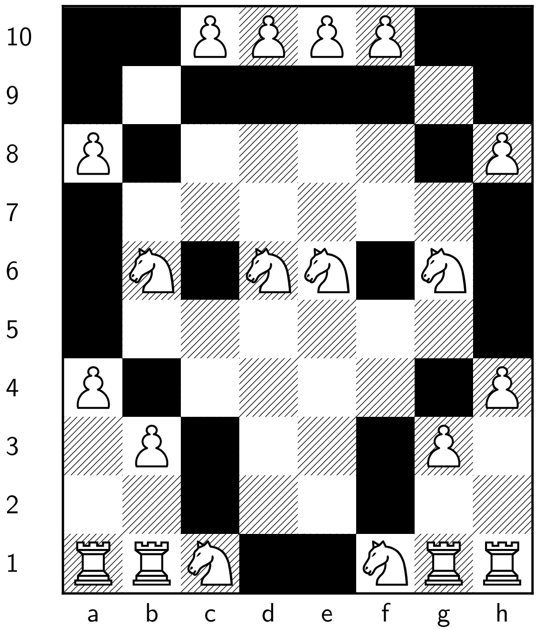
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 4



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé, milé řešitelky,
zdravíme vás v novém roce. Je zde čtvrté číslo vašeho oblíbeného časopisu. Čtvrté číslo je obsáhlé, budeme tedy struční: čtyři nové úlohy, čtyři vzorová řešení a tři témátka.

Těšíme se na vaše řešení úloh a na další příspěvky k témátkům – některé z již došlých tradičně otiskujeme, ostatní najdete na našem webu. Přejeme inspirativní čtení.

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání čtvrté série: 24. 2. 2015

„... a po vaší pravé ruce se nachází slibovaná černá kružnice opsaná bílému n-úhelníku... Ano, tady u nás máme přímo originál... Ano, ano nevyčíslitelná, jak říkám... A hned vedle můžete vidět oněch slavných 12 úseček, jistě jste o nich už všichni slyšeli. Taky originál, zajisté. Všimněte si posledních dvou z nich, támhle napravo, ano, to jsou ty dvě navíc... Záludná úloha, skutečně... Prosím? Že bych to též dokázala poskládat? Tedy, pracuji zde už tolik let a ještě nikdo zatím... Moment, dobrá, zamyslím se.“

Úloha 4.1 – Trojúhelníková (3b + 1b)

Sestavte pomocí 12 shodných úseček 10 rovnostranných stejně velkých trojúhelníků. Bonusový bod dostanete, pokud si vystačíte s 10 úsečkami.

„Ne, ne, stále nevím, jak to ten lišák seskládal. No... Přesuňme se raději k dalšímu exponátu! Ano... hm, tak. Zde, přes celou zeď, pohleďte. Že se opět jedná o originál, jistě nemusím dodávat. Rukopis Nejpřehlednějšího náčrtku na světě. Všimněte si, jak autor pro každý ze vzniklých trojúhelníků použil jinou barvu. Ano, a támhle na druhé straně místnosti je znázorněn průsečík – Riki použil skutečně detailní měřítko... No, ano, jistě, celé je to za sklem. Ne, nemůžete si sáhnout, samozřejmě, proto je zde to sklo. Ten náčrtek si můžete jedině překreslit, máte-li tedy kam.“

Úloha 4.2 – Náčrtek (4b)

Trojúhelník ABC má obvod délky 4. Na polopřímce AB leží bod X, na polopřímce AC leží bod Y, přičemž $|AX| = |AY| = 1$. Úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že jeden z trojúhelníků ABM a ACM má obvod 2.

„Pohleďme nyní na protější stěnu. Kdo z vás pozná tento nákres...? Nikdo, jistě, tak je to vždycky. Tedy, jde o schéma Rikiho cestovní varné konvice. Vypadá to jako jeden velký flek, ano. Říká se, že když mistr toto dílo dokončil, byl tak

nadšený, že začal vrtět ocasem. Tím omylem zvrhl kalamář a dal tak nákresu dnešní podobu. Některé původní tahy jsou stále dobře viditelné, ale většina znaků je nečitelná. Jaké konkrétní hodnoty měl autor na mysli, se už asi nikdy nedovíme. Leda by je někdo dokázal odvodit…“

Úloha 4.3 – Konvice (3b)

Cestovní varná konvice má na sobě přepínač pro volbu napětí[1] 230 V nebo 120 V. Na ohřev vody používá dvě topná tělesa zapojená do série, resp. paralelně, podle polohy přepínače. Navrhněte hodnoty odporů topných těles tak, aby v obou případech měla konvice stejný příkon. Jak by mohlo vypadat zapojení při použití dvojpólového přepínače?

„Tak a ještě jeden, poslední exponát našeho muzea. Zde za rohem, ano: Velmistrův autoportrét. Velmi impresivní, že ano? Domníváme se, že ta skvrna v rohu je podpis. Pojďte blíž, podívejte, tady je na ní jasně rozeznatelné velké psací er. A teď, hm… Jistě, ovšem. To je z naší expozice všechno. Tak prosím, támhle už na vás čekají kolegové z partnerské univerzity. Říká se o nich, že si potrpí na formalismy. Apeluji na vás, abyste se s každým řádně přivítali… Ano, vy, mladá dámo, si na tom dejte obzvlášť záležet. A usmívejte se prosím, no tak!“

[1] Jedná se o efektivní hodnotu napětí.

Úloha 4.4 – Vřelé přivítání (1b)

Dvě stejně velké skupiny vědců si na uvítanou chtějí potřást rukama a to tak, aby si každý vědec potřásl s každým kolegou z druhé skupiny. V každém kole si může každý potřást rukou s nejvýše jedním kolegou. Vaším úkolem je vymyslet, jak si vědci mají potřást rukama během N kol, kde N je počet vědců v jedné skupině. Ovšem jedna mladá dáma je tak unesená, že ignoruje váš postup a potřásá si s kolegy zcela náhodně. V každém kole si potřese s jiným vědcem, ale nemůžete ovlivnit s kterým. Můžete předpokládat, že si vždy potřese jako první a máte tedy možnost přizpůsobit tomu aktuální kolo.

„Tak to bychom měli, uf... Muzeum Rikiho tvorby vám přeje hezký den... Ano pane, nashledanou.“

Řešení úloh 2. série

Úloha 2.1 – Záhada vagónku (4b)

Zadání:

Zmíněný stroj je obyčejný vagónek o hmotnosti m bez vlastního pohonu. Pod kopcem je roztlačený na rychlost v_1 a poté vyjede setrvačností po kolejích na vršek kopce o výšce h. Ztráty energie odporem vzduchu, třením apod. jsou zanedbatelné, stejně tak je zanedbatelná rotační hmota koleček. Pak můžeme spočíst rychlost v_2 na vrcholu kopce podle učebnicového vztahu pro zachování energie

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = mgh\,,$$

kde g je gravitační zrychlení.

