Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 5

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí příznivci M&M,

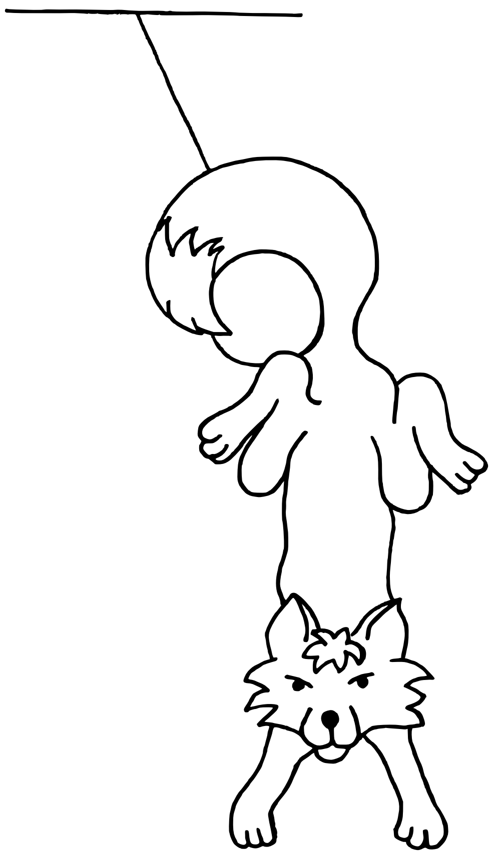
školní rok se přehoupl do další fáze – blíží se jaro! S vydáním tohoto čísla bychom vám tedy rádi dali na vědomí, že naše jarní soustředění se koná 11.–19. dubna a že se opět je na co těšit! Zvát na něj budeme ty nejúspěšnější z vás. Body z páté série stihneme při zvaní na soustředění vzít v potaz, pokud nám svá řešení pošlete do 20. března.

Matfyzácké dny s fyzikou, matematikou i informatikou jsou již za námi (i za vámi) a my organizátoři jsme úspěšně přestáli zkouškové období. To nám umožnilo pustit se do vydání pátého čísla se vší energií. Doufáme, že výsledek potěší vaši mysl i duši.

Tradičně otiskujeme vzorová řešení úloh minulých, úlohy nové a hlavně vaše nové příspěvky k tématkům.

Těšíme se na vaše rukopisy a na to, až se s mnohými z vás potkáme na soustředění.

organizátoři M&M



Zadání úloh

Termín odeslání páté série: 7. 4. 2015
(20. 3. 2015 pro započítání na jarní soustředění)

Jedna – druhá – třetí – poledne zvon udeří; klika cvakla, dvéře letí, orgové vchází do dveří. V předsíňce odkládáme zabahněnou obuv a vydáváme se prozkoumat další místnost. Poměrně prostorná, avšak stroze vybavená – v rohu se krčí právě jeden kus nábytku, malý kulatý dřevěný stůl.

Úloha 5.1 – Kulatý stůl (4b)

Kruhový stůl o poloměru p je přiražen k rohu místnosti. Na kraji stolu je nalepená žvýkačka, která je ve vzdálenosti m od jedné stěny a n od druhé stěny, kde $m, n \leq p$. Navíc jsou m a n přirozená čísla a p je prvočíslo. Dokaž, že jedno z čísel m a n je druhá mocnina přirozeného čísla.

Přesouváme stůl do středu místnosti a sedáme si kolem něj jako Artušovi rytíři. Dřevěná deska je rychle pokryta nejrůznějšími poklady z našich batohů. Vše je připraveno, nezbývá než se pustit do práce. Vybrat lidi, odborný program, doprovodný program, …

Úloha 5.2 – Výběr (3b + 1b)

Máme posloupnost N celých čísel. Chceme najít co nejdelší souvislou podposloupnost, která má součet dělitelný třemi. Vaším úkolem je:

1. Vymyslet co nejefektivnější algoritmus vzhledem k délce posloupnosti N.
2. Dokázat, že hledaná podposloupnost bude mít délku alespoň $N/3$ (zaokrouhleno dolů).

Bonusový bod získáte, pokud vymyslíte algoritmus pro hledání podposloupnosti, která má součet dělitelný K, kde K je libovolné přirozené číslo.

Rafičky na hodinách urazily již značný kus cesty. Nejrůznější dobroty byly dávno přesunuty ze stolu do našich žaludků a i lahve s mysl osvěžujícím nápojem zejí prázdnotou. Produktivita značně klesá, a tak je na čase se za svou práci trochu odměnit. Honza otevírá pouzdro a chystá svůj nástroj…

Úloha 5.3 – Kytarová (3b)

Pokud kolíček u naladěné struny D povolíme o 180 stupňů, bude znít tónem C. O kolik stupňů bychom museli kolíček přitáhnout, abychom získali E? Předpokládejte, že při ladění platí elementární Hookův zákon.

„Máš už spát, klidně spát,
sen ti vrátka otevírá,
máš už spát, klidně spát,
křídlem noc únavu stírá.
…“

Dopěli jsme poslední píseň a v polospánku začali řešit, jak se po místnosti rozmístit, aby se každý (ať už dlouhý, široký či bystrozraký) mohl pohodlně vyspat.

Úloha 5.4 – Spací pořádek (3b + 1b)

Sestrojte pět obdélníků se stranami nabývajícími hodnoty 1 až 10, přičemž každou délku je možno použít pouze jednou. Udělejte to tak, aby se z nich dal sestavit čtverec. Uveďte čtyři různé sady takových obdélníků a jejich poskládání do čtverce. Bonusový bod dostanete, pokud dokážete, že více různých poskládání neexistuje.

