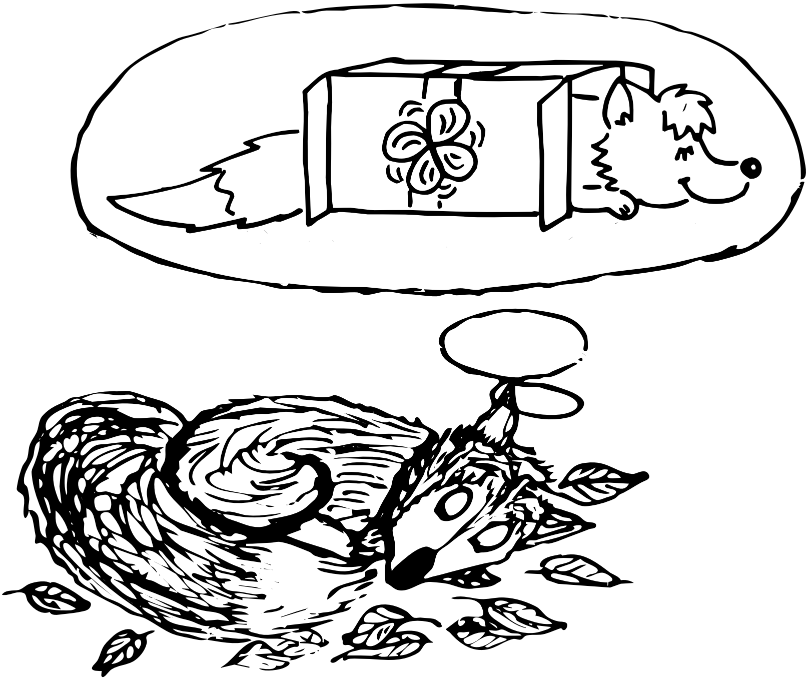
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXII / Číslo 3



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí příznivci lišáka Rikiho,
třetí číslo vám přináší především nové příspěvky k tématkům. Moc se nám líbil článek od Mgr.[MM] Kláry Stefanové, ve kterém se rozepisuje o mandátech v Evropském parlamentu. Zaujalo nás kvalitní zpracování vlastního originálního podproblému. I ke *Kosmickému kulečníku* a k *Pojďte pane, budeme si hrát* přišly zajímavé příspěvky. Rozhodně se na ně podívejte, inspirujte se a zareagujte.

Tradičně vychází také několik nových úloh a vzorová řešení úloh z první série. A na konci časopisu najdete další pokračování seriálu o grupách.

K mnoha letošním novinkám přidáváme nyní další: za získané (doposud i do budoucna) akademické[MM] tituly vás krom prestiže navíc čekají věcné ceny. Kompletní seznam najdete na našem webu, vypíchnout můžeme například mikinu či propisku z nové originální edice. A ke každému titulu ještě přidáme námi ručně vyrobenou fešnou placku s titulem.

Lišácké Vánoce přejí

vaši organizítoři

Zadání úloh

Termín odeslání třetí série: 12. 1. 2016

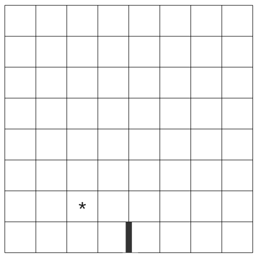
Tomáš za sebou zaslechl krok. A další. Zastavil se a poslouchal, zatímco Petr by jen tak pokračoval v cestě. Chytil ho za tričko a špitnul: „Neslyšel jsi něco?“ Petr se na pár vteřin zaposlouchal a pak hrdinně zavelel, že se jde dál. Tomáš ještě zaváhal – v dálce jako by slyšel hlas. Avšak jiný než ten, co je zavřel v tunelu. Takový vyšší. Otočil se a vydal se opačným směrem nechaje překvapeného Petra stát na konci a doufaje, že v tunelu znovu neuvízne. Úkol už přece vyřešili. Jak se přibližoval, bylo jasné, že se nemýlil. Na začátku tunelu stály dvě postavy a něco si mezi sebou nedůvěřivě špitaly. Zblízka už rozeznal dívku a chlapce. Když došel až k nim, oslovil je sice vlídně, avšak s náznakem pochybování: „Co tu děláte v tuhle dobu? Na výlet už začíná být pozdě. Sledujete nás?“ Jana se na pár vteřin zamyslela a potom Tomášovi popravdě popsala, jak se sem dostali a koho vlastně sledují. Zdeněk mlčky nedůvěřivě sledoval střídavě Tomáše a Janu, a když na ni pohlédl, v očích se mu zrcadlila otázka, jestli by se o svá tajemství a řešení měli tak snadno dělit. Jana jeho pohled zachytila těsně před tím, než prozradila, že M znamená Modelování. Zdeněk se ujal slova a prohlásil, že aby mohli Tomášovi prozradit, co vlastně znamená M, musí si ho předem vyzkoušet. Tomáš sice už věděl, co znamená M, ale řekl si, že by se tihle dva mohli hodit a chce si tedy získat jejich důvěru. Nakonec u Jany to nebude tak složité a Zdeňkovi možná bude stačit ta hádanka. Dovedl je k Petrovi a vysvětlil mu situaci. Petr mlčky shodil batoh. Rozložili v tunelu skládací karimatku, vytáhli z batohu baterku, tužku a papír a Petr s Tomášem se pustili do řešení.

Úloha 3.1 – Výběr čísel (3b)

Rozhodněte, jestli pro libovolných 101 přirozených čísel menších nebo rovných 200 lze vždy vybrat 2 čísla tak, aby jedno dělilo druhé.

Jaké bylo Petrovo překvapení, když úlohu vyřešil a odpovědí nebylo „Matematik“! Nadšeně Janě se Zdeňkem popsal cestu, kterou se tam dostali, a instrukce, včetně jejich výkladu písmene M. „Celkem to dává smysl, ne?“ zakončil. Ostatní na něj hleděli trochu nechápavě. Tomáš ještě k tomu vůbec nebyl spokojený s tím, že druhá dvojice má jiné řešení. Museli vyřešit něco špatně. A nebo se jim nedá věřit. Petr ale zavelel, že by se měli vydat na další cestu, než bude tma. Jana mu pomohla sbalit věci zpátky do batohu a nadšeně ho s ostatními následovala ven z tunelu vstříc novým dobrodružstvím. Sotva vykročili z tunelu, objevilo se před nimi bludiště.

Úloha 3.2 – Cestička ve čtverci (2b)



Stojíš ve čtverci 8×8 na místě vyznačeném hvězdičkou (viz obrázek vpravo), tvým úkolem je projít všechna políčka ve čtverci tak, aby tvou trajektorii tvořilo 15 úseček, které se vzájemně nekříží. Po čtverci se můžeš pohybovat jen vodorovně či svisle a pohyb ti ztěžuje nepřekonatelná zeď.

Na konci bludiště na skupinku čekal další vzkaz. Hlásal, aby pokračovali po stejnobarevné turistické značce dál, až dokud neskončí. Odtud budou pokračovat cca 200 m podél řeky stejným směrem a jejich dalším úkolem bude dostat se na kopec, který vidí po své levici. Jana zaprotestovala, že už se smráká, ale Petr se hrdinně vydal skrz les vzhůru hledaje schůdnou cestu. Když se konečně vyškrábali na kopec, nalezli na něm velkou ceduli: „Rozhlédni se, člověče“. Zvláštní... co teď? Tohle nevypadalo jako instrukce od M. Zdeněk se zastavil u cedule a pozorně si ji prohlížel. Potom se začal rozhlížet a hledat. Když tu konečně našel barevný lístek od M. Mávaje jím nad hlavou běžel ke skupině. Na lístku stály další instrukce. Měli se vydat z kopce dolů po naučné stezce a až se bude rozdvojovat, na obou rozcestích si vybrat tu pravou stranu. Když narazili na velkou silnici křížící se se stezkou, objevil se před nimi i potok. Dost malý na koupání, ale přece dost velký na brodění, takže se mu rozhodli vyhnout.

Úloha 3.3 – Chodníčky v parku (3b)

Ve městě je obdélníkový park a tímto parkem teče potůček. Po obou březích vedou chodníčky, ale nikde v parku přes potůček nevede most. Oba chodníčky vedou stále právě 2,5 m daleko od středu potůčku. Potůček do parku vtéká na východě (kolmo na okraj parku), v parku se nějak klikatí a poté vytéká směrem na sever (opět kolmo na okraj parku). Klikatění potůčku dostanete na vstupu jako posloupnost rovných úseků (popsaných jejich délkou) a zatáček (popsaných poloměrem zakřivení potůčku a úhlem, o který je potůček zakřiven – kladné číslo představuje zatáčku doprava, záporné doleva). Napište program nebo popište algoritmus s co nejmenší časovou složitostí, který vypíše, po kterém břehu a o kolik metrů je cesta podél potůčku kratší. Můžete předpokládat, že trasa potůčku v parku je „rozumná“, tedy potůček:

- nikdy neprotíná sám sebe ani se nepřibližuje sám k sobě na méně než 5 m
- nikdy neopisuje oblouk s poloměrem menším než 2,5 m
- se nikde mimo začátek a konec svého průtoku parkem nepřibližuje na méně než 2,5 m k okraji parku

