yz a stupně volnosti se nám neztratí. Jen je jiné jejich rozložení: 3 na translace, 2 na rotace a $3N - 5$ na vibrace molekuly. Toto platí pro lineární molekuly obecně.

Je nám asi jasné, že se vazebné délky a úhly v molekule mohou měnit. Proč tomu ale říkáme vibrace? Stejně jako pružina nebo kyvadlo, každý z našich chemických parametrů je spojen s nějakou silovou vazbou a má nějakou polohu s minimální energií. Při vychýlení pak logicky působí síla vracející systém zpět. Molekula se tedy chová jako systém oscilátorů. Na rozdíl od oscilátorů klasické mechaniky, tedy těch kyvadel a pružin, tady neexistuje nekonečné množství různých frekvencí, maximálních výchylek kmitů, atd. Molekulární oscilátory jsou oscilátory kvantové. To znamená, že:

- Existují jen určité povolené hodnoty energie oscilátoru.
- Tyto energie jsou ekvidistantní, to znamená, že jsou od sebe všechny stejně daleko.
- Nejnižší energie není nula, takže i základní stav má nějakou definovanou energii.

Podobně jako u dvou těles spojených pružinou, závisí energie (a tím i frekvence) vibrací na síle vazby (tuhosti pružiny) a hmotnostech objektů vazbou spojených. Ve vibračních spektrech proto pozorujeme vibrace lehčích atomů na vyšších frekvencích než vibrace těžších atomů. Frekvence vibrací je také vyšší u násobných chemických vazeb. Změny délek chemických vazeb mají vyšší frekvence než změny vazebných úhlů.

Spektroskopie molekulových vibrací máme dvě: absorpční infračervenou spektroskopii a Ramanovu spektroskopii, která je založena na rozptylu. Absorpční spektroskopie funguje tak, že dodáváme materiálu energii (pomocí fotonů o různé energii) a pozorujeme, které fotony si látka uměla vzít. Jejich energie pak odpovídá rozdílu energií mezi hladinami některého z jejich systémů hladin (některého z jejich oscilátorů). Rozptylová (Ramanova) spektroskopie funguje tak, že na látku svítíme laserem, tedy všechny fotony mají stejnou energii, a sledujeme fotony, které svou energii při interakci s látkou změnil (je jich velmi velmi málo). Změna energie těchto fotonů je opět náš rozdíl energií mezi hladinami.

Všechny vibrace, které pozorujeme, v molekule opravdu existují, ale neplatí, že všechny existující vibrace můžeme pozorovat. Platí určitá *výběrová pravidla* pro přechody mezi vibračními stavy a ta nám určují, které z těchto přechodů jsou *povolené* (můžeme je pozorovat) a které *zakázané*. (Tedy, v určité aproximaci. Obecně platí, že pokud je přechod zakázaný, je jen velmi nepravděpodobný.)

Prvním pravidlem je, že povolené jsou jen přechody mezi *sousedními* hladinami. Toto výběrové pravidlo velmi dobře platí a druhé harmonické (přechod ob jednu hladinu) nebo součtové vibrace (kombinace dvou různých vibrací, které se samy projevují i normálně) jsou spíše rarity.

Dále tu máme výběrová pravidla, která souvisejí s polaritou a symetrií molekuly. V infračervené absorpční spektroskopii vidíme jenom ty přechody, kde se při vibraci mění dipólový moment molekuly \vec{p} . (Dipólový moment dipólu je součin velikosti nábojů a vektoru od záporného náboje ke kladnému, dipólový moment molekuly je pak vektorovým součtem momentů přítomných dipólů.) Dipólový moment molekuly závisí jak na polaritě vazeb (čím polárnější, tím silnější odezva), tak na symetrii molekuly. Podívejte se na obrázek 10: molekula vody má polární vazby a má i nenulový dipólový moment. Jak se může během vibrací měnit si ukážeme později. Molekula oxidu uhličitého má také polární vazby, ale její celkový dipólový moment je nulový. V Ramanově spektroskopii jsou naopak vidět vibrace, při kterých se mění polarizovatelnost molekuly α . Polarizovatelnost je veličina, která popisuje míru odezvy materiálu \vec{P} (polarizace) na elektrické pole \vec{E} vztahem $\vec{P} = \alpha \vec{E}$. Polarizovatelnost je těžko představitelná, ale v zásadě se dá říct, že snáz se polarizuje vyšší elektronová hustota, tedy násobné vazby. A opět samozřejmě silně závisí na symetrii molekuly.