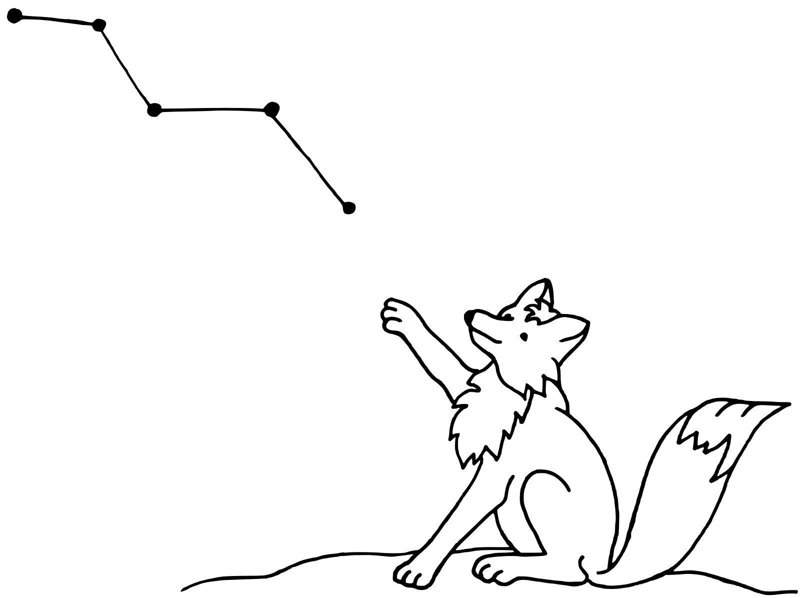
Dobrou noc!

Řešení úloh 3. série

Úloha 3.1 – Družice (4b)

Zadání:

Spočítejte změnu oběžné rychlosti Δv *družice Země po jednom oběhu. Družice je brzděná horními vrstvami atmosféry silou* F_t*, kterou můžete považovat za konstantní. Na počátku se nachází ve výšce* h *nad povrchem Země o poloměru* R *a má rychlost* v_0*. Hmotnost družice je* m*. Výška i rychlost se mění pomalu, takže můžete počítat s kruhovou dráhou na počátku i konci (i když se o kruhovou dráhu samozřejmě nejedná). Navíc můžete zanedbat členy řádu* Δv^2 *a vyšší. Proč se rychlost změní zrovna tímto způsobem? V čem může být tato aproximace špatná?*



Řešení:

Pro výpočet změny rychlosti potřebujeme znát vztah mezi celkovou energií E a rychlostí v družice na kruhové dráze. Pro celkovou energii platí

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r},$$

kde m je hmotnost družice, M je hmotnost Země, G je gravitační konstanta a $r = R + h$ je poloměr kruhové dráhy. Potenciální energie je záporná, protože je potřeba dodat družici energii, abychom ji vymanili z gravitačního vlivu Země a dostali ji na nulovou E_p, kterou jsme si zvolili v nekonečné vzdálenosti. Z rovnosti dostředivé a gravitační síly si vyjádříme GmM/r:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow G\frac{mM}{r} = mv^2.$$

Z toho dostáváme

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2.$$

Při aproximaci kruhovou dráhou družice ztratí energii $\Delta E = F_t s = 2\pi r F_t$. Konečná energie E_1 tedy bude

$$E_1 = E_0 - \Delta E$$

$$-\frac{1}{2}m(v_0 + \Delta v)^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 - 2\pi r F_t$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + v_0\Delta v + \frac{1}{2}\Delta v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{2\pi r F_t}{m}$$

$$\Delta v = \frac{2\pi r F_t}{m v_0}.$$

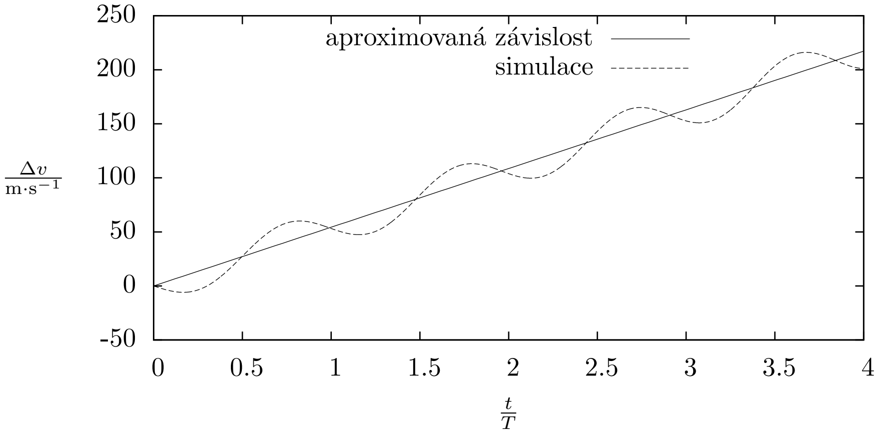
Výsledek je kladný, družice se tedy urychlí. Tento výsledek není na první pohled zřejmý, ale musíme si uvědomit, že energie družice se skládá z kinetické i potenciální a s rostoucí celkovou energií klesá rychlost. Pokud chceme vypočítat změnu rychlosti za jeden oběh, výsledek vydělíme periodou T. Při malé brzdné síle můžeme považovat výraz $v_0 T$ přibližně rovný délce oběžné dráhy $2\pi r$, výsledek se tedy zjednoduší na

$$\frac{\Delta v}{T} \approx \frac{F_t}{m}.$$

Tato aproximace je přesná jen pro malou brzdnou sílu kvůli tomu, že počítá s kruhovou počáteční dráhou délky $2\pi r$, i když se družice reálně bude pohybovat po spirále. Na konci oběhu se družice už nemusí pohybovat po kruhové dráze a i kdyby brzdná síla zmizela, rychlost se bude měnit.

V grafu 1 vidíme závislost Δv na čase vypočítanou pomocí simulace a výše uvedený aproximovaný výsledek. Vidíme, že rychlost kolísá, družice se tedy nachází na přibližně eliptické dráze a po každém oběhu se rychlost zvýší o Δv.