Také víme, že rychlost pohybu tělesa nejde určit absolutně, ale jen vůči nějaké vztažné soustavě, a že fyzikální zákony platí stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách.

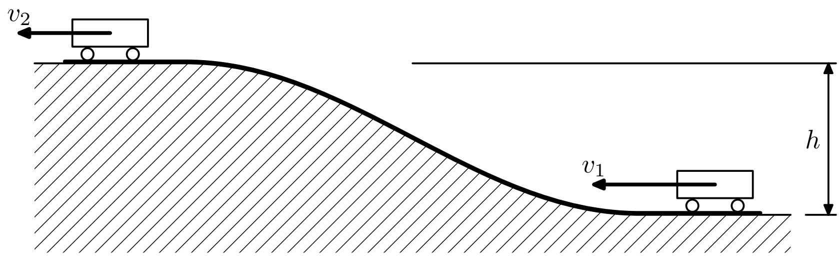
Vezměme tedy soustavu, která se vůči předchozí pohybuje horizontálně rychlostí v_x. Rychlosti vagónku v ní budou $v_1 + v_x$ a $v_2 + v_x$. Výškový rozdíl se samozřejmě nezmění, takže pravá strana uvedené rovnice pro zachování energie zůstane stejná. Levá strana se ale „rozbila“, protože

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_2^2\right) \neq \frac{1}{2}\,m\left[\left(v_1 + v_x\right)^2 - \left(v_2 + v_x\right)^2\right]\,.$$

Neplatí zachování energie? Neplatí ekvivalence vztažných soustav? Kde je chyba?

Řešení:

Úloha se, alespoň podle došlých řešení, ukázala být hodně obtížnou. Prvním problémem bylo už samotné pochopení sporu v zadání a zacházení se vztažnými soustavami. Pokud v této oblasti nemáte úplně jasno, podívejte se před čtením tohoto řešení nejprve o pár stránek dále na první dodatek, který podrobněji popisuje, co jsou zač vztažné soustavy, a jak s nimi zacházet.

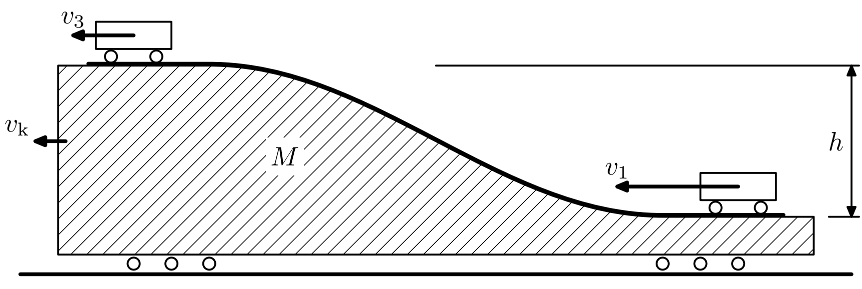


Obrázek 1

Dále se někteří z vás snažili hledat chybu ve skládání rychlosti vagónku a posunu vztažné soustavy. Vycházeli z předpokladu, že buďto v_2 nebo obě rychlosti nemíří horizontálně, ale šikmo nahoru. Ačkoliv to v zadání není jednoznačně uvedeno, je zjevné, že uvedený rozpor nastane i v případě, kdy se vagónek pohybuje na začátku úlohy i po vyjetí kopce horizontálně, viz obrázek 1. Zavedením vertikální složky rychlosti se úloha jen matematicky zkomplikuje, ale fyzikální podstata se nezmění. Zájemci najdou výpočet, který to ukazuje, v druhém dodatku na konci tohoto článku.

Kde je tedy chyba? Hlavním podezřelým je samotný kopec. Bylo na něj poukázáno i v několika řešeních, ale nikdo bohužel nedotáhl své úvahy k jednoznačnému prokázání viny. Kopeček se v druhé vztažné soustavě pohybuje, konkrétně rychlostí v_x. Takže má svoji nenulovou kinetickou energii. Jenže jeho rychlost se v průběhu děje nemění, kinetická energie bude stejná na začátku i na konci, a tudíž nijak neovlivní celkovou změnu energie... nebo ovlivní?

Zkusme si pro začátek vzít lehčího soupeře. Bude to přenosný kopec o hmotnosti M, který umístíme na vlastní horizontální koleje, tak, aby se mohl volně pohybovat v horizontálním směru. Situaci ukazuje obrázek 2.



Obrázek 2: Vagónek na pohyblivém kopci o hmotnosti M.

Na začátku pokusu je z pohledu první vztažné soustavy kopec v klidu a vagónek se pohybuje rychlostí v_1, po vyjetí na vršek bude naměřena rychlost vagónku v_3 a rychlost kopce v_k. V druhé zkoumané vztažné soustavě jsou všechny tyto rychlosti o v_x vyšší.

Napíšeme si vztahy pro zachování mechanické energie včetně energie kopečku. Měřeno v první vztažné soustavě:

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_3^2\right) + \frac{1}{2}\,M\left(0 - v_\mathrm{k}^2\right) = mgh$$

a ve druhé:

$$\frac{1}{2}\,m\left[(v_1 + v_x)^2 - (v_3 + v_x)^2\right] + \frac{1}{2}\,M\left[v_x^2 - (v_\mathrm{k} - v_x)^2\right] = mgh\,.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_3^2\right) + mv_x(v_1 - v_3) + \frac{1}{2}\,M\left(0 - v_\mathrm{k}^2\right) - Mv_xv_\mathrm{k} &= mgh\,,\\ \frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_3^2\right) + \frac{1}{2}\,M\left(0 - v_\mathrm{k}^2\right) + v_x\left(mv_1 - mv_3 - Mv_\mathrm{k}\right) &= mgh\,.\end{aligned}$$

Je vidět, že pokud má platit zachování mechanické energie stejným způsobem v obou soustavách, musí být poslední člen na levé straně rovnice nulový:

$$mv_1 - mv_3 - Mv_\mathrm{k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad mv_1 = mv_3 + Mv_\mathrm{k}\,.$$

Tato podmínka je zápisem zachování hybnosti. Hybnost vagónku na začátku děje se rovná součtu hybností vagónku a kopečku na konci. Zachování hybnosti platí, členy ,,navíc“ mají vždy nulovou hodnotu, a úloha s malým pohyblivým kopečkem vychází dle očekávání nezávisle na vztažné soustavě.

