Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXII / Číslo 2

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,

druhé číslo je zde a s ním mnoho novinek:

Jako v každém čísle pro vás máme několik nových úloh. Zajímavější však jistě budou nová tématka. Ta jsou dvě a najdete je na straně 5. Témat je tedy celkem pět a v letošním ročníku už žádná další nechystáme. Určitě si vyberte alespoň jedno z nich a pošlete nám k němu (krátký) článek, nebo alespoň řešení nějakého z podproblémů. Jednak nás tím potěšíte, jednak potěšíte ostatní řešitele a v neposlední řadě máte šanci získat spoustu bodů. V letošním ročníku se navíc body budou hodit víc než doposud – více vám prozradíme ve třetím čísle. Na konci čísla na vás ještě čeká nový seriálový článek o grupách.

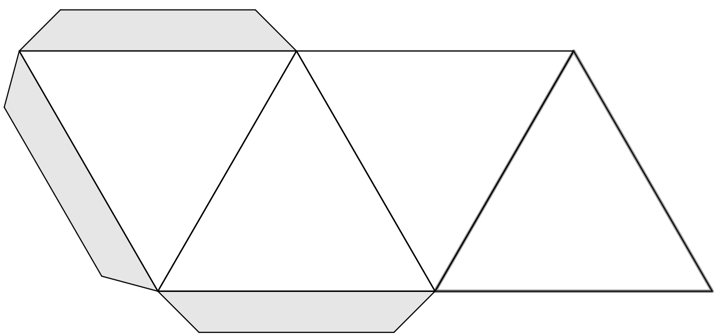
Další novinkou je náš web – sídlí stále na adrese `mam.matfyz.cz`, má ale zbrusu nový kabátek i obsah. Pokud jste ho ještě neviděli, rozhodně to napravte.

Zimní semestr je plný setkání. S mnohými z vás jsme se viděli v září na *Jednom dni s informatikou*. Před pár dny skončilo podzimní soustředění v Lužických horách, kde jsme si všichni užili mnoho zábavy na přednáškách, hrách a konferách. Bylo to bezva! Ať už jste byli či nebyli na soustředění, nevynechejte naše víkendové setkání. To se bude se konat 11. – 13. prosince v Hoštejně a zváni jsou úplně všichni příznivci M&M. Více informací najdete na našich stránkách v sekci Soustředění.

A konečně, všechny vás srdečně zveme na *Den otevřených dveří* na Matfyzu. Ten se koná ve čtvrtek 26. listopadu v Praze, nově v Kongresovém centru. Rozhodně se ukažte – budete mít možnost poznat Matfyz zblízka, potkat nás i organizátory dalších seminářů a poslechnout si mnoho zajímavých přednášek. Všechny potřebné informace najdete na `www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`.

Těšíme se, až dorazíte na DOD či víkendovku. Těšíme se na vaše články. A těšíme se, že otočíte list a pustíte se do čtení.

vaši organizátoři



Obrázek 1: Čtyřstěn k vystřižení

Zadání úloh

Termín odeslání druhé série: 24. 11. 2015

To Janě dopis do schránky přišel, ale i pro ni to byla malá záhada. Zpáteční adresa chyběla, i když poštovní razítko na známce hlásalo Praha 8. A jak mohl pisatel vědět, že ji to zaujme? V dopise bylo psáno následující:

Milý hledači,
pokud máš rád úlohy, nad kterými musíš chvíli, a někdy i déle, přemýšlet, máš rád dobrodružství a nebojíš se nových věcí a lidí, pusť se směle do následující úlohy. Až si budeš jist, že správné řešení znáš, vydej se do matky měst a pak dále vlakem, co jede po proudu řeky. A jak jistě víš, moudré přísloví praví: „Dvakrát měř, jednou řež", a proto vystup o čtyři zastávky dříve. M.

Úloha 2.1 – Hledání minima (4b)

Existuje funkce, o které víš, že na uzavřeném intervalu $\langle 0; 1\rangle$ reálných čísel splňuje následující:

1. je všude definována
2. jejím oborem hodnot je podmnožina reálných čísel
3. má právě jedno lokální minimum[1]
4. nikde není konstantní

Tvůj úkol je jednoduchý: najdi takový interval $\langle a; b\rangle$, který toto minimum obsahuje, a přitom $b - a \leq 1/1\,000\,000$. Bohužel nevíš, jak je funkce definována. Naštěstí ale máš kouzelnou krabičku, které můžeš zadat libovolné reálné číslo a ona ti s naprostou přesností prozradí funkční hodnotu v tomto bodě. Chvilku jí to ale trvá, takže úkol chceš splnit na co nejméně použití krabičky. Za obzvláště efektivní řešení budou bonusové body.

Jana se ihned po vyřešení problému vydala za svým kamarádem Zdeňkem, protože věděla, že o takovéhle dobrodružství ho nemůže připravit. Byla mile překvapená, když zjistila, že i Zdeněk dostal svou vlastní obálku. Instrukce zněly stejně, ale úloha byla jinačí.

[1] Existuje tedy nějaké x_0 (ono minimum), pro které platí, že na celém intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ je funkce klesající a na celém intervalu $\langle x_0, 1\rangle$ je zase rostoucí.

Úloha 2.2 – Dvě kružnice a obdélník (3b)

Dvě kružnice k, l se protínají v bodech M a N. Nechť $ABCD$ je obdélník, přičemž vrcholy A a C leží na k, vrcholy B a D leží na l. Dokaž, že průsečík úhlopříček obdélníka $ABCD$ leží na úsečce MN.

Společně úlohu rychle vyřešili a byli plni očekávání. Teď je čeká dobrodružství. Domluvili se, že si sbalí něco málo věcí – přeci jen výlet do Prahy a dál… kdoví, zda nebudou muset někde přespat. Kdoví, zda si nebudou muset někde vařit? Na to slyšela praktická Jana a přes Zdeňkovy protesty mu přidala do batohu hrnec i s pokličkou. Dovedla si živě představit, co by je mohlo potkat.

Úloha 2.3 – Papiňák (3b)

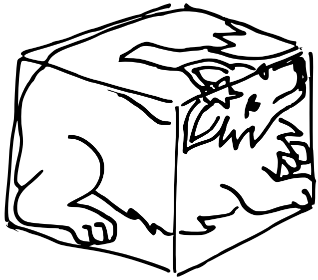
Potřebujete si rychle uvařit jídlo. Nemáte tlakový hrnec, pouze jednoduchý s pokličkou. Jaké maximální teploty v něm můžete dosáhnout, když mezi hrnec a pokličku dáte těsnění a na pokličku si sednete? Jak těžká (nebo zatížená) by musela být poklička, abyste v hrnci dosáhli stejné teploty jako v papiňáku? Sami odhadněte potřebné číselné parametry.

Natěšení přátelé se vydali na vlak. Do Prahy dorazili chvíli po poledni a plynule pokračovali dál. Když vystoupili z druhého vlaku, začali se rozhlížet kolem. Chvíli jim trvalo, než na rozcestníku našli špendlíkem připevněnou cedulku s textem „Z 3,2 km M“. *Pak se tedy znovu vydali na cestu. Došli až do tunelu, kde narazili na první překážku své cesty. Někdo jim zavázal oči!*

Úloha 2.4 – Mince na podnose (3b)

Někdo vám zavázal oči a postavil vás před čtvercový podnos, na kterém je v každém rohu jedna mince. Můžete otočit libovolné z těchto mincí a dát ruce pryč. Pokud pak budou všechny lícem nahoru, splnili jste úkol; v opačném případě se podnosem otočí o neznámý počet čtvrtotáček a začne se od začátku. Nedokážete zjistit hmatem, která strana mince je která. Jak to provedete, pokud nechcete spoléhat na náhodu?

Když úlohu zdárně vyřešili, vydali se naši přátelé na druhý konec tunelu, kde se proti světlu rýsovaly dvě postavy. Za nimi se ještě ozvalo: „Vaše cesta je možná zmatená, proto radu vám dám, že M Modelování znamená, to říkám teď vám.“



Zadání témat

Téma 4 – Komprese mapových dat

Aplikace pro navigaci má dnes skoro každý na mobilu. Není problém mít v mobilu půlku Evropy a mít tak mapy všude po ruce. Jak ale taková rozsáhlá data ukládat, aby nebyla příliš velká a dala se snadno používat? Cílem tohoto tématu je zkusit vymyslet a realizovat algoritmy na efektivní ukládání mapových dat. Pro naše účely se budou mapy skládat jen z jednoduchých objektů – bodů, lomených čar a ploch. Každý bod má souřadnice, čáry a plochy jsou popsány souřadnicemi bodů, kterými procházejí, a plochy jsou navíc uzavřené. Pro ty, kteří chtějí své nápady i prakticky realizovat, jsme připravili testovací data, na kterých si mohou efektivitu svých algoritmů vyzkoušet.