Symetrie molekuly je popsána jednou z grup bodových symetrií.⁷ Pokud chceme studovat výběrová pravidla vibračních spektroskopii u nějaké molekuly, nejdříve

⁷Bodových proto, že se geometrická znázornění všech prvků grupy (osy, roviny, střed inverze) protínají v jednom bodě.



(a) Dipólový moment molekuly vody získáme jako součet dipólových momentů jejích vazeb, výsledkem je vektor směřující od atomu kyslíku mezi atomy vodíku.

(b) Dipólový moment molekuly oxidu uhličitého je nulový, dipólové momenty jeho vazeb se vyruší.

Obrázek 10: Porovnání dipólových momentů molekuly vody a oxidu uhličitého

určíme její bodovou grupu symetrie. Schematický návod k jejímu určení je na obrázku 12, zkusme to společně pro molekulu vody. Voda není lineární molekula. Rotační osu má jen jednu, a to dvojitou, takže na otázku, jestli má jen jedinou osu maximální četnosti odpovídáme ano, a ukládáme si, že $n = 2$. Ose o maximální četnosti se obecně říká osa hlavní. Čtyřčetnou reflexní osu rovnoběžnou s osou hlavní nemáme. Další dvojitné osy také nemáme, natož pak kolmé k ose hlavní. Dál máme dvě vertikální roviny, tedy roviny obsahující hlavní osu, jednu v rovině molekuly a druhou kolmou na rovinu molekuly, takže tady odpovídáme ano. A vidíme, že voda má bodovou grupu symetrie C_{2v} .

Dalším krokem je sestavení reprezentace bodové grupy pro naši molekulu. Molekula vody má tři atomy, takže budeme pracovat v devíti dimenzích. Vektor v prostoru $3N$ bude vypadat takto: $(x_{H_1}, y_{H_1}, z_{H_1}, x_{H_2}, y_{H_2}, z_{H_2}, x_O, y_O, z_O)$. Kartézské souřadnice místo systému délek vazeb a vazebných úhlů, volíme jako první nástřel proto, že se snadno vytváří. Osu z si zvolíme ve směru dipólového momentu molekuly, osu x kolmou na rovinu molekuly a osu y kolmou na předchozí dvě, tedy v rovině molekuly. Matice jednotlivých prvků grupy, tedy e , C_2 , σ_{xz} a σ_{yz} budou vypadat následovně:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

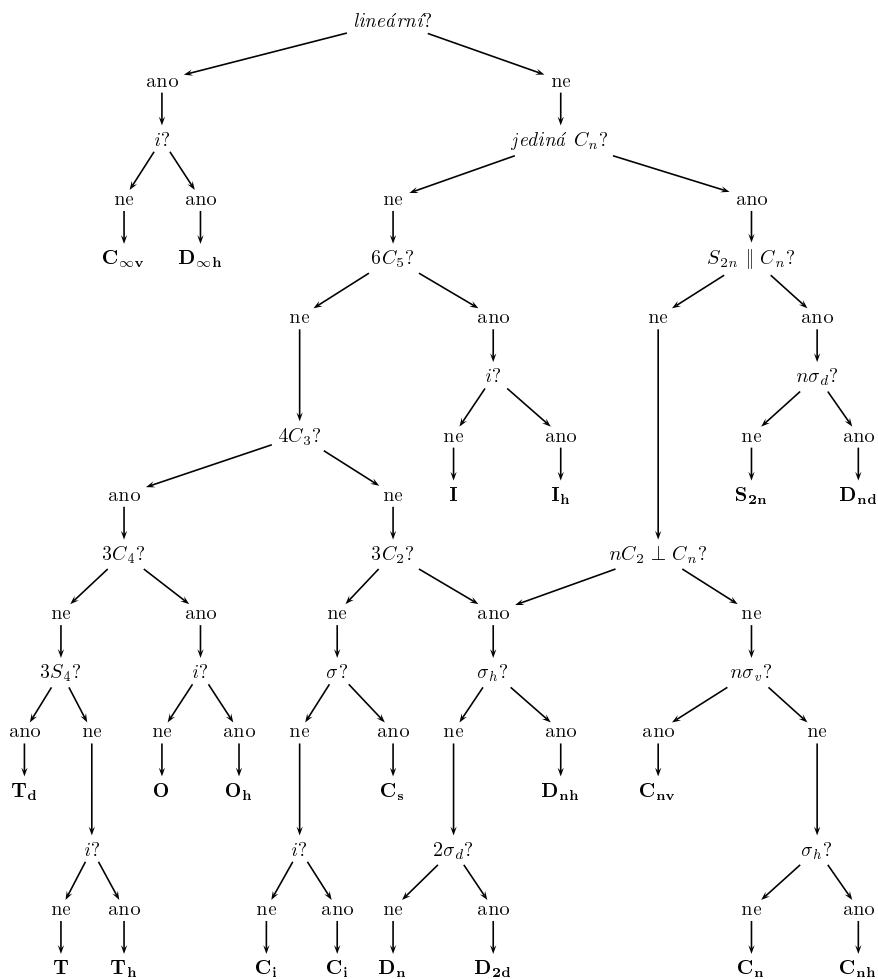
$$\sigma_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z pohledu do pravého dolního rohu matic vidíme, že tato reprezentace je ireducibilní. (Stejně tak je reducibilní reprezentace s bází založenou na vazebných délkách a úhlech, protože má stejnou dimenzi). Co teď musíme udělat, je najít reducibilní reprezentace této grupy. Potřebujeme tedy všechny čtyři matice převést stejnou procedurou na kvazidiagonální tvar. A to ručně opravdu dělat nebudeme, to je práce pro stroje. Výsledek se navíc dá najít v tabulkách⁸. Tabulka pro grupu C_{2v} vypadá takto:

	E	$C_2(z)$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	z	x_2, y_2, z_2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x	yz

⁸<http://www.webqc.org/symmetrypointgroup-c2v.html>



Obrázek 11: Diagram k určení bodové grupy symetrie.

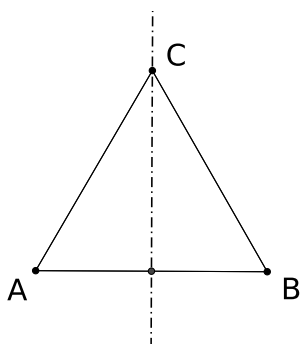
Z prvního sloupce vidíme, že grupa C_{2v} má čtyři ireducibilní reprezentace označené A_1 , A_2 , B_1 a B_2 . Matice každé z těchto reprezentací stále splňují stejné multiplikační vlastnosti, jako e , c_z , σ_{xz} a σ_{yz} , takže to jsou prvky grupy C_{2v} , už to ale nejsou prvky symetrie rovnoramenného trojúhelníku. Co to tedy je? Jsou to jiné transformace naší konkrétní molekuly, které splňují určité symetrické podmínky dané původními prvky grupy C_{2v} . Jaké symetrické podmínky to jsou je zakódováno ve značce reprezentace v naší molekule.

Ireducibilní reprezentace grup symetrie molekul se značí $X_{i,j}^k$. X rozlišuje dimenzi reprezentace, $X \in \{A, B\}$ jsou jednodimenzionální, $X = E$ dvojdimenzionální a $X = T$ třídimeznionální. Jednodimenzionální reprezentace jsou navíc rozlišeny podle toho, jestli transformace popsané jejich prvky jsou symetrické ($X = A$) nebo antisymetrické ($X = B$) vůči rotaci kolem hlavní osy. Indexy pak popisují zachovávání dalších symetrií při transformacích patřících dané reprezentaci. První dolní index i popisuje, jestli je transformace symetrická ($i = 1$) nebo antisymetrická ($i = 2$) vůči zrcadlení ve vertikální rovině, druhý dolní index j se týká symetrie vůči středu inverze ($j = g$ symetrická, $j = u$ antisymetrická) a horní index k zrcadlení v horizontální rovině ($k = l$ symetrická, $k = ll$ antisymetrická).