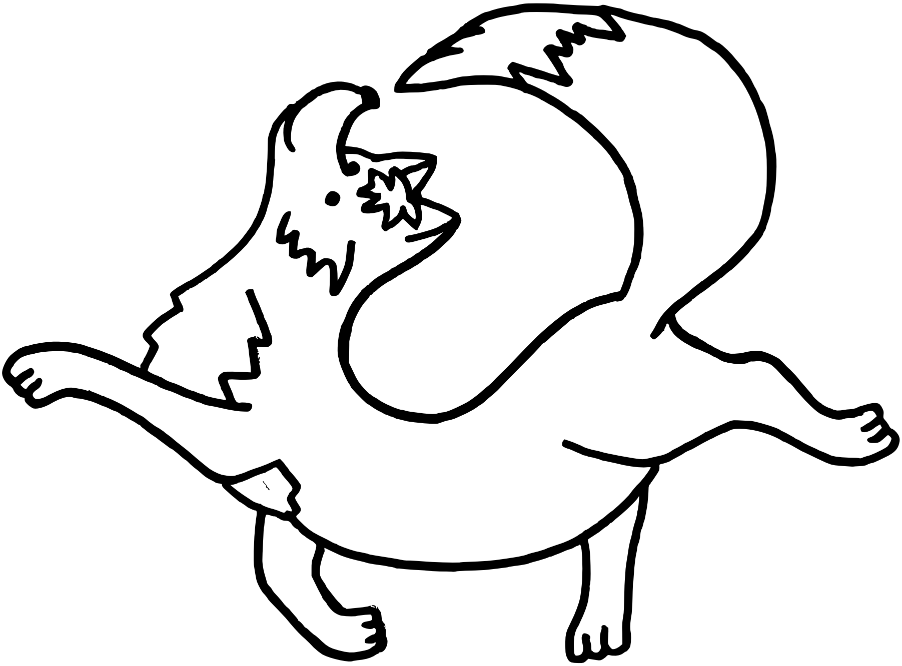
Skupinka procházela kolem potůčku už za úplné tmy jenom ve světle baterek a držela se stále kratšího břehu bez brodění. Zdeňkovi se podařilo párkrát stoupnout do hlubokého bahna, když sešel z cestičky, jednou tam dokonce málem nechal botu. V tom došli na místo, kde se v záři baterek na stromě zaleskla odrazka a svítící tyčinkou připevněný vzkaz, kam se mají vypravit dál. „Jak mohl M vědět, že sem dorazíme až za tmy?“, namítl Tomáš. „Připravuje pro nás úkoly po cestě? Hraje si snad s námi, jako když honíte kočku za laserem, dokud vás to nepřestane bavit?“ Jana v odpověď zívla a prohlásila, že už je na ni pozdě. Měli by se někde utábořit. Petr vytušil příležitost se blýsknout, vyčaroval z batohu stan a začal aktivně hledat rovnější místo na přespání, které bude skryté před zraky náhodných nočních i ranních turistů. Zdeněk vytáhl své letité áčko po dědovi a začali stavět. Jana zatím začala připravovat večeři v hrnci. Do hodinky bylo všechno připravené, najedení kluci k sobě byli trochu vstřícnější a skoro už se i kamarádili. Za chvíli zalezli do stanů. Jana ještě donutila Zdeňka vyhodit zablácené mokré boty ven ze stanu a potom už oba stany usnuly.

Jana jako ranní ptáče všechny budila už v šest ráno. Nebudou přece vyspávat do desíti! A ještě tady v parku! Jenže z kluků ani jednoho ven nedostala. Uslyšeli, jak voda bubnuje na tropiko stanů, Petr ještě vykouknul ven, ale pak znovu usnuli. Janě už se spát nechtělo a přemýšlela, co by se tak dalo v tomhle počasí dělat.

Úloha 3.4 – Rychlost deště (4b)

Změřte rychlost padání deště (případně sněhu). Padají všechny kapky (vločky) stejně rychle? Na základě změřené hodnoty odhadněte velikost kapek.

Jana zajásala, co zajímavého se o dešti dozvěděla, zatímco ostatní ještě vyspávali. Tak se s nimi chtěla podělit, že tentokrát šla na buzení razantněji, hrncem kluky trochu pokropila a začala jim skládat stany na hlavu. To zabralo. Těsně *před odchodem ještě Jana hrdě napsala vzkaz pro M, aby mu pověděla o svých objevech. Když ale došli zpátky k lístku, kde byly napsané další instrukce, zpráva se změnila. Instrukce, kam pokračovat, zůstaly stejné, ale objevila se pod nimi poznámka. „Učíte se rychle a kreativita vám neschází. Proto vězte další střípek skládanky – že M také Martin může znamenat.“*

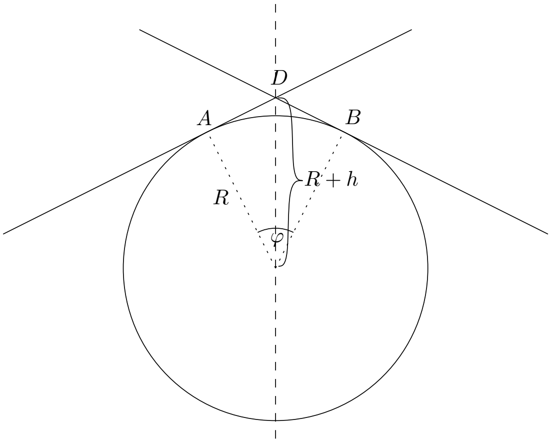


Řešení úloh 1. série

Úloha 1.1 – Špionážní družice (4b)

Zadání:
Jakou nejdelší dobu v kuse může družice na kruhové rovníkové dráze s výškou 500 km sledovat jedno konkrétní místo na zemském povrchu?

Řešení:
Předpokládejme, že v jeden okamžik je družice schopna sledovat plochu kulového vrchlíku, určeného tečnami k zemskému povrchu. Jedná se samozřejmě pouze o přiblížení, při kterém neuvažujeme lom paprsků záření při průchodu zemskou atmosférou a rozměry družice zanedbáváme.



Obrázek 1: Průřez Země v rovině rovníku

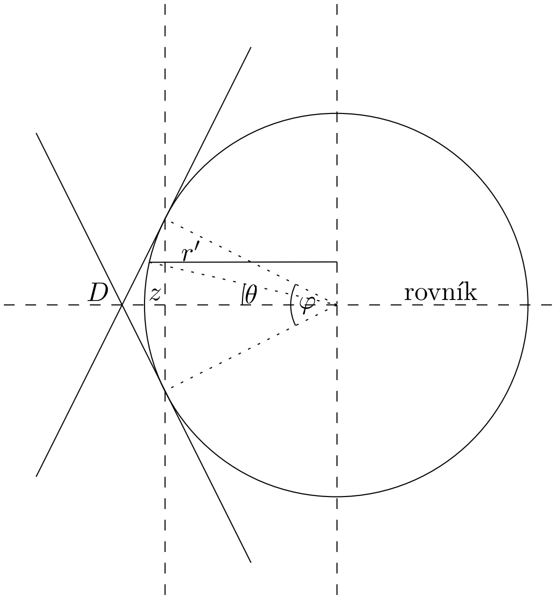
Družice se pohybuje po kruhové dráze, její úhlovou rychlost ω určíme ze vztahu

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{z}}}{(R+h)^3}},$$

který odvodíme díky rovnosti gravitační a dostředivé síly; $M_{\mathrm{z}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Země, $h = 500\,\mathrm{km}$ výška oběhu družice, $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ poloměr Země a $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ gravitační konstanta. Bod nacházející se na rovníku může družice sledovat maximálně po dobu oběhu z místa A do B (viz obrázek 1). Musíme ještě započítat zemskou rotaci. Je zjevné, že pro maximalizaci času, po který je družice schopna bod sledovat, bude družice obíhat stejným směrem jako Země. Výsledný čas pak spočteme ze vztahu:

$$t = \frac{\varphi}{\omega - \omega_{\mathrm{z}}} = \frac{2 \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)}{\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{z}}}{(R+h)^3}} - \frac{2\pi}{T}},$$

kde délka pozemského dne je $T = 86\,400\,\mathrm{s}$. Po číselném dosazení dostaneme t přibližně rovno $742\,\mathrm{s}$, tedy asi $12{,}4$ minut. V zadání ale není specifikováno, kde na zemském povrchu se sledovaný bod nachází – nyní určíme čas t v závislosti na zeměpisné šířce. Pro přehlednost je vhodné si situaci dobře nakreslit.



Obrázek 2: Průřez Země od pólu k pólu

Vidíme, že: $r' = R\cos\theta$, $z = R(1-\cos(\varphi/2))$, dále víme, že pro úhel α platí:

$$\alpha = 2\arccos\left(1 - \frac{z'}{r'}\right)$$

$$\alpha = 2\arccos\left(1 - \frac{R\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{R\cos\theta}\right)$$

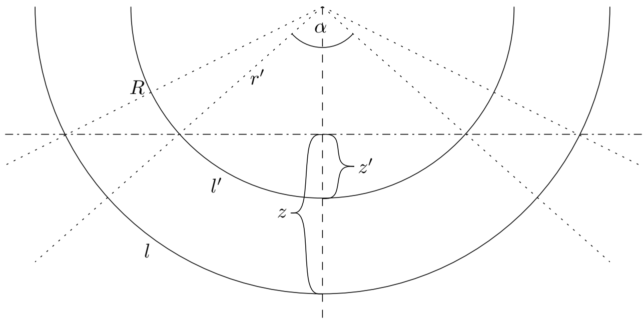
$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\theta}\right)$$

A odtud pro hledaný čas dostaneme:

$$t = 2\arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\theta}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{GM_z}{(R+h)^3}} - \frac{2\pi}{T}}$$

Nutno poznamenat, že fyzikální význam mají pouze řešení z oboru reálných čísel.

Dominigga



Obrázek 3: Pohled z pólu

Úloha 1.2 – Zahradnická (3b)

Zadání:
Lišák Riki se pustil do zahradničení. Má záhonek a pěstuje tři druhy zeleniny: artyčoky, brambory a celer. Na jejich pěstování se ale vztahují určitá pravidla:

1. *V záhonku nesmí být dva artyčoky hned vedle sebe.*
2. *Brambor nemůže růst mezi dvěma stejnými rostlinami.*
3. *Celer nevyroste, pokud má za jednoho souseda artyčok a za druhého brambor.*

Určete, kolika různými způsoby může Riki naplnit svůj záhonek, pokud se mu do něj vejde právě jedna řada s dvaceti rostlinami.

