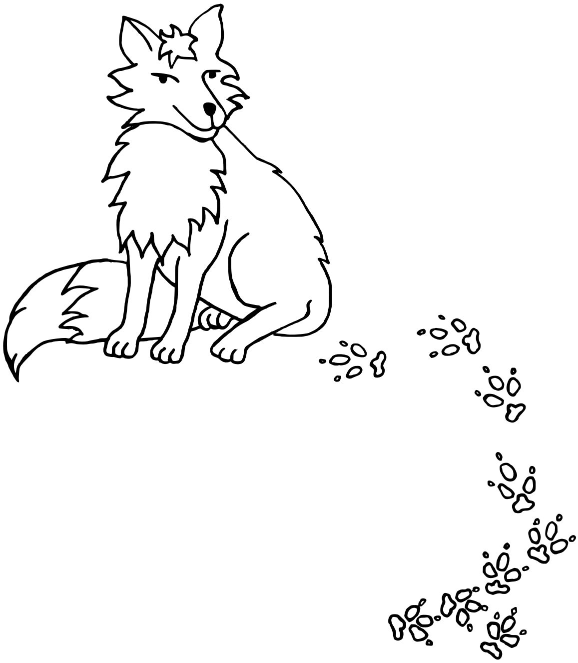
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 6



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Naši milí čtenáři a řešitelé,
v ruce právě držíte šesté číslo časopisu M&M. Najdete v něm pro tento školní rok poslední sérii úloh a mnoho komentářů a příspěvků k tématům. Nezapomeňte, že autorovi letošního nejlepšího příspěvku k tématu organizátoři upečou výborný dort. Tak si ho nenechte ujít!

Nedávno proběhlo naše jarní soustředění, které jsme si podle ohlasů snad všichni užili. Pokud jste tentokrát nejeli, určitě příště neváhejte. Zatím si můžete alespoň prohlédnout fotky. Některé jsou už nyní k vidění na našem Facebooku, ucelenější výběr se brzy objeví na našich webových stránkách. Pokud jste byli na soustředění, rádi otiskneme článek o vaší konfeře. Jeden pěkný o konfeře z předchozího soustředění si můžete prohlédnout na konci tohoto čísla.

Všem maturantům přejeme hodně zdaru! A až se s maturitou vypořádáte, budeme se na vás těšit třeba u nás na Matfyzu.

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 2. 6. 2015

Alenka – dokud ještě byla s rodiči ve své rodné Anglii, říkali jí Alice – už začínala mít dost toho nečinného sedění vedle sestry na břehu řeky: jednou nebo dvakrát nahlédla do knížky, kterou si sestra prohlížela, ale tam nebyla vůbec žádná matematika nebo fyzika – „a co je po knížce," myslila si Alenka, „ve které není matematika, ba ani informatika?" Náhle kolem ní přeběhl zrzavý lišák s chytrýma očima a vskočil do velké liščí nory pod mezí. Alenka ani chvíli nemeškala a vskočila za ním a začala velmi zvolna padat. Dolů, dolů, dolů – když tu najednou buch! Alenka si ani trochu neublížila a v mžiku byla na nohou a rozhlížela se kolem sebe. Ocitla se v obrovské místnosti plné dveří, ale zrzavého lišáka nikde neviděla.

Úloha 6.1 – Barevné klíče a dveře (4b)

V místnosti je právě N barevných dveří (některé dveře mohou mít stejnou barvu, ale nemusí). Za každými dveřmi krom jedněch je barevný klíč a jeden takový klíč má navíc Alenka v ruce. Klíč dokáže odemknout vždy jen dveře stejné barvy, jakou má on sám (je-li takových více, pak dokáže odemknout libovolné z nich), ale zámky jsou zrezlé a po odemčení se klíč v zámku zasekne a nejde vyndat (Alenka tedy nemůže mít u sebe nikdy více než jeden klíč). Na každých dveřích je navíc napsáno, jaký klíč se za nimi nachází (nebo že tam klíč není). Najděte algoritmus, který Alence poradí jak postupovat, když chce odemknout všechny dveře, nebo jí řekne, že to není možné. A jelikož je Alenka podezíravá, tak nezapomeňte pořádně vysvětlit, proč váš algoritmus opravdu funguje.

Alence se přeci jen podařilo úkol vyřešit a poté vstoupila do dveří, u kterých měla nejsilnější tušení, že jimi lišák proběhl. Nedošla příliš daleko, když spatřila *dům zajíce; hádala, že to musí být zaječí dům, podle toho, že komíny měly tvar uší a střecha byla pokryta kožišinou. Před domem byl pod stromem prostřený stůl a u něho Zajíc Březňák, zrzavý lišák a Kloboučník pili čaj; mezi nimi seděla jakási spící zvířátka, o nichž si Alenka řekla, že to budou jistě nějací hlodavci, ale nebyla si jista, zda syslové či plchové. Dozajista to vypadalo na nějakou velikou oslavu.*

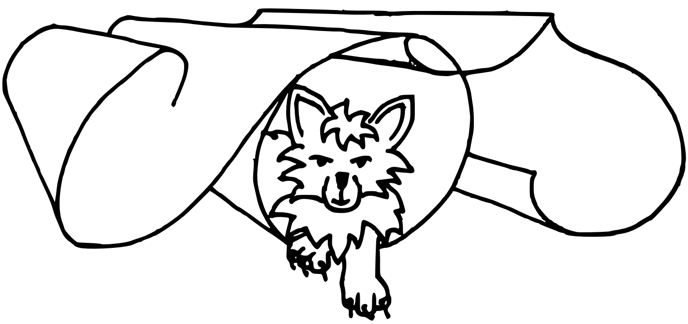
Úloha 6.2 – Homogenní oslava (3b)

Na oslavě se sešlo třicet lidí, z nichž každý znal právě 6 jiných (známosti jsou vzájemné). Řekneme, že trojice lidí je homogenní, pokud se každí dva lidé z trojice znají, nebo pokud se naopak žádní dva neznají. Kolik nejvíce homogenních trojic může být na oslavě?

Alenka mlčela. Účastníci oslavy se již před hodnou chvílí uchýlili k odchodu a u stolu zůstala jen ona s Kloboučníkem. „– co se začíná na M, jako myší díra, a měsíc, a minulost, a moudrost, a mnohost – víte, velmi krásné rčení je mnohost moudrosti – viděla jste někdy takovou věc jako pěkně vytažený výkres mnohosti?“ „Opravdu, když se mne tak ptáte,“ řekla Alenka velmi zmatena, „nemyslím—“ „Pak byste neměla mluvit,“ řekl Kloboučník. To bylo víc, než mohla Alenka snésti; vstala velmi znechucena a odešla. Opět se octla ve velké síni; pak se dala úzkou chodbičkou, a pak – se konečně octla v krásné zahradě mezi pestrými záhony květin a chladnými vodotrysky. Poblíž vchodu do zahrady stál velký růžový keř. Růže, které na něm rostly, byly bílé, u něho však stály tři cukrové karty – zahradníci a pilně je natírali na červeno. Ach, jaké by to bylo si takovouto cukrovou kartu odnést domů, pomyslila si Alenka. Ale co kdyby začalo pršet?

