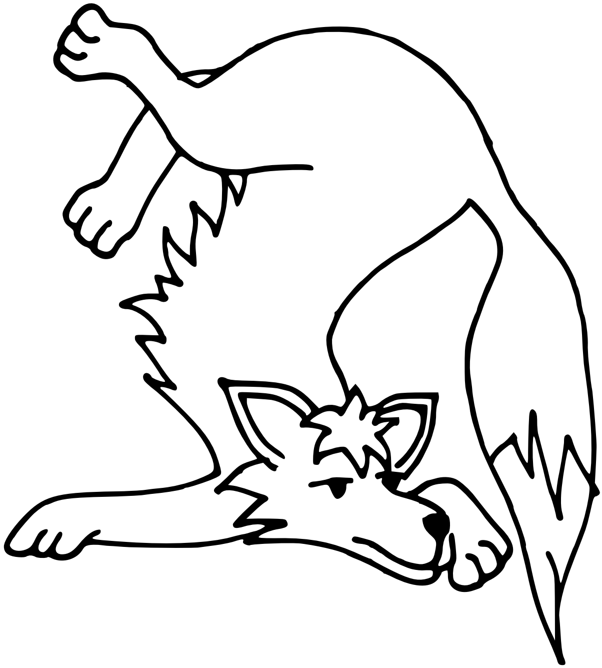
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 3



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,
letošní třetí číslo časopisu M&M je zde a s ním i nové úlohy. Ty jsou celkem čtyři a naleznete je hned za tímto úvodníkem. Inspirací při jejich řešení pro vás můžou být vzorová řešení úloh z první série, otisknutá za úlohami novými.

Nová témata už na rozdíl od úloh zadávat nebudeme, zveme vás tedy k řešení těch aktuálních. V tomto čísle vychází některé vaše příspěvky k prvním třem z nich. Další příspěvky, které k nám dorazily a dorazí, uveřejňujeme na webu v sekci *Témata* a obvykle je tam najdete už před vydáním čísla.

Potěší nás, budete-li reagovat na příspěvky uveřejněné v časopise a na webu. Nebojte se rozvinout nastíněné podproblémy, odpovědět na vznesené otázky nebo podrobit kritice teze ostatních. A samozřejmě nám též posílejte vaše nové objevy k dalším oblastem tématka. Všechny příspěvky opět uveřejníme na webu, aby na ně ostatní mohli dále reagovat.

Na konci školního roku od nás pak autor nejlepšího příspěvku dostane dort, vlastnoručně upečený organizátory. Kdo byl na soustředění, ten ví, jak skvěle dokáží naši organizátoři vařit a péct!

Na našem webu je toho ale více. Brzy se zde objeví přehled odměn pro nejlepší řešitele – určitě se tedy podívejte, co všechno pro vás máme nachystáno. Krom toho jsou na webu k nalezení také fotky z posledního soustředění. Výběr těch nejlepších je i na naší facebookové stránce `Korespondenční seminář M&M`. Pokud jste to ještě nestihli, rozhodně jí dejte like. A pokud se vám zrovna nechce nikam klikat, tak čtěte dál a ponořte se do třetího dílu časopisu. Ať se vám líbí.

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání třetí série: 13. 1. 2015

Barevné listy se třpytí v záři slunečních paprsků, po blankytně modré obloze se prohánějí ptáci, malé postavičky bloudí po asfaltových říčkách… Dívám se z okna, prolívám se horkým čajem, láduji se vitamíny a přemýšlím, za jak dlouho se z toho zblázním. Teplota neklesá a neklesá. V hlavě se mi vynořují vzpomínky na prázdniny, kdy jsem mohla být součástí toho všeho. Mohla jsem běhat v dešti, spát pod širým nebem, mohla jsem žít. Místo večerního surfování po internetu jsem sledovala spousty světýlek, spojovala je do nejrůznějších obrazců a snažila se identifikovat ty podezřelé. Planeta, padající hvězda, letadlo? A co třeba umělá družice? Opravdu ten padající objekt byla hvězda?

Úloha 3.1 – Družice (4b)

Spočítejte změnu oběžné rychlosti Δv družice Země po jednom oběhu. Družice je brzděná horními vrstvami atmosféry silou F_t, kterou můžete považovat za konstantní. Na počátku se nachází ve výšce h nad povrchem Země o poloměru R a má rychlost v_0. Hmotnost družice je m. Výška i rychlost se mění pomalu, takže můžete počítat s kruhovou dráhou na počátku i konci (i když se o kruhovou dráhu samozřejmě nejedná). Navíc můžete zanedbat členy řádu Δv^2 a vyšší. Proč se rychlost změní zrovna tímto způsobem? V čem může být tato aproximace špatná?

Utápím se ve vzpomínkách a už nyní plánuji, co vše podniknu o příštích prázdninách a vlastně o libovolných volných dnech, kdy alespoň trochu bude přát počasí a také… zdraví. Mé snění však přerušuje zákeřná myšlenka. „Hola, hola, škola volá!“ Musím jí dát za pravdu, některé věci by bylo načase přestat odkládat. Vyhrabávám volný kus místa na stole a… Měla bych uklidit! Chodím po pokoji a přemisťuji věci z jedné strany na druhou, trochu srovnat, složit, očistit, … Bloudím mezi všemi těmi kupičkami a zaznamenávám stále strmější pokles energie, kterou jsem ochotna vynaložit v rámci boje s neúprosně se zvyšující entropií.