Řešení:
Jak několik z vás předvedlo, 3^{20} je ještě pořád dost malé číslo na to, aby bylo možné tuto úlohu za pomoci počítače řešit hrubou silou – tedy generovat všechna možná vysazení rostlinek a následně kontrolovat, zda neobsahují zakázané kombinace. Existuje ale i mnohem efektivnější metoda, která by například fungovala (v rozumném čase) i pro záhonek délky 50, a byla o něco málo lépe bodově ohodnocena.

Pro zkrácení zápisu zaveďme, že písmeno `A` představuje artyčok, `B` brambor a `C` celer.

Postřehněme, že to, jakou rostlinku můžeme zasadit jako příští, závisí pouze na předchozích dvou rostlinkách. Přesněji řečeno:

- Žádný záhonek nemůže končit `AA`
- Pokud záhonek končí `AB`, můžeme jako další vysadit `B` nebo `C`
- Pokud záhonek končí `AC`, můžeme jako další vysadit `A` nebo `C`

- Pokud záhonek končí `BA`, můžeme jako další vysadit `B` nebo `C`
- Pokud záhonek končí `BB`, můžeme jako další vysadit `A` nebo `C`
- Pokud záhonek končí `BC`, můžeme jako další vysadit `B` nebo `C`
- Pokud záhonek končí `CA`, můžeme jako další vysadit `B` nebo `C`
- Pokud záhonek končí `CB`, můžeme jako další vysadit `A` nebo `B`
- Pokud záhonek končí `CC`, můžeme jako další vysadit `A`, `B` nebo `C`

Tohle už by představovalo jisté zlepšení, algoritmus využívající jen tohoto pozorování by prošel přibližně 2^{20} místo 3^{20} možností a nepotřeboval by trávit tolik času kontrolováním výsledku, čímž by výrazně předčil algoritmus používající hrubou sílu. (Zájemci si mohou zkusit obojí naprogramovat a srovnat čas běhu algoritmu.)

Dalšího zrychlení ale dosáhneme, když vypozorujeme, že *všechny* záhonky končící danou dvojicí se nadále budou chovat stejně. Označme si počet záhonků délky n (kde n je nějaké přirozené číslo ≥ 2) končících na XY (kde $X, Y \in \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$) jako XY_n. Tedy počet záhonků délky 2 končících na `AB` je $\mathtt{AB}_2 = 1$. Dále si musíme všimnout, že počty (jednotlivými dvojicemi končících) záhonků o délce $n+1$ umíme spočítat z počtů pro délku n. Kupříkladu:

$$\mathtt{AB}_{n+1} = \mathtt{BA}_n + \mathtt{CA}_n$$

Pro ostatní konce si tyto (takzvané rekurentní) vzorce již jistě umíte odvodit sami. Je důležité si všimnout, že pro $n = 2$ už správné výsledky máme: $\mathtt{AA}_2 = 0$ a pro všechna ostatní XY se $XY_2 = 1$. Pokud bychom využili jen tohoto a postupně se pokoušeli spočítat XY_{20} pro každé XY, tak se žádného zlepšení oproti předchozímu algoritmu nedočkáme. Chce si to ještě všimnout, že takhle bychom pořád dokola počítali, kolik nám vyjdou XY_n pro $n < 20$. Využijeme tedy takzvané dynamické programování – budeme líní, a když už jednou XY_n spočítáme, tak si výsledek zapamatujeme a už jej nikdy nebudeme počítat znovu.

Nebo — a tohle bylo nejjednodušší a nejlépe hodnocené řešení — si uvědomíme, že známe jednotlivá XY_2, a tak z nich spočítáme všechna XY_3, z těch pak spočítáme všechna XY_4 a tak dále až po spočítání všech XY_{20}, které pak sečteme. Jistě se mnou budete souhlasit, že toto řešení je na papíře poněkud pracné, ale proveditelné. S pomocí počítače (není potřeba programovat, stačí Calc nebo Excel) je to ale již zcela triviální výpočet.

Matej

Úloha 1.3 – Hádání karet (3b)

Zadání:
Tomáš má balíček 52 karet (s třinácti různými symboly ve čtyřech barvách). Karty leží na stole lícem dolů a Tomáš vždy zvedne jednu kartu a odloží ji pryč, dokud nedojde balíček. Před odebráním karty ale ještě hádá, jakou má barvu. Dělá to chytře – vždy si tipne barvu, která se vyskytuje nejčastěji ve zbytku balíčku (pokud je jich víc, vybere si mezi nimi podle libosti). Dokažte, že se Tomáš trefí alespoň třináctkrát.

Řešení:
Nejprve přeformulujeme zadání. Představme si, že jsou karty uspořádány podle barev ve čtyřech sloupcích po třinácti. Tomáš si vždy náhodně vybere jeden ze sloupců a odebere z něj kartu. Trefí se přesně tehdy, pokud odebere kartu ze sloupce, ve kterém je nejvíc karet.

Nyní postupujme odzadu. Na konci jsou všechny karty pryč, takže během braní karet musí dojít k momentu, kdy je *poprvé* ve všech sloupcích méně než 1 karta. Podobně před tím došlo k momentům, kdy bylo poprvé v každém sloupci méně než $2, 3, \ldots, 12, 13$ karet. Před každým tímto momentem ale Tomáš určitě odebral kartu z toho sloupce, který obsahoval nejvíc karet. To znamená, že se trefil určitě aspoň třináctkrát.

Pepa

Úloha 1.4 – Uvězněni (5b)

Zadání:
Strážce zajal oba cestovatele a rozhodl se jim zadat úkol. Pustí je pouze v případě, že se jim podaří úkol splnit.

Nejdříve strážce pozve prvního cestovatele do místnosti, kde před ním na klasické šachovnici (8×8 polí) rozloží mince tak, aby na každém políčku byla právě jedna. Některé umístí nahoru rubem a některé lícem (jinak jsou mince zcela totožné). Poté strážce cestovateli prozradí jedno pole, říkejme mu únikové. Následně musí první cestovatel otočit jednu libovolnou minci. Pak strážce prvního cestovatele odvede a pozve druhého. Jeho úkolem je na základě rozložení mincí na šachovnici poznat, které pole je únikové. Pokud uspěje, jsou oba cestovatelé volní.

Před plněním úkolu si mohou cestovatelé domluvit strategii. Strážce ale jejich rozhovor odposlechne a zvolí rozložení mincí i únikového pole tak, aby pokud možno neuspěli.

Existuje pro cestovatele strategie, aby je strážce vždy pustil? Pokud ano, jaká?

Řešení:
Když přijde druhý cestovatel do místnosti, má k dispozici pouze rozložení mincí na šachovnici. Je tedy jasné, že každé rozložení mincí na šachovnici by mělo ukazovat na jedno konkrétní pole.

I při příchodu prvního cestovatele do místnosti rozložení mincí na šachovnici kóduje nějaké konkrétní pole. Cestovatel musí být schopen otočením právě jedné mince docílit toho, aby rozložení šachovnice ukazovalo na jakékoli zadané pole. Šachovnice má 64 polí a cestovatel musí otočit jednu z 64 mincí – otočení každé z mincí tedy musí vést na jiné pole.

Otázkou zůstává, jak vymyslet šikovné kódování polí šachovnice pomocí rozložení mincí. Očíslujme si pole šachovnice (libovolně) 0 až 63. Jako dobrý nápad by se mohlo zdát například sčítat hodnoty všech polí, kde je mince lícem nahoru, a tento součet modulo 64 označit za číslo výsledného pole. To skoro funguje, občas ale první cestovatel může narazit na problém, že by potřeboval přičíst minci číslo k, která už ale je lícem nahoru, nebo odečíst minci $(64 - k)$, která je ale nahoru rubem.

Tento nedostatek můžeme vyřešit tak, že místo klasického sčítání použijeme operaci XOR (tedy sčítání čísel převedených do dvojkové soustavy bez přenosu). Tato operace má všechny vlastnosti sčítání, které potřebujeme[1], a navíc vždy platí a XOR $a = 0$, takže „přičtení" i „odečtení" čísla vede ke stejnému výsledku.

Shrňme si možné řešení úlohy: Pole šachovnice očíslujeme od 0 do 63. První cestovatel přijde do místnosti a spočítá XOR hodnot všech polí, na kterých mince leží lícem nahoru. Označme tuto hodnotu P. Pokud únikové pole je U, otočí minci na poli P XOR U. Druhý cestovatel po příchodu opět spočítá XOR hodnot všech polí, kde je mince lícem nahoru. Vyjde mu P XOR $(P$ XOR $U) = U$, zná tedy únikové pole.

Využití operace XOR bylo možno též obejít pomocí různých tabulek nebo postupných součtů vždy jen vybraných sloupců či řádků. Nepřišla nám ani dvě správná řešení, která by se alespoň trochu nelišila.

Kuba

Řešení témat

Téma 1 – Pojďte pane, budeme si hrát

K tématu zatím došlo několik řešení, z nich vynikají ta od Dr.$^{\mathrm{MM}}$Mariana Poljaka Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Petra Šimůnka. Oba dva se ve svém řešení zabývají například hrami s počátečními tahy 4 a 5, respektive 4 a 6 nebo tím, zda hra někdy musí skončit, popřípadě za jak dlouho. Zkuste se nad těmito otázkami také zamyslet! Jaká čísla zůstanou na tabuli po vybarvení 4 a 5? A co můžeme říci o sudých a lichých číslech v případě vybarvení 4 a 6?