Zkuste vymyslet (a případně realizovat) způsob, jak uložit mapová data, aby zabírala co nejméně prostoru a splňovala některou z následujících podmínek:

1. žádné další podmínky nejsou
2. byla lokálně dekomprimovatelná – pokud chci znát mapu v okolí daných souřadnic, stačí mi rozbalit jen vhodnou část dat a nemusím je nejprve rozbalit všechna
3. byla editovatelná – pokud chci přidat nebo změnit bod, čáru či plochu, nemusím nejprve vše rozbalit a pak opět zabalit
4. byla postupně komprimovatelná – objekty dostávám postupně a všechny se mi naráz nevejdou do paměti, proto je chci průběžně komprimovat a zapisovat na disk. Pořadí objektů si mohu předepsat.

Jak se budou vaše algoritmy chovat, pokud dostaneme mapu hustě osídlené oblasti s množstvím objektů na malé ploše? Budou stejně efektivní i pro řídké mapy venkovských oblastí?

Pro ty, které baví programovat, jsme připravili i praktická data z města i krajiny. Na odkazu `http://mam.mff.cuni.cz/media/tema/22/tema4/brno.txt` si můžete stáhnout mapu středu Brna, na odkazu `http://mam.mff.cuni.cz/media/tema/22/tema4/jestrebi.txt` si můžete stáhnout mapu vesnických oblastí okolo Jestřebí. Soubor je textový v následujícím formátu:

```
b c p
sy1 sx1
sy2 sx2
...
syb sxb
c1l sc11y sc11x sc12y sc12y ... sc1ly sc1lx
...
ccl scc1y scc1x scc2y scc2y ... sccly scclx
p1l sp11y sp11x sp12y sp12y ... sp1ly sp1lx sp11y sp11x
...
ppl spp1y spp1x spp2y spp2y ... spply spplx spp1y spp1x
```

Na prvním řádku je uveden počet bodů, cest a ploch. Po nich následují body, cesty a plochy, vždy jeden objekt na jeden řádek. Body obsahují nejprve zeměpisnou šířku a pak zeměpisnou délku ve stupních. Cesty a plochy jsou popsané hraničními body a obsahují nejprve počet bodů na cestě/ploše a pak souřadnice jednotlivých bodů na ní. U ploch je poslední bod shodný s prvním.

Pokud budete váš algoritmus implementovat, důkladně ho vysvětlete a okomentujte a napište současně program pro kompresi i dekompresi dat, ať ho můžeme vyzkoušet na různých datech.

Jethro

Téma 5 – Rozpustilá rozpustnost

Většina z nás si nedokáže představit ráno bez svého oblíbeného teplého nápoje. Někteří si ještě chtějí osladit život, a tak přidají pár lžiček cukru. Kolik cukru (sacharózy) však můžeme přidat do našeho ranního šálku teplé tekutiny, aby se ještě rozpustil? A jaká bude hraniční hodnota pro med? Bude se lišit rozpustnost sladidla pro čaj, kakao a kávu? Jak se změní maximální možné množství rozpouštěné látky po vychladnutí nápoje na pokojovou teplotu? Proč se Granko (případně jiné instantní kakaové nápoje) rozpouští dobře i ve studeném mléce na rozdíl od kakaa? Lze rozpustit gumového medvídka?

Jak již bylo naznačeno v úvodu, budeme se zabývat rozpustností různých látek v různých rozpouštědlech za různých podmínek. Hlavním cílem bude experimentálně určit rozpustnosti dostupných látek ve vhodném rozpouštědle a jejich závislosti na zvolených parametrech (teplota, tvrdost vody a další). Nemusíte se však omezovat pouze na pevné látky (jako např. cukr, sůl, soda, …) a vodu, můžete vyzkoušet i jiná rozpouštědla (nasycený roztok NaCl ve vodě, olej, atd.), popřípadě zkusit mísit i dvě různé kapaliny. Můžete se zabývat také změnami vlastností nasycených roztoků oproti samotnému rozpouštědlu (např. změna hustoty nebo viskozity). Na problémy lze nahlížet i z teoretického hlediska. Můžete tak zkusit odhalit příčiny chování roztoků v závislosti na vybraném parametru, důvod větší rozpustnosti cukru ve vodě než soli v témže rozpouštědle, či diskutovat (ne)existenci hraničních teplot, při nichž se již rozpustnost dané látky v daném rozpouštědle nebude měnit. Při svém bádání se můžete inspirovat také otázkami v úvodu.

Popis postupu při experimentu a dosažené výsledky nezapomeňte doplnit odhadem chyby měření a porovnat s tabelovanými hodnotami (podaří-li se vám je dohledat). Hodně zábavy nejen při experimentování!

Peťa

Řešení témat

Téma 2 – Volební systémy

Do redakce dorazily do uzávěrky druhého čísla celkem tři příspěvky.

Tereza Špalková ve svém příspěvku rozebírá rozdíl mezi poměrným a většinovým systémem a dále naráží na způsob sčítání hlasů v komunálních volbách:

„Možnosti jsou čtyři:

1. Na volebním lístku jsou označeni jednotliví kandidáti – každý označený kandidát obdrží jeden hlas.
2. Na volebním lístku je označena celá volební strana – dostane tolik hlasů, jaký je celkový počet mandátů v zastupitelstvu, a to dle pořadí osob na hlasovacím lístku.

3. Jsou označeni jak kandidáti, tak strana – nejprve dostanou po jednom hlasu kandidáti, hlasy zbývající do počtu mandátů jsou uděleny příslušníkům označené strany taktéž podle pořadí na volebním lístku.

4. Na volebním lístku jsou uděleny hlasy kandidátům, kteří se kandidatury vzdali nebo byli zákonně odvoláni – k takovým hlasům se při sčítání nepřihlíží.

Nejproblematičtěji se jeví body 2 a 3, konkrétně tedy přidělování bodů stranám. Ve výhodě se totiž ocitají strany, které mají na volebním lístku více lidí – tedy více, nebo minimálně stejně jako je mandátů. Pokud má totiž strana kandidátů méně, přijde o hlasy, které by jinak bývala získala a je tak v nevýhodě proti větším stranám. Systém tedy očividně spíše nahrává velkým zajetým stranám, naopak poškozuje menší lokální strany a hnutí.“

- Zkuste najít opatření, které tuto nevýhodu nezaplněných kandidátek částečně kompenzuje a srovnejte jej s vlastním návrhem na řešení této nevýhody.

- Jak bychom pro naše účely mohli definovat míru spravedlivosti systému (tedy zda a jak moc daný systém zvýhodňuje nějaký typ stran/hnutí)?

- Vezměme si obec s X voliči, kde volíme Z zastupitelů. Kandiduje celkem K lidí. Zkuste vyzkoušet různá rozložení preferencí voličů a rozmístění kandidátů na kandidátkách pro konkrétní X, Z a K. Pokud se vám podaří vymyslet nějakou zajímavou situaci, při které vám výsledek voleb přijde nespravedlivý, pošlete nám svůj model do redakce. Nezapomeňte zohlednit 5% volební klauzuli a pořadí, v jakém se mandáty přidělují kandidátům z kandidátky úspěšného hnutí.

Příspěvky od Jany Pallové a Terezy Hladíkové se zaměřily na způsob rozdělování mandátů na základě počtu získaných hlasů tzv. D'Hondtovu metodou[2], která se v České republice používá. Tereza Hladíková přišla s následující myšlenkou:

„D'Hondtova metoda se může zdát nespravedlivá právě ve chvíli, kdy jsou ještě hlasy přepočítávány na obyvatele různých krajů a okresů. Počet hlasů se sčítá v každém obvodě zvlášť a váha vítězství je brána podle počtu obyvatel obvodu. Proto je tedy těsné vítězství ve velkém obvodu výhodnější než drtivé vítězství v obvodu s malým počtem obyvatel. Rozdělit stát na obvody a přiřadit jim váhu hlasu je komplikovaná úloha a myslím si, že právě pohyb se stanoveným poměrem hodnoty hlasu v největším a nejmenším kraji může ovlivnit výsledky voleb.“

- Zkuste vymyslet nové rozložení státu na volební obvody tak, aby obvody měly co nejmenší rozdíly v počtu obyvatel. Pro jednoduchost se zaměříme jen na slučování okresů, pro které máme k dispozici i data. Pro jednotlivá

[2] viz následující článek

rozdělení pak budeme mít možnost přepočítat výsledky voleb. Můžete uvažovat volební obvody s různými počty okresů i obvody, které nebudou tvořit souvislá území.

Tereza Hladíková také narazila na následující modifikaci D'Hondtovy metody:

„Příkladem je modifikace metody používaná v Bosně, Hercegovině a Litvě, kdy je hodnota v prvním kole 1, v druhém 4, poté 3, 5, 7, … Druhé kolo dává velkou šanci proniknout drobnějším stranám."

- Dali byste přednost nějaké jiné číselné řadě? Jaké výsledky by mělo její použití ve volbách? Zkuste to ilustrovat na reálných datech.

Další modifikaci D'Hondtovy metody a její srovnání s Hagenbach-Bischoffovou metodou naleznete v článku Jany Pallové níže. V plném znění ho, stejně jako ostatní příspěvky, najdete na našem webu.

Anet

Historický vývoj volebního systému v Česku (5b)

Jana Pallová

Pozn. red.: Článek byl redakčně upraven.