Úloha 3.2 – Stavba bludiště (4b)

Pepa se přihlásil do robotické soutěže. Od kamaráda dostal dva roboty. Shodou okolností to byli oba Karlové. Takový robot Karel umí pouze dva příkazy: krok o jedno políčko vpřed (pokud je před ním zeď, tak stojí) a otočení o 90° vlevo. První soutěžní úkol byl napsat společný (tedy stejný) program pro oba roboty sestávající z příkazů VLEVO a KROK. Poté byli roboti umístěni do protějších rohů bludiště, orientováni na sever a zapnuti. Soutěžní úkol byl splněn, pokud po doběhnutí programu stáli roboti v opačných rozích bludiště než na začátku, tedy jestliže si vyměnili místa. Pokud by se kdykoliv roboti ocitli na stejném políčku, nabourali by a soutěžící by prohrál. Vaším úkolem je zjistit, kolik minimálně muselo bludiště obsahovat stěn, jestliže Pepa úkol splnil. Bludiště má velikost $N \times N$ políček. Mezi dvěma sousedními políčky vždy buď stěna je, nebo není, a pak je možné se mezi políčky přesouvat. Všechna krajní políčka jsou zvenčí ohraničena stěnami (ty nepočítejte, důležitý je minimální počet vnitřních stěn).

Unaveně usedám na židli. Chvíli hledím z okna, nechávám volně plynout myšlenky a nabírám nové síly. Čaj, kus buchty, pohled do to-do listu… Je na čase pohnout s domácími úkoly. Vyhodnocuji, že vytvořená pracovní plocha je dostatečná, otevírám čokoládu, připravuji si štos papírů, psadlo a… koš.

Úloha 3.3 – Kubická rovnice (3b)

O kubické rovnici $x^3 + px + q = 0$ víme, že má reálný kořen x_0. Dokažte, že platí nerovnost $p^2 \geq 4qx_0$.

K několika hustě popsaným zmuchlaným papírům přihazuji prázdný obal od čokolády. Chci ven! Dýchat čerstvý vzduch, hýbat se, aktivně relaxovat! Vtom se objevuje další zajímavá myšlenka. „Ve dvou se to lépe táhne.“ Trocha socializace by mi mohla prospět. Ale kdo? Kdo by mohl mít čas a mohl by být ochotný *v tohle počasí být se mnou zavřený v jedné malé cimře? Listuji telefonním seznam a zkouším pár „tutovek“. Nikdo. Najednou však někdo ťuká na dveře. Sotva poznávám ve dveřích stojící postavu. Ale je to on! Dlouho jsme se neviděli, a tak debatujeme o všem možném. A jak už to tak mezi matfyzáky chodí, vyvstávají i prazvláštní diskuzní témata.*

Úloha 3.4 – Setkání (4b)

Na nejmenované koleji na pokoji B1717 se přesně v 17.17 potkali dva lidé. Jaká je pravděpodobnost, že tito dva lidé mají stejné příjmení (včetně koncovky)? Potřebná data naleznete na webu ministerstva vnitra ČR:

`http://www.mvcr.cz/clanek/cetnost-jmen-a-prijmeni-722752.aspx`

Jako bonus můžete do řešení zapracovat i fakt, že na kolejích typicky bydlí pouze lidé určité věkové kategorie. Plný počet bodů ale můžete získat i za řešení, které tento fakt ignoruje.

Řešení úloh 1. série

Úloha 1.1 – Uloupené bonbony (2b)

Zadání:

Měli jsme společné zásoby bonbonů. Jednoho dne však zásoby zmizely. Chceme vědět, kdo bonbony snědl – jestli jeden z nás, nebo někdo cizí. Nikdo se ke krádeži nechce přiznat, protože by se mu ostatní poté pomstili.

Navrhněte strategii, na které se máme domluvit, abychom jen s pomocí mince dokázali určit, zda bonbony ukradl někdo z nás. Zároveň ale nesmí být zjistitelné, kdo to byl. Já a moji sourozenci dodržíme smluvená pravidla a nestane se, že by se dva spojili proti jednomu.

Řešení:

Tato úloha má více možných řešení a některá jsou elegantnější než jiná. Zásadní je, aby měl každý ze sourozenců možnost tajně změnit stav mince. To můžeme provést například následovně:

Jednoho ze sourozenců určíme správcem a domluvíme se, že si nebudeme předávát informace o stavu mince. Správce vezme minci, položí ji do místnosti, zapamatuje si její stav a odejde. Následně po jednom vcházejí a vycházejí další sourozenci. Při svém pobytu v místnosti může sourozenec buď minci otočit, pokud je vinný, nebo ji nechat beze změny, pokud je nevinný. Až se v místnosti všichni prostřídají, vrátí se do ní správce a zjistí výsledný stav mince. Pokud je stav odlišný od počátečního, nebo je stejný, ale správce sám je vinný, ohlásí ostatním, že viník je mezi nimi. V opačném případě ostatním ohlásí, že bonbony snědl někdo cizí.