Dr.$^{\mathrm{MM}}$Marian Poljak i Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Petr Šimůnek tvrdí, že hra může trvat libovolně dlouho, – tedy neexistuje nějaké konkrétní číslo (třeba milion) takové, že by počet tahů v každé hře byl menší než toto číslo. Dr.$^{\mathrm{MM}}$Marian Poljak však navíc dokazuje, že pokud jsou první dvě vybraná čísla nesoudělná (tedy jejich největší

[1] Poznámka pro algebraiky: XOR je klasické sčítání definované na vektorovém prostoru nad dvouprvkovým tělesem.

společný dělitel je jedna), tak hra určitě skončí, a myslí si, že obecně hra vždycky musí skončit. Co si o tom myslíte vy? Pokud budeme hrát piškvorky na sešitu s tisícem čtverečků, hra určitě skončí (ať už něčí výhrou, nebo remízou) do tisíce tahů. Jestliže budeme hrát na nekonečném sešitu, hra nikdy skončit nemusí. Třeba (pokud se s protihráčem domluvíme) můžeme symboly postupně kreslit do jedné dlouhé řady, ve které se pořád budou střídat kolečka a křížky ($\circ \times \circ \times \circ \ldots$) – potom k výherní pětici nikdy nedojde. Může existovat nějaká hra pro dva hráče, která může trvat libovolně dlouho, ale vždycky skončí?

Mgr.$^{\mathsf{MM}}$Petr Šimůnek také navrhl program v Excelu, který umožňuje simulovat různé průběhy hry. Tím se otevírají nové otázky. Jak si po několika tazích uchovat informaci o tom, která čísla ještě zbyla na tabuli, ač jich může být nekonečně mnoho? A jak tuto informaci aktualizovat při následujícím tahu?

Vašek

Téma 2 – Volební systémy

Do termínu odevzdání 1. série došly do redakce další tři příspěvky. Příspěvěk od Anny Jandové se zabývá způsobem hlasování a rozdělování mandátů, včetně vysvětlení D'Hondtovy metody. Ve článku se dočtete také o rozdílu mezi poměrným a většinovým systémem a jejich vlivu na politické spektrum. Anna Jandová přichází s myšlenkou, že kdyby stát byl jeden velký volební okrsek, zamezilo by se situaci, kdy může ve volbách zvítězit (získat více mandátů) strana s menším reálným počtem hlasů.

Zkuste se podrobněji zamyslet nad dalšími možnými dopady, kdyby stát obsahoval jen jeden volební okrsek.

Druhý příspěvek jsme obdrželi od Bc.$^{\mathsf{MM}}$Lukáše Belzy. Lukáš se zabýval důvody „nespravedlnosti“ současného systému a posleze navrhl systém vlastní. Podrobněji se jeho příspěvku budeme věnovat v příštím čísle.

Třetí příspěvek jsme obdrželi od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$Kláry Stefanové. Kromě informací o základních pojmech a faktech obsahuje mnoho zajímavých myšlenek a výpočtů. Pojďme se blíže podívat na některé z nich.

Prezidentské volby

Autorka nejdříve uvádí výsledky prezidentských voleb z roku 2013 a poté pokračuje:
V USA nevolí lidé přímo prezidenta. Zvolí pouze, jak bude hlasovat člen Kongresu z jejich státu (státy jsou v Kongresu zastoupeny podle počtu obyvatel a člen je vázán přísahou volit podle přání lidu). Kandidát získá všechny hlasy z daného státu, pokud získá nadpoloviční většinu hlasů od obyvatel daného státu. Na základě systému volby prezidenta v USA zkusím vytvořit dva potenciální systémy, které se na něm zakládají, a zhodnotím, do jaké míry odrážejí vůli celé společnosti a jak je ovlivňuje volební účast.

Přímá volba se ziskem všech hlasů v kraji

Kandidát získá všechny hlasy v daném kraji, pokud získá nadpoloviční většinu všech hlasů v daném kraji. Vyhrává ten kandidát, který získal nadpoloviční většinu všech hlasů v celé republice. Základem pro výpočty procentuálního zisku je počet všech platných hlasů v kraji/republice. Data o počtu oprávněných voličů a volební účasti se budou vztahovat ke druhému kolu prezidentských voleb 2013. První úvahy se budou týkat případu se stoprocentní volební účastí.

Pokud chce kandidát zvítězit, jsou pro něj nejdůležitější čtyři kraje, jejichž počet obyvatel s volebním právem se pohybuje okolo milionu: hl. město Praha, Jihomoravský kraj, Moravskoslezský kraj, Středočeský kraj. Když získá kandidát tyto čtyři kraje, stále ještě nemá nadpoloviční většinu v celé republice. Do té mu chybí 314 959 hlasů; to znamená, že musí získat ještě alespoň jeden kraj s výjimkou Karlovarského kraje a zahraničí, které nemají ani v součtu dostatečný počet voličů. Nyní chceme nalézt co nejmenší možný kraj, při jehož zisku by kandidát zvítězil. Tímto krajem je kraj Liberecký. Podle našeho systému by tedy kandidát získal 50,4 % hlasů, ale ve skutečnosti mu k vítězství stačilo pouhých 25,2 %. Tento model je však dost nepravděpodobný, protože by tyto čtyři velké kraje musely být najednou naladěny na stejnou „politickou vlnu“. Obecněji platí, že v hlavním městě a Středočeském kraji jsou voleni spíše pravicoví kandidáti, kdežto v Moravskoslezském a Jihomoravském kraji převážně levicoví.

Nyní se zaměříme na potenciálního pravicového kandidáta. Ten získá hlasy v Praze a ve Středočeském kraji. Tyto hlasy dají dohromady 23 % hlasů, tedy necelou polovinu potřebných hlasů. Aby získal zbytek hlasů a zároveň co nejméně krajů, bude muset vyhrát ještě v kraji Ústeckém, Olomouckém, Jihočeském a Zlínském. Po zisku těchto krajů mu do vítězství bude scházet ještě 89 919 hlasů, a proto bude potřebovat získat ještě jakýkoliv jiný kraj, v našem případě získá nejmenší možný a to je kraj Karlovarský. Tento potenciální pravicový kandidát tedy získal 51,8 % hlasů, ve skutečnosti to však byla polovina.

Pokud budeme uvažovat, že naším vítězným kandidátem je zástupce levice, získáme hlasy z Moravskoslezského a Jihomoravského kraje. Tyto hlasy budou dohromady tvořit 23,2 % hlasů, to je opět necelá polovina potřebných hlasů. Když získá ještě čtyři další kraje jako pravicový kandidát, tak mu bude k vítězství chybět 70 671 hlasů. A to znamená, že opět bude muset získat Karlovarský kraj. Náš modelový levicový kandidát získá v našem systému 52 % hlasů, skutečně mu však stačí být podporován pouhou polovinou z těch osob.

Z těchto tří kandidátů – nevyhraněný, pravicový a levicový, by v tomto systému musel oslovit nejvíce kandidát levice, protože by na své zvolení fakticky potřeboval 26 % hlasů.

Dále autorka článku sestavuje takovou množinu získaných krajů, aby výsledek voleb mohly rozhodnout hlasy zahraničních voličů, kterých je celkově nejméně. Kdyby vás zajímalo, které to jsou, podívejte se na celý článek na webu.

Nyní ještě úvaha, která se týká nevole některých spoluobčanů dostavit se k volbám, čímž se snižuje procento účasti ve volbách. Tyto úvahy provedeme jenom pro případ, kdy kandidát je nevyhraněný a dokáže svou osobností oslovit téměř všechny voliče. Budu pro něj hledat kombinaci co nejméně krajů, která by mu zajistila vítězství. Můžeme pozorovat drobné rozdíly ve váze hlasů v jednotlivých krajích. Například hlasy obyvatel Prahy budou mít větší váhu než hlasy voličů z Moravskoslezského kraje kvůli snížené účasti u voleb. Stále však bude pro kandidáta zásadní pro snadné vítězství získat první čtyři kraje a k nim stejnou úvahou jako výše kraj Liberecký. Jako vítěz získá 50,9 % všech odevzdaných hlasů. Ve skutečnosti pro něj však hlasovalo pouze 14,8 % všech oprávněných voličů.

Tento systém přerozdělování hlasů nahrává velkým krajům. V našem klasickém většinovém systému by mělo stejnou váhu 100 % hlasů z velkého kraje jako 50 % hlasů z kraje polovičního. V tomto systému však mají hlasy z menšího kraje poloviční váhu. Tento systém může výrazně snížit účast ve volbách v menších krajích, protože jejich obyvatelé nabudou dojmu, že jejich hlasy nemají žádnou cenu. Tímto krokem se však ještě více posílí role velkých krajů, a proto bude i pro kandidáta mnohem výhodnější investovat většinu prostředků na propagaci ve velkých krajích. Toto chování nás dostává do spirály, která bude neustále zvyšovat roli velkých krajů a snižovat roli krajů malých umocněnou snižováním zájmu o volby tohoto druhu.

Přepočet hlasů na mandáty

Mgr.^MM Klára Stefanová vyzkoušela aplikovat D'Hondtovu metodu s různou posloupností jmenovatelů na výsledky voleb do poslanecké sněmovny z roku 2013, konkrétně na data z Královéhradeckého a Pardubického kraje.

„Krajská“ verze D'Hondtovy metody s posloupností jmenovatelů $\sqrt{2}, 2, 3, \ldots$ nezměnila poměry získaných mandátů, avšak zjemnila rozdíly mezi jednotlivými stranami. Dále je pravdou, že strany s větším počtem hlasů mají větší možnost získat křesla. Pokud by například Pardubický kraj získal jedenáctý mandát, tak by ho v obou případech získala ČSSD. Ta by tím pádem potřebovala průměrně 17 699,67 hlasů na jeden mandát. To výrazně znevýhodňuje např. KDU-ČSL, která na zisk jediného mandátu potřebovala 19 693 hlasů. V některých evropských zemích (Polsko, Litva) se používá odnož D'Hondtovy metody zvaná metoda Sainte-Laguë. Hlavní rozdíl mezi touto metodou a klasickou D'Hondtovou metodou je ten, že řada dělitelů se nebere ze všech přirozených čísel, ale ze všech lichých. Tato metoda by měla zvýhodňovat menší a střední strany.