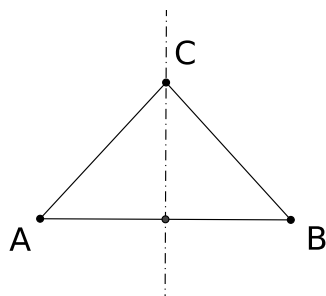
Že je něco antisymetrické znamená, že to porušuje danou symetrii speciálním způsobem. Ono porušení symetrie má určitou symetrii. Ukažme si to třeba na reprezentacích A a B . Máme rovnoramenný trojúhelník ABC s podstavou AB a rameny BC a AC (Obr. 12a). Osou symetrie je tady osa procházející středem základny a vrcholem C . Pokud bychom prodloužili obě ramena o stejný úsek, dostaneme opět rovnoramenný trojúhelník symetrický podle naší osy (Obr. 12b) – taková transformace je vůči ose symetrická a popisuje ji ireducibilní reprezentace A . Pokud bychom jedno rameno o nějaký úsek x zkrátili a druhé o stejný úsek x prodloužili, výsledek už symetrický není (Obr. 12c). Ale pokud tento deformovaný trojúhelník otočíme kolem osy, dostaneme trojúhelník, jaký bychom dostali opačnou transformací, tedy první rameno bychom o x prodloužili a druhé zkrátili (Obr. 12d). Taková transformace je vůči rotaci kolem hlavní osy původního trojúhelníka antisymetrická a popisuje ji ireducibilní reprezentace B . Pokud by úseky, o které v každém okamžiku změním délky ramen, nebyly přesně opačné, byla by transformace prostě jen nesymetrická.

Další čtyři sloupce nám říkají, jaké jsou charaktery prvků grupy v dané reprezentaci (stopy matic). Předposlední a poslední sloupec nám říkají, které změny jednoduchých souřadnic (translace a rotace), případně kvadratických kombinací kartézských souřadnic, jsou invariantní vůči transformacím popsaným tou kterou reprezentací. Například transformace popsané reprezentací A_1 grupy C_{2v} jsou invariantní vůči posunu podél osy Z .

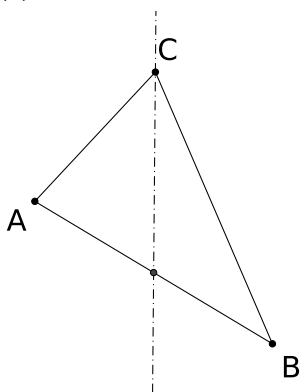
Máme tedy ireducibilní reprezentace grupy. Teď musíme zjistit, co přesně transformace popsané v těchto reprezentacích znamenají pro naši molekulu. To bude delší proces. Jako první krok zjistíme charaktery prvků grupy v původní $3N$ reprezentaci spojené s atomy v molekule. Můžeme si jednak napsat matice



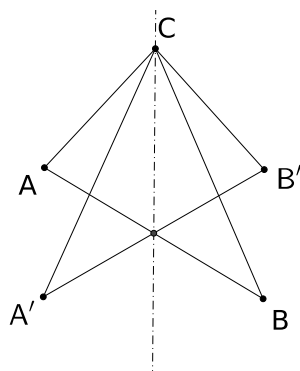
(a) Rovnostranný trojúhelník



(b) Rovnoramenný trojúhelník vzniklý z předchozího zkrácením stran AC a BC o stejný úsek.



(c) Deformovaný trojúhelník vzniklý zkrácením strany AC a prodloužením strany BC o stejný úsek.



(d) Otočení deformovaného trojúhelníku okolo osy procházející vrcholem C.

Obrázek 12: Deformace rovnostranného trojúhelníku

reprezentující prvky naší grupy ve $3N$ reprezentaci, jako jsme to udělali výše, a spočítat jejich stopy, pokud ale máme tabulku charakterů, jde to i snáz. Rozšíříme si ji o pár dalších řádků. . .

Do řádku n_R napíšeme počet atomů molekuly, které leží na daném prvku symetrie: Identita je vlastně celý prostor a v něm leží všechny tři atomy molekuly vody. Na rotační ose $C_2(z)$ leží jen atom kyslíku, píšeme tedy jedničku. V rovině kolmé na rovinu molekuly $\sigma_v(xz)$ leží také jen atom kyslíku a v rovině molekuly opět leží všechny atomy.

Do řádku $\chi^0(R)$ napíšeme charaktery prvků C_{2v} v reprezentaci příslušné kartézskému trojrozměrnému prostoru.

$$\text{Tr } e = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \text{Tr } e = \text{Tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\text{Tr } e = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{Tr } e = \text{Tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Do řádku $\chi(R)$ pak napíšeme součin čísel v řádcích n_R a $\chi^0(R)$ – to jsou hledané charaktery.

	e	$C_2(z)$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x	zy
n_R	3	1	1	3		
$\chi^0(R)$	3	-1	1	1		
$\chi(R)$	9	-1	1	3		

Proč to funguje? Protože pokud se souřadnice atomu při aplikaci operace symetrie mění (atom na prvku neleží), přísluší jeho souřadnicím v matici reprezentující operaci symetrie nulové diagonální prvky. Do charakteru tedy přispívají jen atomy, které na prvku symetrie leží.