Proč toto řešení funguje? Správce nemůže určit, který ze sourozenců stav mince změnil, protože vidí jen počáteční a koncový stav. Ostatní sourozenci nemohou ze situace nic usuzovat, jelikož neznají původní stav mince.

Dalším možným způsobem bylo posílat si minci za zády nebo se zavázanýma očima. Všichni se podívají na původní stav mince, zapamatují si ho a pak si posílají minci tak, aby na průběh posílání neviděli. Poté, co mince projde rukama všech, se vyhlásí konec. Všichni se podívají na minci a podle jejího stavu hned vidí, zda mají mlsouna mezi sebou, či ne. Tato verze nepotřebuje správce, ale je potřeba ošetřit, aby sourozenci nemohli zjistit stav mince v průběhu posílání, například po hmatu.

Mnoho z vás mělo i jiné nápady, jak situaci vyřešit, a vaše řešení byla vesměs správná. Občas byly strategie ovlivnitelné prostředím, což mohlo viníka vystavit nebezpečí prozrazení.

Tento problém jde řešit i v obecnější rovině, kdy anonymně nezjišťujeme jen informaci se dvěma stavy (ukradl/neukradl), ale třeba nějaké přirozené číslo. Například když chceme zjistit průměrný plat našich kolegů, aniž bychom si navzájem otevřeně říkali výši svých platů. Pak si první vymyslí a zapamatuje nějaké číslo, které je z rozsahu podstatně většího než je očekávaná velikost platů, přičte k němu svůj plat a pošle číslo dál. Každý přičte svůj plat a číslo se vrátí začínajícímu. Ten odečte původní číslo a získá součet platů, který pak už jen stačí vydělit počtem lidí.

Anet

Úloha 1.2 – Podivná deskovka (4b)

Zadání:

Na některých políčkách tabulky $2n \times 2n$ je černá nebo bílá kulička. Nejprve odebereme všechny černé kuličky, které jsou ve sloupci spolu s nějakou bílou kuličkou. Poté odebereme bílé kuličky, které jsou ve stejném řádku jako nějaká ze zbylých černých kuliček. Ukažte, že na konci nemohlo zbýt zároveň více než n^2 černých a více než n^2 bílých kuliček.

Řešení:

Protože vyškrteme v každém řádku s černými kuličkami všechny bílé kuličky a v každém sloupci s bílými kuličkami vyškrtneme černé kuličky, na konci zbydou v každém řádku i sloupci jen bílé nebo jen černé kuličky.

Označme si počet řádků s bílými kuličkami jako a, počet ostatních řádků je pak $2n - a$. Obdobně počet sloupců s bílými kuličkami označme b (ostatních sloupců je pak $2n - b$). Protože bílé kuličky musí ležet v „bílém“ řádku i sloupci, je jich maximálně ab. Černých kuliček je maximálně $(2n-a)(2n-b)$. Předpokládejme, že je bílých kuliček aspoň n^2, potom platí $ab > n^2$. Z AG nerovnosti[1] $\frac{1}{2}\cdot(a+b) \geq \sqrt{ab}$ plyne, že $a + \frac{b}{2} > n$. Podobně z AG nerovnosti plyne, že

$$\sqrt{(2n-a)(2n-b)} \leq \frac{2n-a+2n-b}{2} = 2n - \frac{a+b}{2} < n,$$

[1] Známá nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, která praví, že pro libovolná nezáporná čísla a, b platí $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

takže $(2n-a)(2n-b) < n^2$. Počet černých kuliček je tedy menší než n^2, takže nemůže být zároveň více než n^2 bílých i černých kuliček, což jsme chtěli dokázat.

Pepa

Úloha 1.3 – Nakloněný kelímek (4b)

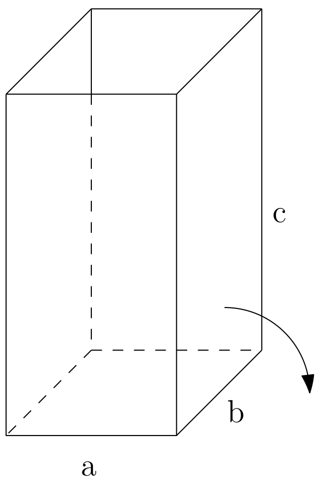
Zadání:

Lehký plastový kelímek ve tvaru vysokého kvádru stojí na desce, kterou pomalu nakláníme (takovým směrem, aby se kelímek otáčel kolem hrany své podstavy). Kelímek neklouže, ale při dosažení určitého úhlu desky se překlopí. Kolik bychom do něj měli přibližně nalít vody, aby byl tento úhel co největší?

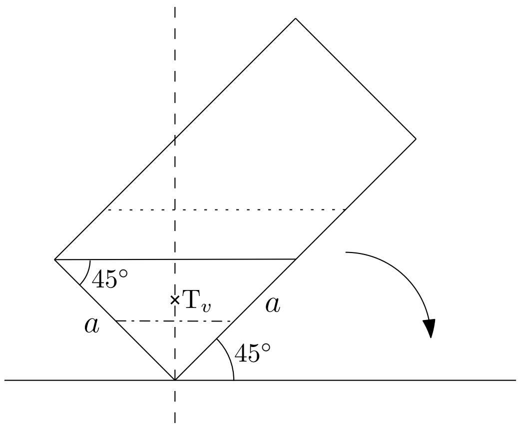
Jako bonus zkuste určit chybu provedeného odhadu množství vody, případně výsledek upřesnit při zohlednění konkrétní hmotnosti a výšky těžiště kelímku.