V Česku máme dva systémy na přidělování mandátů na základě hlasů – většinový a poměrný. Ale zatímco ten první se používá výhradně při volbách do Senátu, poměrový systém se již od obnovení demokracie u nás používá u všech jiných voleb – do obecního i krajského zastupitelstva nebo do Poslanecké sněmovny.

V současné době je u nás (společně s Belgií, Rakouskem, Polskem aj.) zavedena takzvaná D'Hondtova metoda přepočítávání hlasů, která se řadí mezi systémy volebního dělitele. O co se jedná? V první řadě se vezme počet všech hlasů odevzdaných ve všech volebních oblastech a vydělí se počtem mandátů (200). Výsledkem je tzv. republikové mandátové číslo, které udává, kolik hlasů je (v celostátním průměru) potřeba na zvolení jednoho poslance. Tímto číslem se pak vydělí počet hlasů v jednotlivých krajích a výsledkem je počet mandátů, které připadnou různým volebním krajům. Dále přichází na řadu tzv. volební klauzule. Mandáty se rozdělují pouze mezi strany, které celostátně získaly alespoň 5 % všech hlasů, dále mezi dvoučlenné koalice, které získaly alespoň 10 % atd. Hlasy přidělené stranám, které neprojdou onou 5% klauzulí, propadají (což nahrává zvláště větším politickým stranám a hnutím).

Nyní přichází ta zábavnější část. Máme počet mandátů, které potřebujeme rozdělit, máme i strany, kterým je potřebujeme rozdat, a počty hlasů, které ve volbách dostaly. Co s tím ale teď udělat?

Jak už napovídá název „volební dělitel", budeme dělit. A jelikož se jedná o rozdělování kolové, dokonce několikrát. Nejdříve vezmeme jedničku a vydělíme s ní počty hlasů, které získaly všechny strany, které prošly přes volební klauzuli.

Strana s největším počtem hlasů získává mandát. V dalším kole se počty hlasů znovu vydělí jedničkou, všem stranám kromě té, která v minulém kole získala mandát – k děliteli jejích hlasů se přičte jednička a už je nedělíme jedničkou, ale dvojkou. Opět platí, strana s největším podílem hlasů získává mandát, a přičtenou jedničku ke svému děliteli. Tento proces se opakuje tolikrát, kolik mandátů je zapotřebí rozdat.

Že nechápete? Nevadí, pojďme si to názorně demonstrovat. Máme čtyři strany a pět mandátů, které potřebujeme rozdat.

	Strana R	Strana I	Strana K	Strana I_2
1. kolo	120 : 1 = **120**	100 : 1 = 100	75 : 1 = 75	40 : 1 = 40
2. kolo	120 : 2 = 60	100 : 1 = **100**	75 : 1 = 75	40 : 1 = 40
3. kolo	120 : 2 = 60	100 : 2 = 50	75 : 1 = **75**	40 : 1 = 40
4. kolo	120 : 2 = **60**	100 : 2 = 50	75 : 2 = 37,5	40 : 1 = 40
5. kolo	120 : 3 = 40	100 : 2 = **50**	75 : 2 = 37,5	40 : 1 = 40

Strana R tedy získala shodně se stranou I dva mandáty, K dostala mandát jeden a I_2 zůstala na ocet.

Tuto klasickou variantu D'Hondtovy metody používá náš politický systém od roku 2002. Předtím byla dva roky používána upravená varianta, tzn. prvním dělitelem není 1, ale 1,42. Dalším dělitelem je 2, 3 atd. jako u klasické D'Hondtovy metody. V čem se tato modifikace liší? Ještě více umocňuje většinový efekt, to znamená, že zvýhodňuje větší strany na úkor těch malých, tím víc, čím je volební okres menší.

A pokud bychom měli zabrousit ještě o kousek do minulosti, zjistili bychom, že od roku 1990 do 2000 se používala Hagenbach-Bischoffova kvóta. Tato formule také patří k poměrným, rozhodně ale více podporuje menší strany a koalice. A jak funguje?

V prvních krocích je totožná s D'Hondtovou metodou. Získá se republikové mandátní číslo, jeho pomocí se rozdělí mandáty do jednotlivých volebních krajů a následně je vyhlášena volební klauzule. Tím ale veškerá podobnost končí. Nyní se vezme počet hlasů, které získal celý kraj, a vydělí se počtem mandátů, které mu byly přiřazeny, zvětšeným o jedna. Výsledkem je krajské volební číslo, kterým se následně dělí počet hlasů získaný jednotlivými stranami. Kolikrát se tam toto volební číslo vleze, tolik mandátů strana získá. Zbytky po dělení, stejně jako nerozdělené mandáty, pokračují do dalšího kola. Nyní se součet všech zbytků po dělení vydělí počtem zbývajících mandátů zvětšeným o jedna, čímž se získá republikové volební číslo. Postup se opakuje, zbytky jednotlivých stran jsou opět děleny tímto volebním číslem a kolikrát se vleze, tolik mandátů strana dostane. Mandáty, které zbyly i po tomto, se rozdělí podle finálních zbytků hlasů.

Na závěr bych vám ráda pro porovnání ukázala tabulku výsledků z roku 2006 – kolik mandátů by jednotlivé strany získaly různou metodou. Posuďte sami, zda vám to přijde spravedlivé, či nikoliv.

Dělitel/Strana	ODS	ČSSD	KSČM	KDU-ČSL	SZ
D'Hondt	81 40,5 %	74 37 %	26 13 %	13 6,5 %	6 3 %
Hagenbach-Bischoffova kvóta	73 36,5 %	64 32 %	28 14 %	17 8,5 %	12 6 %
Celkový podíl hlasů	35,4 %	32,3 %	12,8 %	7,2 %	6,3 %

Seriál: Co je to grupa?

Jak jsme předeslali v prvním čísle, v letošním ročníku se dozvíš více o teorii grup. Rozhodně si to zaslouží, je to zásadní téma moderní matematiky a nachází uplatnění skutečně ledaskde. Na střední škole se ale nejspíš nedozvíš ani o její existenci. Proč?

Shodou náhod je důvod obojího stejný. Teorie grup není věda o kvantitách, ale o strukturách. Je to teorie, která klasifikuje objekty a operace mezi nimi a hledá v nich symetrie v nejširším slova smyslu. Při čtení tohoto seriálu si místy budeš říkat: „No jo, to se tak dělá, proč na to zavádět komplikovanou teorii." Ale to krásné je, že teorie grup platí v těchto jednoduchých modelových situacích, ale dá se aplikovat a usnadňuje život v situacích, kde by vás ani nenapadlo, že hledání struktury může něčemu pomoci. Teorie grup se těsně dotýká teorie množin a lineární algebry, proto tu budeš potkávat pojmy, které máš možná spojené s množinami a maticemi.

Takže co že je to ta grupa: Grupa je třeba množina celých čísel s operací sčítání, což dohromady značíme jako $(\mathbb{Z}, +)$; racionální čísla bez nuly s operací násobení $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$; symetrie čtyřstěnu s jejich vzájemným skládáním $\mathrm{T_d}$ (Některé grupy se používají často a množiny jim příslušné se popisují špatně, proto se zavedly značky přímo pro celé grupy, tedy dvojice množina a operace. Do této kategorie spadají mimo jiné všechny bodové grupy symetrie, tj. grupy operací symetrie a jejich skládání, které neobsahují translaci, tedy posun celého objektu o nějaký vektor vůči souřadné soustavě.); rotace kolem trojčetné osy C_3 a jejich vzájemné skládání; nebo množina různých permutací kořenů polynomiální rovnice, které nemění některé důležité vztahy mezi kořeny.

V grupách symetrií budeme rozlišovat rotační osy podle *četnosti.* Zatím jste se asi setkali jen s osami v rovině – objekt nakreslený na papíře je symetrický podle nějaké přímky, tj. kdybychom podél této přímky papír přeložili a podívali se skrz, uvidíme, že jednotlivé poloviny obrázku jsou v zákrytu. Také si můžeme představit, že papír zafixujeme v místě té přímky a otočíme ho vzhůru nohama (o 180°), a pokud je papír průhledný, dostaneme stejný obrázek. Obrázek je tedy symetrický vůči otočení o polovinu celého úhlu. Do identity, tady návratu do původního stavu, což je ekvivalentní neprovedení žádné operace, musíme tímto způsobem otočit dvakrát – osa je *dvojčetná.* Dalším typem osy, se kterým jsme se mohli setkat, je osa u rotačních těles, například válce. Válec můžeme otočit kolem osy vedoucí středy jeho podstav o libovolný úhel a pořád bude vypadat stejně. Je *rotačně symetrický.* Protože ho můžeme otočit o libovolný úhel, tedy i nekonečně malý, je taková osa *nekonečně četná.* V minulém odstavci jsme mluvili o trojčetné ose. Trojčetná osa je taková osa, kolem které když objekt otočíme o třetinu celého úhlu (120°), získáme stejný objekt. Obecně definujeme n-četnou osu jako osu, kolem které otáčíme o násobky n-tiny celého úhlu a obrazec se nemění.