Charaktery prvků symetrie v trojrozměrné kartézské reprezentaci sice umíme vypočítat, ale různých prvků symetrie obecně není mnoho, a tak se jejich charaktery dají vypsát:

- $\chi^0(e) = 3$
- $\chi^0(i) = -3$
- $\chi^0(\sigma) = 1$

- $\chi^0(c_n^k) = 2 \cos \frac{2\pi k}{n} + 1$
- $\chi^0(s_n^k) = 2 \cos \frac{2\pi k}{n} + 1$

Teď už můžeme zcela určit redukci $3N$ reprezentace. Víme, které ireducibilní reprezentace obsahuje, jen zjistíme, kterou obsahuje kolikrát. K tomu se nám budou hodit právě spočítané charaktery. Reprezentace A_1 je v reprezentaci $3N$ obsažená a_1 -krát:

$$a_1 = \frac{1}{n} \left[\sum_g \chi(g) A_1(g) \right],$$

kde n je řád grupy, tedy počet prvků symetrie, \sum_g značí sčítání přes všechny prvky grupy, $\chi(g)$ je charakter prvku g v $3N$ reprezentaci a $A_1(g)$ je charakter prvku g v reprezentaci A_1 – najdeme ho v tabulce charakterů v řádku A_1 a sloupci g .

- $a_1 = \frac{1}{4}[9 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1] = 3$
- $a_2 = \frac{1}{4}[9 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)] = 1$
- $b_1 = \frac{1}{4}[9 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)] = 2$
- $a_1 = \frac{1}{4}[9 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1] = 3$

Reprezentace $3N$ pro molekulu vody se tedy dá rozložit jako

$$R(3N) = 3A_1 \oplus 1A_2 \oplus 2B_1 \oplus 3B_2,$$

kde symbolem \oplus značíme sjednocení ireducibilních reprezentací.

Teď už nám zbývá jen určit, který stupeň volnosti systému náleží které ireducibilní reprezentaci. K tomu nám pomůže předposlední sloupec tabulky charakterů. Stupně volnosti máme translační, rotační a vibrační. Translačním stupňům volnosti, tedy kartézským souřadnicím těžiště x , y a z , náleží ty ireducibilní reprezentace, vůči kterým jsou kartézské souřadnice invariantní, tedy ty, u kterých je příslušná souřadnice napsaná

$$R^{\text{trans}}(3N) = A_1 \oplus B_1 \oplus B_2.$$

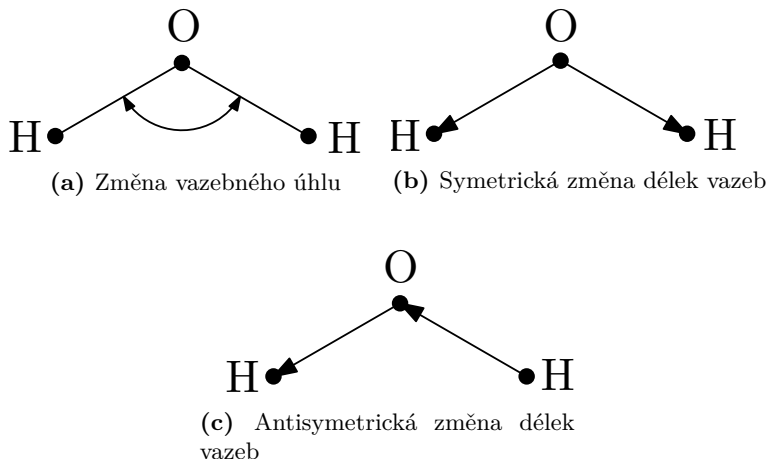
Podobně pro rotace

$$R^{\text{rot}}(3N) = A_2 \oplus B_1 \oplus B_2.$$

A na vibrace nám zbývá

$$R^{\text{vib}}(3N) = 2A_1 \oplus B_2.$$

U tak jednoduché molekuly, jakou je voda, dokážeme skutečně určit, které vibrace patří ke které ireducibilní reprezentaci, podle symetrií, které vibrace (resp. její reprezentace) zachovává. Reprezentace A_1 zachovává symetrii vůči hlavní