Úloha 6.3 – Souboj s deštěm (3b)

Máte nekonečně tenkou desku z cukru. Nesete si ji domů pod úhlem α, když tu zrovna začne pršet pod úhlem β. Kapky deště se pohybují rychlostí v. Jak rychle musíte jít, aby se vám deska nerozpustila?

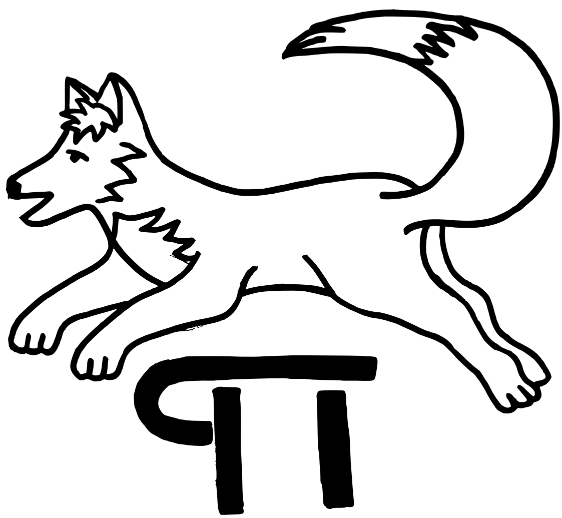


„Královna! Královna!“ vykřikl Pětka a všichni tři zahradníci se ihned vrhli tváří na zem. Alenka se rozpomněla, kde se ocitla a ohlédla se, dychtivá spatřit Královnu. Alenku napadlo, že by snad také měla padnout tváří k zemi jako zahradníci, ale nedovedla se upamatovati, že by kdy byla slyšela o takovémhle pravidle o královských průvodech. „A k čemu by vlastně byly průvody,“ pomyslela si, „kdyby se všichni lidé měli položit tváří k zemi a nic neviděli?“ Zůstala tedy stát, kde byla, a čekala. Když průvod přišel až k ní, všichni se zastavili a pohlédli na ni, a Královna řekla přísně: „Kdo je to?“ „Jmenuji se Alenka, ráčí-li Vaše Veličenstvo,“ řekla Alenka velmi zdvořile. „Tak je to v pořádku!“ zavolala Královna hlasitě. „Umíte házet koulí?“ Vojáci mlčeli a pohlíželi na Alenku, jelikož otázka zřejmě platila jí. „Ano!“ zavolala Alenka; ale ihned se rozpomněla, že je to velmi dávno, co to naposledy zkoušela.

Úloha 6.4 – Výkonný vrhač (3b)

Určete průměrný výkon vrhače koule, který při hodu zrychlí kouli o hmotnosti 7,26 kg z klidu na rychlost $14{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Doba od začátku pohybu do upuštění koule je 0,16 s. Experimentálně sami odhadněte vertikální vzdálenost mezi počáteční polohou koule a polohou, kdy koule opouští ruku.

„Probuď se, drahá Alenko,“ řekla sestra. „Jak jsi to dlouho spala.“



Řešení úloh 4. série

Úloha 4.1 – Trojúhelníková (3b + 1b)

Zadání:
Sestavte pomocí 12 shodných úseček 10 rovnostranných stejně velkých trojúhelníků. Bonusový bod dostanete, pokud si vystačíte s 10 úsečkami.

Řešení:
Velká část došlých řešení využívala vzájemně se protínajících úseček, což jsme, vzhledem k tomu, že to nebylo zakázáno, akceptovali. Úloha ale byla řešitelná i bez toho.

Deset trojúhelníků z dvanácti úseček v rovině bez protínání neposkládáme (trojúhelník má tři strany a každou z nich může sdílet jen s jedním dalším trojúhelníkem – je potřeba minimálně 15 úseček), bylo tedy nutné využít třetí rozměr. Pokud si vezmeme čtyřstěn a na dvě z jeho stěn „přilepíme“ další čtyřstěny, tak jsme použili 6 (na původní čtyřstěn) + $2 \cdot 3$ (na každý další čtyřstěn) = 12 úseček. Pokud si chceme bez protínání vystačit s pouhými deseti úsečkami, tak budeme muset zajít ještě o krok dále – ve čtyřrozměrném prostoru existuje těleso známé jako 5-nadstěn. Jedná se o 4D ekvivalent čtyřstěnu, který má 10 hran, 5 vrcholů a 10 trojúhelníkových stěn.

Matej

Úloha 4.2 – Náčrtek (4b)

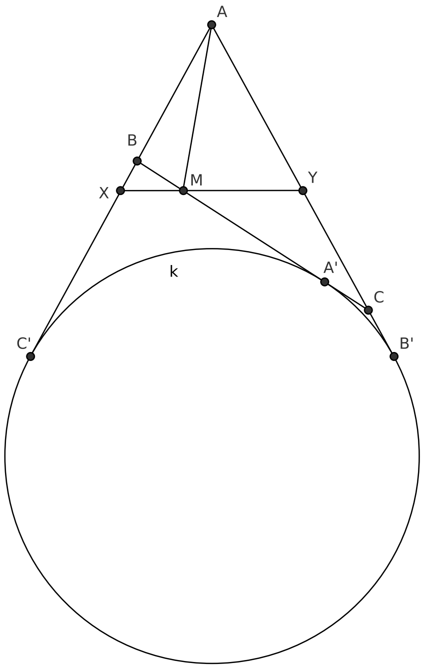
Zadání:
Trojúhelník ABC má obvod délky 4. Na polopřímce AB leží bod X, na polopřímce AC leží bod Y, přičemž $|AX| = |AY| = 1$. Úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že jeden z trojúhelníků ABM a ACM má obvod 2.

Řešení:
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod B leží blíž A než bod X (tak, jako na obrázku 1). Bod C pak zase leží dál než Y, neboť úsečky XY a BC se protínají (v bodě M). Dokážeme, že obvod 2 má trojúhelník ABM. Řešení je postaveno na dvou základních tricích. Prvním trikem je dokreslení kružnice k připsané ke straně BC trojúhelníka ABC. Její doteky s přímkami AB, BC a AC označme postupně C', A' a B'. Délky $|AC'|$ a $|AB'|$ jsou stejné (tečny k jedné kružnici), podobně $|BA'| = |BC'|$ a $|A'C| = |CB'|$, takže

$$|AC'| = |AB'| = \frac{1}{2} \cdot (|AC'| + |AB'|) = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |BA'| + |A'C| + |CA|) = 2,$$

jelikož trojúhelník ABC má obvod 4. Chceme dokázat, že $|AB|+|BM|+|MA| = 2$, přitom

$$|AB|+|BM|+|MA| = |AB|+(|BC'|-|BA|)+|BM|+|MA| = 2-|MA'|+|MA|,$$



Obrázek 1: Situace z řešení úlohy 4.2

takže stačí dokázat, že $|MA| = |MA'|$. A nyní přichází druhý trik, kterým je mocnost bodu ke kružnici. Pokud totiž bod A vnímáme jako kružnici s nulovým poloměrem, vidíme, že body X a Y mají stejnou mocnost k A a ke kružnici k, neboť $|XA| = |XC'|$ a $|YA| = |YB'|$. Přímka XY je tedy chordálou „kružnic“ A a k, tj. přímkou, jejíž všechny body mají k těmto kružnicím stejnou mocnost. Speciálně tedy i bod M má k A stejnou mocnost jako ke k, takže $|MA| = |MA'|$ a jsme hotovi.