Zpátky k původnímu nepohyblivému kopci. Celý problém spočívá v tom, že nic jako nepohyblivý kopec neexistuje. Pokud chceme, aby se nějaký předmět nedal posunout, musíme jej udělat těžším.[2] Budeme tedy zvyšovat hmotnost kopečku M až k nekonečnu. Tím se zároveň bude snižovat v_k, limitně až k nule. Rozdíl kinetických energií ale, díky velikosti M, k nule klesnout nemusí, takže získáme (skoro) nekonečně těžký kopec, který může absorbovat nebo uvolnit libovolné množství kinetické energie, ač (skoro) nezmění svoji rychlost.[3] Dobrá, máme viníka. Nekonečně těžký pevný kopec. Ale jak poznat, který z postupů v zadání je ten „správný“? Pro jaké v_x bude kinetická energie pohlcená kopcem nulová?

Odpověď jde spočíst pouhým upravováním rovnic pro zachování kinetické energie a hybnosti tak, jak jsou uvedeny výše, ale vznikající výrazy jsou ledacos,

[2] V praxi většinou tak, že jej přímo či nepřímo spojíme se zeměkoulí, která bývá tím nejtěžším, co máme běžně po ruce.

[3] Množství kinetické energie je sice přesně dáno parametry konkrétní situace, ale bez určení těchto parametrů (hmotnosti, počáteční rychlost vagónku atd.) o něm nemůžeme nic bližšího říct.

jen ne hezké. Zkusme se nad otázkou raději zamyslet bez psaní a upravovaní dlouhých vzorců.

Vyjděme z toho, že rychlost kopce se změní o neznámé, velmi malé v_k. Pokud má být rozdíl kinetické energie i přes tuto změnu rychlosti nulový, musíme využít faktu, že velikost kinetické energie je nezávislá na znaménku (směru) rychlosti. Proto si najdeme vztažnou soustavu, ve které má kopec na začátku rychlost $-v_\mathrm{k}/2$ a na konci $v_\mathrm{k}/2$. Rozdíl rychlostí je požadované v_k, rozdíl kinetických energií nula, protože $(-v_\mathrm{k}/2)^2 = (v_\mathrm{k}/2)^2$.

Hledaná vztažná soustava, ve které je vliv kopce na bilanci mechanické energie nulový, bude ta, pro kterou platí $v_x = v_\mathrm{k}/2$. Protože se v_k velmi těžkého kopce blíží k nule, můžeme říct, že jde o soustavu, ve které je kopec v klidu.

Tím se dostáváme k závěru: *Vztah pro zachování celkové mechanické energie pohybujících se těles můžeme použít pouze v takové vztažné soustavě, ve které mají všechny pevné nepohyblivé předměty nulovou rychlost.* Pokud tato podmínka není splněna, bude při vzájemné interakci narůstat nebo klesat kinetická energie těchto pevných předmětů i když se nemění jejich rychlost, a tuto změnu bychom museli započíst do celkové bilance.

Dodatek 1: vztažné soustavy

Vztažná soustava není v principu nic komplikovanějšího než „opěrný bod“,[4] který si umístíme do prostoru, abychom mohli popisovat polohy dalších bodů. Volný prostor totiž nemá žádné univerzální značky na které bychom se mohli odkázat, když budeme chtít říct, kde jsme. Jediné, co umíme povědět, je, jak daleko od sebe jsou nějaké dva vybrané body, jaký úhel svírají dvě spojnice různých bodů apod. Vždy jen vzájemné vzdálenosti nebo polohy, nikdy absolutní údaj.

Protože prostor nemá žádné absolutní souřadnice, nemůžeme ani určit, která vztažná soustava je správnější nebo méně správná. Každý si může vyrobit svoji tak, jak se mu líbí. Pro polohu jednoho a toho samého bodu pak můžeme mít nekonečně mnoho různých číselných výsledků, a všechny jsou správné.

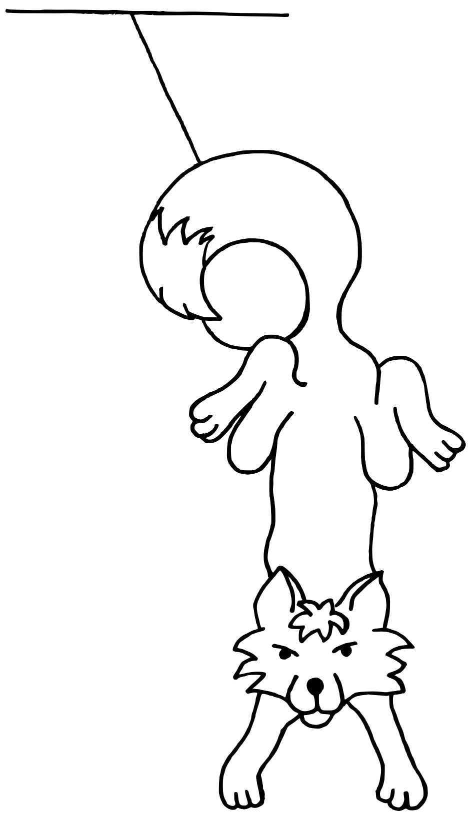
Dokud celý děj pozorujeme a popisujeme s použitím jen jedné vztažné soustavy, nemusí nás to příliš trápit. Platnost a podoba fyzikálních zákonů je nezávislá na použité vztažné soustavě.[5] Každý pozorovatel bude mít svá vlastní čísla odlišná od ostatních, ale každý zjistí, že vztahy mezi jeho čísly jsou popsány stejnými univerzálními fyzikálními zákony.

[4] Přesněji řečeno jsou to pro trojrozměrný prostor minimálně čtyři body umístěné tak, že žádné tři neleží na jedné přímce.

[5] Na tomto místě bychom měli poznamenat, že existuje skupina ,,lepších“ vztažných soustav. Říká se jim *inerciální*, a vyznačují se tím, že v nich platí první Newtonův zákon. Tedy těleso, na které nepůsobí žádné vnější síly je v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. V neinerciálních soustavách to neplatí, a pokud chceme takovou soustavu použít, bývá dobrým zvykem zadefinovat v ní *zdánlivé síly*, které působí na všechna tělesa. Pokud tyto síly započteme do rovnic, můžeme konstatovat, že i děje měřené v neinerciální soustavě probíhají podle stejných známých fyzikálních zákonů. Není na tom nic záhadnějšího, než například homogenní gravitační pole – pokud bychom nepátrali po původu gravitace, můžeme si stejně tak dobře říct, že máme neinerciální vztažnou soustavu, ve které existuje zdánlivá síla mířící směrem dolů.

Pokud si budeme chtít jednotlivá měření navzájem posílat, musíme říct nejen kolik jsme naměřili, ale také v jaké vztažné soustavě to bylo. Známe-li vztah naší a cizí vztažné soustavy (vzájemnou polohu a orientaci), můžeme cizí číselné hodnoty přepočítat do našich souřadnic, a získáme tím stejná čísla, jaká bychom naměřili sami. Všichni pozorujeme stejný jev a stejná skutečná tělesa, liší se jen reference, vůči které měříme polohy v prostoru.