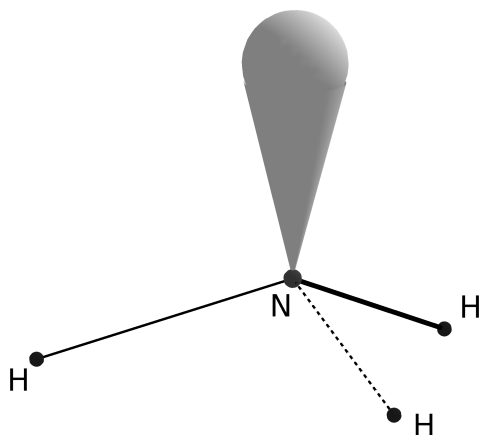
Obrázek 13: Deformace molekuly vody

ose ($c_2(z)$) a vertikálním rovinám, přísluší jí deformace vazebného úhlu vody (Obr. 13a) a symetrická změna délek vazeb O–H (obě vazby se zároveň prodlužují nebo zkracují, viz Obr. 13b), reprezentaci B_2 pak přísluší antisymetrická změna délek vazeb O–H (jedna z vazeb se vždy prodlužuje, zatímco se druhá zkracuje, Obr. 13c).

Vidíme, že vibrace molekuly nejsou vždy jednoduché změny chemických souřadnic molekuly (délek vazeb a vazebných úhlů), ale mohou to být jejich lineární kombinace. Obecně proto není vůbec jednoduché natipovat, které vibrace by se v molekule mohly realizovat, a přiřadit je k ireducibilním reprezentacím. V praxi většinou končíme tím, že určíme, kolik pásů máme očekávat ve spektrech určité látky. Kompletní analýzu provádíme v situaci, kdy kvantově-mechanicky modelujeme pohyb molekuly – tak získáme pro každou vibraci její energii (energií potřebnou k přechodu mezi sousedními hladinami) a seznam chemických souřadnic molekuly, které se jí účastní, a tím vlastně získáme jejich popis dostatečný na to, abychom je některé ireducibilní reprezentaci přiřadili.

U složitějších molekul se velmi často dají najít menší skupiny atomů (chemické skupiny), které vibrují relativně nezávisle na okolí – takovým vibracím pak říkáme charakteristické a dokážeme pomocí jejich velmi typických poloh z neznámého spektra určit, o jakou látku se (alespoň přibližně) jedná. Sem patří vibrace většiny typických chemických skupin, jako jsou CH_3 , CH_2 , COOH , NH_2 , NO_3 , atd. Mnohé vibrace se ale žádné menší podskupině přiřadit nedají a účastní se jich prakticky celá molekula. Takové vibrace, říkáme jim skeletární, pak také rozumně nejde rozkreslit, jako jsme to udělali pro vodu (Obr. 13).

Z posledního a předposledního sloupce tabulky určíme výběrová pravidla: po-



Obrázek 14: Molekula amoniaku. Kapka značí ne vazebný elektronový pár dusíku, jednoduchá čára značí vazbu v rovině papíru, tučná jde před rovinu papíru a čárkovaná za ni.

kud je u ireducibilní reprezentace napsaná kartézská souřadnice, budou příslušné přechody pozorovatelné v infračervené absorpční spektroskopii, a pokud je u ní nějaká kvadratická kombinace kartézských souřadnic, bude pozorovatelná v Ramanově rozptylu. Může se stát, že přechod bude pozorovatelný v obou metodách, nebo že nebude pozorovatelný vůbec. V případě vody budeme pozorovat všechny tři vibrace oběma metodami.

Jako další ukázkou si zvolíme molekulu amoniaku NH_3 , jeho molekula má tvar trojboké pyramidy, pokud bychom si představili atom dusíku jako střed čtyřstěnu, jsou atomy vodíku ve třech z jeho vrcholů a ve čtvrtém je ne vazebný elektronový pár⁹ (obrázek 14).

Nejprve určíme bodovou grupu symetrie amoniaku podle schématu na obrázku 11: Lineární molekula to není; jedinou hlavní osu má trojčetnou (jeden vrchol čtyřstěnu je jiný, je v něm ne vazebný elektronový pár místo vodíku), ukládáme si $n = 3$; reflexní osu rovnoběžnou s hlavní osou nemá; tři dvojčetné osy kolmé na hlavní osu také nemá; tři roviny zrcadlení obsahující hlavní osu má; takže jde o grupu C_{3v} . S tou jsme ještě nepracovali, ale asi tušíme, že bude v leccems podobná grupě C_{2v} .