Z těchto příkladů už něco tušíme: Grupa $\mathbb{G}$ je množina nějakých objektů ($\mathbb{M}$) s nějakou operací, a navíc to celé asi bude muset splňovat nějaké podmínky, protože když zdůrazňujeme, že chceme racionální čísla bez nuly, tak to asi s nulou fungovat nebude, a tudíž ne každá množina s operací je grupou. Pokud se mluví o grupách obecně, je běžné tuto operaci nazývat *grupové násobení*, ačkoli tou operací může být leccos, jak vidíme z příkladů výše, a zdaleka ne jen násobení, jak jsme zvyklí jej chápat. Grupovou operaci budeme značit $\bullet$.

Podmínek na grupu $\mathbb{G} = (\mathbb{M}, \bullet)$ je několik:

1. Výsledek aplikování grupového násobení na jakékoli dva prvky $\mathbb{M}$ dá opět prvek $\mathbb{M}$. (Například součet jakýchkoli dvou celých čísel je celé číslo.) Říkáme, že $\mathbb{M}$ je vůči grupovému násobení *uzavřená.*

$$\forall a, b \in \mathbb{M} : a \bullet b \in \mathbb{M}$$

2. Při kombinaci více prvků nezáleží na uzávorkování, grupové násobení je tedy *asociativní.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{M} : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

3. Mezi prvky množiny je jeden výjimečný. Grupové násobení tímto prvkem ostatní prvky $\mathbb{M}$ nezmění. Proto tomuto prvku říkáme *jednotkový.* Značíme jej obvykle $\mathbb{1}$ nebo e.

$$\exists \mathbb{1} \in \mathbb{M} : \forall a \in \mathbb{M} : a \bullet \mathbb{1} = \mathbb{1} \bullet a = a$$

4. Ke každému prvku existuje v grupě prvek takový, že jejich vzájemným grupovým vynásobením vznikne prvek jednotkový. Říkáme, že jsou prvky navzájem *inverzní.*

$$(\forall a \in \mathbb{M})(\exists b \in \mathbb{M}) : a \bullet b = b \bullet a = \mathbb{1}$$

   Bývá zvykem inverzní prvek k a značit jako a^{-1}.

   Zamysleme se nad tím, jestli může mít jeden prvek inverzních prvků více. Pokud by například prvek a měl inverzní prvky b a c, pak by všechny tři prvky byly vzájemně inverzní, tedy $a \bullet b = 1$, $b \bullet a = 1$, $a \bullet c = 1$, $c \bullet a = 1$, $b \bullet c = 1$ a $c \bullet b = 1$. Potom můžeme položit $a \bullet b = a \bullet c$, a po vynásobení rovnice a^{-1} zleva (vzhledem k tomu, že grupové násobení obecně není komutativní, rozlišujeme grupové násobení zleva a zprava), dostaneme $b = c$. Vidíme tedy, že dva inverzní prvky prvku a se sobě rovnají, takže máme jen jeden inverzní prvek.

Některé možná překvapí, že není potřeba, aby grupové násobení bylo na prvcích $\mathbb{M}$ *komutativní*, tedy aby nezáleželo na pořadí ($a \bullet b = b \bullet a$). Některé grupy to splňují, těm říkáme *Abelovy* nebo *komutativní*. Ale nebudeme se omezovat jen na ně, tím bychom se ochudili o ty nejzajímavější!

A teď cvičení: Ověříme si, že některé nabízené příklady jsou skutečně grupy.

Celá čísla s operací sčítání $(\mathbb{Z}, +)$

1. Uzavřenost: Součet každých dvou celých čísel je opět celé číslo, tak je mimochodem množina celých čísel vystavěna. Naopak vidíme, že aby byla množina celých čísel uzavřená vůči sčítání (a přitom obsahovala nějaké nenulové číslo), musí být nekonečná, protože sečtením dvou kladných čísel vždy dostaneme číslo větší.

2. Asociativita grupového násobení: Pro sčítání celých čísel skutečně platí, že $(a + b) + c = a + (b + c)$. Sčítání čísel je i komutativní.

3. Existence jednotkového prvku: Jednotkovým prvkem pro operaci sčítání celých čísel je nula. Číslo, ke kterému přičteme nulu, se nezmění. Grupa čísel založená na operaci sčítání čísel musí obsahovat nulu.

4. Existence inverzního prvku: Ke každému celému číslu skutečně máme inverzní číslo při operaci sčítání. Ke kladným jsou inverzní záporná a naopak. Proto jako grupa se sčítáním nefunguje třeba množina přirozených čísel.

Racionální čísla s operací násobení $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

1. Uzavřenost: Každé racionální číslo se dá napsat ve tvaru p/q, kde p a q jsou celá čísla a $q \neq 0$. Když násobíme dvě racionální čísla p/q a r/s, je výsledkem $(p \cdot r)/(q \cdot s)$. Vynásobením dvou celých čísel je opět celé číslo a pokud ani jedno z nich není nula, pak je výsledek také nenulový, proto je $(p \cdot r)/(q \cdot s)$ racionální číslo. Stejně jako u sčítání, i tady pro splnění uzavřenosti potřebujeme nekonečnou množinu (pokud v ní chceme mít i něco jiného než jen jedničku).

2. Asociativita grupového násobení: Násobení čísel je asociativní, dokonce je i komutativní.

3. Existence jednotkového prvku: Jednotkovým prvkem vůči násobení je jednička. Cokoli vynásobeno jedničkou se nezmění. V grupě založené na násobení čísel jedničku potřebujeme.

4. Existence inverzního prvku: Inverzním prvkem k číslu a pro operaci násobení je $1/a$. $1/a \cdot a = 1$. Takže celá čísla s operací násobení grupu netvoří. Právě kvůli existenci inverzního prvku tvoří tuto grupu racionální čísla bez nuly.

Grupa rotací kolem trojčetné osy s jejich skládáním $\mathrm{C_3}$

Rotace kolem trojčetné osy jsou rotace o 120° (C_3), 240° (C_3^2) a 360° (identita, e).

1. Uzavřenost: Při ověřování uzavřenosti konečných grup ($\mathbb{M}$ je konečná) si můžeme pomoci *multiplikativní tabulkou.* V prvním řádku a prvním sloupci tabulky vypíšeme všechny prvky $\mathbb{M}$ a na pozice (x, y) uvnitř píšeme výsledky operací $A_x \bullet A_y$.

	e	C_3	C_3^2
e	e	C_3	C_3^2
C_3	C_3	C_3^2	e
C_3^2	C_3^2	e	C_3

   Vidíme, že uvnitř tabulky máme jen stejné rotace jako v prvním řádku a sloupci, množina je tedy na skládání uzavřená.

2. Asociativita grupového násobení: Opět můžeme ověřit z tabulky. Například $(C_3 \bullet C_3^2) \bullet C_3 = e \bullet C_3 = C_3 = C_3 \bullet e = C_3 \bullet (C_3^2 \bullet C_3)$. Operace rotace kolem společné osy jsou navíc komutativní, což se projevuje tím, že multiplikativní tabulka je souměrná podle diagonály.

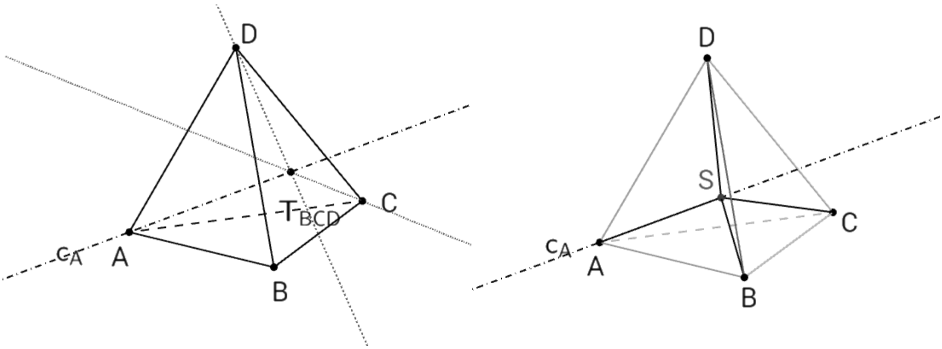
3. Existence jednotkového prvku: Jednotkovým prvkem společným pro všechny operace symetrie je identita e. Je to operace, která zkrátka s ničím nepohne a dá se popsat mnoha různými způsoby, například jako otočení o 360° kolem libovolné osy.

4. Existence inverzního prvku: Jak opět vidíme z multiplikativní tabulky, jediné dva další prvky grupy, krom prvku jednotkového, jsou navzájem inverzní. Obecně k rotaci o $x°$ je inverzní operace rotace o $(360 - x)°$.