Pepa

Úloha 4.3 – Konvice (3b)

Zadání:

Cestovní varná konvice má na sobě přepínač pro volbu napětí[1] *230 V nebo 120 V. Na ohřev vody používá dvě topná tělesa zapojená do série, resp. paralelně, podle polohy přepínače. Navrhněte hodnoty odporů topných těles tak, aby v obou případech měla konvice stejný příkon. Jak by mohlo vypadat zapojení při použití dvojpólového přepínače?*

Řešení:

Máme navrhnout odpory dvou topných těles, které si označíme R_a a R_b. V případě, že konvici přepneme do polohy pro použití při napětí 230 V, bude výkon konvice

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{R_1} = (230\,\mathrm{V})^2 \cdot \frac{1}{R_a + R_b}\,.$$

Když konvici přepneme, dostaneme výkon

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{(120\,\mathrm{V})^2}{R_2} = (120\,\mathrm{V})^2 \cdot \frac{R_a + R_b}{R_a R_b}\,.$$

Následně chceme, aby tyto výkony byly stejné

$$(230\,\mathrm{V})^2 \cdot \frac{1}{R_a + R_b} = (120\,\mathrm{V})^2 \cdot \frac{R_a + R_b}{R_a R_b}\,,$$

$$\frac{(230\,\mathrm{V})^2}{(120\,\mathrm{V})^2} = \frac{(R_a + R_b)^2}{R_a R_b}\,,$$

$$\left(\frac{23}{12}\right)^2 = \frac{R_a^2 + 2R_a R_b + R_b^2}{R_a R_b} = \frac{R_a}{R_b} + 2 + \frac{R_b}{R_a}\,.$$

Nyní levou stranu nahradíme konstantou k a zavedeme poměr odporů $\tilde{R} = R_a/R_b$. Dostáváme kvadratickou rovnici

$$\tilde{R} + (2 - k) + \frac{1}{\tilde{R}} = 0\,,$$

$$\tilde{R}^2 + (2 - k)\tilde{R} + 1 = 0\,.$$

Když vypočítáme diskriminant

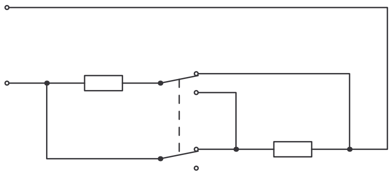
$$D = (2 - k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \doteq -1{,}2 < 0\,,$$

zjistíme, že řešení v $\mathbb{R}$ neexistuje. Protože odpor rezistoru je reálné číslo, tak hledaný poměr rezistorů neexistuje a varnou konvici, která by byla zapojena podle zadání, nelze sestrojit.

Hledané zapojení pomocí dvoupólového přepínače může být například jako na obrázku 2.

xlfd

[1] Jedná se o efektivní hodnotu napětí.



Obrázek 2: Schéma zapojení pomocí dvoupólového přepínače

Úloha 4.4 – Vřelé přivítání (1b)

Zadání:
Dvě stejně velké skupiny vědců si na uvítanou chtějí potřást rukama a to tak, aby si každý vědec potřásl s každým kolegou z druhé skupiny. V každém kole si může každý potřást rukou s nejvýše jedním kolegou. Vaším úkolem je vymyslet, jak si vědci mají potřást rukama během N kol, kde N je počet vědců v jedné skupině. Ovšem jedna mladá dáma je tak unesená, že ignoruje váš postup a potřásá si s kolegy zcela náhodně. V každém kole si potřese s jiným vědcem, ale nemůžete ovlivnit s kterým. Můžete předpokládat, že si vždy potřese jako první a máte tedy možnost přizpůsobit tomu aktuální kolo.

Řešení:
Vědce z první skupiny si označíme $a_1, \ldots, a_N$, vědce z druhé $b_1, \ldots, b_N$, ona mladá dáma je označena jako a_1. Vyřešme nejdříve problém za předpokladu, že naše instrukce poslouchá i ona mladá dáma. To je ale snadné, v i-tém kole si podá ruku a_j s b_{j+i}, pro j od jedné do N, přičemž sčítáme modulo N (tj. vždy ze součtu bereme zbytek po dělení N, tedy pro $N = 5$ je $3 + 4 = 2$). Nemůže se stát, že si dva vědci potřesou rukou vícekrát, nemohou totiž existovat dvě různá $1 \leq i_1, i_2 \leq N$ tak, že $j + i_1 = j + i_2$. Každý vědec si tedy potřese se všemi kolegy z druhé skupiny právě jednou.

Jak nám tedy „uškodí“ ona mladá dáma? Inu, vůbec nijak. Předpokládejme, že si během nějakého kola a_1 potřese s b_{1+i}. To by v našem postupu bez „záškodnictví“ nastalo právě v kole i. V tomto kole tedy použijeme stejný postup, jako v i-tém kole bez záškodnictví. Bude tento algoritmus fungovat? Víme, že mladá dáma si v každém kole potřese s někým jiným, tedy v každém kole bude i jiné, přičemž kol je stále N. Situace je tedy stejná jako když nás mladá dáma poslouchala – jen s tím drobným rozdílem, že jdou kola jinak po sobě. To ale zjevně ničemu nevadí.

$\mathcal{O}(N)$dra

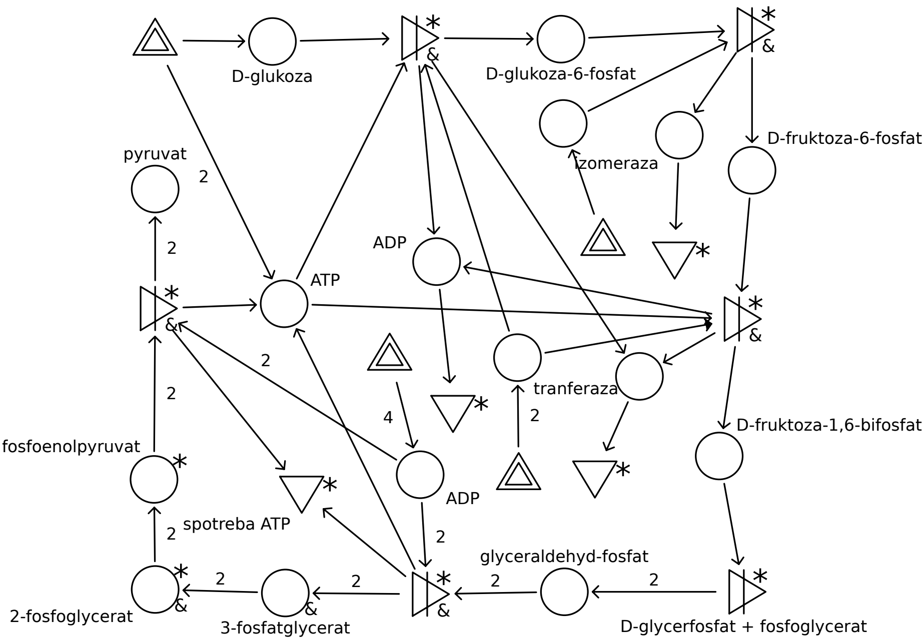
Řešení témat

Téma 3 – Reakce v miskách

I tentokrát dorazila schémata od Mgr.[MM] Kristýny Ilievové, i s jí dodaným popisem je naleznete níže. Současně otiskujeme obrázek schématu z minulého čísla, který se do něj omylem nedostal. Toto schéma by se mělo v nejbližší době objevit i na našich stránkách. Rád bych ujistil řešitele, že navzdory hromadícím se příspěvkům má toto téma k vyčerpání ještě daleko – metabolismus buňky je úchvatně složitý (tedy obsahuje mnoho relativně jednoduchých částí) a navíc nyní můžete využít již uveřejněné části metabolismu a zkusit je rozšířit či propojit.