Použitím této metody se poměry získaných mandátů buď změnily úplně, nebo se alespoň docílilo toho, že menší strany získaly svůj mandát v dřívějším kole přerozdělování. V Královéhradeckém kraji ztratilo ANO 2011 jeden mandát na úkor TOP 09 a všechny méně oblíbené strany získaly svůj první mandát mnohem dříve než při použití klasické D'Hondtovy metody. V Pardubickém kraji se sice poměry mandátů neměnily, ale opět došlo k přesunům na pozicích v získávání mandátů. Tato metoda tedy opravdu zvýhodňuje menší až střední politické strany. V krajích, kde se rozděluje poměrně dost mandátů, jako byly ty mnou zvolené, se tento rozdíl projeví spíše na pořadí zisku než na poměrech mandátů.

Pokud se však v kraji přerozdělují hlasy k méně mandátům, dojde k výraznému posílení postavení menších stran a také k tomu, že zástupci z tohoto kraje budou zastupovat širší politické spektrum.

Poté autorka vysvětluje princip fungování Hagenbach-Bischoffovy kvóty a po přepočítání hlasů ve výše zmíněných krajích konstatuje: Opět vidíme, že rozdělení mandátů je alespoň v jednom kraji jiné než při použití D'Hondtovy metody. Opět dochází ke zvýhodnění středních až menších stran. Výsledek je shodný s metodou Sainte-Laguë. Snažila jsem se naznačit, že metoda používaná v naší zemi k přerozdělování hlasů není ideální a na výsledcích voleb ze dvou krajů jsem se pokusila podpořit tvrzení, že D'Hondtova metoda opravdu zvýhodňuje větší strany. Faktem však stále zůstává, že přerozdělování hlasů nebude nikdy spravedlivé, ale zaleží na zvolené metodě, zda se politické spektrum zastoupené v Poslanecké sněmovně zúží nebo naopak rozšíří. Prezident Havel asi jednal ve prospěch pestrého politického spektra, když se pokoušel vetovat zákon o použití D'Hondtovy metody při přepočtu hlasů při volbách do Poslanecké sněmovny, navržený ČSSD a tiše podporovaný ODS.

Poslední část článku se zabývá volbami do Evropského parlamentu a rozdělením mandátů mezi členské země a můžete si ji přečíst níže. Celý článek včetně tabulek s přepočítanými daty najdete na webových stránkách tématu, vřele doporučujeme k přečtení.

Mgr.^{MM} Klára Stefanová svým článkem odpověděla na mnoho otázek, ještě jich ale několik pořád zůstává nevyřešeno. Kromě těch uvedených v minulých číslech přidáváme další:

Při volbách je možné pořídit si voličský průkaz a hlasovat v jiném kraji či v zahraničí. Hlas voliče s voličským průkazem se následně započítá v kraji, ve kterém reálně volil. Představte si, že politická strana má 10 % velmi aktivních voličů, kteří jsou ochotní volit tam, kde se to straně hodí.

Zkuste vymyslet pro zvolenou stranu, zda a jakým způsobem má šanci ovlivnit svůj výsledek ve volbách v případě, že s nějakou přesností (třeba podle předvolebních průzkumů nebo za pomoci jasnovidce) zná počty svých voličů v jednotlivých krajích. Míru přesnosti si můžete určit sami. Zajímavé může být i srovnání, jak by strana dopadla se strategií z předvolebního průzkumu provedenou na reálných datech. Odkud budou pocházet aktivní voliči si můžete zvolit (speciálně nemusí všichni pocházet ze stejného kraje).

Těšíme se na vaše řešení.

Anet

Volby do Evropského parlamentu (13b)

Mgr.^{MM}Klára Stefanová

Obecné zásady

Aktivním volebním právem se může pyšnit každý občan, který dosáhl 18. roku života. Zvolen může být netrestaný jedinec starší 21 let. Přerozdělování hlasů probíhá v každé zemi jinak, v té naší je to pomocí D'Hondtovy metody. Uzavírací klauzule je 5 % procent hlasů v daném obvodu – tedy v dané zemi.

Rozdělení sil v evropském parlamentu

Evropský parlament je dynamickou složkou legislativy Evropské unie. Své zástupce v něm má všech 28 evropských zemí. Počty poslanců jsou přidělovány kombinací více kritérií: rozloha, HDP, počet obyvatel,... Minimální počet poslanců na zemi je stanoven na čísle 6 a maximální na čísle 96. Maximální celkový počet poslanců je 751. Europoslanci v Evropském parlamentu nemají sestavený zasedací pořádek v závislosti na státní příslušnosti, ale v závislosti na ideologické příslušnosti. Česká republika je zastoupena 21 europoslanci. Někteří odborníci tvrdí, že tyto volby jsou nerovné, protože voliči volí odděleně, mandáty jsou přerozdělovány podle různých metod a každá země na jeden mandát potřebuje jiný počet hlasů v závislosti na odlišném počtu křesel v Evropském parlamentu. V tabulce 1 je stručný přehled zemí EU a aspektů, podle kterých jsou jim přidělena místa v Evropském parlamentu.

Nyní můžeme provést přepočet počtů poslaneckých křesel na zemi. Na chvíli zrušíme podmínku maximálního a minimálního počtu mandátů na zemi a zachováme pouze nutnost mít maximálně 800 europoslanců (europarlament není nafukovací). Křesla budu přerozdělovat podle počtu obyvatel, rozlohy a HDP. Při případném zaokrouhlování počtu mandátů budu používat klasická pravidla zaokrouhlování, až na výjimku, že by nějaká země neměla mít europoslance vůbec žádného. V následující tabulce (tab. 2) jsou uvedena možná nová složení Evropského parlamentu.

Přidělovat počty křesel pouze na základě počtu obyvatel je mírně nepraktické z mnoha důvodů. První a docela výrazný je ten, že počet obyvatel se mění a v každém státě jinak. Proto by se musely poměry křesel upravovat při každých volbách, což se nikomu dělat nechce. Další důvod je, že velké státy by měly jasnou převahu nad menšími a občas velmi produktivními a aktivními státy.

Dělením podle rozlohy sice nenastává problém s její proměnlivostí (vyjma velkých válečných konfliktů...), ale naopak s jejím obrovským rozpětím od drobné Malty po majestátnou Francii. Opět je zde potenciální nemožnost cokoliv provést ze strany malých států, jejichž rozloha je opravdu miniaturní. Musely by vybírat pouze jednoho zástupce, který by odrážel politické nálady v době voleb a nezastupoval by svými názory větší část politického spektra dané země.

Nejvyrovnanější je přerozdělení křesel podle HDP. V tomto systému výrazně vyčnívá Lucembursko, které se na tuto příčku dostalo především díky nízkému počtu obyvatel a nízkým daním, které jsou atraktivní pro mnoho podnikatelů.

Kombinace těchto tří dělení je asi jediná relativně spravedlivá metoda, která se dá při rozdělování křesel v tak nesourodém prostředí zvolit. Zde možná můžeme hledat jeden z důvodů, proč je Turecko tak dlouho čekatelem na vstup do Evropské unie. Jeho velká rozloha a počet obyvatel by výrazně zamíchaly poměry sil v Evropském parlamentu a mohly by způsobit potenciální islamizaci určité frakce.

země	rok vstupu	poč. obyvatel (v r. 2012)	rozloha (km^2)	HDP (eura)	poč. míst v EP
Belgie	1952	11 094 850	30 528	30 500	21
Bulharsko	2007	7 327 224	110 879	12 000	17
ČR	2004	10 236 445	78 867	20 600	21
Chorvatsko	2013	4 398 150	56 594	15 600	11
Dánsko	1973	5 573 894	43 094	32 100	13
Estonsko	2004	1 294 486	45 228	18 800	6
Finsko	1995	5 401 267	338 145	28 700	13
Francie	1952	65 327 724	643 801	27 800	74
Irsko	1973	4 582 769	70 723	32 500	11
Itálie	1952	59 394 207	301 340	25 200	73
Kypr	2004	862 011	9 251	22 100	6
Litva	2004	3 003 641	64 300	19 100	11
Lotyšsko	2004	2 041 763	64 589	17 300	8
Lucembursko	1952	524 853	2 586	67 900	6
Maďarsko	2004	9 932 000	93 028	17 200	21
Malta	2004	417 520	316	22 700	6
SRN	1952	81 843 743	357 022	32 000	96
Nizozemí	1952	16 730 348	41 543	32 600	26
Polsko	2004	38 538 447	312 685	17 500	51
Portugalsko	1986	10 542 398	92 090	19 400	21
Rakousko	1995	8 443 018	83 871	33 200	18
Rumunsko	2007	21 355 849	238 391	13 900	32
Řecko	1981	11 290 067	131 957	19 500	21
Slovensko	2004	5 465 311	49 036	19 600	13
Slovinsko	2004	2 055 496	20 273	21 300	8
UK	1973	63 256 141	243 610	27 200	73
Španělsko	1986	46 196 276	505 370	24 500	54
Švédsko	1995	9 482	450 295	32 700	20

Tabulka 1: Přehled charakteristik, na jejichž základě jsou jednotlivým zemím přidělována místa v Evropském parlamentu

země	původní	podle obyvatel	podle rozlohy	podle HDP
Belgie	21	18	5	33
Bulharsko	17	11	19	13
ČR	21	15	13	22
Chorvatsko	11	7	9	17
Dánsko	13	8	7	34
Estonsko	6	2	8	20
Finsko	13	8	57	31
Francie	74	99	108	30
Irsko	11	7	12	35
Itálie	73	90	51	27
Kypr	6	2	2	24
Litva	11	5	11	20
Lotyšsko	8	3	11	18
Lucembursko	6	1	1	72
Maďarsko	21	15	16	18
Malta	6	1	1	24
SRN	96	127	60	34
Nizozemí	26	25	7	35
Polsko	51	58	52	19
Portugalsko	21	16	15	21
Rakousko	18	13	14	35
Rumunsko	32	32	40	15
Řecko	21	17	22	21
Slovensko	13	8	8	21
Slovinsko	8	3	3	23
UK	73	96	41	30
Španělsko	54	70	85	26
Švédsko	20	14	75	35
celkem	751	771	753	753