Řešení:

Mějme kelímek tvaru kvádru o délkách podstavy a, b a výšce c. Přes hranu o délce b se kelímek překlápí (obr. 1). K překlopení kelímku dojde tehdy, když se těžiště nenachází nad podstavou. Mezní případ tedy nastává v okamžiku, kdy se těžiště vyskytuje nad hranou b, kolem níž se kelímek překlápí.



Obrázek 1



Obrázek 2

Naplníme-li kelímek vodou, voda zaujme tvar nádoby se stále vodorovnou hladinou (obr. 2). Hmotnost kelímku proti hmotnosti vody nejprve zanedbáme. Kelímek pak můžeme naklonit maximálně o 45° a to pouze v případě, že maximální množství vody v nakloněném kelímku sahá právě po nejvýše položenou hranu podstavy kelímku, tedy omývá přední stěnu do výšky a, jak je znázorněno plnou čarou na obr. 2. Při větším množství (tečkovaná čára) by se těžiště vody, a tedy i celého systému nacházelo již mimo podstavu kelímku. Při menším množství (čerchovaná) a náklonu 45° zůstává těžiště stále nad hranou kelímku. Čím více vody však do kelímku nalijeme, tím spíše můžeme hmotnost kelímku vůči hmotnosti vody zanedbat a můžeme uvažovat těžiště celé soustavy v místě těžiště vody. Objem vody v mezním případě činí $V = ab \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2b$.

Nyní uvažujme prázdný kelímek (bez vody) a určeme působiště tíhové síly. Kvůli symetrii kvádru víme, že se jeho těžiště bude nacházet na ose kvádru. Jelikož je však kelímek prázdný a bez „víčka“, potřebujeme určit, v jaké výšce nad středem podstavy těžiště bude. Uvažujme, že kelímek je tvořen všude stejně tlustou homogenní hmotou, přičemž $1\,\mathrm{cm}^2$ stěny či dna kelímku má hmotnost m_0. Kelímek si rozdělíme na dvě části, u nichž známe jejich hmotnosti a polohy těžišť. Hmotnost dna pak bude $ab \cdot m_0$ a hmotnost všech stěn dohromady $2c(a+b) \cdot m_0$. Vzdálenost těžiště kelímku T od těžiště dna T_d, resp. stěn T_s si označíme d_d, resp. d_s (obr. 3). Pro neznámé d_d a d_s platí

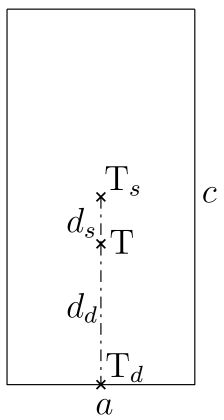
$$d_\mathrm{d} + d_\mathrm{s} = \frac{c}{2} \tag{1}$$

$$\frac{d_\mathrm{s}}{d_\mathrm{d}} = \frac{F_\mathrm{d}}{F_\mathrm{s}} = \frac{m_\mathrm{d} \cdot g}{m_\mathrm{s} \cdot g} = \frac{ab \cdot m_0}{2c(a+b) \cdot m_0} = \frac{ab}{2c(a+b)} \tag{2}$$

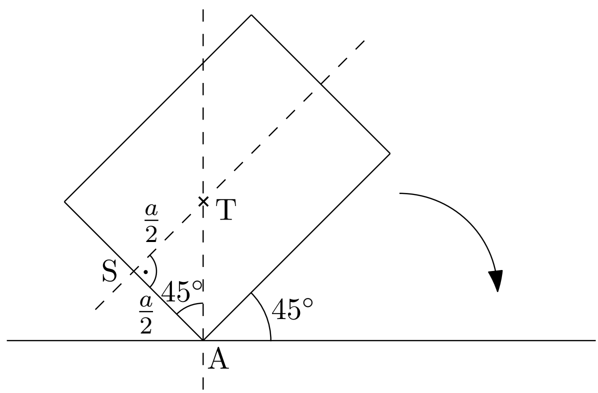
Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme vztah pro vzdálenost těžiště kelímku na jeho ose od těžiště dna, resp. od středu podstavy

$$d_\mathrm{d} = \frac{c^2(a+b)}{2c(a+b)+ab} \tag{3}$$

Pro kelímek se čtvercovou podstavou ($a = b$) o výšce $c = 2a$ tedy bude těžiště ve výšce $\frac{8}{9}a$ nad středem podstavy, zatímco pro krychlovitý kelímek, kde $a = b$ a $c = a$, bude těžiště ve výšce $\frac{2}{5}a$.