Multiplikační tabulku vlastně k ničemu znát nepotřebujeme, můžeme si rovnou najít tabulku charakterů a začít ji doplňovat. Našli jsme, že grupa obsahuje identitu e , dvě rotace kolem trojčetné osy ve směru z (o třetinu a o dvě třetiny plného úhlu) a tři vertikální roviny zrcadlení. V tabulkách charakterů je zvykem

⁹Teorie chemické vazby je nad rámec tohoto článku. Vězte však, že ne vazebný elektronový pár je zkrátka část valenční slupky atomu, která se přímo neúčastní žádné chemické vazby. Účastní se ale přeuspořádání valenční slupky nutného k tomu, aby vazby vůbec vznikly, ovlivňuje tedy silně tvar výsledné molekuly.

psát prvky grupy sloučené do tříd, aby se ušetřilo psaní. Určíme si počty atomů ležících na prvcích symetrie: v identitě vždy leží všechny čtyři atomy; na trojčetné ose leží jen dusík a v rovinách leží vždy dusík a jeden z vodíků. Charakter identity ve 3D kartézské reprezentaci je vždy 3, charakter rovin je 1 a charakter rotačních os je

$$\chi^0(C_3) = 2 \cos \frac{2\pi 1}{3} + 1 = 0, \quad \chi^0(C_3^2) = 2 \cos \frac{2\pi 2}{3} + 1 = 0.$$

Poslední řádek už je triviální.

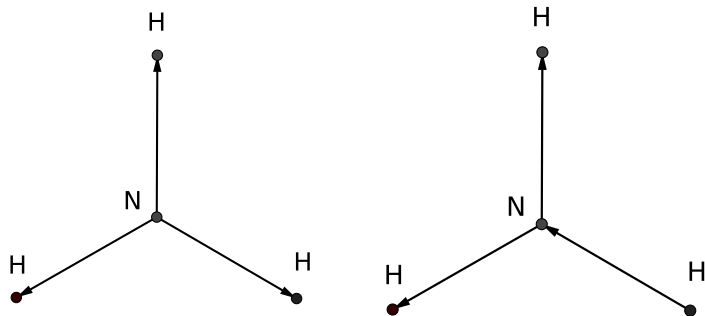
	e	$2C_3(z)$	$3\sigma_v$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$
n_R	4	1	2		
$\chi^0(R)$	3	0	1		
$\chi(R)$	12	0	2		

Provedeme redukcí reprezentace. Protože máme prvky seskupené do tříd, musíme sčítanec pro každý sloupec tabulky ještě vynásobit počtem prvků třídy.

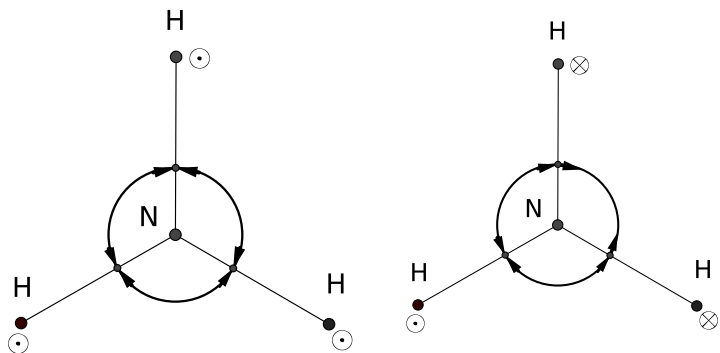
- $a_1 = \frac{1}{6}[1 \cdot 12 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1] = 3$
- $a_2 = \frac{1}{6}[1 \cdot 12 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)] = 1$
- $e = \frac{1}{6}[1 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 0] = 4$

Takže $R^{3N} = 3A_1 \oplus A_2 \oplus 4E$. Celková dimenze prostoru nám sedí, protože E je dvojrozměrná reprezentace a $3 + 1 + 2 \cdot 4 = 12$. Všimněte si navíc, že v posledních sloupcích tabulky charakterů jsou u reprezentace E vektory, složené z kombinací kartézských souřadnic a rotací (jednorozměrná reprezentace – čísla, dvojrozměrná – vektory). Translacím přísluší ireducibilní reprezentace $R^{\text{trans}} = A_1 \oplus E$ a rotacím $R^{\text{rot}} = A_2 \oplus E$. Na vibrace zbývá $R^{\text{vib}} = 2A_1 \oplus 2E$. Vibrační přechody příslušné oběma ireducibilním reprezentacím budou viditelné oběma spektroskopii.