Tabulka 2: Složení Evropského parlamentu, pokud by byla místa přidělována na základě jednotlivých charakteristik

Téma 3 – Kosmický kulečník

K tématu přišlo několik zajímavých příspěvků. Nejobsáhlejší příspěvky přišly od řešitelů Bc.$^{\mathrm{MM}}$Sára Rosecká a Bc.$^{\mathrm{MM}}$Marco Souza de Joode. Oba si vybrali za svou oběť Jupiter. Sářin článek vyčníval v rozebrání různých důsledků zmizení Jupitera a výbornou prací se zdroji. Marcův článek byl velmi obsáhlý a precizní. Oba řešitelé pojednávali o tom, jak se budou po zmizení chovat měsíce Jupitera, ale ani jeden tento jev nepopsal matematicky dostatečně rigorózně. Proto se pokuste pomocí Keplerových zákonů spočítat, po jaké dráze se budou Jupiterovy měsíce pohybovat po jeho zmizení (případně si můžete vybrat jinou planetu a její měsíce). Zůstanou uvězněny v gravitačním poli Slunce a budou se pohybovat po elipsách, nebo se dostanou na hyperbolickou dráhu a odletí do mezihvězdného prostoru? Vliv ostatních planet můžete zanedbat.

Viktor

Seriál: Teorie reprezentací

V minulém díle jsme slíbili, že se zmíníme o řešení rovnic, ale nejdřív se podíváme na řešení úloh...

1. *Uveď nějakou další množinu, která může vytvořit grupu s operací sčítání.*

   Řešení:

   Se sčítáním jako grupa funguje například množina všech racionálních ($\mathbb{Q}$), reálných ($\mathbb{R}$) a komplexních čísel ($\mathbb{C}$), kvaterniony[2] ($\mathbb{H}$) nebo množiny všech matic stejného tvaru (např. množina všech matic 2×3).

2. *Vymysli si nějakou grupu a ukaž, že je to grupa.*

   Nejoriginálnější grupa bude zveřejněna v příštím čísle.

3. *Sestav grupu všech symetrií desky tvaru rovnostranného trojúhelníku a analyzuj ji.*

   Řešení:

   Rovnostranný trojúhelník má hned několik prvků symetrie: trojčetnou osu procházející těžištěm c_3, horizontální rovinu symetrie v rovině trojúhelníka σ_h a tři vertikální roviny procházející težištěm a jedním z vrcholů σ_A, σ_B a σ_C, dál ještě tři dvojčetné osy procházející vrcholem a středem protilehlé strany c_A, c_B a c_C. Grupa těchto prvků se značí $\mathrm{D_{3h}}$. Není komutativní. Tabulka 3 popisuje násobení v této grupě.

Symetrie geometrická je jen jedním z mnoha příkladů symetrie, které může teorie grup popisovat. Symetrie je jev, kdy aplikujeme na nějaký objekt nějakou operaci a tento objekt tím nezměníme, tj. objekt je vůči této operaci invariantní, neboli neměnný. Existuje množství situací, kdy můžeme abstraktní symetrii vhodným znázorněním převést na symetrii geometrickou. Takovým příkladem je parita funkcí.

[2] Kvaterniony jsou rozšířením komplexních čísel, navíc k reálné a komplexní jednotce mají ještě dvě další. Jestliže si množinu komplexních čísel znázorňujeme jako rovinu, kde osa x představuje násobky reálné jednotky a osa y násobky imaginární jednotky, museli bychom pro kvaterniony přidat další dva rozměry.

e	c_3	c_3^2	s_3	s_3^2	σ_h	σ_A	σ_B	σ_C	c_A	c_B	c_C	
e	e	c_3	c_3^2	s_3	s_3^2	σ_h	σ_A	σ_B	σ_C	c_A	c_B	c_C
c_3	c_3	c_3^2	e	s_3^2	σ_h	s_3	σ_C	σ_A	σ_B	c_C	c_A	c_B
c_3^2	c_3^2	e	c_3	σ_h	s_3	s_3^2	σ_B	σ_C	σ_A	c_B	c_C	c_A
s_3	s_3	s_3^2	σ_h	c_3^2	e	c_3	c_C	c_A	c_B	σ_C	σ_A	σ_B
s_3^2	s_3^2	σ_h	s_3	e	c_3	c_3^2	c_B	c_C	c_A	σ_B	σ_C	σ_A
σ_h	σ_h	s_3	s_3^2	c_3	c_3^2	e	c_A	c_B	c_C	σ_A	σ_B	σ_C
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	c_B	c_C	c_A	e	c_3^2	c_3	σ_h	s_3	s_3^2
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	c_C	c_A	c_B	c_3	e	c_3^2	s_3^2	σ_h	s_3
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	c_A	c_B	c_C	c_3^2	c_3	e	s_3	s_3^2	σ_h
c_A	c_A	c_B	c_C	σ_B	σ_C	σ_A	σ_h	s_3^2	s_3	e	c_3	c_3^2
c_B	c_B	c_C	c_A	σ_C	σ_A	σ_B	s_3	σ_h	s_3^2	c_3^2	e	c_3
c_C	c_C	c_A	c_B	σ_A	σ_B	σ_C	s_3^2	s_3	σ_h	c_3	c_3^2	e

Tabulka 3: Multiplikativní tabulka grupy symetrií rovnostranného trojúhelníku.

Existují funkce liché a sudé (je ale mnoho funkcí, které nejsou ani liché ani sudé). Funkce je lichá, pokud $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)$ (její graf je symetrický podle počátku souřadnic); funkce je sudá, pokud $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)$ (její graf je symetrický podle osy y). Parita ve své podstatě vyjadřuje, co se stane, když prohodíme znaménko u proměnné, geometrická symetrie jejich grafů je jen důsledek.

Zajímavé symetrie vykazují i polynomiální rovnice. Polynomiální rovnice je rovnice ve tvaru

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0 = 0.$$

Koeficient u členu nejvyššího řádu budeme vždy pokládat roven jedné, protože na tento tvar lze každou rovnici převést vynásobením číslem. Nejjednodušší je rovnice lineární $x + a_0 = 0$, má jediný kořen[3], a to $x_1 = -a_0$. Každá vyšší polynomiální rovnice se dá zapsat jako součin lineárních výrazů

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

kde x_1 až x_n jsou kořeny této rovnice (obecně komplexní). Polynomiální rovnice jsou tedy symetrické vůči libovolné permutaci kořenů. Mimochodem, grupa permutací kořenů kubické rovnice (obecně permutací tří čísel) je isomorfní s grupou symetrie rovnostranného trojúhelníku v rovině, kterou jste zkoumali v posledním úkolu. Ve všech kontextech, tedy i tady, se tato grupa značí $\mathrm{D_{3h}}$.

[3] Číslům, která splňují danou rovnici, se obvykle říká *kořen*

Krom toho existují i další zajímavé algebraické výrazy či rovnice s těmito rovnicemi spojené, které také vykazují určité symetrie. Pro kvadratickou rovnici to jsou Viètovy vztahy:

$$b = -x_1 - x_2\,, c = x_1 x_2\,.$$

Můžete si je snadno odvodit roznásobením $(x - x_1)(x - x_2)$ a porovnáním se standardním tvarem kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$. I tyto výrazy jsou invariantní vůči prohození kořenů. Pro kubickou rovnici existují invariantní výrazy

$$\alpha = \left(\frac{x_1 + x_2 j + x_3 j^3}{3}\right)^3 \text{ a } \beta = \left(\frac{x_1 + x_2 j^2 + x_3 j}{3}\right)^3\,,$$

kde $j = \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ je komplexní číslo, pro které platí $\left|j^3\right| = 1$ a $j^2 + j + 1 = 0$. Invarianty α a β se dají získat kombinací koeficientů rovnice a z nich se dál dají odvodit vzorce pro kořeny kubické rovnice. Pro rovnice vyšších řádů už takové invariantní výrazy, které by se daly dál použít k jejich řešení, nejsou. Avšak vlastnosti permutací jejich kořenů o nich leccos zajímavého vypovídají – především to, zda jsou rovnice řešitelné.

Některé rovnice vyšších řádů řešit dovedeme. Takovým příkladem je rovnice $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = 0$. Na první pohled je vidět, že obsahuje pouze členy sudých řádů, takže můžeme použít substituci $t = x^2$ a dospějeme k rovnici kubické. U rovnice $x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 24x + 8 = 0$ si hned rady nevíme. Řešitelná ale je, protože ji z předchozí rovnice dostaneme substitucí $t = x - 1$. To se projeví na symetrii dané rovnice. Právě podle těchto symetrií se dají rovnice přiřadit k nějaké Galoisově grupě[4]. Grup různých permutací kořenů rovnic není mnoho a jsou dobře popsány, takže je možné spočítat, jestli k některé z nich přísluší naše rovnice, a tak zjistit, jestli je řešitelná. To samo o sobě není jednoduchý úkol a ke skutečnému řešení rovnice často neexistuje jednoduchý postup. Proto řešení polynomiálních rovnic ponecháme na úrovni zmínky.