Viktor



Graf 1: Simulace družice ve výšce $h = 300\,\mathrm{km}$, $v_0 = 7725\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $F_t/m = 0.01\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Úloha 3.2 – Stavba bludiště (4b)

Zadání:

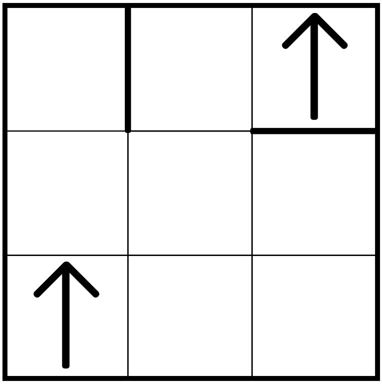
Pepa se přihlásil do robotické soutěže. Od kamaráda dostal dva roboty. Shodou okolností to byli oba Karlové. Takový robot Karel umí pouze dva příkazy: krok o jedno políčko vpřed (pokud je před ním zeď, tak stojí) a otočení o $90°$ vlevo. První soutěžní úkol byl napsat společný (tedy stejný) program pro oba roboty sestávající z příkazů VLEVO a KROK. Poté byli roboti umístěni do protějších rohů bludiště, orientováni na sever a zapnuti. Soutěžní úkol byl splněn, pokud po doběhnutí programu stáli roboti v opačných rozích bludiště než na začátku, tedy jestliže si vyměnili místa. Pokud by se kdykoliv roboti ocitli na stejném políčku, nabourali by a soutěžící by prohrál. Vaším úkolem je zjistit, kolik minimálně muselo bludiště obsahovat stěn, jestliže Pepa úkol splnil. Bludiště má velikost $N \times N$ políček. Mezi dvěma sousedními políčky vždy buď stěna je, nebo není, a pak je možné se mezi políčky přesouvat. Všechna krajní políčka jsou zvenčí ohraničena stěnami (ty nepočítejte, důležitý je minimální počet vnitřních stěn).

Řešení:

Nejprve je třeba si uvědomit, na co se v úloze ptáme. Chceme najít minimální počet stěn K takový, že pro bludiště obsahující méně stěn libovolné velikosti neexistuje program, který roboty vymění. A zároveň pro K stěn musíme ukázat, že existuje bludiště a program, který roboty vymění.

Jelikož se roboti pohybují po mřížce, je třeba aby se ve svislém i vodorovném směru rozdíl jejich souřadnic snížil na 0 a poté zvýšil na původní hodnotu $N - 1$. Rozdíl se zvýší, pouze pokud se jeden robot posune a druhý ne. Tudíž před druhým robotem musí být stěna. Zároveň to nemůže být vnější stěna, jelikož roboti mají stejnou orientaci a první by se tak posunul blíže k této stěně, tedy vzdálenost robotů by se snížila, což nechceme. Proto je před druhým robotem vnitřní stěna. Tuto úvahu můžeme provést pro svislý i vodorovný směr a hned víme, že bludiště musí obsahovat alespoň 2 stěny.

No a pro dvě stěny již je možné najít řešení. Například pro bludiště na obrázku 1 s programem (`L` je `VLEVO`, `K` je `KROK`): `LKLKLLLKLLLKLLLKLKLLLKLLLKK`



Obrázek 1: Tlusté čáry značí stěny, šipky znázorňují původní rozestavení a orientaci robotů.

Mnoho řešitelů dokonce ukázalo, že toto bludiště i program lze zobecnit pro libovolně velké bludiště $N \times N$, kde $N \geq 3$ a dále dokázalo, že pro $N \leq 2$ žádné bludiště s programem nevyhovuje. Pro vyřešení úlohy ovšem stačilo nalézt jedno řešení.

Honza Mikel

Úloha 3.3 – Kubická rovnice (3b)

Zadání:

O kubické rovnici $x^3 + px + q = 0$ víme, že má reálný kořen x_0. Dokažte, že platí nerovnost $p^2 \geq 4qx_0$.

Řešení:

Protože má rovnice $x^3 + px + q = 0$ reálný kořen x_0, má stejný kořen i rovnice $x_0x^2 + px + q = 0$ (nyní je x_0 koeficient u členu x^2), což je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty. Aby měla kvadratická rovnice reálný kořen, musí mít nezáporný diskriminant, tedy musí platit nerovnost $p^2 \geq 4qx_0$, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Pepa

Úloha 3.4 – Setkání (4b)

Zadání:

Na nejmenované koleji na pokoji B1717 se přesně v 17.17 potkali dva lidé. Jaká je pravděpodobnost, že tito dva lidé mají stejné příjmení (včetně koncovky)? Potřebná data naleznete na webu ministerstva vnitra ČR:

`http://www.mvcr.cz/clanek/cetnost-jmen-a-prijmeni-722752.aspx`

Jako bonus můžete do řešení zapracovat i fakt, že na kolejích typicky bydlí pouze lidé určité věkové kategorie. Plný počet bodů ale můžete získat i za řešení, které tento fakt ignoruje.

Řešení:

Pravděpodobnost spočítáme jako počet příznivých jevů vydělený celkovým počtem jevů. V naší úloze je příznivý jev setkání dvou lidí se stejným příjmením. Označme si počet lidí s příjmením i jako c_i a celkový počet lidí n. Počet možných setkání lidí s daným příjmením i je $\binom{c_i}{2}$, tedy počet všech různých dvojic lidí s tímto příjmením. Celkový počet stejnojmenných setkání potom získáme sečtením tohoto výrazu přes všechna příjmení (množinu všech příjmení si označíme P), tedy jako $\sum_{i\in P}\binom{c_i}{2}$. Celkový počet možných jevů je počet všech dvojic lidí, nezávisle na příjmení, $\binom{n}{2}$. Výsledná pravděpodobnost bude

$$\frac{\sum_{i\in P}\binom{c_i}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\sum_{i\in P} c_i\cdot(c_i-1)}{n\cdot(n-1)},$$

což po spočítání na odkazovaných datech vyjde po zaokrouhlení 0,000215.

Druhý možný přístup bylo spočítat pravděpodobnost setkání pro každé příjmení zvlášť a poté je díky neslučitelnosti jevů posčítat. Jednotlivé pravděpodobnosti pak však vyjdou jako desetinná čísla, se kterými počítač nedokáže počítat stejně přesně jako s celými čísly[1]. Proto bylo lepší nejdříve sečíst všechny příznivé jevy a celkovým počtem jevů dělit až nakonec. Pro variantu zvažující věkový rozsah stačilo brát data z podrobnější tabulky a počítat jen s daty z patřičných let. Ukázkový soubor s řešením od Tomáše Domese najdete na stránkách M&M v sekci „Z řešení“.

Anet

Řešení témat

Téma 1 – Papírová letadélka

Bohužel ani tentokrát nemáme žádné nové příspěvky. Proto alespoň připomínáme některé stále nedořešené problémy:

- Je pro větší dolet dobré, když se letadélko houpe, nebo je lepší, když letí rovně?

[1] Při stejné velikosti reprezentovaného čísla a v některých rozsazích.