Vztaženo na tuto úlohu – v obou soustavách pozorujeme jeden a ten samý vagónek. V každé soustavě naměříme jiná čísla (zde především rychlosti). V každé soustavě by měla být naměřená čísla vzájemně spojena univerzálními fyzikálními zákony (například zachování mechanické energie). Protože jde ale o stejný jev, jen pozorovaný z různých míst, můžeme v kterémkoliv okamžiku vzít údaj naměřený v jedné soustavě, přepočíst jej do souřadnic druhé soustavy (pro situaci ze zadání to znamená především přičíst nebo odečíst vzájemnou rychlost soustav, v_x), a musíme získat totožný údaj, jaký jsme v cílové soustavě přímo změřili.



Dodatek 2: rychlost vagónku různoběžná se směrem v_x

Pro ilustraci skutečnosti, že na problém v zadání úlohy nemá vliv případná svislá složka rychlosti vagónku si jeho pohyb rozložíme do horizontální (označované indexem „h“) a vertikální (index „v“) složky.

V soustavě, ve které je kopeček v klidu bude počáteční rychlost vagónku rozepsaná do složek $(v_{1\mathrm{h}}, v_{1\mathrm{v}})$ a konečná rychlost ve výšce h potom $(v_{2\mathrm{h}}, v_{2\mathrm{v}})$. Druhé mocniny velikosti rychlostí použité pro vyjádření kinetické energie budou $v_{1\mathrm{h}}^2 + v_{1\mathrm{v}}^2$ a $v_{2\mathrm{h}}^2 + v_{2\mathrm{v}}^2$, a vztah pro zachování kinetické energie

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_{1\mathrm{h}}^2 + v_{1\mathrm{v}}^2 - v_{2\mathrm{h}}^2 - v_{2\mathrm{v}}^2\right) = mgh\,.$$

Pokud k horizontálním složkám rychlostí přičteme v_x, dostaneme

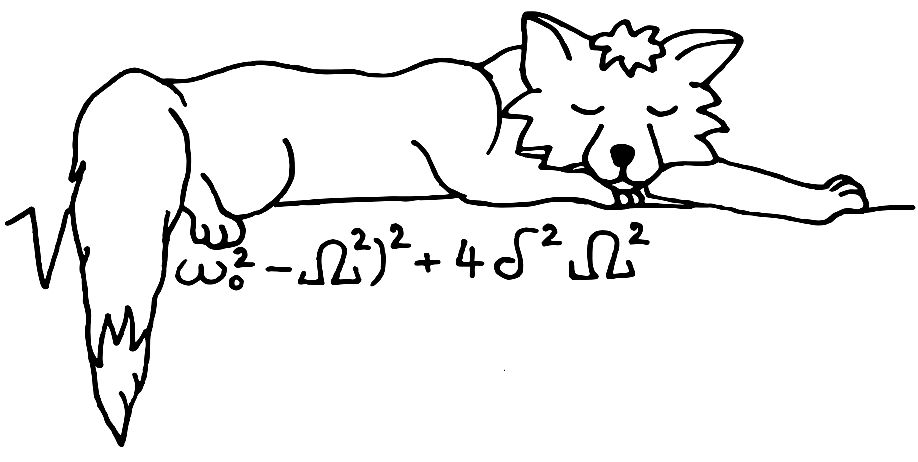
$$\frac{1}{2}\,m\left[(v_{1\mathrm{h}} + v_x)^2 + v_{1\mathrm{v}}^2 - (v_{2\mathrm{h}} + v_x)^2 - v_{2\mathrm{v}}^2\right] = mgh\,.$$

Po odečtení první z těchto dvou rovnic od druhé dostaneme stejný problém, jaký je uvedený v zadání:

$$\frac{1}{2}\,m\left[(v_{1\mathrm{h}} + v_x)^2 - v_{1\mathrm{h}}^2 - (v_{2\mathrm{h}} + v_x)^2 + v_{2\mathrm{h}}^2\right] = 0\,,$$
$$\frac{1}{2}\,m\left[(v_{1\mathrm{h}} + v_x)^2 - (v_{2\mathrm{h}} + v_x)^2\right] = \frac{1}{2}\,m\left(v_{1\mathrm{h}}^2 - v_{2\mathrm{h}}^2\right)\,,$$

což je pro vzájemně různé $v_{1\mathrm{h}}$ a $v_{2\mathrm{h}}$ splněno jen pro $v_x = 0$. Problém v zadání úlohy tedy zůstává a je nezávislý na svislé složce rychlosti. Jedinou výjimkou by byl vagónek, který nezmění horizontální složku své rychlosti. Ale to je možné, jak si můžete každý rozmyslet, jen v situaci, kdy by byl na počátku „vystřelený“ kolmo vzhůru, a k žádné interakci s kopcem by tak vůbec nedošlo.

Marble



Úloha 2.2 – Drahokamy (3b)

Zadání:

První panoš povídá: „V pokladnici jsou tři druhy drahokamů. Když se počty drahokamů jednotlivých druhů vynásobí, vyjde 36.“

Druhý panoš se dožadoval dalších informací, první tedy odvětil: „Počet drahokamů v pokladnici je stejný jako počet hostí v této krčmě.“

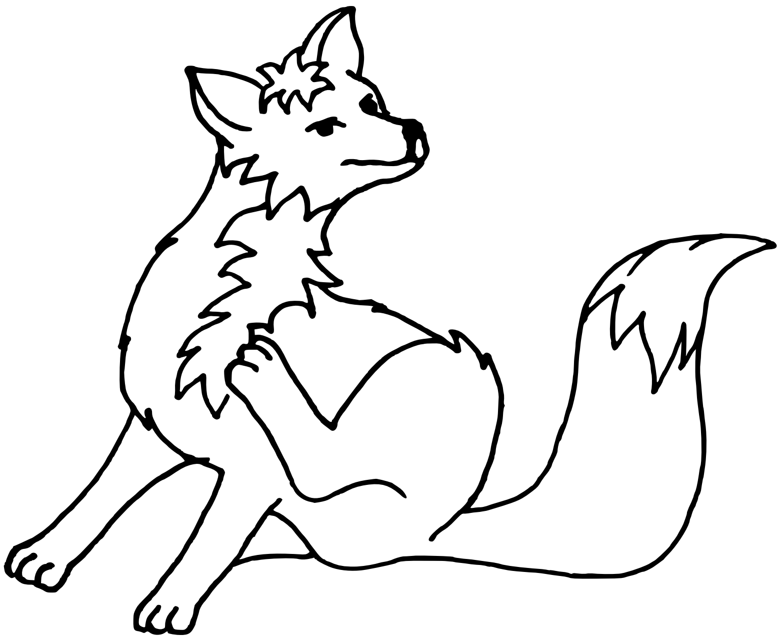
Druhý panoš stále nebyl spokojený, a tak první dodal: „Každý druh má svou hromádku. Největší z hromádek musí mít cenu alespoň tisíce grošíků, ne-li víc.“ To druhému panoši stačilo.