Matej

Poznámka redakce: Bohužel není možné vytisknout obrázky schémat barevně, otištěna je tedy jen černobílá verze – barevné originály najdete na našem webu.



Obrázek 3: Schéma glykolýzy k příspěvku z minulého čísla

Citrátový (Krebsův) cyklus (5b)

Mgr.^{MM} Kristýna Ilievová

Citrátový cyklus navazuje v buněčném metabolismu na anaerobní glykolýzu. Probíhá v matrix mitochondrií. Nejdříve proběhne redukce produktu anaerobní glykolýzy pyruvátu, při níž se na pyruvát naváže zbytek koenzymu A, vzniká tak acetylkoenzym A, který vstupuje do citrátového cyklu.

Při citrátovém cyklu se cyklicky přeměňuje molekula oxalacetátu (černá). Vstupuje do něj kromě acetylkoenzymu A (oranžová) také voda (modrá). Oxydoreduktázy (červená) slouží jako přenašeče vodíků. Cyklu se též účastní molekula koenzymu A (hnědá) a GDP (fialová) jako přenašeč fosforu. Vstupující molekula ADP přebírá od GTP fosfor a vzniká molekula ATP.

Produkty (zelená) jednoho cyklu jsou 2 molekuly oxidu uhličitého (ty vydechneme), 8 energeticky bohatých uhlíků (ty jsou poté navázány na oxydoreduktázy a přeneseny do dýchacího řetězce) a 1 molekula ATP.

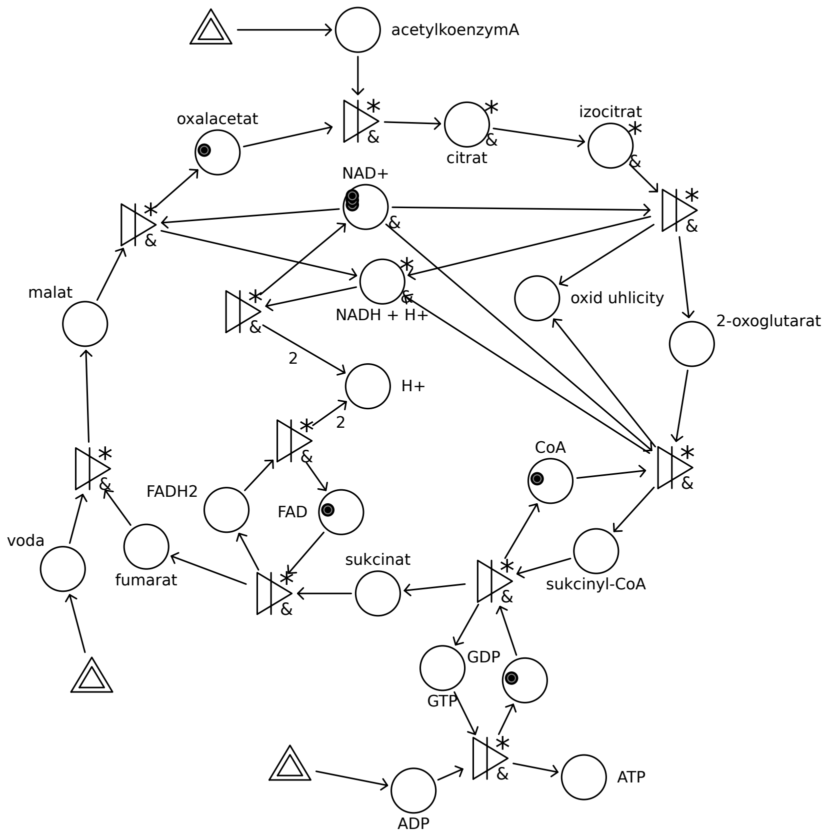
Metabolismus fenylalaninu (4b)

Mgr.^{MM} Kristýna Ilievová

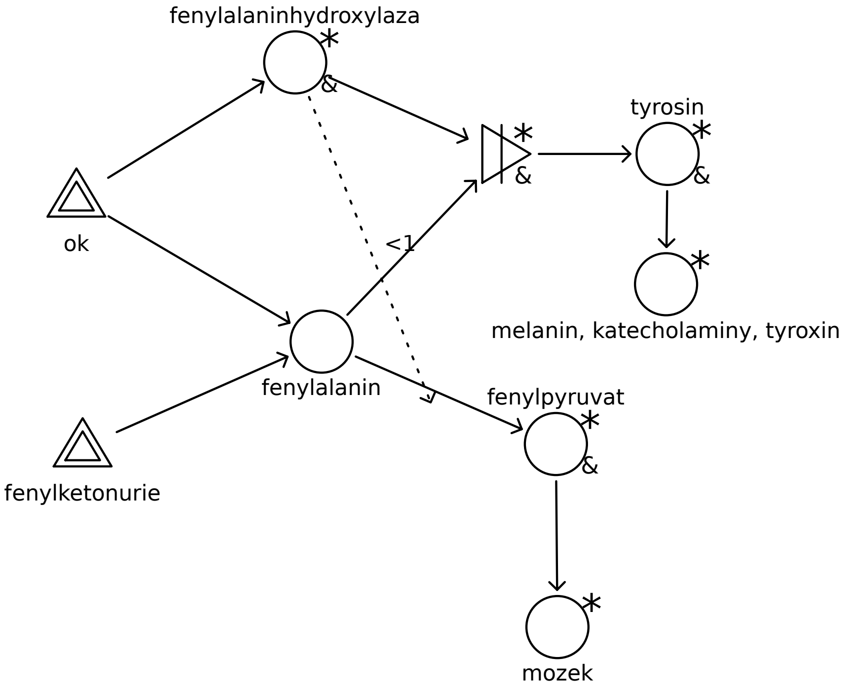
Fenylalanin je jednou z esenciálních aminokyselin (součást bílkovin), které jsou pro naše tělo nepostradatelné. Pomocí enzymu fenylalaninhydroxylázy je metabolizován na tyrosin, který je dále zpracováván na několika metabolických drahách na pigment melanin, tyroxin (hormon štítné žlázy) a katecholaminy (hormony dřeně nadledvin).