- Jaký má vliv plocha křídel na dolet a stabilitu letu?
- Má vliv škálování? (Jak se budou lišit letové vlastnosti letadélka poskládaného z papíru formátu A3, A4, ...?)
- Jaký má význam umisťování závažíček na záď? (V porovnání s delším ocasem, který také těžiště dorovnává.)

Zuzka

Téma 2 – Tvorba draka

K tématu přišlo jedno řešení od Prof.MM Markéty Calábkové. Celý článek najdete na našich stránkách – přečtěte si ho, může posloužit jako dobrá inspirace k dalšímu řešení. Zde je krátké shrnutí a pár dalších otázek a náznaků, kudy se směle vydat.

Markéta se nejprve zabývá otázkou, zda pro zadané délky (které splňují n-úhelníkovou nerovnost) můžeme sestrojit nekonvexní n-úhelník. Tím také odhaluje úmyslnou chybu ze zadání, že z délek $(5, 2, 2, 2)$ takový čtyřúhelník vytvořit nelze, protože to samozřejmě lze (nakreslete si sám). Dochází k obecnému postupu, jak z konvexního n-úhelníka vyrobit deformací nekonvexní, za předpokladu, že součet délek nějakých dvou stran je menší, než součet ostatních délek (taková silnější n-úhelníková nerovnost).

Dále zkoumá Markéta n-úhelníky s opsanou (ze čtyř libovolných délek konstruuje tětivový čtyřúhelník) a vepsanou kružnicí – zdůvodňuje své tvrzení, že zadané délky (splňující n-úhelníkovou nerovnost) tvoří tětivový čtyřúhelník, právě když má libovolných $(n-1)/2$ nesousedních stran menší součet délek, než ostatní. Její zdůvodnění mě však nepřesvědčilo. Vzhledem k zajímavosti této otázky to může být jedna z věcí, na kterou se můžete zaměřit.

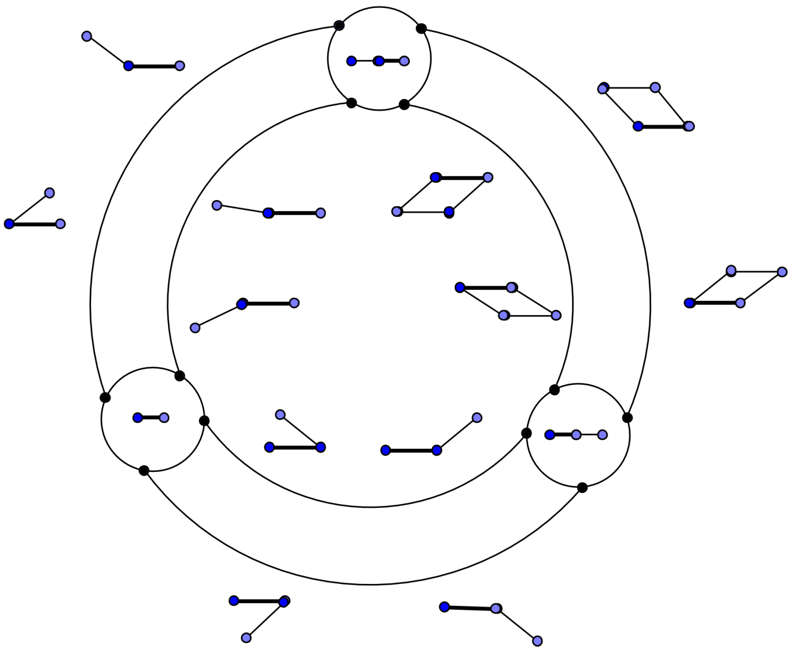
Nakonec se Markéta dostává k deformacím (nejen) čtyřúhelníků a řešení otázky co ještě je a co už není čtyřúhelník. Popsala možné konfigurace čtyřúhelníků se stranami $(1, 1, 1, 1)$ a $(5, 2, 2, 2)$ a jednou zafixovanou úsečkou – jde vlastně o nějaké kroužení volných vrcholů kolem vrcholů zafixované úsečky.

Zajímavé ale je, jak moc mohou vrcholy kroužit, v čemž se oba případy liší. Např. pro $(1, 1, 1, 1)$ máme dva základní typy „čtyřúhelníků“ – kosočtverce a lomené čáry o délce dva (když strany po dvou splývají). Jednotlivé kosočtverce (a čáry) můžeme spojitě deformovat právě tím „točením okolo vrcholů“ a po nějaké chvíli si uvědomíme, že tři konfigurace jsou v nějakém smyslu důležité – úsečky o délce dva (lišící se tím, zda je fixovaná část vlevo nebo vpravo) a úsečka o délce jedna, ve které všechny čtyři strany splývají. Mezi těmito třemi stavy se můžeme pohybovat, vždy dvěma různými cestami mezi každými dvěma stavy (horem nebo spodem). Tuto situaci můžeme ilustrovat na obrázku 2.

Vidíme, že jde v podstatě o tři „kružnice“, po dvou na sebe nalepené v bodech, které odpovídají třem důležitým konfiguracím. Pro $(5, 2, 2, 2)$ bude obrázek jiný (a rovněž záleží, zda povolíme protínání hran a podobné věci na hraně). Vaším druhým úkolem tedy může být zkoumání těchto obrázků pro různé mnohoúhelníky.

Nejprve můžete zkusit klasifikovat všechny čtyřúhelníky a pak se pustit dál a představovat si vícerozměrné objekty, které dostaneme stejnou konstrukcí u n-úhelníků pro $n = 5$ a více.

Pepa



Obrázek 2

Téma 3 – Reakce v miskách

K třetímu tématu tentokrát dorazil jeden příspěvek a to od Kristýny Ilievové.

Matej

Anaerobní glykolýza (8b)

Mgr.^{MM} *Kristýna Ilievová*

Anaerobní glykolýza probíhá bez přístupu vzduchu v cytoplazmě buňky. Z jedné molekuly glukózy vznikají 2 molekuly pyruvátu a uvolňují se 2 molekuly ATP (při celém procesu vznikají 4 molekuly ATP, ale 2 se během procesu spotřebují).