Kolik bylo v pokladnici kterých drahokamů?

Řešení:

Na začátku víme jen to, že počty drahokamů jednotlivých druhů jsou přirozená čísla. První panoš nám prozradí, že druhy jsou tři a když jejich počty vynásobíme, dostaneme 36. To počet možností značně omezí:

$$
\begin{array}{lll}
36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 & 36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 & 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \\
36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 & 36 = 2 \cdot 3 \cdot 6 & \\
36 = 1 \cdot 3 \cdot 12 & & \\
36 = 1 \cdot 4 \cdot 9 & & \\
36 = 1 \cdot 6 \cdot 6 & &
\end{array}
$$



Dále se dozvídáme, že drahokamů v pokladnici je tolik jako hostů v krčmě. Co z toho vyvodit, kromě nezajímavého faktu, že celkový počet drahokamů je opět přirozené číslo? Důležité je, že tato informace druhému panošovi nestačila. Tedy počet drahokamů je číslo, které se mezi součty trojic přirozených čísel, na které se dá 36 rozložit, vyskytuje alespoň dvakrát:

$$\begin{array}{lll} 1+1+36=38 & 2+2+9=13 & 3+3+4=10 \\ 1+2+18=21 & 2+3+6=11 & \\ 1+3+12=16 & & \\ 1+4+9=14 & & \\ 1+6+6=13 & & \end{array}$$

Takové číslo je jen jedno: $13 = 2+2+9 = 1+6+6$. Která z těchto dvou trojic odpovídá velikostem hromádek v pokladnici? To určíme z poslední panošovy výpovědi, kterou nám jen tak mimochodem prozradí, že jedna z hromádek je největší. V pokladnici tedy bylo 2, 2 a 9 drahokamů.

Matěj

Úloha 2.3 – Místnosti (3b)

Zadání:
Určete, pro jaká přirozená čísla N je možné sestavit síť chodeb a místností splňující následující podmínky:

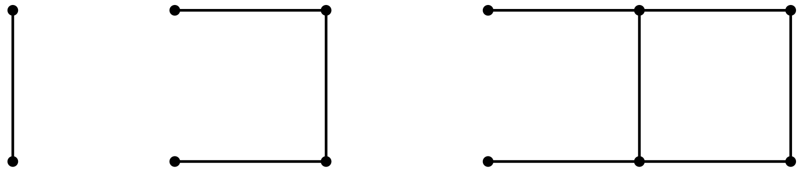
- *Počet místností je $2N$.*
- *Počet chodeb vedoucích z jednotlivých místností je právě $1, 1, 2, 2, \ldots, N, N$.*

Místnosti mohou být libovolně pospojované (mohou například existovat dvě místnosti takové, že se z jedné nelze dostat do druhé). Každá chodba spojuje přímo právě dvě různé místnosti a nemá žádné odbočky, ale chodby se mohou mimoúrovňově libovolně míjet. Navíc mezi každou dvojicí místností vede nejvýše jedna chodba.

Řešení:
Pro několik prvních hodnot N systém danných vlastností sestrojíme poměrně snadno (viz obrázek 3). Zkusme tedy dokázat, že takový systém jde zkonstruovat pro každé přirozené číslo N. Jelikož pro prvních pár N už víme, že to jde, použijeme matematickou indukci a to podle N, s indukčním krokem dva (jednoduše řečeno ukážeme, že ze systému pro $N-2$ dokážeme vždy zkonstruovat systém pro N)[6]. Musíme tedy zvlášť vyřešit první krok pro N sudé a pro N liché. Jak pro $N=2$, tak pro $N=1$ jsme už systém zkonstruovali, první krok je tedy v pořádku.

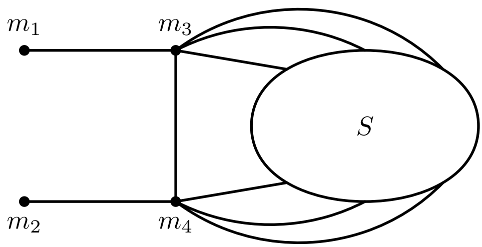
Mějme tedy N takové, že pro $N-2$ umíme systém danný systém chodeb zkonstruovat. Počtu chodeb vedoucích z nějaké místnosti m budeme říkat *stupeň m*.

[6] O tom, jak přesně matematická indukce funguje, se můžeš dočíst například na `http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematick%C3%A1_indukce`



Obrázek 3: Systémy místností pro $N = 1, 2, 3$

Máme tedy $2N$ místností. Z $2N - 4 = 2(N - 2)$ místností podle předpokladu dokážeme vytvořit systém S tak, že jsou v něm právě dvě místnosti stupně $N - 2$, právě dvě místnosti stupně $N - 3$, … Čtyři zbylé místnosti si označíme m_1, m_2, m_3, m_4. Přidáme chodby mezi m_1 a m_3, mezi m_3 a m_4 a mezi m_4 a m_2, takže m_1 a m_2 mají stupeň jedna a m_3 a m_4 mají stupeň dva.



Obrázek 4: Systém po připojení nových místností

Teď využijeme S – rozdělíme si místnosti v něm na dvě libovolné poloviny S_1 a S_2, z každé místnosti z S_1 přidáme chodbu do m_3 a z každé místnosti v S_2 přidáme chodbu do m_4. Co nám tato úprava udělala se stupni místností? Stupeň m_1 a m_2 se nezmění. Jak k m_1, tak k m_2 přidám $N - 2$ chodeb (v S je $2(N - 2)$ místností), tedy budou mít stupeň N. Co se týče místností z S, tak ke každé přibyde jedna nová chodba, tedy v S budou právě dvě místnosti stupně $N - 1$, právě dvě místnosti stupně $N - 2$, …, právě dvě místnosti stupně dva. Máme tudíž právě dvě místnosti stupně i pro každé i mezi N a jednou včetně, což jsme chtěli. Systém s danými vlastnostmi proto jde zkonstruovat pro každé přirozené N.

$\mathcal{O}(N)$dra

Úloha 2.4 – Racionální sen (4b)

Zadání:

Dokaž, že reálné číslo k je racionální (tj. dá se zapsat ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou celá čísla a n není nula) právě tehdy, když mezi čísly k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$, … můžeme vybrat tři, která tvoří geometrickou posloupnost.[7]

[7] Jejich velikost tedy bude a_0, $a_0 q$ a $a_0 q^2$, kde a_0 a q jsou kladná reálná čísla.