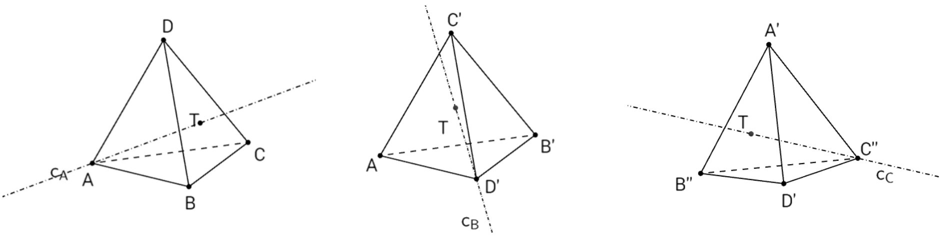
Bodová grupa symetrie čtyřstěnu $\mathrm{T_d}$

To už je trochu větší a složitější grupa. Pokusíme se ji společně vystavět a cestou si ukážeme některé další jevy týkající se operací symetrie a teorie grup. U systémů, kde není na první pohled vše jasné, také oceníme, že nám znalost teorie grup může s jejich popisem pomoci.

Začneme tím, že najdeme alespoň nějaké operace symetrie pro čtyřstěn: Předně musí grupa obsahovat identitu. Pokračujeme tím, co už známe – trojčetnými osami. Čtyřstěn má čtyři – vždy procházejí vrcholem a středem protější stěny, označme si je c_A, c_B, c_C a c_D. Kolem každé můžeme otočit jednou nebo dvakrát, stejně jako v předchozí grupě. Fungovalo by to už jako grupa? Zkusme si nejdříve ověřit uzavřenost, tedy zkusme prvky grupy skládat. Protože na čtyřstěnu jako



Obrázek 2: Tetraedr s vyznačenou trojčetnou osou c_A, vpravo je vyznačeno i jeho těžiště S a spojeno s vrcholy – tohle znázornění se používá pro molekuly.



Obrázek 3: Vlevo vidíme čtyřstěn s naznačenou osou c_A, kolem které budeme otáčet. Po otočení se dostaneme do stavu uprostřed a aplikujeme naznačenou rotaci kolem osy c_B (pozor, podle původní polohy bodu B). Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, otočením podle naznačené osy c_C se dostaneme do původního stavu.

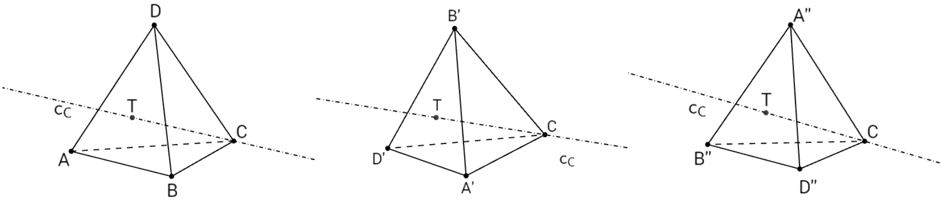
takovém se operace symetrie neprojeví a na jiném tělese by se nám špatně hledaly ty osy, bude se nám hodit označit si jeho vrcholy (obrázek 1 vlevo), nebo si jej překreslit jako molekulu (obrázek 1 vpravo).

Zkusme například provést nejdřív rotaci podle osy c_A a potom podle osy c_B (Obrázek 2). Musíme si dát pozor na to, že osa c_B vede vrcholem, kde byl bod B na začátku, a taky na to, abychom u všech rotací dodržovali stejný smysl rotace. Dohodněme se třeba, že budeme otáčet vždy po směru hodinových ručiček při pohledu na stejnojmenný vrchol.

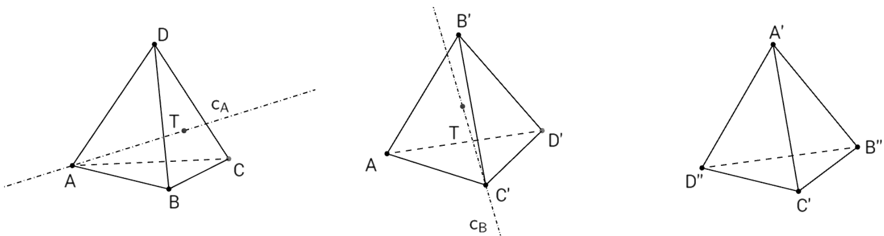
Vrchol C se vrátil na svoje místo, takže by se výsledek mohl shodovat s nějakou rotací podle c_C (Obrázek 3). Mimochodem, body, které leží přímo na ose symetrie (v rovině, obecně na prvku), se danou operací nikdy nemění.

A skutečně, $c_A \bullet c_B = c_C^2$. Sami si vyzkoušejte, že $c_B \bullet c_A = c_D^2$. Skládaní rotací kolem různých os tedy komutativní není.

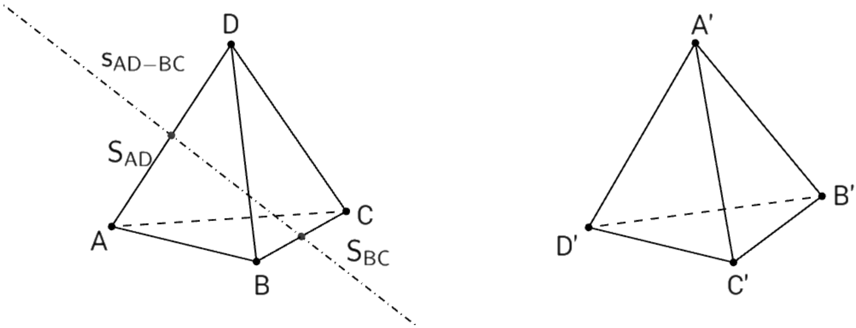
Teď zkusme třeba $c_A^2 \bullet c_B$ (Obrázek 4). Vidíme, že ani jeden vrchol nezůstal na svém místě, výsledek $c_A^2 \bullet c_B$ tedy není žádná z našich trojčetných rotací a takto definovaná množina operací jako grupa fungovat nebude.



Obrázek 4: Vlevo: Čtyřstěn s naznačenou osou c_A, kolem které budeme otáčet. Po otočení se dostaneme do stavu uprostřed a opět aplikujeme naznačenou rotaci kolem osy c_C. Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, opětovným otočením podle naznačené osy c_C se dostaneme do původního stavu.



Obrázek 5: Vlevo: Čtyřstěn s naznačenou osou c_A, kolem které budeme otáčet. Po otočení se dostaneme do stavu uprostřed a aplikujeme naznačenou rotaci kolem osy c_B, tentokrát dvakrát. Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, otočením podle naznačené osy c_C se dostaneme do původního stavu.



Obrázek 6: Vlevo: Čtyřstěn s naznačenou dvojčetnou osou procházející středy protilehlých hran, kolem které budeme otáčet. Po otočení se dostaneme do stavu vpravo, který se shoduje se stavem vpravo na předchozím obrázku.

Jaká operace nám tedy vyšla? Je to dvojčetná rotace (o 180°) kolem osy procházející středy hran AD a BC (Obrázek 5), označme si ji $c_{(AD,BC)}$.

Přidáme tedy všechny dvojčetné osy čtyřstěnu, ty jsou tři: $c_{(AB,CD)}$, $c_{(AC,BD)}$ a $c_{(AD,BC)}$. Takto definovaná množina rotací se skládáním již grupou je, důkazem budiž multiplikativní tabulka 1 (na další stránce).

Grupa je uzavřená, obsahuje identitu, tedy jednotkový prvek; v každém řádku i sloupci máme identitu, takže ke každému prvku najdeme prvek inverzní. Skládání zobrazení je asociativní vždy. Všimněme si také, že v každém řádku i sloupci je každý prvek grupy právě jednou. To je obecná vlastnost grup a souvisí s jejich uzavřeností.

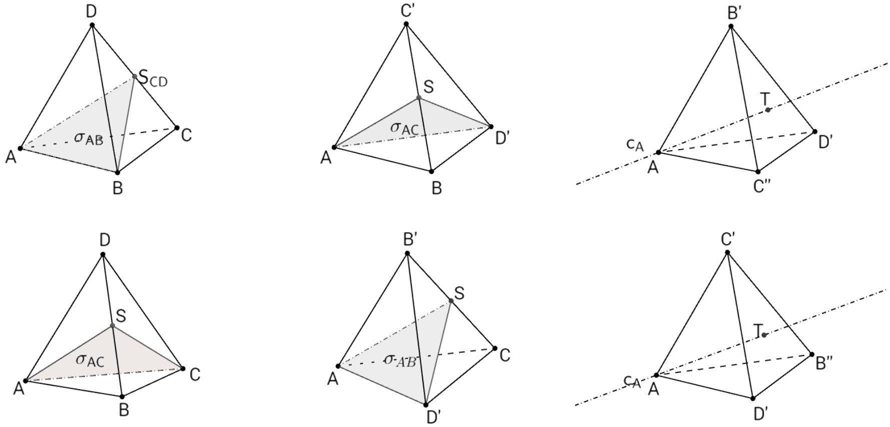
Máme v naší grupě ale obsaženy všechny prvky symetrie čtyřstěnu? Ještě jsme nezavedli roviny zrcadlení ... Obecně u těles máme roviny *horizontální*, *vertikální* a ostatní *diagonální*. Horizontální rovina zrcadlení je taková, která je kolmá na rotační osu s nejvyšší četností – taková osa se nazývá *hlavní*. Vertikální rovina v sobě hlavní osu obsahuje. U čtyřstěnu jsou hlavními osami ty trojčetné. Horizontální rovinu čtyřstěn nemá, ale má šest vertikálních, každá v sobě obsahuje dvě trojčetné osy, jednu dvojčetnou a hranu spojující vrcholy příslušné těm trojčetným osám. Podle těchto hran si roviny označme σ_{AB}, σ_{AC}, σ_{AD}, σ_{BC}, σ_{BD} a σ_{CD}. Doplňme je do multiplikativní tabulky. Jestliže aplikujeme po sobě dvě různá zrcadlení, tak pokud mají roviny společný vrchol, např. σ_{AB} a σ_{AC}, dostaneme otočení kolem osy příslušné společnému vrcholu, tady c_A nebo c_A^2, záleží na pořadí (Obrázek 6). Jestliže společný vrchol nemají, jako σ_{AB} a σ_{CD}, dostaneme otočení kolem dvojčetné osy procházející středy zmíněných úseček, $\sigma_{AB} \bullet \sigma_{CD} = \sigma_{CD} \bullet \sigma_{AB} = c_{(AB,CD)}$ (Obrázek 7).