Obrázek 3



Obrázek 4

Voda tedy může stabilizovat kelímek až do maximálního náklonu 45°. Zkusme zjistit, pro jakou výšku prázdného kelímku je tento úhel též mezním. Abychom si výpočet zjednodušili, uvažujme čtvercovou podstavu kelímku, tj. $a = b$. Pokud se těžiště prázdného kelímku nachází nad otočnou hranou při náklonu 45°, pak se musí nacházet ve výšce $\frac{1}{2}a$ nad středem podstavy (obr. 4), neboť trojúhelník AST je rovnoramenný pravoúhlý, o délce odvěsny $\frac{1}{2}a$. Pro výšku c tedy musí platit vztah níže, přičemž uvažujeme pouze kladné řešení:

$$\begin{aligned} d_\mathrm{d} &= \frac{c^2 \cdot 2a}{2c \cdot 2a + a^2} = \frac{a}{2} \\ 0 &= 4c^2 - 4ac - a^2 \\ c &= \frac{4a + \sqrt{16a^2 + 16a^2}}{8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot a \doteq 1{,}21a \end{aligned}$$

Tedy pro kelímky se čtvercovou podstavou tvořené všude stejně tlustou homogenní hmotou s výškou větší než $1{,}21a$ je výhodnější nalít do nich vodu o objemu přibližně $V = \frac{a^3}{2}$. V takovém případě bude maximální možný náklon kelímku 45°, resp. o trochu méně, jelikož hmotnost kelímku je reálně nenulová. Zatímco pro kelímky s menší výškou, než je uvedená hraniční hodnota, je výhodnější do nich nelít žádnou vodu. Maximální možný úhel náklonu bez překlopení pak záleží na konkrétních poměrech výšky c a délky podstavy a. Například pro krychlovitý kelímek ($c = a$) je mezní úhel náklonu 56,3°, tj. mezi přední stěnou kelímku a horizontální podložkou bude úhel 33,7°.

Peťa

Úloha 1.4 – Lístky (4b)

Zadání:

A tam jsme začali uvažovat, zda si koupit celodenní jízdenku, nebo jednotlivé lístky. Celodenka stojí a, každý jednotlivý lístek b a koupit si lístek či celodenku není problém těsně před nástupem do dopravního prostředku. Předem ale nevíme, kolik přesunů bude potřeba – může se stát, že zakysneme hned po prvním přesunu, horní limit ale žádný nemáme (organizátoři jsou všeho schopní). Jezdit na černo nám slušnost prostě nedovolí.

Pro zadané a a b určete, po kolika projetých jednotlivých jízdenkách si už máme konečně koupit celodenní (Radek to říkal rovnou). Pro každý možný předem známý počet přesunů je přitom jasné, co je nejlevnější, a tedy i kolikrát víc bychom zaplatili vámi navrženým postupem oproti jasnozřivému optimu. Cílem úlohy je navrhnout takový postup, abychom i v nejhorším případě (tedy pro každý možný počet přesunů) zaplatili co nejmenší násobek optimální ceny.

Řešení:

Uvažme všechny možné strategie, které můžeme použít. Protože nás zajímá nejhorší případ, nemá cenu uvažovat pravděpodobnostní řešení (např. před každou jízdou si hodím mincí, jestli si koupím celodenní, nebo jednotlivou jízdenku) a budeme uvažovat jenom ty deterministické, tedy bez náhody. Deterministická strategie vypadá buď tak, že si celodenní lístek koupím po právě k jízdách, nebo že si jej nekoupím nikdy. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že a je celočíselným násobkem b. Pokud by tomu tak nebylo, přibylo by do některých výrazů v řešení zaokrouhlování na dolní celé části.

Pokud si celodenní lístek nekoupím nikdy, pak můžu zaplatit libovolněkrát více, než je optimum. Budeme se tedy zabývat pouze případy, kdy si celodenní jízdenku koupím právě po k jízdách. Nejhorším případem je pak vždy situace, kdy projedu přesně k jízd, koupím si celodenní lístek a pak už žádnou další jízdu nepojedu. Pokud si koupím celodenku po $\frac{a}{b}$ jízdách, tedy ve chvíli, kdy za jednotlivé jízdenky zaplatím tolik, kolik by mě stála celodenní, zaplatím $\frac{a}{b} \cdot b + a = 2a$, zatímco optimální by bylo zaplatit a. V nejhorším případě tak zaplatím dvakrát více, než bylo optimum.

Pokud si zvolím $k > \frac{a}{b}$, pak zaplatím v nejhorším případě $k \cdot b + a > 2a$, zatímco optimální by bylo zaplatit a. V nejhorším případě tak zaplatíme více než dvojnásobek optima.

Pokud si zvolím $k < \frac{a}{b}$, pak zaplatím v nejhorším případě $k \cdot b + a > 2 \cdot k \cdot b$, zatímco optimální by bylo zaplatit $k \cdot b$. V nejhorším případě tak zaplatíme více než dvojnásobek optima.

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a vidíme, že nejlepší strategií je koupit si celodenní jízdenku poté, co její cenu projezdíme v jednotlivých jízdenkách. Tímto způsobem vždy zaplatíme nejvýše dvakrát více, než je optimum.

Honza

Řešení témat

Téma 1 – Papírová letadélka

K tématu dorazilo hned několik příspěvků. Neduplikují stejné výsledky a všechny mají co říct. Najdete je v plném znění na webu témátka – zde jen krátký komentář, shrnující nejpodstatnější výsledky. Z experimentálních dat i výsledků těchto příspěvků můžete vycházet. Můžete je používat jako podklady pro vaše tvrzení, nebo je jiným experimentem můžete zkusit vyvrátit. Přínosné může být i polemizovat s jejich předpoklady.

Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kušnír a Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Domes porovnávali různé typy letadélek. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Doležalová a Anna Mlezivová si vybraly jeden konkrétní aspekt problému a dopodrobna ho rozebraly pro jeden typ letadélka. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dominika Jochcová teoreticky popsala let papírového letadélka a studovala trajektorii letu pro dva základní typy letadélek. Zvláštní pochvalu si zaslouží Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kušnír, za rozsáhlost experimentu a pečlivou dokumentaci, a Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dominika Jochcová, za formální stránku příspěvku včetně referencí.

Dominika nazývala výrazem „vztlaková síla“ vztlakovou sílu dle Archimédova zákona (a zanedbala ji). Ostatní ve svých článcích používají termíny „vztlaková síla“ či „vztlak“ pro blíže nespecifikovanou sílu působící vzhůru, pro kterou naopak Bc.^{MM} Dominika Jochcová používá výraz „aerodynamická síla“. Zkrátka je v tom pěkný terminologický guláš. Výrazy „vztlak“ i „aerodynamická síla“ si dotyční nevymysleli a něco skutečně znamenají, ale používají je správně? Téma sil působících na letadélko, ujasnění jejich terminologie a jejich popis by jistě zasloužily vaši pozornost.

Zuzka

Porovnanie 10 modelov papierových lietadielek (9b)

Dr.^{MM} Jakub Kušnír

Tento příspěvek obsahuje velké množství výsledků a zajímavých postřehů. Jakub porovnal 10 různých modelů letadélek (včetně klasické vlaštovky a šipky) v několika měřitelných parametrech (dolet při různých způsobech hodu, plocha křídel, poloha těžiště), okomentoval styl jejich letu a u některých modelů uvažoval o jejich možném vylepšení. Doufejme, že někoho inspiruje k podrobnějšímu studiu závislosti doletu na některém z parametrů či jejich kombinaci, a podaří se tak vysvětlit, proč se který model chová tak, jak se chová, případně ověří, zda jsou tyto modely v rámci svých možností optimální.

Jakub nadhodil několik sil, které na letadélko za letu působí:

1. Gravitačná – ťahá lietadielko k zemi.
2. Vztlaková – pôsobí proti gravitácii a závisí od tvaru krídel lietadla, ich súčiniteľa vztlaku a ich povrchu.
3. Odporová – pôsobí proti pochybu vpred a závisí tak isto od tvaru, rýchlosti v, povrchu S a súčiniteľa odporu C. Odporová sila F_o ja daná vzorcom $F_o = \frac{1}{2}SC\varrho v^2$.

Ale blíže se teoretickému rozboru nevěnoval. Narážíme tady především na otázku „vztlaku“ – zde „síly působící směrem nahoru“ – a na čem závisí – a také směru odporové síly – bude to skutečně proti pohybu vpřed?

Jakub dál píše: Uhol vypustenia záležal pri každom lietadle inak, ale lietadlá sa stále ustálili v určitej polohe či už s nosom vo vodorovnej polohe, polohe nosom dole alebo nosom hore. Táto poloha dosť ovplyvňovala vlastnosti letu. Pri nose dole malo lietadielko veľký odpor a malý vztlak, pri nose vodorovne malo akurátny vztlak, aby vyrovnalo tiažovú silu, a pokiaľ nosom hore, vztlak bol vyšší ako tiažová sila, a začalo opisovať klesajúcu sínusoidu.

Najlepšie lietadielka, ktoré som postavil a vyskúšal, leteli najlepšie pri vodorovnom hode, pretože celá rýchlosť hodu sa využila na let dopredu. Odpor vzduchu lietadielko neskôr spomalil na rýchlosť, pri ktorej už nestačil vztlak na udržanie vyšky, a začalo pomaly klesať rovnomerne dole. Tento pokles poskytol dostatočný dodatočný vztlak pre udržanie hladiny letu a rýchlosti vpred.

Je skutečně ideální poloha nosu pro vyrovnaný let vodorovně, proč se letadélko v určité poloze většinou ustálí a jak tuto polohu u daného modelu letadélka změnit?

Lockheed SR-71 Blackbird (6b)

Bc.^{MM} Tomáš Domes

Tomáš provedl spolu s partou kamarádů další porovnání různých typů letadélek. Na rozdíl od Jakuba měl ale specifický cíl – najít letadélko, které se pohybuje nejrychleji (určoval průměrnou rychlost celého letu). Popsal především tři typy létajících objektů – vlaštovku, šipku, a nový vynález s názvem Soběrád, který se ukázal být zdaleka nejrychlejším.

Byl vyroben v podstatě náhodou, a to tak, že jeden neopatrný experimentátor zašlápl skvěle vyváženou šipku NK-540 Fighter. Po krátké a marné snaze o její záchranu se naštval, ještě ji asi třikrát složil, pořádně zmačkal v pěsti, a Soběrád byl na světě.