Řešení (podle Václava Rozhoně):
Dokážeme zvlášť obě implikace.

Nejprve předpokládejme, že k je racionální, tj. je tvaru $\frac{m}{n}$, kde m je celé a n přirozené. Přičteme si k němu dostatečně velké přirozené x, aby byl součet $k+x$ kladný. Číslo $k+x = \frac{m}{n}+x$ zvolíme prvním členem naší geometrické posloupnosti, kvocient zvolíme $n+1$. Stačí ověřit, že první tři členy této posloupnosti se nacházejí i v posloupnosti $k, k+1, k+2, \ldots$

Pro $k+x$ to platí, protože x je přirozené. Dále

$$(n+1)(k+x) = (n+1)\left(\frac{m}{n}+x\right) = \frac{m}{n} + m + (n+1)x$$

a $m+(n+1)x$ je přirozené číslo. Podobně

$$(n+1)^2 \cdot (k+x) = (n+1)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}+x\right) = \frac{m}{n} + (n+2)m + (n+1)^2 \cdot x$$

a $(n+2)m+(n+1)^2 \cdot x$ je přirozené. V posloupnosti $k, k+1, k+2, \ldots$ jsme tedy našli tříčlennou geometrickou podposloupnost.

Nyní naopak předpokládejme, že máme tříčlennou geometrickou posloupnost

$$a_0 = k+x,\ a_0q = k+y,\ a_0q^2 = k+z$$

pro $x < y < z$ přirozené. Potom platí

$$(k+y)^2 = a_0^2q^2 = a_0a_0q^2 = (k+x)(k+z).$$

Vyjádřením k z této rovnice dostaneme

$$k = \frac{xz-y^2}{2y-x-z},$$

pokud $2y-x-z$ není 0. V tomto případě je číslo k ve tvaru zlomku dvou přirozených čísel a proto je racionální.

Zbývá se poprat s případem $2y = x+z$. Pak je buď $k = 0$, což je racionální číslo, nebo $xz = y^2$. Pak ale $4xz = (2y)^2 = (x+z)^2$ a úpravou dostaneme, že $(x-z)^2 = 0$, tedy $x = z$. To je spor, neboť členy v geometrické posloupnosti musí být různé.

Pepa

Řešení témat

Téma 1 – Papírová letadélka

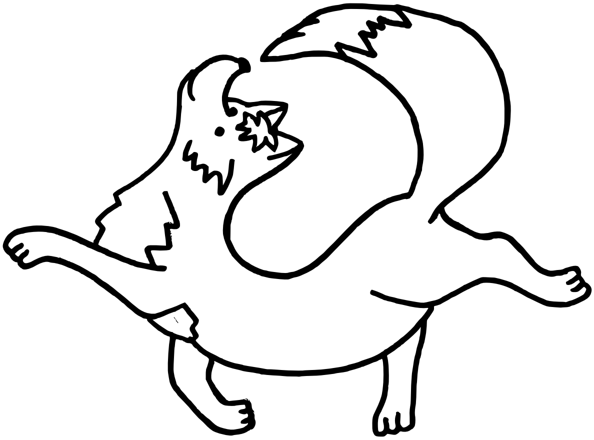
V nedávné době jsme od vás neobdrželi žádné příspěvky. Proto připomínáme, že je stále co řešit. Spousta otázek vyplynula z vašich příspěvků, které přišly dříve. Najdete je v minulém čísle a na webu tématka u jednotlivých příspěvků. Přesto bych některé z oněch otázek znovu zdůraznila. Stále není jasné, jak je to přesně se vztlakem, a zda je dobré, aby se letadélko za letu houpalo, či nikoliv. Zajímavou otázkou je i vliv plochy křídel na dolet a stabilitu a jak s doletem souvisí rychlost letu.

Zuzka

Téma 3 – Reakce v miskách

K reakcím v miskách zatím došla jen dvě schémata chlorace a obě již byla otištěna. Vzhledem k tomu, že na webu už delší dobu visí přeložený úvod do Machinations, doufám, že se více řešitelů odváží experimentovat s tímto nástrojem, nebojte, nekouše! Případné dotazy můžete i nadále posílat na můj e-mail[7], rád vám pomůžu. Pokud vám přijdou biologické reakce nudné, zkuste například vyrobit simulaci chemického oscilátoru. Úvod do chemických oscilátorů můžete najít (sice v slovenštině) v práci J. Rintelové, K. Stowasserové, L. Piatra a N. Nováka o teorii chaosu[8], případně vám určitě rádi (možná i s demonstrací) poradí vaši chemikáři.

Matej



Téma 5 – Pokrytí šachovnice

K tématu dorazily dva příspěvky. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Doležalová se přidržela klasické šachovnice 8×8, na kterou pomocí figur jednoho hráče kreslila nejrůznější útvary včetně obrázku Rikiho. Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Calábková ukazuje dokonce, jak na klasickou šachovnici nakreslit pomocí neohrožených polí některé útvary tak, aby každá figura byla zároveň ohrožována. Na závěr potom připojuje pěkný obrázek

[8] `lieskovsky.matej+tema@gmail.com`

[9] `http://www.1sg.sk/www/data/01/projekty/2011_2012/pilots/chaos/chemicke-oscilatory.html`

Rikiho nakreslený na šachovnici neobvyklých rozměrů pomocí figur v libovolném počtu. Oba příspěvky otiskujeme.

Doc.^{MM} Markéta Calábková ve svém článku také nabízí příklady útvarů, které nemohou z neohrožených polí vzniknout. Nabízí se otázka, jestli by bylo možné vytvořit nějaké postačující podmínky, jejichž splnění bude znamenat, že útvar sestrojit určitě lze. Představme si, že máme zadanou šachovnici a na ní vyznačená pole, která nemají být ohrožována žádnou figurou a libovolný počet figur. Jak zjistíme, jestli lze figury rozmístit tak, aby byla ohrožována právě chtěná pole?

Představme si, že hrajeme hru, ve které chceme přimět protihráče, aby rozmístil figury na šachovnici tak, jak si to my přejeme. Dáme mu šachovnici s vyznačenými poli, která nemají být ohrožována, a řekneme mu, ať příslušně rozmístí figury. Existují útvary z neohrožených polí, kterých lze dosáhnout pouze jedním způsobem? Pro jednoduchost se můžeme omezit jen na některé figury, ale umožnit je používat v libovolném množství.

Obecně pracovat se spoustou různých figur může být často otravné. Pojďme se omezit například jen na libovolný počet střelců a koní. Jaké pravidelné útvary dokážeme vytvořit pomocí nich?

Oba příspěvky nabízí obrázek Rikiho. Ani v jednom z nich ale není Riki namalován tak, aby každá figura byla zároveň ohrožována nějakou jinou. Uměli byste ho namalovat i tak?