Pokud skládáme zrcadlení s otočením okolo osy, která je v rovině obsažená, dostaneme další zrcadlení, jako např. $\sigma_{AB} \bullet c_A = \sigma_{AD}$ (Obrázek 8).

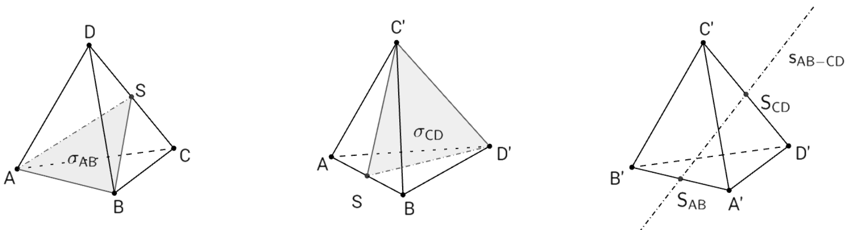
	e	c_A	c_A^2	c_B	c_B^2	c_C
e	e	c_A	c_A^2	c_B	c_B^2	c_C
c_A	c_A	c_A^2	e	c_C^2	$c_{(AC,BD)}$	c_D^2
c_A^2	c_A^2	e	c_A	$c_{(AD,BC)}$	c_D	$c_{(AB,CD)}$
c_B	c_B	c_D^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B^2	e	c_A^2
c_B^2	c_B^2	$c_{(AD,BC)}$	c_C	e	c_B	$c_{(AC,BD)}$
c_C	c_C	c_B^2	$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	$c_{(AB,CD)}$	c_C^2
c_C^2	c_C^2	$c_{(AB,CD)}$	c_D	$c_{(AC,BD)}$	c_A	e
c_D	c_D	c_C^2	$c_{(AB,CD)}$	c_A^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B^2
c_D^2	c_D^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B	$c_{(AB,CD)}$	c_C	$c_{(AD,BC)}$
$c_{(AB,CD)}$	$c_{(AB,CD)}$	c_D	c_C^2	c_C	c_D^2	c_B
$c_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	c_B	c_D^2	c_A	c_C^2	c_D
$c_{(AD,BC)}$	$c_{(AD,BC)}$	c_C	c_B^2	c_D	c_A^2	c_A

	c_C^2	c_D	c_D^2	$c_{(AB,CD)}$	$c_{(AC,BD)}$	$c_{(AD,BC)}$
e	c_C^2	c_D	c_D^2	$c_{(AB,CD)}$	$c_{(AC,BD)}$	$c_{(AD,BC)}$
c_A	$c_{(AD,BC)}$	c_B^2	$c_{(AB,CD)}$	c_C	c_D	c_B
c_A^2	c_B	$c_{(AC,BD)}$	c_C	c_D^2	c_B^2	c_C^2
c_B	$c_{(AB,CD)}$	c_C^2	$c_{(AD,BC)}$	c_D	c_C	c_A
c_B^2	c_D	$c_{(AB,CD)}$	c_A	c_C^2	c_A^2	c_D^2
c_C	e	c_A^2	$c_{(AC,BD)}$	c_A	c_B	c_D
c_C^2	c_C	$c_{(AD,BC)}$	c_B	c_B^2	c_D^2	c_A^2
c_D	$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	e	c_B	c_A	c_C
c_D^2	c_A	e	c_D	c_A^2	c_C^2	c_B^2
$c_{(AB,CD)}$	c_A^2	c_A	c_B^2	e	$c_{(AD,BC)}$	$c_{(AC,BD)}$
$c_{(AC,BD)}$	c_B^2	c_C	c_A^2	$c_{(AD,BC)}$	e	$c_{(AB,CD)}$
$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	c_B	c_C^2	$c_{(AC,BD)}$	$c_{(AB,CD)}$	e

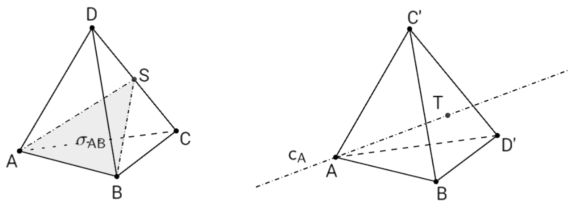
Tabulka 1: Multiplikativní tabulka grupy rotací čtyřstěnu se skládáním.



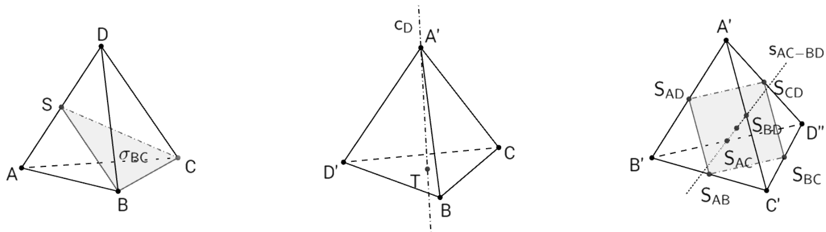
Obrázek 7: Vlevo nahoře vidíme čtyřstěn s naznačenou rovinou zrcadlení σ_{AB}, ve které budeme zrcadlit. Po zrcadlení se dostaneme do stavu nahoře uprostřed a aplikujeme naznačené zrcadlení v rovině σ_{AC}. Výsledkem tohoto otočení je situace nahoře vpravo, otočením podle naznačené osy c_A se dostaneme do původního stavu. Dole máme podobnou situaci, jen nejdříve zrcadlíme v rovině σ_{AC} a pak teprve v rovině σ_{AB}, výsledkem je opět otočení kolem osy c_A, jenže tentokrát dvojnásobné.



Obrázek 8: Vlevo vidíme čtyřstěn s naznačenou rovinou zrcadlení σ_{AB}, ve které budeme zrcadlit. Po zrcadlení se dostaneme do stavu uprostřed a aplikujeme naznačené zrcadlení v rovině σ_{CD}. Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, otočením podle naznačené osy s_{AB-CD} se dostaneme do původního stavu.



Obrázek 9: Vlevo vidíme čtyřstěn s naznačenou rovinou zrcadlení σ_{AB}, podle které budeme zrcadlit. Po zrcadlení se dostaneme do stavu uprostřed a aplikujeme otočení kolem naznačené osy c_A. Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, zrcadlením v rovině σ_{AD} se dostaneme do původního stavu.



Obrázek 10: Vlevo vidíme čtyřstěn s naznačenou rovinou zrcadlení σ_{BC}, ve které budeme zrcadlit. Po zrcadlení se dostaneme do stavu uprostřed a aplikujeme naznačenou rotaci kolem osy c_D. Výsledkem tohoto otočení je situace vpravo, otočením podle naznačené reflexní čtyřčetné osy s_{AC-BD} se dostaneme do původního stavu.

Pokud ale kombinujeme zrcadlení s osou, která v rovině obsažená není, např. $\sigma_{BC} \bullet c_D$, dostaneme operaci, jakou jsme ještě nezavedli (Obrázek 9). Je to kombinace otočení o 90° kolem osy $c_{(AC,BD)}$ a zrcadlení v rovině na ni kolmé (prochází středy hran AB, AD, BC a CD). Tuto operaci nazýváme reflexní osa a značíme $s_{(AC,BD)}$. Vidíme, že osy procházející středy protějších hran jsou vlastně čtyřčetné reflexní osy, protože $s_{(WX,YZ)} \bullet s_{(WX,YZ)} = (s_{(WX,YZ)})^2 = c_{(WX,YZ)}$. Tady narážíme na terminologický problém, protože $s^2_{(WX,YZ)} \neq (s_{(WX,YZ)})^2$. Výrazem $s^2_{(WX,YZ)}$ značíme otočení okolo osy o 180° a následné zrcadlení v rovině na ni kolmé, kdežto $(s_{(WX,YZ)})^2$ je dvojnásobné provedení $s_{(WX,YZ)}$. Podle $s^2_{(WX,YZ)}$ čtyřstěn symetrický není.

Teď už máme celkem 24 operací, a protože jimi máme pokryté všechny permutace vrcholů čtyřstěnu ($4! = 24$), vidíme, že už jsou všechny. Tady nám teorie grup pomohla. Postupem podle kuchařky jsme dohledali symetrie čtyřstěnu, které nás nemusely napadnout, dokonce nám je pomohla pojmenovat, a to jen grupovým násobením prvků (viz tabulku 2).