Způsob, jak s ním odstartovat, aby dosáhl své maximální rychlosti, se od všech ostatních modelů zásadně liší. Uchopíte Soběráda za zadní část tak, jako byste s ním chtěli někoho praštit – ruka sevřená v pěst, palec proti ostatním prstům. A nyní s ním vší silou mrsknete před sebe. Toť vše.

Z fyzikálního hlediska můžeme říci, že se není čemu divit. Soběrád měl ze všech šipek nejmenší objem a tudíž i nejmenší odpor vzduchu. Zároveň měl aerodynamický tvar, který by se dal nejlépe přirovnat k obyčejné dřevěné tužce.

Rychlost (m/s)	Vlaštovka	Šipka	Soběrád
Průměr	4,91	10,25	16,6
Odchylka	0,53	0,86	1,1

Tabulka průměrných rychlostí letadélek (vypočteno z doby letu a doletu).

Tvrzení, že Soběrád má nejmenší objem, je poněkud zavádějící. Teoreticky mají všechna letadla stejný objem, protože jsou všechna z jednoho listu papíru, a nemají dutiny, nebo jsou tyto dutiny zanedbatelné. Soběrád má ale nejmenší povrch a průřez.

Když už jsme u těch méně standardních papírových objektů, s nimiž lze házet, zamysleme se nad házením předmětů obecně. V tělocviku házíme míčkem (kriketovým), granátem, oštěpem, vrháme koulí, a každá disciplína má trochu jinou techniku. Proč? Co doletí nejdál? Jak dostaneme nejefektivněji určitou hmotnost na určitou vzdálenost? Jak naopak házet na cíl co nejpřesněji?

Závislost doletu na úhlu vypuštění (3b)

Bc.^{MM} Markéta Doležalová

Markéta se zabývala otázkou, pod jakým úhlem je nejlepší letadélko vypustit, pokud cílíme na co nejvyšší dolet. Pomocí hračky (pařezu s gorilou) vypouštěla letadélka pod různými úhly a měřila jejich dolet.

Úhel	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°
Dolet (cm)	75	98	107	113	117	110	105

Z výsledků vyplývá, že nejlepšího doletu letadélka je dosaženo přibližně při vypuštění pod úhlem 40°. Otázkou také je, co přesně znamená dolet. Jedná se o vzdálenost k místu, kde letadlo přistane na zemi, nebo kde skončí? Experimentálně bylo zjištěno, že pokud vlastní letadélko kolečka, skončí podstatně dál. Bohužel jsou ale jistou překážkou při letu, takže doporučuji připravit kolečka až na přistávací plochu, kam vlaštovka dopadne, aby se po nich ladně svezla.

Závislost doletu na poměru délky špičky vůči tělu letadélka (3b)

Anna Mlezinová

Anna si vzala za úkol experimentálně zjistit, jak závisí dolet letadélka na délce jeho špičky vůči celému tělu. Zjistila, že pokud je poměr délky těla a špičky menší, vlaštovka letí hůř.

Tělo ku špičce	průměrný dolet (cm)
29:7	359,1
25:7	351
21:7	329
17:7	243,9
13:7	188,6
9:7	169,3

Při průměrování více měření je dobrým zvykem krom aritmetického průměru spočíst i nějakou tu chybu. Může to být průměr absolutních hodnot odchylek od průměru, standardní odchylka, jak vám ji vyplivne excel, nebo i něco jiného, pokud to zadefinujete, ale nějak by se chyba určení výsledku čtenářům sdělit měla. Když už máme střední hodnotu i odchylku, je radno onu odchylku zaokrouhlit na jednu až dvě platné cifry, a střední hodnotu pak na tolik desetinných míst (na stejný řád) jako odchylku[2]*. Je také hezké ji pak zanést i do grafu jako errorbars. Pak má cenu se zamyslet, jestli lze vynesenými daty proložit přímku. (Složitější křivky se jednak hůř fitují, a druhak se hodí mít alespoň nějakou fyzikální představu, proč volíme zrovna tu funkci, kterou volíme.)*

Autorka si vybrala jeden konkrétní aspekt designu letadélka, ale zbývá jich k prozkoumání ještě mnoho. Jaký vliv má třeba rozpětí či plocha křídel?

Analýza letu letadélka (11b)

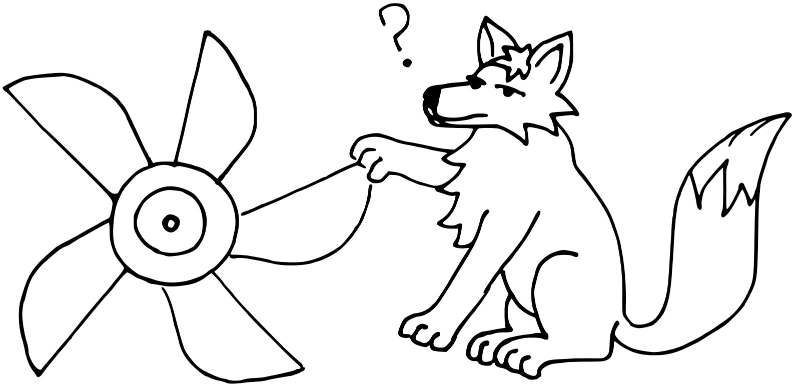
Bc.^{MM} *Dominika Jochcová*

Dominika se ve svém příspěvku zabývá především teoretickým rozborem a experimentální ukázkou způsobu letu dvou nejtypičtějších představitelů papírových letadélek – šipky a vlaštovky/velkoplošníku. Teoretická část je podložena citacemi zdrojů. Popisuje teorii letu dosti podrobně, nicméně je zde stále mnoho nejasností.