V návrhu na simulace anaerobní glykolýzy jsou modře označeny cesty enzymů, které katalyzují danou reakci v řetězci (po spuštění se uvolní právě takové množství, které je třeba pro přeměnu jedné molekuly glukózy, je tedy možné nasimulovat, kde se anaerobní glykolýza zastaví v případě, že některý z enzymů chybí. Červeně jsou vyznačeny cesty molekul ADP a ATP. Po spuštění se uvolní takové množství ADP, které je potřeba pro přeměnu jedné molekuly glukózy. Společně s jednou molekulou glukózy do řetězce vstupují i dvě molekuly ATP, které se během procesu spotřebují (uloží se pro vstup následující molekuly glukózy). Zeleně je ve schematu označen výsledný produkt – pyruvát (který dále vstupuje do alkoholového či mléčného kvašení nebo citrátového cyklu). Ve schématu je pouze naznačeno, že D-fruktoza-1,6-bifosfát se štěpí v poměru 4 % D-glyceraldehyd-fosfát a 96 % fosfoglycerát. Dále se v anaerobní glykolýze využívá pouze D-glyceral-fosfát. Jedná se však o izomery, které v sebe volně přecházejí a udržují mezi sebou tento procentuální poměr, kdy se nakonec spotřebuje i prakticky všechen fosfoglycerát, proto jsem se rozhodla touto fází anaerobní glykolýzy příliš nezabývat.

Téma 4 – Dopad meteoritu

V došlých příspěvcích dorazila řada zajímavých předpovědí o dopadech meteoritu. Většina z nich měla charakter názorných fyzikálních zjednodušení nebo odhadů dopadů na život či atmosféru.

Při fenoménu interakce meteoroidu se Zemí (či jinou planetou) je zajímavé pozorovat, jakých forem nabývá energie dovlečená tělesem do systému planety – od kinetické energie samotného tělesa přes tepelné energie až k chaotičtějším formám mechanické energie. Země má řadu různě provázaných komplexních systémů od atmosféry až po tekuté jádro – nezapomínejte proto například na tektonickou činnost.

Můžete se pokusit například zodpovědět otázku, jaké parametry by muselo mít meteorické těleso, aby po dopadu stoupla průměrná povrchová teplota Země na $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ (var vody), nebo například na $1500\,^{\circ}\mathrm{C}$ (tání řady hornin). Jak hluboko by se lidé (nebo jiná forma života) museli dostat, aby unikli smrtelnému žáru? Měl by takový dopad vliv na délku dne či na oběh okolo Slunce?

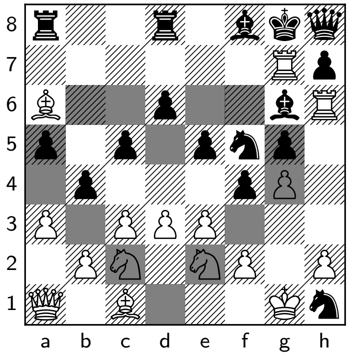
Nebo se můžete zaměřit na mírnější dopad a zvažovat dopady na biosféru a podnebí. Na scénu mohou vstoupit (mimo např. tektonické činnosti a důsledků vazeb v ekosystémech) dva jevy, označované jako „skleníkový efekt“ a „kosmická zima“. Můžete se snažit předpovědět, jaký charakter by při klimatických změnách převládal a proč, resp. jak by záležel na parametrech dopadu.

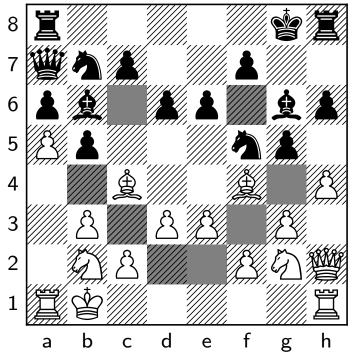
Samozřejmě pokud se zajímáte o jiné téma, nebo třeba máte jen zajímavý nápad, nebojte se o něj podělit (např. mohlo by se výrazněji změnit magnetické pole Země?). Nápad je otcem myšlenky a myšlenka je matkou objevu!

Luboš

Téma 5 – Pokrytí šachovnice

Bc.[MM] Zuzana Svobodová nám zaslala následující dva pěkné obrázky vytvořené z neohrožovaných polí na šachovnici. Pole, na kterém stojí figura, za ohrožované nepovažuje, obrázek smajlíka tedy splňuje i podmínku, že každá figura je ohrožována nějakou jinou. Autorka navíc upozorňuje, že „jsou-li hráči dost obezřetní a nepouštějí se do žádných zbrklých akcí“, mohou obě situace teoreticky vzniknout i během hry.





Další příspěvky do tohoto čísla nedorazily. Upozorňujeme ale na mnoho otázek položených v minulém čísle. Například jestli existují útvary z neohrožených polí, které jednoznačně vynucují rozložení figur na šachovnici.

Kuba

Konference Zelená Lhota 2014

Faktorialické soustavy (10b)

Dominik Krasula

Abstrakt
Článek se zabývá faktorialickými soustavami. Jejich specifikem je, že v jednotlivých řádech jsou místo mocnin nějakého čísla (základu soustavy) faktoriály různě vysokého čísla. Článek shrnuje poznatky získané o faktorialických soustavách v průběhu stejnojmenné konfery na podzimním soustředění M&M v roce 2014.

Poznámka redakce: V angličtině je faktorialická soustava většinou známá jako „factorial numeral system“ nebo „factoradic numeral system“

Poděkování
Předně bych chtěl poděkovat $\mathcal{O}(N)$drovi Mičkovi, který celou konferu vedl. Dále svým spolupracovníkům Lence Kopfové a Honzovi Škvárovi, bez jejichž pomoci by byl materiál zpracovávaný v tomto článku mnohem chudší.

Úvod

U běžných *mocninných* soustav jsme zvyklí, že mají nějaký základ (obvykle přirozené číslo, nicméně může být i reálné) a čísla v jednotlivých řádech říkají, kolikrát se násobí jeho daná mocnina. Přičemž nejpravější řád (před čárkou) je nultá mocnina a řády nalevo jsou první, druhá, třetí… mocnina a napravo (od čárky) jsou to mínus první, mínus druhá…

Číslo 616,42 v desítkové soustavě je vlastně $6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + {} + 2 \cdot 10^{-2}$. Faktorialické soustavy však fungují jinak. Na místě „jednotek" (na „nulté" pozici) jsou ve skutečnosti násobky 0!, na následující (tedy první) pozici násobky 1!, na n-té pozici n!. Významné je pravidlo, že *na n-té pozici je nejvyšší možné číslo n.* Takže v řádu 0! bude vždy nula. V řádu 1! bude buď 0 nebo 1 a podobně to půjde dále.