Jedna grupa ale může popisovat (a typicky popisuje) více věcí. Podívejme se znovu na grupu C_3. Je to příklad skupiny grup, kterým říkáme *cyklické.*

	e	c_A	c_A^2	c_B	c_B^2	c_C
e	e	c_A	c_A^2	c_B	c_B^2	c_C
c_A	c_A	c_A^2	e	c_C^2	$c_{(AC,BD)}$	c_D^2
c_A^2	c_A^2	e	c_A	$c_{(AD,BC)}$	c_D	$c_{(AB,CD)}$
c_B	c_B	c_D^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B^2	e	c_A^2
c_B^2	c_B^2	$c_{(AD,BC)}$	c_C	e	c_B	$c_{(AC,BD)}$
c_C	c_C	c_B^2	$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	$c_{(AB,CD)}$	c_C^2
c_C^2	c_C^2	$c_{(AB,CD)}$	c_D	$c_{(AC,BD)}$	c_A	e
c_D	c_D	c_C^2	$c_{(AB,CD)}$	c_A^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B^2
c_D^2	c_D^2	$c_{(AC,BD)}$	c_B	$c_{(AB,CD)}$	c_C	$c_{(AD,BC)}$
$s_{(AB,CD)}$	$s_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{BD}	$s_{(AD,BC)}$	σ_{AC}	σ_{AD}
$c_{(AB,CD)}$	$c_{(AB,CD)}$	c_D	c_C^2	c_C	c_D^2	c_B
$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{BC}	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{AD}	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$
$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AC,BD)}$	σ_{CD}	$s_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{AD}	σ_{AB}
$c_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	c_B	c_D^2	c_A	c_C^2	c_D
$s^3_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{BC}	σ_{CD}	$s^3_{(AD,BC)}$	$s_{(AB,CD)}$
$s_{(AD,BC)}$	$s_{(AD,BC)}$	$s_{(AC,BD)}$	σ_{CD}	σ_{AC}	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BD}
$c_{(AD,BC)}$	$c_{(AD,BC)}$	c_C	c_B^2	c_D	c_A^2	c_A
$s^3_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{BD}	$s_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{CD}	$s_{(AC,BD)}$
σ_{AB}	σ_{AB}	σ_{AD}	σ_{AC}	σ_{BC}	σ_{BD}	$s^3_{(AD,BC)}$
σ_{AC}	σ_{AC}	σ_{AB}	σ_{AD}	$s_{(AB,CD)}$	$s_{(AD,BC)}$	σ_{CD}
σ_{AD}	σ_{AD}	σ_{AC}	σ_{AB}	$s_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$
σ_{BC}	σ_{BC}	$s^3_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{BD}	σ_{AB}	σ_{AC}
σ_{BD}	σ_{BD}	$s_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{AB}	σ_{BC}	$s^3_{(AB,CD)}$
σ_{CD}	σ_{CD}	$s_{(AD,BC)}$	$s_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{BC}

	c_C^2	c_D	c_D^2	$s_{(AB,CD)}$	$c_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$
e	c_C^2	c_D	c_D^2	$s_{(AB,CD)}$	$c_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$
c_A	$c_{(AD,BC)}$	c_B^2	$c_{(AB,CD)}$	$s_{(AC,BD)}$	c_C	σ_{BD}
c_A^2	c_B	$s^2_{(AC,BD)}$	c_C	σ_{BC}	c_D^2	$s_{(AD,BC)}$
c_B	$c_{(AB,CD)}$	c_C^2	$c_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	c_D	σ_{AC}
c_B^2	c_D	$s^2_{(AB,CD)}$	c_A	σ_{AD}	c_C^2	$s^3_{(AD,BC)}$
c_C	e	c_A^2	$c_{(AC,BD)}$	σ_{BD}	c_A	$s_{(AC,BD)}$
c_C^2	c_C	$s^2_{(AD,BC)}$	c_B	$s^3_{(AD,BC)}$	c_B^2	σ_{AD}
c_D	$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	e	σ_{AC}	c_B	$s^3_{(AC,BD)}$
c_D^2	c_A	e	c_D	$s_{(AD,BC)}$	c_A^2	σ_{BC}
$s_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{BC}	$s_{(AC,BD)}$	$c_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	e
$c_{(AB,CD)}$	c_A^2	c_A	c_B^2	$s^3_{(AB,CD)}$	e	$s_{(AB,CD)}$
$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{BD}	$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{AC}	e	$s_{(AB,CD)}$	$c_{(AB,CD)}$
$s_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BC}	c_C	σ_{BD}	c_A
$c_{(AC,BD)}$	c_B^2	c_C	c_A^2	σ_{AB}	$c_{(AD,BC)}$	σ_{CD}
$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{AD}	σ_{AB}	$s_{(AD,BC)}$	c_D	σ_{AC}	c_B
$s_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{AB}	c_A^2	σ_{BC}	c_D^2
$c_{(AD,BC)}$	c_D^2	c_B	c_C^2	σ_{CD}	$c_{(AC,BD)}$	σ_{AB}
$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{AB}	σ_{AC}	$s^3_{(AB,CD)}$	c_B^2	σ_{AD}	c_C^2
σ_{AB}	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	$c_{(AD,BC)}$	σ_{CD}	$c_{(AC,BD)}$
σ_{AC}	σ_{BC}	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	c_B	$s^3_{(AC,BD)}$	c_D
σ_{AD}	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BD}	σ_{CD}	c_C^2	$s^3_{(AD,BC)}$	c_B^2
σ_{BC}	σ_{CD}	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AB,CD)}$	c_D^2	$s_{(AD,BC)}$	c_A^2
σ_{BD}	$s_{(AD,BC)}$	σ_{CD}	σ_{AD}	c_A	$s_{(AC,BD)}$	c_C
σ_{CD}	σ_{AC}	σ_{AD}	σ_{BD}	$c_{(AC,BD)}$	σ_{AB}	$s^2_{(AD,BC)}$

Tabulka 2: Tabulka grupy symetrií čtyřstěnu (pokračování v tabulce 3)

	$s_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$	$c_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AD,BC)}$
e	$s_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$	$c_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AD,BC)}$
c_A	σ_{BC}	c_D	$s^3_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	c_B	σ_{CD}
c_A^2	$s_{(AB,CD)}$	c_B^2	σ_{CD}	σ_{BD}	c_C^2	$s^3_{(AC,BD)}$
c_B	$s_{(AD,BC)}$	c_C	σ_{AD}	σ_{CD}	c_A	$s^3_{(AB,CD)}$
c_B^2	σ_{CD}	c_A^2	$s_{(AB,CD)}$	$s_{(AC,BD)}$	c_D^2	σ_{AC}
c_C	σ_{AD}	c_B	$s_{(AD,BC)}$	σ_{AB}	c_D	$s_{(AB,CD)}$
c_C^2	$s^3_{(AB,CD)}$	c_D^2	σ_{AB}	$s^3_{(AC,BD)}$	c_A^2	σ_{BD}
c_D	$s^3_{(AD,BC)}$	c_A	σ_{BC}	$s_{(AB,CD)}$	c_C	σ_{AB}
c_D^2	σ_{AB}	c_C^2	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{AC}	c_B^2	$s_{(AC,BD)}$
$s_{(AB,CD)}$	c_B^2	σ_{CD}	c_A^2	c_C	σ_{AB}	c_D
$c_{(AB,CD)}$	σ_{AC}	$c_{(AD,BC)}$	σ_{BD}	σ_{AD}	$c_{(AC,BD)}$	σ_{BC}
$s^3_{(AB,CD)}$	c_D^2	σ_{AB}	c_C^2	c_B	σ_{CD}	c_A
$s_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	e	c_D^2	σ_{AC}	c_B^2
$c_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	e	$s_{(AC,BD)}$	σ_{BC}	$c_{(AB,CD)}$	σ_{AD}
$s^3_{(AC,BD)}$	e	$s_{(AC,BD)}$	$c_{(AC,BD)}$	c_A^2	σ_{BD}	c_C^2
$s_{(AD,BC)}$	c_C	σ_{AD}	c_B	$c_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	e
$c_{(AD,BC)}$	σ_{BD}	$c_{(AB,CD)}$	σ_{AC}	$s^3_{(AD,BC)}$	e	$s_{(AD,BC)}$
$s^3_{(AD,BC)}$	c_A	σ_{BC}	c_D	e	$s_{(AD,BC)}$	$c_{(AD,BC)}$
σ_{AB}	c_C^2	$s^3_{(AB,CD)}$	c_D^2	c_D	$s_{(AB,CD)}$	c_C
σ_{AC}	$s^2_{(AD,BC)}$	σ_{BD}	$c_{(AB,CD)}$	c_B^2	$s_{(AC,BD)}$	c_D^2
σ_{AD}	c_B	$s_{(AD,BC)}$	c_C	$c_{(AC,BD)}$	σ_{BC}	$c_{(AB,CD)}$
σ_{BC}	c_D	$s^3_{(AD,BC)}$	c_A	$c_{(AB,CD)}$	σ_{AD}	$c_{(AC,BD)}$
σ_{BD}	$c_{(AB,CD)}$	σ_{AC}	$c_{(AD,BC)}$	c_C^2	$s^3_{(AC,BD)}$	c_A^2
σ_{CD}	c_A^2	$s_{(AB,CD)}$	c_B^2	c_A	$s^3_{(AB,CD)}$	c_B