Vlivem genetických dispozic může dojít k tomu, že nedochází k translaci fenylalaninhydroxylázy či dochází k deformaci jejího kofaktoru tetrahydrobiopterinu, čímž se fenylalaninhydroxyláza stává nefunkční. Vzniká tak onemocnění fenylketonurie, při níž nedochází k přeměně fenylalaninu na tyrosin, ale fenylalanin se metabolizuje alternativní cestou na fenylpyruvát, který se ukládá v mozku a způsobuje jeho poškození. Dochází též k multiorgánovému poškození z důvodu nedostatku metabolitů tyrosinu. Fenylketonurie se léčí nízkobílkovinnou dietou, do níž je zařazen potravinový doplněk obsahující tyrosin a esenciální aminokyseliny, kromě fenylalaninu.

Červeně je ve schématu metabolismus fenylalaninu zdravého člověka a modře pak metabolismus fenylalaninu fenylketonurika.



Obrázek 4: Schéma citrátového cyklu



Obrázek 5: Schéma metabolismu fenylalaninu

Téma 5 – Pokrytí šachovnice

K tématu přišel příspěvek Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Markéty Calábkové, který otiskujeme. V úvodu autorka opravuje chybu ze svého předchozího článku, dále se pak zabývá prozatím nevyřešenými otázkami.

Nabízí rozložení klasických figur jednoho hráče takové, aby každé neobsazené pole bylo ohrožováno. V nabízeném schématu ale není zároveň každá figura ohrožována nějakou jinou. Lze tedy říct, že některá pole, na kterých stojí figury, ohrožována nejsou. Existuje takové rozložení, ve kterém jsou ohrožována i všechna pole obsazená některou z figur?

Autorka též píše první pozorování ohledně útvarů, které lze sestrojit pouze pomocí jezdců a střelců (viz komentář ve čtvrtém čísle). Na důkladnější prozkoumání tohoto problému ale ještě stále čekáme. Jaké zajímavé útvary lze vytvořit jen s pomocí těchto figur? A jaké naopak nelze? A co jen pomocí nich nakreslit Rikiho?

Kuba

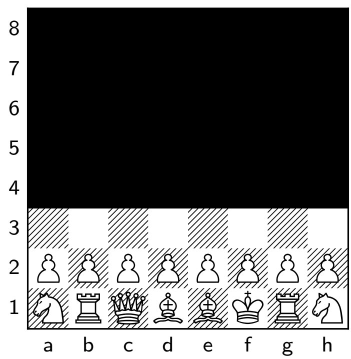
Mně šachy moc nejdou. . . (3b)

Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Calábková

Teď už radši nebudu nic tvrdit dokud nebudu mít pádný důkaz :).

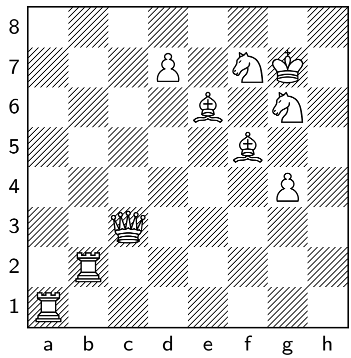
Nejdřív opravím chybu z předchozího článku:

Ano, opravdu je možné sestrojit větší obdélník a to dokonce i když je každá figura ohrožována nějakou jinou. Na obrázku je trochu přeházené rozestavení figur na začátku hry, tam je každá figura ohrožována nějakou jinou a neohrožovaná pole tvoří mnohem větší obdélník, který je už opravdu největší možný, protože každá figura ohrožuje minimálně jedno pole před sebou a protože figur je celkem 16, tak je poskládáme minimálně na dva řádky.

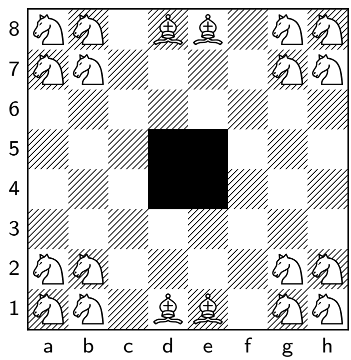


Ale není to největší možný útvar, jaký lze z neohrožovaných polí sestavit, co kdybychom figury takto poskládali k levému okraji šachovnice? Připomínám, že pěšci se pohybují dopředu.

Když už jsem u toho, lze šachovými figurami jednoho hráče ohrozit všechna pole šachovnice? Určitě ano. Nechtělo se mi tam dopisovat všechny pěšce, tak ten zbytek se umístí někam, kde nebudou vadit.



A nakonec jsem jen s pomocí střelců a jezdců nakreslila malý čtvereček.



Poznámka redakce: Všimněte si, že pokud ve schématu zcela vynecháme střelce, ohrožovaný útvar se nezmění.

Konference Zelená Lhota 2014

Tropická geometrie (10b)

Mgr.[MM] *Dominika Jochcová, Dr.*[MM] *Václav Rozhoň,*
Mgr.[MM] *Zuzana Svobodová, Bc.*[MM] *Lenka Vincenová*

Úvodem

Tento článek vznikl jako volné pokračování společného projektu – konfery, vznikajícího v průběhu podzimního soustředění korespondenčního semináře M&M pod vedením Josefa Svobody. Tropická geometrie nás natolik zaujala, že jsme se rozhodli touto exotickou strukturou i nadále zabývat a naše příspěvky společně sepsali do tohoto článku.

Tropické operace

Po stručném úvodu se konečně můžeme pustit do samotného formalismu. Nejprve si zavedeme dvě operace – tropické sčítání a tropické násobení, přičemž operaci sčítání definujeme jako

$$\text{“}x + y\text{”} = \max(x, y),$$

tropický zápis značíme do uvozovek. Tropické sčítání je tedy operace ekvivalentní k funkci maximum.

Tropické násobení definujeme jako

$$\text{“}x \cdot y\text{”} = x + y,$$

jedná se tedy o ekvivalent sčítání.

Další operace můžeme definovat podobně jako ty klasické. Tropické dělení bude inverzní operace k tropickému násobení, a proto se bude jednat o klasické odčítání. Mocnění je vlastně opakované násobení, takže tropické mocnění je opakované tropické násobení, tedy se jedná o opakované sčítání, což je (netropické) násobení. V našem textu se obejdeme bez dělení, ale mocnění budeme používat. Zanedlouho si ukážeme, že tropické odčítání definovat nemůžeme. Nyní uveďme pro názornost několik příkladů: “$1 + 1$” $= 1$, “$1 + (-1)$” $= 1$, “$0 \cdot 42$” $= 42$, “$(21 + 12)^2$” $= 42$, “$5 + 8 + 13$” $= 13$ a “$5 \cdot ((-6) + 10)$” $= 15$.

Množinu tropických čísel $\mathbb{T}$, na které naše tropické operace budeme používat, definujeme jako $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, jedná se tedy o reálná čísla spolu s minus nekonečnem (pro všechna $a \in \mathbb{T}$ platí “$a + (-\infty) = -\infty$” a “$a \cdot (-\infty) = -\infty$”). Ukážeme si, že množina tropických čísel splňuje skoro všechny axiomy tělesa[2,3]. Projděme si tedy postupně tyto axiomy (u axiomů, kde je napsána pouze odpovídající rovnost dvou výrazů, stačí tyto výrazy převést z tropické algebry do té klasické a ověřit si, že rovnost vskutku platí).