V tomto článku si ukážeme, jak převádět z faktorialické soustavy do klasických mocninných pozičních soustav a naopak. Dále popíšeme algoritmy pro klasické aritmetické operace a ukážeme si, že jakékoliv racionální číslo lze v této soustavě zapsat jako číslo s konečným rozvojem. Nakonec si ukážeme užití této soustavy při práci s permutacemi.

Převod mezi soustavami

Důležitá otázka je: „*Existuje mezi desítkovou a faktorialickou soustavou bijekce?*". Dokážeme každé číslo jednoznačně převést do faktorialické soustavy nebo naopak z faktorialické převést do nějaké mocninné? Skutečně je to možné. Ukážeme si to na převodu *z* a *do* desítkové soustavy.

Z faktorialické do desítkové

Mějme nějaké číslo ve faktorialické soustavě, třeba $dcba0$. Jak jej převedeme do desítkové soustavy? V řádu 0! máme nulu, takže zůstáváme na nule. V řádu 1! máme a. Víme, že $1! = 1$, takže přičteme a. V řádu 2! máme b. Víme, že $2! = 2$, takže přičteme $2b$. V řádu $n!$ máme m, takže přičteme $m \cdot n!$.

Do faktorialické z desítkové

Zde to již bude složitější, proto budeme pracovat s názornějším příkladem, s číslem 666. Jak jej převedeme do faktorialické soustavy? Pomozme si otázkou *„Jak bychom jej převedli do nějaké jiné mocninné soustavy, např. osmičkové?"*. Jednoduše bychom jej vydělili osmi, zapsali zbytek, pak znovu vydělili osmi, zapsali zbytek atd.

Příklad 1 Číslo 666_{10} převedeme následovně:
$666/8 = 83\ (2) \Rightarrow$ Do řádu jednotek zapíšeme 2.
$83/8 = 10\ (3) \Rightarrow$ Do řádu osmiček zapíšeme 3.
$10/8 = 1\ (2) \Rightarrow$ Do řádu 8^2 zapíšeme 2 do řádu 8^3 zapíšeme 1.

Máme tedy 1232_8. A snadným zpětným převodem zjistíme, že je výsledek správně. Nyní by to chtělo nahlédnout, proč je tento algoritmus vždy funkční.

Vždy dělíme základem soustavy a zbytek zapíšeme. Takže do řádu osmiček (spolu s čísly více napravo, tedy řádem jednotek) napíšeme zbytek po dělení 64 atd.

Jiný, složitější nicméně „důvěryhodnější“, algoritmus, je odečíst od čísla největší mocninu osmičky menší než dané číslo a přičíst jedna k příslušnému řádu. Snadno nahlédneme, že se vlastně jedná o tentýž princip. Do řádu jednotek připíšeme až to, co zbude po odečtení všech osmiček, což je zbytek po dělení osmi. Do řádu osmiček zapíšeme všechny osmičky, které zbudou po odečtení všech šedesátčtyřek, to je to samé jako zbytek po dělení číslem 64 (s tím, že část toho zbytku jde ještě o řád dále – do řádu jednotek).

Nyní k samotnému převodu do faktorialické soustavy. Převáděcí algoritmus vypadá takto:

1. Číslo vydělíme jedničkou. Zbytek, který bude vždy nula, zapíšeme do řádu 0!.
2. Poté číslo vydělíme dvojkou. Zbytek, který bude buď jedna, nebo nula, zapíšeme do řádu 1!.
3. Číslo, které nám vzniklo po dělení dvěma, vydělíme trojkou, zbytek zapíšeme do řádu 2!.
4. Číslo, které nám vzniklo po předešlém kroku, vydělíme čtyřkou, zbytek zapíšeme do řádu 3!.

$\vdots$

n. Číslo, které nám vzniklo po předešlém kroku, vydělíme n, zbytek zapíšeme do řádu $(n-1)!$.

Abychom uvěřili správnosti algoritmu, je nutné si uvědomit, že děláme vlastně to samé, jako když opakovaně dělíme základem soustavy. Když chceme zjistit číslo v řádu 8^n, tak pracujeme se zbytkem po dělení číslem 8^{n+1}. V postupném, výše popsaném algoritmu, jej docílíme tak, že $(n+1)$-krát dělíme osmičkou.

A při převodu do faktorialických soustav, chceme-li zjistit číslo v řádu $n!$, pak pracujeme se zbytkem po dělení číslem $(n+1)!$ a to zjistíme tak, že původní číslo dělíme nejprve jedničkou, pak dvojkou, $\dots$, pak n. Náš algoritmus je tedy funkční.

Nyní víme, že každé „faktorialické číslo“ má jednoznačný překlad do desítkové (a tím pádem do jakékoliv mocninné) soustavy a naopak z desítkové soustavy umíme číslo jednoznačně přeložit do faktorialické soustavy.

Aritmetické operace

Jak to bude se sčítáním a odčítáním ve faktorialické soustavě? Známe pro to nějaký hezký algoritmus? Známe! Dobrá zpráva je, že můžeme prostě sčítat (odečítat) pod sebou, stejně jako třeba v desítkové soustavě. Jediné na co si musíme dát pozor, je případ, kdy součet „jde přes desítku“. Každý řád má nějaké nejvyšší číslo, které nesmíme překročit, takže se neptáme jestli „jde přes desítku“ ale jestli „jde přes ono číslo daného řádu“. Např. jsme-li při sčítání u řádu $n!$ a součet je $kn + m$, pak zapíšeme $m - 1$ a k dalšímu řádu $(n + 1)!$ přičteme k.

A obdobně je to s odečítáním. Neptáme se „Kolik zbývá do deseti?“ ale „Kolik zbývá do čísla specifického pro daný řád?“. Horší to však je s násobením. Nepodařilo se nám objevit ekvivalent „násobení pod sebou“ ani nalézt nějaký jiný efektivní algoritmus. Přesto však jsme schopni násobit. Násobíme-li dvě čísla m a n, pak vezmeme m a od n odečteme jedna. Pak k m opět přičteme m a od n opět odečteme jedna a pokračujeme tak dlouho, dokud se n nevynuluje a my tím získáme mn.