	σ_{AB}	σ_{AC}	σ_{AD}	σ_{BC}	σ_{BD}	σ_{CD}
e	σ_{AB}	σ_{AC}	σ_{AD}	σ_{BC}	σ_{BD}	σ_{CD}
c_A	σ_{AC}	σ_{AD}	σ_{AB}	$s_{(AB,CD)}$	$s_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AC,BD)}$
c_A^2	σ_{AD}	σ_{AB}	σ_{AC}	$s_{(AC,BD)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AD,BC)}$
c_B	σ_{BD}	$s^3_{(AD,BC)}$	$s_{(AB,CD)}$	σ_{AB}	σ_{BC}	$s_{(AC,BD)}$
c_B^2	σ_{BC}	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{BD}	σ_{AB}	$s_{(AD,BC)}$
c_C	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{BC}	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{CD}	$s^3_{(AD,BC)}$	σ_{AC}
c_C^2	$s_{(AD,BC)}$	σ_{CD}	$s_{(AC,BD)}$	σ_{AC}	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BC}
c_D	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$	σ_{CD}	$s^3_{(AB,CD)}$	σ_{AD}	σ_{BD}
c_D^2	$s^3_{(AD,BC)}$	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BD}	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{CD}	σ_{AD}
$s_{(AB,CD)}$	$c_{(AC,BD)}$	c_D^2	c_B	c_A	c_C^2	$c_{(AD,BC)}$
$c_{(AB,CD)}$	σ_{CD}	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{AB}
$s^3_{(AB,CD)}$	$c_{(AD,BC)}$	c_B^2	c_C	c_D	c_A^2	$c_{(AC,BD)}$
$s_{(AC,BD)}$	c_D	$c_{(AB,CD)}$	c_C^2	c_A^2	$c_{(AD,BC)}$	c_B
$c_{(AC,BD)}$	$s_{(AB,CD)}$	σ_{BD}	$s^3_{(AD,BC)}$	$s_{(AD,BC)}$	σ_{AC}	$s^3_{(AB,CD)}$
$s^3_{(AC,BD)}$	c_C	$c_{(AD,BC)}$	c_B^2	c_D^2	$c_{(AB,CD)}$	c_A
$s_{(AD,BC)}$	c_C^2	c_D	$s^2_{(AB,CD)}$	$c_{(AC,BD)}$	c_A	c_B^2
$c_{(AD,BC)}$	$s^3_{(AB,CD)}$	$s^3_{(AC,BD)}$	σ_{BC}	σ_{AD}	$s_{(AC,BD)}$	$s_{(AB,CD)}$
$s^3_{(AD,BC)}$	c_D^2	c_B	$s^2_{(AC,BD)}$	$c_{(AB,CD)}$	c_C	c_A^2
σ_{AB}	e	c_A^2	c_A	c_B	c_B^2	$c_{(AB,CD)}$
σ_{AC}	c_A	e	c_A^2	c_C^2	$c_{(AC,BD)}$	c_C
σ_{AD}	c_A^2	c_A	e	$c_{(AD,BC)}$	c_D	c_D^2
σ_{BC}	c_B^2	c_C	$c_{(AD,BC)}$	e	c_B	c_C^2
σ_{BD}	c_B	$s^2_{(AC,BD)}$	c_D^2	c_B^2	e	c_D
σ_{CD}	$s^2_{(AB,CD)}$	c_C^2	c_D	c_C	c_D^2	e

Tabulka 3: Tabulka grupy symetrií čtyřstěnu (pokračování)

Jejich důležitou vlastností je to, že obsahují jeden základní prvek a ostatní prvky, včetně jednotkového, jsou jím *generovány.* Cyklické grupy jsou Abelovy, takže jejich prvky navzájem komutují. Cyklické grupy popisují rotace kolem n-četných os, jak už jsme viděli, ale dají se interpretovat i jako konečné množiny s operací sčítání modulo n. Navíc rotace v trojrozměrném prostoru se dají napsat pomocí matic 3×3. Pokud vezmeme množinu matic příslušejících rotacím okolo libovolné trojčetné osy, je tato množina grupou s operací násobení matic a opět se chová stejně. Stejně se chová i skupina určitých permutací tří písmen.

Grupa C_3 se tedy dá popsat i jako grupa $\mathbb{G}(\{0, 1, 2\}, + \mod 3)$, grupa určitých permutací nebo určitých matic... Podobným příkladem je grupa rotací kolem čtyřčetné osy a grupa násobků komplexní jednotky.[3] Podle množinového formalismu jsou tyto grupy *isomorfní*, tedy existuje mezi nimi zobrazení (*isomorfismus*), které jednoznačně přiřadí každému prvku první grupy právě jeden prvek druhé grupy, přičemž vztahy vůči ostatním prvkům zůstanou zachovány. Rozdíl mezi isomorfními grupami je tedy jen formální, a proto všechny tyto grupy shodně značíme jedním symbolem, v tomto případě C_4. V praxi může být užitečné uvědomit si, že některé dvě struktury se chovají podle téže grupy, protože pak můžeme určité znalosti o jedné struktuře aplikovat i na tu druhou.

Dalším pojmem, souvisejícím s isomorfismem, je *reprezentace.* Máme-li nějakou grupu objektů, např. nějakých permutací, pak grupy matematických objektů (např. matic), které jsou s naší grupou isomorfní, nazýváme reprezentacemi grupy.

Pojem grupy a jejího spojení s nějakou strukturou či více strukturami už máme zavedený a tím pro tentokrát skončíme. V příštím díle se můžeš těšit na povídání o reprezentacích.

Zuzi

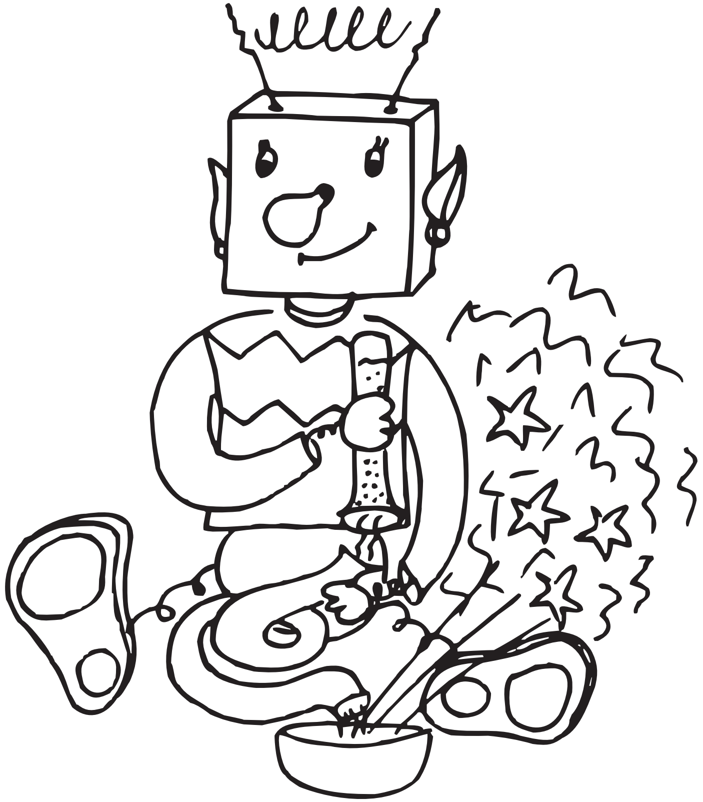
Úloha 2.5 – Teorie grup I (5b)

1. Uveď nějakou další množinu, která může vytvořit grupu s operací sčítání. (1b)

2. Vymysli si nějakou grupu a ukaž, že je to grupa. (1 – 3b podle složitosti a originality grupy)

3. Sestav grupu všech symetrií rovnostranného trojúhelníku v rovině a analyzuj ji. (3b)

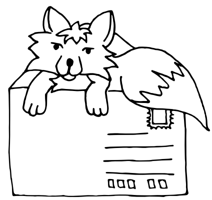
[3] Komplexní čísla jsou čísla ve tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka, tedy číslo, pro které platí, že $i^2 = -1$. Říkáme, že komplexní číslo má reálnou (a) a imaginární (ib) část. Číslo, které má pouze reálnou část, je reálné a naopak číslo, které má jen imaginární část, je ryze imaginární. Pokud komplexní čísla zobrazíme v rovině, pak na ose x budeme mít čísla reálná a na ose y ryze imaginární. i je pak jednotkový úsek na ose y. Protože $i^2 = -1$, $i^3 = -1 \cdot i = -i$ a $i^4 = (-1)^2 = 1$, tak mocniny i v komplexní rovině rotují proti směru hodinových ručiček, vždy o pravý úhel.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`



matfyz