[2] Tato struktura je tzv. semitělesem.

[3] Jestliže nevíte, co je algebraické těleso, vězte, že se bez této znalostí v dalších částech obejdeme.

1. Komutativita sčítání: “$a + b$” = “$b + a$”.
2. Asociativita sčítání: “$(a + b) + c$” = “$a + (b + c)$”.
3. Existence nulového prvku pro operaci sčítání: tímto nulovým prvkem je přidané $-\infty$, neboť pro $\forall a \in \mathbb{T}$ platí “$a + (-\infty)$” $= a$.
4. Existence inverzního prvku pro sčítání: tento axiom tělesa množina tropických čísel nesplňuje. Pokud by tomu tak bylo, pro každé $a \in \mathbb{T}$ by existovalo takové b, že “$a + b$” $= -\infty$, ale vidíme, že pokud $a \neq -\infty$, tak takové b rozhodně neexistuje. Právě proto nemůžeme definovat operaci odčítání.
5. Komutativita násobení: “$a \cdot b$” = “$b \cdot a$”.
6. Asociativita násobení: “$(a \cdot b) \cdot c$” = “$a \cdot (b \cdot c)$”.
7. Existence jednotkového prvku pro operaci násobení: pro množinu tropických čísel toto splňuje 0, tedy pro $\forall a \in \mathbb{T}$ platí “$a \cdot 0$” $= a + 0 = a$.
8. Existence inverzního prvku pro násobení: pro každé $a \in \mathbb{R}$ můžeme definovat “a^{-1}” $= (-a)$, takže “$a \cdot a^{-1}$” $= a + (-a) = 0$. Pro $-\infty$ však inverzní prvek nemáme.
9. Distributivita: “$a \cdot (b + c)$” = “$(a \cdot b) + (a \cdot c)$”.
10. Netrivialita: nulový a jednotkový prvek jsou různé, což pro množinu tropických čísel platí, jelikož $0 \neq -\infty$.

Polynomy

Polynom (mnohočlen) je výraz ve tvaru:

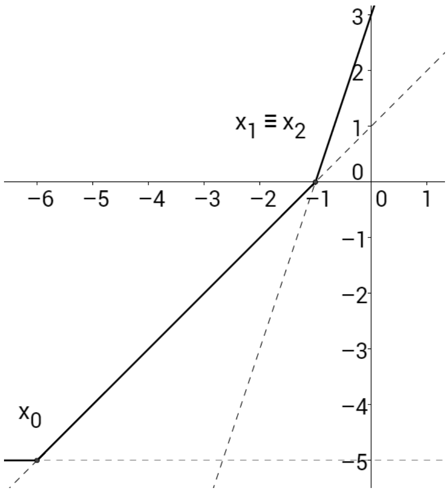
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

kde a_n není 0 a pro číslo n používáme označení stupeň polynomu. Obdobně můžeme definovat tropické polynomy podle pravidel tropického sčítání a násobení. Příkladem takového tropického polynomu je třeba $P(x) =$ “$3x^3 + 1x + (-5)$” $=$ “$3 \cdot x \cdot x \cdot x + 1 \cdot x + (-5)$” $= \max(3x + 3, x + 1, -5)$.

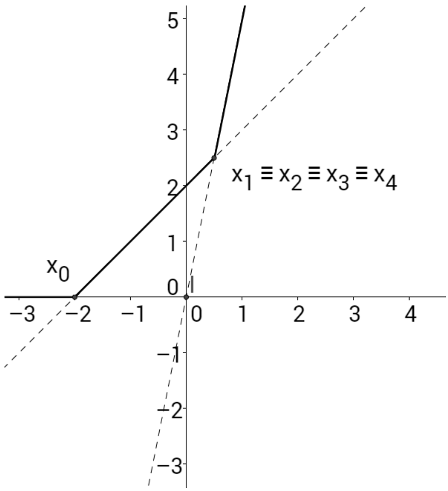
Pojďme nyní sestrojit graf tohoto polynomu. Všimněme si, že pracujeme s maximem z několika lineárních funkcí. Můžeme je tedy vynést do grafu jako na obrázku 6. Výsledný graf pak vznikne jako maximum z oněch tří funkcí.

U normálních polynomů můžeme zavést kořen jako takové x_0, že $P(x_0) = 0$. Pro nás bude užitečný fakt, že jestliže rozšíříme obor svého zájmu na komplexní čísla, má každý (klasický) polynom stupně n právě n kořenů (některé ale můžeme počítat vícekrát, tomu se říká násobnosti) a jestliže známe všechny kořeny daného polynomu, můžeme jej rozložit na součin výrazů ve tvaru $(x - x_0)$. Tak třeba polynom $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$ má kořeny $-\frac{1}{2}$ a 3; přitom platí $2x^2 - 5x - 3 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$. Budou ale mít kořeny svoji tropickou analogii?

Kdybychom kořeny tropických mnohočlenů definovali jako průsečíky polynomu s osou x (tedy $P(x_0) = 0$), výsledek by nebyl příliš zajímavý – pokud by absolutní člen polynomu nebyl 0, tak by měl každý polynom maximálně jeden kořen. Ukazuje se, že lepší je kořen tropického polynomu definovat jako takové číslo x_0, ve kterém se láme graf polynomu. Jinými slovy pro něj platí $a_i + ix_0 = a_j + jx_0$, kde i a j jsou sklony dvou po sobě jdoucích úseků v grafu polynomu. Rozdíl $|i - j|$ pro taková i a j pak bude násobností kořene x_0.



Obrázek 6: Graf tropického polynomu "$3x^3 + 1x + (-5)$".



Obrázek 7: Graf tropického polynomu "$x^5 + 2x + 0$".

Pojďme nyní nalézt kořeny našeho polynomu na obrázku 6. Prvním kořenem je místo zlomu konstantní funkce $y = (-5)$ a lineární funkce $y = x + 1$, kořen tedy nalezneme po vyřešení snadné lineární rovnice

$$x + 1 = (-5),$$

tedy $x_0 = -6$. Podobně řešením rovnice

$$x + 1 = 3x + 3$$

dostaneme dvojný kořen $x_1 = x_2 = -1$. Povšimněme si, že tento polynom třetího stupně má tři kořeny.

Rozeberme nyní ještě jeden tropický polynom, tentokrát $Q(x) =$ "$x^5 + 2x + 0$" $= \max(5x, 2+x, 0)$, jehož graf je na obrázku 7. Nyní je pro nás hračkou spočítat, že má kořen (-2) násobnosti jedna a kořen $\frac{1}{2}$ násobnosti čtyři. Polynom má stupeň pět a pět kořenů, vypadá to tedy, že tropický mnohočlen by mohl mít tolik kořenů, jaký je jeho stupeň, což je již zmíněná vlastnost klasických polynomů. Tento fakt si uvědomíme následující úvahou.