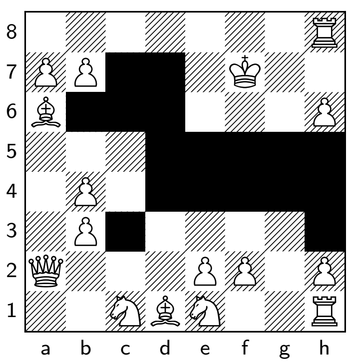
Kuba

Dárky pro Rikiho (3b)

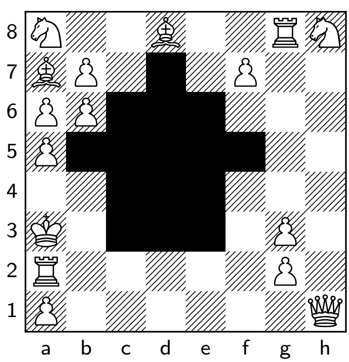
Bc.^{MM} Markéta Doležalová

Napřed se podíváme na samotného Rikiho a na místo, kde bydlí.

Tohle je Riki:

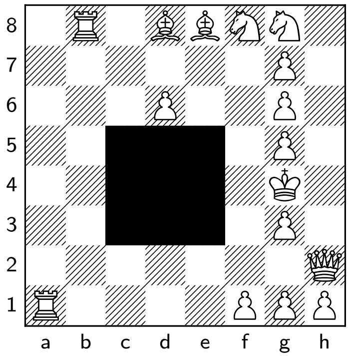


Nedávno se přestěhoval do svého nového domečku:

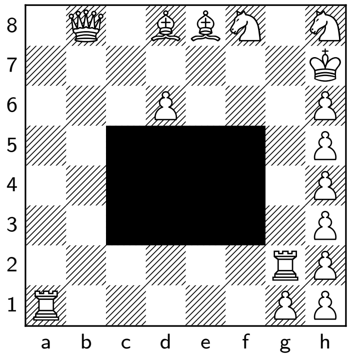


A pozval všechny svoje kamarády na oslavu narozenin. Copak mu donesli?

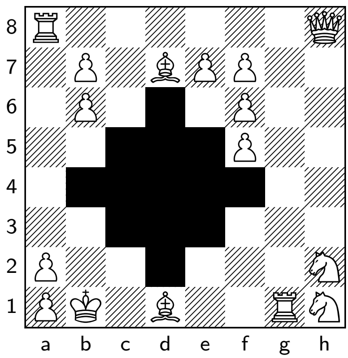
Třeba naprosto univerzální Minecraftovou kostku:



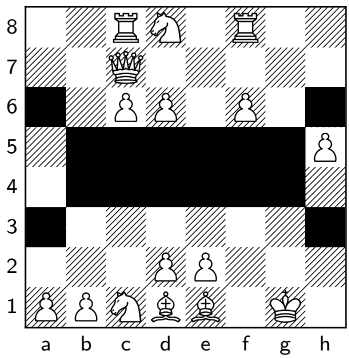
Podivnou obdélníkovitou věc:



Balónek:



A protože lišky jsou šelmy psovité, Riky určitě nepohrdl ani dobrou kostí.



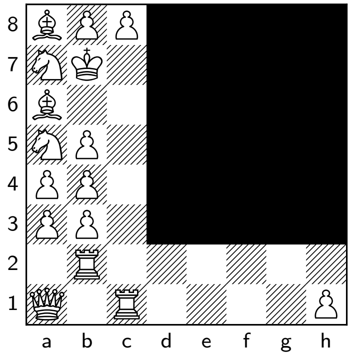
Čtverce v ohrožení (7b)

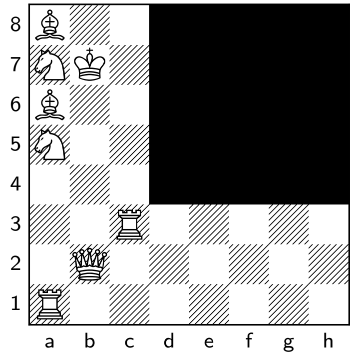
Doc.^{MM} Markéta Calábková

Mám dilema, jestli pěšce považovat za šachovou figuru nebo ne. Občas jej nepotřebuji, občas je pro mě nezbytný. Jaká pole jednotlivé figury (a pěšec) ohrožují, je obecně známo.

Šachovnici a pole ohrožovaná pěšci vnímám z pohledu bílého. Začerněná políčka jsou neohrožená žádnou figurou.

Mohou neohrožovaná pole, na kterých současně nestojí žádná figurka, tvořit obdélník? Ano, mohou. Dokonce je v tomto uspořádání každá figura ohrožována nějakou jinou. Nepovedlo se mi najít konfiguraci, která by byla platná i při odstranění pěšců, protože se mi nepovedlo účinně zablokovat oba střelce a dámu zároveň pouze „velkými“ figurami. Ale toto je největší pravoúhelník, jaký lze vytvořit z neohrožovaných polí. Pro větší už nenajdu na šachovnici dvě pole, na která bych mohla umístit jezdce tak, aby neohrožoval aspoň jedno z polí vybraného pravoúhelníku.

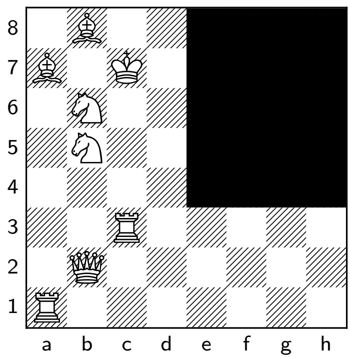


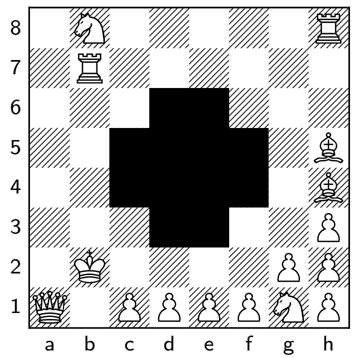


Poznámka redakce: Umíme vytvořit ještě větší obdélník, kde je stále každá figura ohrožována nějakou jinou. Umíte to také?

A co čtverec? Také to jde. Dokonce jsem našla rozmístění pouze „velkých“ figur, ve kterém je každá figura ohrožována nějakou jinou a kde neohrožovaná pole tvoří čtverec. Pěšce si tam můžeme naskládat třeba jako v předchozím případě.

Menší pravoúhelník umím také stvořit pouze za pomoci „velkých“ figur. Pěšce případně naskládám tak, aby nepřekážely, je to tak možné udělat, aby byla i potom každá figura ohrožena jinou figurou. (Naskládám je do všech sousedních políček střelců, potom na políčka dole a vpravo nahoře od krále a potom na políčka h8 a h7 podle obvyklého značení).