Teď přidáme několik dalších pojmů, které se nám později budou hodit. Prvním je *řád grupy G*, což je jen počet jejích prvků, pokud je konečná. Lze zavést také *řád prvku n*, což je nejmenší n, pro které pro prvek a platí $a^n = e$. Řád prvku ale nelze zavést vždy, u nekonečných grup (např. $(\mathbb{Z}, +)$) se k jednotkovému prvku mocněním některých prvků nikdy nedostaneme. Pro C_2, tedy grupu rotací kolem dvojčetné osy či grupu $(\{0, 1\}, + \bmod 2)$, je řád grupy 2 a stejný je i řád jejího prvku c_2, protože $c_2^2 = e$. Řád identity je vždy jedna.

Zavedem si další termín, *podgrupa.* To je podmnožina grupy, která sama splňuje axiomy grupy. Grupy, které neobsahují žádné podgrupy krom samotné identity a sebe sama, nazýváme *jednoduché* (většinou se ale pod pojmem *jednoduchá grupa* myslí taková grupa, která neobsahuje žádné podgrupy, které jsou zároveň celými třídami – viz níže). Např. grupa C_3 je jednoduchá, je řádu tři, stejně jako její prvky c_3 a c_3^2. Grupa $\mathrm{T_d}$ má ale hned několik podgrup: čtyři podgrupy typu C_3,

[4] To jsou grupy symetrií isomorfní s určitými typy rovnic. Galoisovy grupy jsou pojmenovány podle Évariste Galoise, který právě prací s tímto problémem teorii grup založil.

tři podgrupy C_2 a šest pogrup spojených se zrcadlením představuje ty jednoduché; složenou podgrupou je třeba grupa dvoj- a trojčetných rotací čtyřstěnu. Podgrupy najdeme tak, že odstraňujeme z grupy různé skupiny prvků (zakrýváme příslušné řádky a sloupce v multiplikační tabulce) a sledujeme, jestli je výsledná grupa stále uzavřená (jestli nám odstraněné prvky v tabulce někde nezůstaly).

Když se zamyslíme nad definicí řádu prvku a, zjistíme, že je to vlastně řád cyklické podgrupy $\langle a\rangle = a, a^2, ...a^{n-1}$ grupy G generované prvkem a. Každý prvek grupy je tedy „zabalený“ do nějaké cyklické podgrupy a řád prvku je přesně řád této podgrupy. Můžeme si položit otázku, které další prvky grupy $\langle a\rangle$ generují celou grupu $\langle a\rangle$, neboli mají stejný řád. Rozmysli si, že jsou to právě ty mocniny a^k, že k je nesoudělné s n. Pokud je n prvočíslo, znamená to, že všechny prvky cyklické grupy až na identitu mají stejný řád. Co když n není prvočíslo? To je snadno vidět na čtyřčetné ose:

$$c_4^4 = e\,, \quad c_4^2 = c_2\,, \quad c_2^2 = e$$

Stejně tak to platí pro grupy reflexních rotací[5] S_n; reflexní rotace s_n jsme potkali v grupě T_d.

Třída konjugace (dále jen *třída*) je tvořená prvky, které jsou navzájem *konjugované* (to znamená, že pro každé dva prvky třídy a, b najdeme v grupě prvek g, aby platilo $a = g \bullet b \bullet g^{-1}$) a jsou všechny určeny jedním libovolným prvkem třídy. Prvky z jedné třídy se vyznačují tím, že mají stejný řád (protože při výpočtu řádu prvku z jeho maticového zápisu, který si ukážeme za chvíli, můžeš pod operací stopy, vedoucí právě k hodnotě řádu, násobené prvky grupy libovolně prohazovat, a tak g a g^{-1} dostat vedle sebe a odstranit). Grupa je sjednocením tříd prvků, přičemž tyto třídy jsou navzájem disjunktní. Třídy obecně obsahují různé počty prvků, přičemž počet prvků třídy je dělitelem řádu grupy.

Pokud chceme hledat třídy grupy, musíme si nejprve ujasnit, které prvky jsou spolu konjugované. Zkusme to pro grupu T_d (grupa symetrie čtyřstěnu). Vezměme si třeba její prvek $s_{(AB,CD)}$ a najděme, s jakými všemi prvky je konjugovaný, a to tak, že vypočteme $g \bullet s_{(AB,CD)} \bullet g^{-1}$ pro všechny prvky g naší grupy:

$$\begin{array}{rcccc}
e \bullet s_{(AB,CD)} \bullet e & = & s_{(AB,CD)} \bullet e & = & s_{(AB,CD)} \\
c_A \bullet s_{(AB,CD)} \bullet c_A^2 & = & s_{(AC,BD)} \bullet c_A^2 & = & s_{(AD,BC)} \\
c_A^2 \bullet s_{(AB,CD)} \bullet c_A & = & \sigma_{BC} \bullet c_A & = & s^3_{(AC,BD)} \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Vidíme, že $s_{(AB,CD)}$ je konjugovaný se všemi reflexními rotacemi v grupě. Protože platí, že pokud je a konjugováno s b i s c, potom b je konjugováno s c, můžeme říci, že všechny reflexní rotace v této grupě jsou konjugované. Podobně zjistíme, že rotace c_A je konjugovaná se všemi trojčetnými rotacemi:

[5] Reflexivní rotace jsou rotace spojené se zrcadlením v rovině kolmé na rotační osu.

$$\begin{array}{ccccc} e \bullet c_A \bullet e & = & c_A \bullet e & = & c_A \\ c_A \bullet c_A \bullet c_A^2 & = & c_A^2 \bullet c_A^2 & = & c_A \\ c_A^2 \bullet c_A \bullet c_A & = & e \bullet c_A & = & c_A \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Dalšími skupinami konjugovaných prvků jsou všechna zrcadlení, dvojčetné rotace a samotná identita.

K určení tříd nám dál pomůže znalost řádů prvků. Víme, že řád identity je jedna a žádný další prvek s řádem jedna nemůže existovat. Identita tedy vždy sama tvoří třídu. Trojčetné rotace mají řád tři a také tvoří třídu. Dalšími množinami konjugovaných prvků, a zároveň třídami, jsou dvojčetné rotace s řádem 2, zrcadlení s řádem 2 a reflexní osy s řádem 4. Počty prvků těchto tříd jsou postupně 1, 8, 3, 6 a 6 – což jsou všechno dělitelé čísla 24, tedy řádu grupy.

U abstraktnějších grup narážíme na problém, jak s jejími prvky zacházet. Potřebujeme je nějak zapsat a nějak s nimi operovat. Proto k těmto grupám přiřazujeme *reprezentace* R. Reprezentace grupy je nějaká grupa matematicky snadno zvládatelných objektů, typicky čtvercových matic, která je s původní grupou isomorfní.

Matice

V případě, že nevíš, jak se pracuje s maticemi, jsou pro tebe určeny následující odstavce. Pokud s maticemi pracovat umíš, můžeš je přeskočit.

Matice A v obecném smyslu je jakákoli tabulka $m \times n$ nějakých prvků $a_{m,n}$. Může a nemusí být čtvercová ($m = n$), může to být sloupcový ($m = 1$) nebo řádkový ($n = 1$) vektor, nebo i obyčejné číslo ($m = n = 1$). Matice jsou definovány na nějakém vektorovém prostoru, tj. na množině vektorů, která splňuje grupová pravidla (s operací sčítání), a navíc vektor zůstává ve vektorovém prostoru i po vynásobení číslem (pro jednoduchost budeme uvažovat reálná čísla, ale obecně si můžeme zvolit i jinou množinu prvků, splňující určitá pravidla, vlastně i výraz číslo je jisté zjednodušení…)

Když dostaneme vektorový prostor, nejdříve si zvolíme nějakou jeho bázi. Báze je množina lineárně nezávislých vektorů (žádný z nich nejde z těch ostatních získat lineární kombinací, tj. sčítáním a násobením číslem), přičemž každý vektor prostoru se dá zapsat jako lineární kombinace vektorů báze. Takže si vlastně zvolíme souřadné osy. Možná ze zeměpisu nebo z matematiky víš, že bod v prostoru lze popsat nejen souřadnicemi kartézskými (x, y, z), ale i polárními [6] (r, ϕ, z) nebo sférickými [7] (r, ϕ, θ). Možných bází je ale nekonečně mnoho, např. v krystalografii se občas používá souřadný systém os (x, y, z), kde na sebe ale osy nejsou kolmé, ve spektroskopii se používá báze definovaná délkami vazeb v molekule a úhly mezi

[6] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Polární_soustava_souřadnic`
[7] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Sférická_soustava_souřadnic`

nimi a v kvantové mechanice se pracuje na vektorovém prostoru funkcí, kde za bázi se za určitých podmínek dají zvolit např. siny a kosiny[8].

Základními operacemi mezi maticemi jsou sčítání a maticový skalární součin. My budeme jako grupovou operaci na konečných grupách používat maticový skalární součin. K tomu, aby bylo možné matice vynásobit, musí být počet sloupců první matice A stejný jako počet řádků druhé matice B, matice se pak násobí systémem řádek krát sloupec, tedy vezmeme k-tý řádek matice A a l-tý sloupec matice B a sečteme čísla vzniklá vynásobením čísel na stejných pozicích takto vzniklých vektorů $c_{m,n} = a_{m,1}b_{1,n} + a_{m,2}b_{2,n} + \cdots$. Nejjednodušším příkladem, krom násobení obyčejných čísel, je skalární násobení vektorů:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

Násobení dvou matic vypadá takto

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cl \\ dg + ei + fk & dh + ej + fl \end{pmatrix} .$$

Dalším speciálním příkladem je násobení vektoru maticí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix} .$$

Matice a grupy

Vezměme si například grupu C_2 – grupu rotací kolem dvojčetné osy, např. osy x. Tato grupa má prvky e a c_x. Nejprve si zvolíme vektorový prostor, ve kterém problém řešíme: jsme-li v rovině, pracujeme s maticemi 2×2, v prostoru s maticemi 3×3, v prostoru o dimenzi 15 s maticemi 15×15, atd. Vždy navíc musíme zvolit, se kterými bázovými vektory budeme pracovat, tj. jak si zvolíme souřadné osy.