Sklony jednotlivých úseků grafu, jež odpovídají mocninám členů polynomu, si postupně označíme $s_0, s_1, \ldots s_k$, přičemž s_k odpovídá nejvyšší mocnině v polynomu a je to tedy jeho stupeň. Jednotlivé kořeny jsou zlomy mezi úseky a jejich násobnosti jsou rozdíly mezi jejich sklony. Posloupnost násobností jednotlivých kořenů je tedy $(s_1-s_0), (s_2-s_1), \ldots, (s_k-s_{k-1})$. Nás zajímá celkový počet kořenů (počítajíce jejich násobnosti), jenž určíme jakožto součet násobností jednotlivých kořenů, tedy

$$(s_k - s_{k-1}) + (s_{k-1} - s_{k-2}) + \ldots (s_1 - s_0) = s_k - s_0$$

Jestliže polynom obsahuje absolutní člen, máme $s_0 = 0$ a poté je počet kořenů vskutku roven stupni polynomu. Pokud v předpisu našeho polynomu chybí absolutní člen, představíme si, že jej máme, ale jeho hodnota je rovna $-\infty$ [4]. Potom máme kořen násobnosti s_0 v minus nekonečnu a vidíme, že hodnota stupně polynomu zůstává rovna počtu kořenů.

To však není jediná podobnost tropických polynomů s těmi opravdovými. Ukazuje se, že když známe kořeny tropického polynomu, můžeme jej rozložit podobně jako ten klasický. Ukážeme si to na příkladu našich dvou polynomů. Platí:

$$\text{“}3x^2 + 1x + (-5)\text{”} = \text{“}3 \cdot (x + (-6)) \cdot (x + (-1))^2\text{”}$$

a

$$\text{“}0x^5 + 2x + 0\text{”} = \text{“}0 \cdot (x + (-2)) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^4\text{”}.$$

Důkaz tohoto tvrzení neuvádíme, nicméně lze jej zase založit na představě grafu polynomu.

Přidáváme proměnnou

Již jsme si ukázali, že klasické polynomy v jedné proměnné mají podobné vlastnosti jako jejich tropické protějšky. Jak to bude, když polynomům přidáme další proměnnou?

Polynomem ve dvou proměnných myslíme výraz typu

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

tedy třeba $2x^5y^2 + 3xy^2 + 6$, $x^2 + y^2 - 4$ nebo $y - x$. Stupněm polynomu pak myslíme maximum ze součtů $i + j$ všech jeho členů, tedy stupně našich polynomů jsou postupně 7, 2 a 1. Tropický polynom pak z toho klasického dostaneme pouhým přidáním uvozovek.

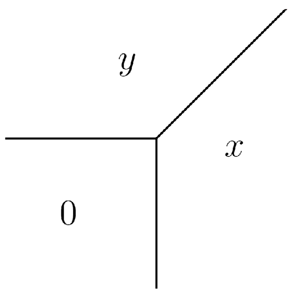
[4] Jestliže v normálním polynomu chybí nějaký člen $a_i x^i$, znamená to, že jeho koeficient a_i je nula. U tropických protějšků tuto roli plní $-\infty$.

Často nás zajímá, pro které dvojice x a y je $P(x, y) = 0$ (obdoba kořenů polynomů s jednou proměnnou). Pokud si tyto dvojice (jsou to vlastně souřadnice bodů) vyznačíme na plochu, dostaneme tzv. algebraickou křivku; třeba náš druhý polynom odpovídá kružnici a třetí polynom přímce. Stupněm křivky pak rozumíme stupeň odpovídajícího polynomu.

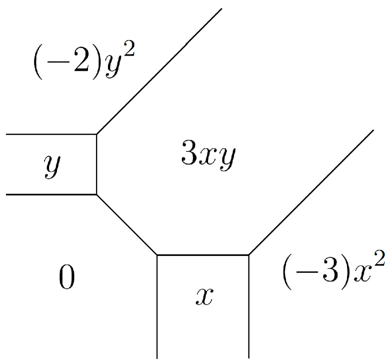
Jak si nyní představit tropický polynom ve dvou proměnných? Každý člen "$a_{ij}x^iy^j$" $= a_{ij} + i \cdot x + j \cdot y$ nám v prostoru vymezuje nějakou rovinu (pro každý bod z jeho dvou souřadnic dostaneme třetí – jeho výšku) a hodnota polynomu v každém bodě je maximum z výšek všech rovin. Můžeme si to tedy představit tak, že se shora díváme na všechny roviny a vždy vidíme jen část té, která je zrovna nejvýš.

Vezměme si třeba tropický polynom "$x + y + 0$" $= \max(x, y, 0)$. Máme tři roviny; jednu s konstantní výškou 0, další, která s ní svírá úhel 45° a jejíž výška je v každém bodě rovna jeho x-ové souřadnici a třetí rovinu, jejíž výška je obdobně v každém bodě rovna jeho souřadnici y. První rovina bude nejvýš pro body ze třetího kvadrantu, kde x i y jsou menší než nula. Pokud zbylou oblast symetricky rozdělíme podle osy prvního a třetího kvadrantu, dostaneme dvě oblasti, ve kterých je nejvýš druhá, rsp. třetí plocha (viz obr. 8).

Stejně jako u polynomů s jednou proměnnou nás teď nebude zajímat, kdy je polynom roven nule, ale jak vypadají místa, kde se lomí, jde nám tedy o okraje našich oblastí. Na obrázku 8 máme vyznačeny jednotlivé oblasti polynomu "$x + y + 0$", okraje oblastí nám vytvořily tropickou křivku. Snadno nahlédneme, že křivky polynomů "$a \cdot x + b \cdot y + c$" vypadají všechny stejně a mění se pouze jejich poloha. Na obrázku 9 pak máme složitější křivku odpovídající polynomu druhého stupně.



Obrázek 8: Polynom "$x + y + 0$" a jeho tropická křivka.



Obrázek 9: Polynom "$3xy + (-3)x^2 + (-2)y^2 + x + y + 0$".

A k čemu to je?

Jestliže jste dočetli až sem, již víte, že tropické polynomy mají s těmi opravdovými mnoho společného. Přesto se může zdát, že se jedná o pouhou hříčku znuděných matematiků, opak je však pravdou. V této části již nebudeme příliš formální (konec konců, tropická geometrie je stará pouze několik desítek let, a tak nám jistě uvěříte, že ji nelze pořádně pochopit po přečtení několika stránek [5]).

Vraťme se nyní k polynomům a algebraickým křivkám z klasického světa; víme, že křivky prvního stupně jsou přímky a křivky druhého stupně mohou vypadat jako nám známé paraboly, hyperboly, elipsy, kružnice nebo třeba dvě přímky (třeba rovnice $x^2 - y^2 = 0$ popisuje osy kvadrantů a rovnice $y^2 - 4 = 0$ odpovídá dvěma rovnoběžkám vzdáleným 2 od osy x). Už křivky druhého stupně tedy mohou nabývat mnohých podob a postupujeme-li dál, je situace čím dál tím složitější. Podívejme se třeba na několik polynomů stupně 4 na obr. 10.

Obrázek 10: Několik křivek 4. stupně, převzato z [2].

Vidíme, že jedna křivka může sestávat z několika čar, neboli komponent (třeba hyperbola se skládá ze dvou komponent, zatímco parabola jen z jedné). Každá komponenta přitom je, nebo není omezená (obě komponenty hyperboly utíkají do nekonečna, zatímco jediná komponenta elipsy je uzavřená sama do sebe).