Ještě menší pravoúhelníky už se mi povedlo stvořit pouze pomocí „velkých“ figur i pěšců současně.

Kříž či „kruh“? Záleží na tom, jaký. Takovýto malý vytvořit jde, i když se nemůžu rozhodnout, jestli se jedná spíše o kříž, nebo o „kruh“. Rozhodně se mi jej povedlo vytvořit pouze pomocí „velkých“ figur i pěšců a nenašla jsem uspořádání, aby byla každá figurka ohrožena nějakou jinou.

Ovšem kříž s delšími rameny nebo „kruh“ o větším poloměru vytvořit nejde. U kříže s delšími rameny mám problém, že nedokážu současně pokrýt pole c6 a f6 kvůli tomu, že mám jen jednoho krále a pěšáci pochodují směrem k vyšším číslům řádků, tedy ode mě. A kůň může stát pouze v rohovém políčku. U většího kruhu mohu koně taky umístit jen do rohového políčka, ať už je kruhem myšlen jakýkoliv útvar, který v rámci možností kruh kopíruje.

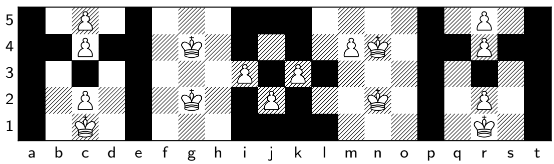
Poznámka redakce: „Kruh“ o větším poloměru lze najít v příspěvku Bc.^{MM} Markéty Doležalové.

Využijeme-li i figurky druhého hráče, rozhodně nám to nepomůže sestrojit větší útvary, bude problém s tím, kam všechny ty figurky vůbec umístit (když bereme i pěšce).

Máme-li libovolnou obdélníkovou šachovnici a libovolné šachové figury v libovolném množství, nemůžeme z neohrožených políček, na kterých současně nestojí žádná figurka, vytvořit třeba čtverec o straně tři, jehož vnitřní políčko je ohroženo nějakou figurou. Nemůže být, protože jakmile je políčko ohroženo, je automaticky ohroženo ještě aspoň jedno jeho sousední políčko. Stačí si nakreslit, jaké útvary ohrožují jednotlivé figury. Dále nemůžeme vytvořit ještě obdélník o jedné straně 3 s vnitřkem volným. Pokud bychom měli pěšce obou hráčů, pochodovali by na opačné strany, tedy obdélník o straně 4 s vnitřkem volným je možné sestrojit.

A nakonec jsem si prostě hrála :) . Využila jsem figurky, co mě zrovna napadly, v libovolném množství. Pěšci se pohybují směrem zdola nahoru a jsou pokládáni taky za figury, protože dobře slouží jako ucpávky volných míst nebo zarážky pro věže.

Poznámka redakce: Právě Doc.^{MM} Markéta Calábková je autorkou obrázku, jež jste mohli vidět na titulní straně.



Výsledková listina 2. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t4	t5	t6	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy								
1.	Doc.$^{\text{MM}}$ M. Calábková	4.	185		3	2	4		7		16	34
2.	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Šťastný	2.	23	0	3	2	2				7	23
3.	Mgr.$^{\text{MM}}$ T. Domes	2.	22	1	3		1				5	22
4.	Bc.$^{\text{MM}}$ Z. Johanovská	3.	19	0	3	3	2				8	19
5.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Doležalová	3.	17	0	3	0			3		6	17
6.	Dr.$^{\text{MM}}$ P. Vincena	4.	97		2		4				6	16
7.–8.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Janka	3.	15		3	3					6	15
	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Škvára	4.	25		0	3	4				7	15
9.	Bc.$^{\text{MM}}$ D. Jochcová	4.	14								0	14
10.–12.	Dr.$^{\text{MM}}$ P. Nácovský	4.	76								0	13
	Mgr.$^{\text{MM}}$ V. Rozhoň	4.	34			3	4				7	13
	Bc.$^{\text{MM}}$ K. Smítalová	4.	13		3	2	2			1	8	13
13.–15.	Dr.$^{\text{MM}}$ D. Krasula	2.	92								0	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Pokorný	3.	17		2						2	12
	Dr.$^{\text{MM}}$ P. Souček	3.	77	0	3	2	2				7	12
16.–19.	Dr.$^{\text{MM}}$ J. Kušnír	4.	84		0		2				2	11
	Bc.$^{\text{MM}}$ E. Mlynárčiková	3.	11		3	0	0				3	11
	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Vincenová	1.	11		3	2					5	11
	Bc.$^{\text{MM}}$ D. Žáček	2.	11		0						0	11
20.–21.	A. Mlezivová	1.	9	1	0	0	2				3	9
	K. Stefanová	3.	9		3		2				5	9
22.–24.	A. Gajdová	4.	8								0	8
	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Knížek	4.	14								0	8
	S. Lukeš	2.	8								0	8
25.–28.	S. Burešová	1.	7		3						3	7
	K. Mráz	4.	7								0	7
	M. Töpfer	2.	7								0	7
	P. Turinský	2.	7		3		2				5	7
29.–33.	F. Oplt	2.	6	0	3	1	2				6	6
	B. Požár	1.	6	0	3	0					3	6
	M. Štván	2.	6	0	3	1	2				6	6
	J. Tětek	1.	6								0	6
	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Václavek	3.	21								0	6
34.–37.	L. Bujnovská	1.	5		3		2				5	5
	O. Knopp	1.	5	0	0						0	5
	K. Stodolová	2.	5								0	5
	J. Zeman	3.	5	0	0	0	0				0	5
38.–42.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Dittrich	3.	26		3						3	4
	L. Kopfová	1.	4								0	4
	R. Luc	2.	4	1	3						4	4
	J. Paidar	1.	4	0	0						0	4
	F. Zajíc	2.	5								0	4

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t4	t5	t6	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy								
43.–48.	F. Čermák	1.	3		2	1	0				3	3
	A. Dejl	1.	3		0						0	3
	S. Rosecká	3.	3		3						3	3
	A. Šámal	1.	3								0	3
	M. Zika	3.	3								0	3
	M. Zoula	3.	3								0	3
49.–57.	R. Chasák	2.	2								0	2
	J. Dvořák	4.	2								0	2
	Bc.^{MM} J. Havelka	1.	13								0	2
	Mgr.^{MM} K. Ilievová	4.	24								0	2
	M. Kubeša	3.	2		2						2	2
	Dr.^{MM} L. Langerová	4.	51								0	2
	Bc.^{MM} T. Paliesek	3.	15		0						0	2
	Bc.^{MM} Z. Svobodová	3.	12								0	2
	M. Turek	3.	2		0	0					0	2
58.–60.	J. Pekař	1.	1								0	1
	Mgr.^{MM} D. Tanglová	1.	20		0						0	1
	T. Troján	1.	1								0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`