Racionální čísla

Nyní se zaměřme na to, jak to je s faktorialickými soustavami a s racionálními čísly. O faktorialických soustavách platí tato milá věta:

Věta *Každé racionální číslo lze převést do faktorialické soustavy a je v ní zapsatelné pomocí konečného počtu cifer.*

Abychom ji dokázali, je nejprve nutno si vysvětlit, jak se desetinná čísla ve faktorialické soustavě vůbec zapisují. První místo za dělící čárkou bude řád $(2!)^{-1}$, tedy řád 1/2. Druhý řád bude $(3!)^{-1}$, poté $(4!)^{-1}$ atd. Platí, že v řádu $(n!)^{-1}$ je nejvyšší možné číslo $n-1$. Takže v prvním řádu je buď 1 nebo 0. V druhém může být i dvojka.

Nyní pojďme na převody. Čísla jako 1/2, 1/3, $1/6 + 1/3$ převedeme snadno. Nicméně jak si poradit třeba s 1/7? Jak takovéto číslo zapíšeme pomocí součtu zlomků ve tvaru $1/n!$? Nevím. Nicméně dokážeme bez problémů zapsat číslo 1/7!. Pojďme nyní ukázat, že existuje nějaké celé číslo, kterým když vydělíme 1/7, tak získáme 1/7!.

Číslo 1/7! si můžeme zapsat jako $1/(7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2)$. Když jej vynásobíme číslem $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ tak získáme 1/7. Takže skutečně umíme převést každé racionální číslo tvaru $1/n$. Nejprve převedeme do faktorialické soustavy číslo $1/n!$ a poté dané číslo vynásobíme číslem $n!/n$. A máme požadované číslo. Pokud chceme převést k/n pak prostě vzniklé číslo ještě vynásobíme k. Dokážeme tedy vyjádřit každé racionální číslo tím, že vynásobíme nebo sečteme zlomky ve tvaru $1/n$.

A nyní přejděme k samotnému důkazu věty o konečném zápisu. Každé číslo ve tvaru $1/n$ je násobkem nějakého čísla tvaru $1/n!$. Z definice faktorialické soustavy plyne, že $1/n!$ bude mít konečný „desetinný zápis“. Číslo $1/n$ je jeho konečný násobek. Násobíme-li nějaké číslo s konečným zápisem nějakým konečným celým číslem, tak výsledek toho násobení bude mít samozřejmě taky konečný zápis. Abychom si to uvědomili, zamysleme se nad procesem násobení. Máme-li číslo z s konečným zápisem a chceme jej vynásobit nějakým k, tak to můžeme učinit tak, že vezmeme cifru v nejmenším řádu k a vynásobíme jí n a zapíšeme výsledek (to co jde přes řád samozřejmě přičteme k levějším řádům). A pak přejdeme k druhému nejnižšímu řádu a provedeme násobení atd. Je jasné, že takto možná zvětšíme počet řádů, nicméně maximálně přidáme nějaké řády v celé části čísla.

Takže počet míst bude rozhodně konečný i po vynásobení, neboť kdyby se stal nekonečným, znamenalo by to, že bychom měli číslo nekonečně velké, a to je spor s tím, že násobíme dvě konečná čísla.

Jediná jiná operace, kterou kromě násobení aplikujeme, je sčítání několika takhle vzniklých čísel. Tedy vlastně sčítání čísel s konečným zápisem. Není tedy pochyb, že výsledné číslo bude mít taky konečný zápis. Ve faktorialické soustavě tedy skutečně umíme zapsat každé racionální číslo pomocí konečného počtu míst.

Permutace

Jaké je vlastně využití faktorialických soustav? Dají se dost dobře používat k zapisování permutací. V prvním řádu máme jen jednu možnou volbu, v druhém dvě, v třetím tři… Takže máme-li číslo s n ciframi máme $n!$ možností, jak může vypadat (když připustíme, že může začínat nulou, tedy i třeba číslo 0000). No a když máme n prvků, tak mají $n!$ permutací. Nutno podotknout, že hovořit o tom jako o číslech není korektní, správnější je říci nikoliv „přiřazujeme číslo 00000“, ale „přiřazujeme vektor (inverzí permutace) (0,0,0,0,0), který odpovídá číslu 0“. Přičemž vektor inverzí permutace je vektor, s jehož pomocí zaznačujeme, jak se daná permutace liší od původního stavu. Pro jednoduchost a větší přehlednost však budeme v článku používat první variantu.

Jak teda takovýto zápis provést? Mějme množinu M a nějaké její uspořádání, které považujeme za *původní.* Bude to vypadat např. takto $\{\ldots, e, d, c, b, a\}$. Nyní těmto prvkům přiřadíme čísla tak, že $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, ... Takže získáváme množinu, kde jsou prvky uspořádané a prvek nejvíce vpravo považujeme za *nejmenší.* Jako příklad použijeme číslo 12345. Máme u něj 5! permutací. Původní permutaci, tedy 12345 přiřadíme číslo 00000. A nyní jak označíme další permutace?

Budeme postupovat zleva doprava. Mějme třeba číslo 21534. Na nejlevější pozici by mělo být nejmenší číslo, nicméně je tam dvojka, takže napravo od ní je jedno číslo menší než ona, takže zapíšeme 1. Na druhé pozici máme jedničku. Napravo od ní není žádné menší číslo, zapíšeme tedy 0. Pak máme pětku, napravo od ní jsou dvě menší čísla, zapíšeme tedy 2. Pak máme 34, napravo od žádného z těchto čísel není menší číslo, takže zapíšeme 00. Získali jsme tedy 10200.

Nyní už nám zbývá jen dokázat, že mezi permutacemi a takto jim přiřazenými čísly z faktorialických soustav existuje bijekce. Víme, že ke každé permutaci umíme jednoznačně přiřadit číslo, to vyplývá už ze způsobu přiřazování, musíme však ještě ukázat, že splníme podmínku faktorialických soustav *v n-tém řádu je maximálně číslo n.* Mějme tedy na n-té pozici zprava nějaké číslo. Kolik může být napravo od něj nejvýše menších čísel? No maximálně $n - 1$, protože napravo od něj je $n - 1$ čísel.