Na závěr ještě prozradím, že vibrace příslušné ireducibilní reprezentaci A_1 jsou symetrická změna délek vazeb N–H (všechny se zároveň prodlužují nebo zkracují, Obr. 15a) a symetrická změna vazebných úhlů (všechny úhly H–N–H se zároveň zvětšují zatímco úhly H–N–(nevazebný elektronový pár) se zmenšují a pak naopak, Obr. 15c); vibrace příslušné ireducibilní reprezentaci E jsou asymetrická změna délek vazeb N–H (dvě se prodlužují a jedna zkracuje a pak naopak, Obr. 15b) a asymetrická změna vazebných úhlů (dva z úhlů H–N–H se zvětšují zatímco třetí se zmenšuje a pak naopak, Obr. 15d).

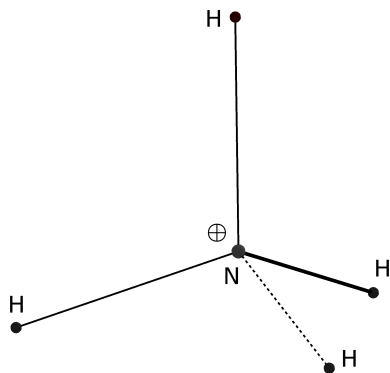


(a) symetrická změna délek vazeb (b) asymetrická změna délek vazeb



(c) symetrická změna vazebných úhlů (d) asymetrická změna vazebných úhlů

Obrázek 15: Znáznornění vibrací molekuly amoniaku při pohledu shora (od nevazebného páru).

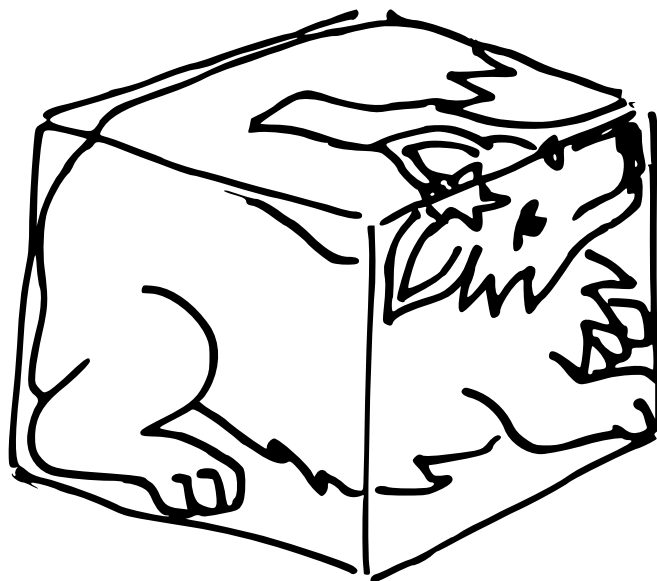


Obrázek 16: Kationt amonný

Úloha 3.5 – Teorie grup III

(5b)

Urči výběrová pravidla pro amonný kationt NH_4^{\oplus} (obr. 16). Porovnej s výsledky pro neutrální molekulu amoniaku. Hledat popis konkrétních vibrací pomocí délek vazeb a úhlů mezi nimi nemusíš.



Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Úlohy											\sum_0	\sum_1
				r1	r2	r3	r4	s	t1	t2	t4	t5	k			
51.–52.	K. Moudrá	3	2,0												0	2,0
	J. Pospíšil	2	2,0												0	2,0
53.–54.	K. Tulingerová	1	1,6												0	1,6
	A. Štrpka	1	1,6												0	1,6
55.	N. Petruny	2	1,3		0,0	0,0									0,0	1,3
56.–57.	S. Burešová	2	8,0												0	1,0
	D. Štípková	3	1,0												0	1,0
58.	M. Miček	1	0,5		0,1		0,0								0,1	0,5
59.–60.	M. Balla	1	0,1												0	0,1
	Bc. ^{MM} J. Paidar	2	19,1				0,1								0,1	0,1
61.	J. Marek		0,0												0	0

Sloupecek \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

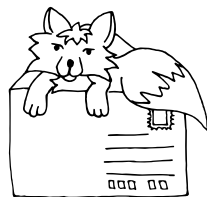


Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz

WWW: <http://mam.matfyz.cz>



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.