Prvek e je vždy reprezentován jednotkovou maticí

$$\text{2D} : e(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{3D} : e(R_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Rotaci okolo osy x o 180° lze reprezentovat jako

$$\text{2D } (x, y) : \ c_x(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{3D } (x, y, z) : \ c_x(R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ldots$$

[8] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Fourierova_řada`

Pokud bychom si otočili systém souřadnic a naše osa by se už neshodovala s osou x, ale třeba s přímkou $(1,1,0)$, pak

$$(x,y,z):\ c_{(1,1,0)}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Jak jsme na to přišli? Jednoduše: Aplikujeme tu operaci na několik triviálních objektů, pro které známe řešení. Tím dostaneme soustavu rovnic a jejím vyřešením prvky matice. Určeme společně matici zrcadlení v rovině xy v trojrozměrném prostoru. Zobrazíme třeba jednotkové vektory ve směrech jednotlivých os. Jednotkový vektor ve směru osy x leží v rovině xy, takže se operací nezmění:

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Z porovnání vektorů plyne, že $a=1$, $b=0$ a $c=0$. Podobně pro jednotkový vektor ve směru osy y

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

a proto $b=0$, $e=1$ a $h=0$. Nakonec jednotkový vektor ve směru osy z se překlopí na druhou stranu, tedy

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

a z toho $c=0$, $f=0$ a $i=-1$. Matice zrcadlení v rovině xy tedy je

$$\sigma_{xy}(R_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Je zajímavé, že stopa, (tj. součet prvků na diagonále), matice reprezentující nějaký prvek grupy, je stejná pro všechny možné reprezentace stejné dimenze. Tomuto číslu říkáme *charakter prvku* χ_a. Podobné matice mají stejnou stopu. Podobné matice A a B jsou takové, že pro ně existuje matice G, aby $A=G\cdot B\cdot G^{-1}$. V tom poznáváme vzorec svazující konjugované prvky grupy, takže prvky grupy, které jsou spolu konjugované, mají stejný charakter. Například všechny rotace kolem dvoučetných os mají ve 3D (x,y,z) reprezentaci charakter -1. Množina charakterů jednotlivých prvků se pak nazývá *charakter reprezentace.*

Podobnost matic slouží i k převádění mezi *ekvivalentními* reprezentacemi. Pokud jsou dvě reprezentace ekvivalentní, pak existuje nějaká matice G, která všechny matice reprezentující prvky grupy převede na jiné matice, které také reprezentují prvky této grupy. Takových ekvivalentních reprezentací je nekonečně mnoho, může ale existovat jedna speciální. V této reprezentaci získávají matice reprezentace grupy kvazidiagonální tvar, to znamená, že na diagonále máme oddělené čtvercové skupiny (podmatice) nenulových čísel a všude jinde nuly, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Pokud taková podobnostní transformace existuje, říkáme, že původní reprezentace je *reducibilní*. Podmatice na stejných pozicích pak také fungují jako reprezentace původní grupy. Pokud taková transformace neexistuje, je reprezentace *ireducibilní*.

To, jestli je reprezentace ireducibilní, poznáme podle *kritéria ireducibility*: reprezentace je ireducibilní právě tehdy, když součet čtverců absolutních hodnot charakterů všech prvků této reprezentace je roven řádu grupy

$$\sum_R |\chi_a(R)|^2 = g\,,$$

pro reducibilní reprezentace je tento součet větší.

Zkusme si ověřit reducibilitu 3D reprezentace grupy C_2.

$$\chi_e(3) = 3\,,\ \chi_{c_2}(3) = -1\,,\ 3^2 + |-1|^2 = 10 > 2$$

3D reprezentace grupy C_2 tedy je reducibilní, ireducibilní je například 1D reprezentace, kde

$$\chi_e(1) = 1\,,\ \chi_{c_2}(1) = \pm 1\,,\ 1^2 + |\pm 1|^2 = 2\,.$$

Zuzi

Úloha 3.5 – Teorie grup II (6b)

1. Urči řád grupy a jejích prvků a najdi co nejvíc podgrup a všechny třídy grupy $\mathrm{D_{3h}}$. (2b)
2. Napiš nějakou 3D reprezentaci grupy všech dvojčetných rotací rovnostranného trojúhelníka a rozhodni, jestli je ireducibilní. (4b)

Výsledková listina 1. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.^{MM}M.Poljak	4	60,0	3,8	3,2	3,0	2,0	10,0			22,0	22,0
2.	Mgr.^{MM}P.Šimůnek	3	32,6	3,6	3,0	3,0	0,0	7,0			16,6	16,6
3.	Mgr.^{MM}K.Stefanová	4	39,7	1,7					13,0		14,7	14,7
4.	Bc.^{MM}J.Pallová	1	13,8	2,8	3,0	3,0			5,0		13,8	13,8
5.	Bc.^{MM}L.Belza	4	13,7	3,5	0,2	3,0			7,0		13,7	13,7
6.	Doc.^{MM}P.Souček	4	103,2	2,2	3,0	3,0	5,0				13,2	13,2
7.	Bc.^{MM}M.Souza de Joode	Z8	13,1	1,1		0,0	5,0			7,0	13,1	13,1
8.	Dr.^{MM}T.Domes	3	54,9	3,3	2,6	3,0	3,0				11,9	11,9
9.	Bc.^{MM}J.Domes	1	11,6	2,8	0,8	3,0	5,0				11,6	11,6
10.	Bc.^{MM}P.Hudec	2	11,5	3,5		3,0	5,0				11,5	11,5
11.	Bc.^{MM}P.Petráš	4	10,4	2,4		3,0	5,0				10,4	10,4
12. – 14.	J.Gocník	4	9,6	3,6	3,0	3,0					9,6	9,6
	T.Špalková	3	9,6	1,6	2,0	0,0	3,0		3,0		9,6	9,6
	Mgr.^{MM}J.Václavek	4	39,6	3,8	2,8	3,0					9,6	9,6
15.	L.Kundratová	1	7,0	3,0	3,0	1,0					7,0	7,0
16. – 17.	A.Jandová	1	6,8	1,3	0,0	2,0			3,5		6,8	6,8
	Mgr.^{MM}A.Mlezivová	2	32,8	3,8		3,0					6,8	6,8
18.	Bc.^{MM}B.Požár	2	12,5	3,5		3,0					6,5	6,5
19.	D.Chytilová	2	6,2	3,2		3,0					6,2	6,2
20.	T.Hladíková	2	6,1	1,0	1,6	0,0			3,5		6,1	6,1
21.	M.Koval	1	5,9	1,7	0,2	0,0	3,0			1,0	5,9	5,9
22.	O.Buček	2	5,8	2,8		3,0					5,8	5,8
23.	A.Kostelecká	4	7,6	3,6		2,0					5,6	5,6
24.	Bc.^{MM}O.Knopp	2	16,5	2,5		3,0					5,5	5,5
25.	Mgr.^{MM}L.Vincenová	2	30,2	2,2		3,0					5,2	5,2
26. – 27.	M.Horváth		4,6	2,0	2,6	0,0	0,0				4,6	4,6
	Bc.^{MM}E.Mlynárčiková	3	15,6		1,6	3,0					4,6	4,6
28.	Z.Sýkora		4,4	1,6	1,8	1,0					4,4	4,4
29.	T.Piskovský	1	4,2	1,9		1,0	1,0	0,3			4,2	4,2
30. – 31.	Doc.^{MM}D.Krasula	3	106,0		1,0	3,0					4,0	4,0
	Bc.^{MM}S.Rosecká	4	12,0							4,0	4,0	4,0
32. – 33.	A.Šámal	2	6,6	3,6							3,6	3,6
	Bc.^{MM}D.Žáček	3	14,6	2,6		1,0					3,6	3,6
34. – 36.	Mgr.^{MM}M.Doležalová	4	31,5	2,5			1,0				3,5	3,5
	F.Chocholatý	1	3,5	3,5							3,5	3,5
	Bc.^{MM}P.Turinský	3	16,5	3,5							3,5	3,5
37. – 38.	Mgr.^{MM}S.Lukeš	3	25,2	1,2		2,0					3,2	3,2
	M.Šedová	2	3,2	1,8	0,4	1,0	0,0				3,2	3,2
39. – 40.	Bc.^{MM}D.Jurdová	4	13,0	3,0							3,0	3,0
	F.Zajíc	3	8,0			3,0					3,0	3,0
41.	Dr.^{MM}J.Pokorný	4	50,8		2,8						2,8	2,8
42. – 43.	A.Andrýsková	3	2,6	2,6							2,6	2,6
	K.Řezáčová	1	2,6	1,6	0,0					1,0	2,6	2,6
44.	T.Večeřa	1	2,4	2,4							2,4	2,4
45.	M.Zika	4	5,2	2,2		0,0					2,2	2,2
46.	J.Bartoš	1	2,1	2,1							2,1	2,1
47. – 48.	K.Moudrá	3	2,0	0,4	1,6						2,0	2,0
	J.Pospíšil	2	2,0	0,4	1,6						2,0	2,0
49. – 51.	T.Pálková		1,6	1,6	0,0						1,6	1,6
	A.Štrpka	1	1,6	1,6							1,6	1,6

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy								
	K.Tulingerová	1	1,6	1,6							1,6	1,6
52.	N.Petruny	2	1,3	1,3	0,0	0,0					1,3	1,3
53. – 55.	S.Burešová	2	8,0			1,0					1,0	1,0
	Mgr.$^{\text{MM}}$J.Dittrich	4	40,0			1,0					1,0	1,0
	D.Štípková	3	1,0		0,0	0,0	0,0	0,0		1,0	1,0	1,0
56.	M.Miček	1	0,4	0,4	0,0	0,0	0,0				0,4	0,4
57.	M.Balla	1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0				0,1	0,1
58.	J.Marek		0,0		0,0	0,0					0,0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`