Druhou otázkou je, zda-li umíme každému faktorialickému číslu jednoznačně přiřadit permutaci. Mějme teď naše faktorialické číslo 10200 a pojďme mu přiřadit permutaci. Půjdeme zleva doprava. Na nejlevější pozici je jednička, takže napravo od ní je jedno číslo větší než dané číslo. Takže tam bude druhé nejmenší číslo, tedy dvojka. Pak máme nulu, takže tam bude nejmenší (ještě nepoužité číslo), takže jednička. Pak máme dvojku, takže třetí největší číslo z nepoužitých čísel. Zbývá nám 3, 4, 5, takže to bude pětka. Pak máme nulu, takže tam dáme 3, nejmenší zatím nepoužité číslo a na poslední místo dáme zbývající číslo. Takže jsme získali 21534. Snadno nahlédneme, že tento algoritmus jednoznačně přiřadí faktorialickému číslu permutaci.

Závěr

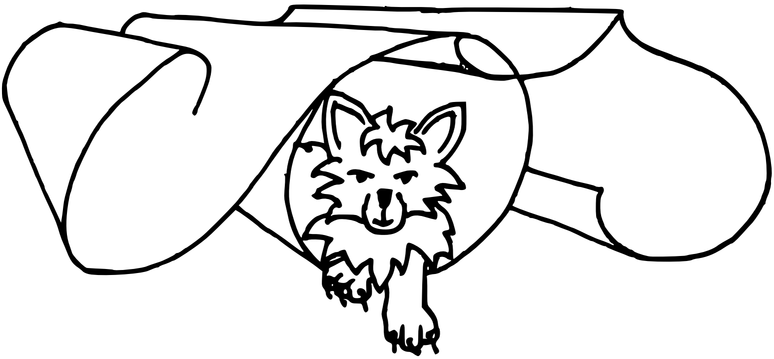
Popsali jsme faktorialickou soustavu, dokázali jsme, že existuje bijekce mezi čísly faktorialické soustavy a čísly jakékoliv klasické mocninné poziční soustavy. Dále jsme popsali algoritmy pro sčítání, odčítání a násobení v této soustavě. Poté jsme dokázali, že jakékoliv racionální číslo v ní má konečný zápis a popsali jsme, jak v ní racionální čísla zapisovat. Nakonec jsme ukázali, že se pomocí faktorialické soustavy dá pracovat s permutacemi.

Výsledková listina 3. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t2	t3	t4	t5	t6	t9	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy											
1.	Prof.^{MM} M. Calábková	4.	206		4	3	4	10						21	55
2.	Mgr.^{MM} T. Domes	2.	30		4		4							8	30
3.	Mgr.^{MM} Z. Johanovská	3.	29		4	2	4							10	29
4.–5.	Mgr.^{MM} J. Škvára	4.	37	1	4	3	4							12	27
	Mgr.^{MM} P. Šťastný	2.	27				4							4	27
6.	Mgr.^{MM} M. Janka	3.	25		4	2	4							10	25
7.–8.	Mgr.^{MM} M. Doležalová	3.	24		4					3				7	24
	Mgr.^{MM} J. Tětek	1.	24		4		4					10		18	24
9.	Doc.^{MM} D. Krasula	2.	102										10	10	22
10.–11.	Mgr.^{MM} J. Pokorný	3.	25		4		4							8	20
	Mgr.^{MM} V. Rozhoň	4.	41		4	3								7	20
12.–13.	Bc.^{MM} D. Jochcová	4.	18	1		3								4	18
	Bc.^{MM} K. Stefanová	3.	18	2						7				9	18
14.–15.	Dr.^{MM} P. Souček	3.	81	1	0	3								4	16
	Dr.^{MM} P. Vincena	4.	97											0	16
16.	Bc.^{MM} F. Oplt	2.	15	0	4	1	4							9	15
17.–19.	Bc.^{MM} A. Mlezivová	1.	13				4							4	13
	Dr.^{MM} P. Nácovský	4.	76											0	13
	Bc.^{MM} K. Smítalová	4.	13											0	13
20.	Bc.^{MM} S. Lukeš	2.	12				4							4	12
21.–25.	Mgr.^{MM} J. Dittrich	3.	33			3	4							7	11
	Dr.^{MM} J. Kušnír	4.	84											0	11
	Bc.^{MM} E. Mlynárčiková	3.	11											0	11
	Bc.^{MM} L. Vincenová	1.	11											0	11
	Bc.^{MM} D. Žáček	2.	11											0	11
26.	Mgr.^{MM} K. Ilievová	4.	32						8					8	10
27.–30.	A. Gajdová	4.	8											0	8
	Bc.^{MM} J. Knížek	4.	14											0	8
	O. Knopp	1.	8			3								3	8
	J. Paidar	1.	8		4									4	8
31.–34.	S. Burešová	1.	7											0	7
	K. Mráz	4.	7											0	7
	M. Töpfer	2.	7											0	7
	P. Turinský	2.	7											0	7
35.–38.	B. Požár	1.	6											0	6
	M. Štván	2.	6											0	6
	M. Turek	3.	6		4	0								4	6
	Mgr.^{MM} J. Václavek	3.	21											0	6
39.–41.	L. Bujnovská	1.	5											0	5
	K. Stodolová	2.	5											0	5
	J. Zeman	3.	5											0	5
42.–46.	L. Kopfová	1.	4											0	4
	R. Luc	2.	4											0	4
	Bc.^{MM} Z. Svobodová	3.	14								2			2	4
	P. Šimůnek	2.	4				4							4	4
	F. Zajíc	2.	5											0	4
47.–54.	F. Čermák	1.	3											0	3
	A. Dejl	1.	3											0	3
	S. Golat	4.	3	0		3								3	3
	Bc.^{MM} T. Paliesek	3.	16	1										1	3
	S. Rosecká	3.	3			0								0	3

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t2	t3	t4	t5	t6	t9	$\sum_0$	$\sum_1$
	A. Šámal	1.	3											0	3
	M. Zika	3.	3											0	3
	M. Zoula	3.	3											0	3
55.–59.	R. Chasák	2.	2											0	2
	J. Dvořák	4.	2											0	2
	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Havelka	1.	13											0	2
	M. Kubeša	3.	2											0	2
	Dr.$^{\text{MM}}$ L. Langerová	4.	51											0	2
60.–62.	J. Pekař	1.	1											0	1
	Mgr.$^{\text{MM}}$ D. Tanglová	1.	20		0									0	1
	T. Troján	1.	1											0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`