Nás by zajímalo, kolik komponent křivka n-tého stupně může mít a v jakém mohou být vzájemném vztahu. Tedy pokud křivka obsahuje dvě uzavřené komponenty, nezajímá nás jejich přesná poloha, ale pouze zda je jedna uvnitř druhé (viz první a třetí křivku na obr. 10). Maximální počet komponent křivky v závislosti na jejím stupni je známý[6], ale popis jejich vzájemných vztahů obecně znám není. Nejedná se přitom o ledajaký problém, nýbrž je to šestnáctý z 23 problémů zveřejněných v roce 1900 tehdejším slovutným matematikem Davidem Hilbertem. Z těchto problémů již některé byly vyřešeny a některé (jako ten náš nebo známá Riemannova hypotéza) stále zůstávají otevřené.

A právě v hledání algebraických křivek nám tropická geometrie pomáhá. Existuje totiž jistý algoritmus, na jehož začátku máme tropickou křivku stupně n.

[5] či absolvování jedné konfery

[6] Konkrétně křivka, jejíž stupeň je n, může mít nejvýše $\frac{n(n-1)+2}{2}$ komponent. Tedy křivka druhého stupně má maximálně dvě komponenty (hyperbola) a křivka čtvrtého stupně maximálně sedm komponent (druhá křivka na obr. 10)

S tou pak uděláme jisté operace (přidáme a odebereme úsečky podle určitých pravidel) a máme zaručeno, že takto vzniklá křivka má stejné uspořádání jako nějaká algebraická křivka stupně n. Tímto způsobem tedy můžeme hledat třeba právě křivky s vysokým počtem komponent či nějakým speciálním uspořádáním.

Tímto algoritmem jsme se však již na konfeře nezabývali a tak nastal čas tento článek ukončit. Ještě předtím však pozornému čtenáři zodpovězme otázku, která ho jistě trápila po celou dobu četby tohoto článku. Kde se vzalo přídavné jméno „tropický“? Tropické geometrii dali její jméno francouzští matematikové jako poctu jejich brazilskému kolegovi, který se tímto oborem zabýval. Citujme na závěr [3]: „Přídavné jméno tropický nemá žádný hlubší význam. Prostě odráží pohled Francouzů na Brazílii. “

Reference

[1] Josef Svoboda. *Tropická geometrie.* Sborník MKS, Zásada. 2014

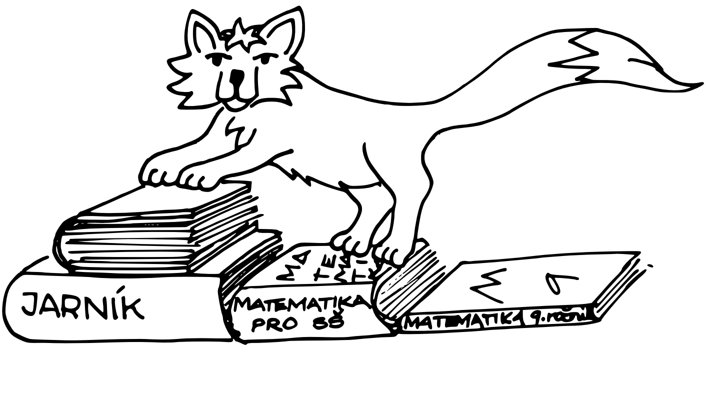
[2] Erwan Brugallé. *A bit of Tropical Geometry.* 2014

[3] Diane Maclagan. *Introduction to Tropical Geometry.* 2013

[4] Tělesa [online]. 2014 [cit. 2015-01-27]. Dostupné z: `http://www.matematika.cz/telesa`

[5] Introductory Workshop: Tropical Geometry [online]. 2009 [cit. 2015-01-27]. Dostupné z: `http://www.msri.org/workshops/481`

[6] Imre Simon [online]. 2014 [cit. 2015-01-27]. Dostupné z: `http://en.wikipedia.org/wiki/Imre_Simon`



Výsledková listina 4. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t3	t5	t9	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	4.	214	4			1		3		8	63
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Johanovská	3.	36	4		2	1				7	36
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Domes	2.	35	4			1				5	35
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škvára	4.	44	4		3					7	34
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Jochcová	4.	33	4						10	14	33
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šťastný	2.	32	4		1					5	32
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Janka	3.	31	3		3	0				6	31
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Rozhoň	4.	51							10	10	30
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Pokorný	3.	34	4		4	1				9	29
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Doležalová	3.	27	3							3	27
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Tětek	1.	25				1				1	25
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Stefanová	3.	24	4		1					5	24
13.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Krasula	2.	102								0	22
14.–16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ F. Oplt	2.	21	4		1					5	21
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Souček	3.	86	4	0		1				5	21
	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	4.	102	4			1				5	21
17.–19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ilievová	4.	41					9			9	19
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Kopfová	1.	19							10	10	19
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ S. Lukeš	2.	19	4		2	1				7	19
20.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Svobodová	3.	28	4						10	14	18
21.–22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Mlezivová	1.	17	3			1				4	17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Smítalová	4.	17	4							4	17
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Vincenová	1.	15	4							4	15
24.–25.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	4.	62	4						7	11	13
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Nácovský	4.	76								0	13
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Paidar	1.	12	4							4	12
27.–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Dittrich	3.	33								0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Knopp	1.	11	3							3	11
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kušnír	4.	84								0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ E. Mlynárčiková	3.	11								0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Žáček	2.	11								0	11
32.	F. Čermák	1.	9	4	1		1				6	9
33.–36.	A. Gajdová	4.	8								0	8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Knížek	4.	14								0	8
	P. Šimůnek	2.	8	4							4	8
	P. Turinský	2.	8				1				1	8
37.–40.	S. Burešová	1.	7								0	7
	K. Mráz	4.	7								0	7
	S. Rosecká	3.	7	4							4	7
	M. Töpfer	2.	7								0	7
41.–44.	B. Požár	1.	6								0	6
	M. Štván	2.	6								0	6
	M. Turek	3.	6								0	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Václavek	3.	21								0	6
45.–49.	L. Bujnovská	1.	5								0	5
	D. Jurdová	3.	5	3		2	0				5	5
	A. Neubauerová	1.	5	4			1				5	5
	K. Stodolová	2.	5								0	5
	J. Zeman	3.	5								0	5
50.–55.	S. Golat	4.	4								0	4
	R. Luc	2.	4								0	4

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t3	t5	t9	$\sum_0$	$\sum_1$
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ T. Paliesek	3.	17								0	4
	J. Štrincl	4.	4	4							4	4
	J. Vala	1.	4	4			0				4	4
	F. Zajíc	2.	5								0	4
56.–60.	A. Dejl	1.	3								0	3
	O. Krabec	1.	3	3							3	3
	A. Šámal	1.	3								0	3
	M. Zika	3.	3								0	3
	M. Zoula	3.	3								0	3
61.–64.	R. Chasák	2.	2								0	2
	J. Dvořák	4.	2								0	2
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Havelka	1.	13								0	2
	M. Kubeša	3.	2								0	2
65.–67.	J. Pekař	1.	1								0	1
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Tanglová	1.	20								0	1
	T. Troján	1.	1								0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz
WWW: http://mam.mff.cuni.cz