[2] O tom, jak zpracovávat fyzikální měření vyšel v druhém čísle 16. ročníku M&M článek, můžete ho najít v archivu na našem webu

Dominika popisuje určení těžiště vlaštovky a její let popisuje především z pohledu vyrovnání tíhové a „aerodynamické“ síly. „Vztlaková síla“ se zde neuvažuje.

Vždy, v každém fyzikálním problému, provádíme nějaké aproximace a zanedbání. Je to naprosto přirozené a většinou nutné. Ale je slušné explicitně říct, co z našich tvrzení je aproximací a za jakých podmínek platí. Zde jde například o tvrzení: Papírová vlaštovka je vlastně typ kluzáku. Její křídla mají deskový profil a minimální tloušťku po celé délce, šířka náběžné hrany je taktéž zanedbatelná, a to má zásadní význam pro let – nepůsobí na ni vztlaková síla. Na papírovou vlaštovku působí za letu tíhová a aerodynamická síla. *Bylo by vhodnější říct, že vztlakovou sílu (zde sílu dle Archimédova zákona) „můžeme zanedbat“. Pak už je zřejmé, že jde o aproximaci, o jejíž vhodnosti můžete polemizovat (do toho!), a ne o tvrzení, které lze dokázat nebo vyvrátit.*



Hlavní neznámou je tedy podle tohoto příspěvku aerodynamická síla. Aerodynamická síla vzniká obecně při pohybu tělesa plynem, v případě vlaštovky je určena především tvarem a velikostí plochy křídel, opět ji lze určit experimentálně. Její působiště můžeme umístit do tzv. aerodynamického středu, ten určíme jako těžiště průmětů ploch jednotlivých částí křídla do vodorovné roviny (křídlo si opět můžeme pomyslně rozdělit na obdélníky, trojúhelníky, ...). Směr síly je kolmý na rovinu křídla a je víceméně opačný než směr síly tíhové. Při výpočtu nezahrneme vždy všechny vlivy, které na vlaštovku působí, takže je přesnější určit aerodynamický střed experimentálně. Výsledná aerodynamická síla je tedy určena i dalšími faktory, například fluktuacemi hustoty plynu, prouděním, sklonem osy vlaštovky vůči horizontálnímu směru, zahnutím křídel atd.

Závěr, že směr aerodynamické síly je víceméně opačný než směr síly tíhové, vychází z předpokladů, že letadélko je při letu víceméně vodorovně a zároveň je aerodynamická síla kolmá na plochu křídla. Pokud letadélko ve vodorovném směru nezrychluje ani nezpomaluje, je rozumné očekávat svislý směr výsledné aerodynamické síly, ale je to skutečně důsledek zmíněných předpokladů? A jsou tyto *předpoklady platné? Zkuste se podrobněji věnovat jak náklonu letadélka při pohybu vzduchem, tak i směru aerodynamické síly vůči rovině křídla.*

Dominika definuje tři způsoby letu letadélka takto: Po klasickém hodu (vrh vodorovný) se dobře vyvážená vlaštovka pohybuje po balistické křivce („široké" parabole), tento typ letu nazýváme klouzavý. Na výslednou trajektorii má vliv hlavně vyvážení vlaštovky. Mohou nastat tři případy vyvážení:

1. Těžiště splývá s aerodynamickým středem – ideální stav, vlaštovka se pohybuje po balistické křivce.

2. Těžiště se nachází za aerodynamickým středem (myšleno proti směru letu) moment aerodynamické a tíhové síly je nenulový, dochází k „houpání" (vlaštovka nabírá výšku, následně mírně klesá a cyklus se opakuje)

3. Těžiště se nachází před aerodynamickým středem (myšleno proti směru letu) – moment aerodynamické a tíhové síly je nenulový, vlaštovka přechází v „střemhlavý" let.

A pro ideální letadélko vyvozuje: Vlaštovku tedy můžeme vyvážit prakticky dvěma způsoby – změnou polohy aerodynamického středu nebo změnou polohy těžiště. Naším cílem je maximalizace doletu vlaštovky při konstantních počátečních podmínkách (výška hodu, velikost počáteční rychlosti, elevační úhel, prostředí, ...). Toho můžeme dosáhnout tak, že výsledný moment aerodynamické a tíhové síly bude nulový – síly budou mít přibližně stejné působiště a svírat úhel blízký 180°. Dále můžeme lepší stability docílit třeba zahnutím konců křídel a změnit tak odtokovou hranu (obdoba vingletů u letadel). Bude-li působit takto zahnutá plocha silou na obtékanou tekutinu, bude podle třetího Newtonova zákona obtékaná tekutina působit silou stejně velkou, opačnou na tuto plochu, takže tím redukujeme uhýbání vlaštovky „do stran".

Pojem „aerodynamická síla" popisuje obecné působení vzduchu na letadélko, tedy i jeho odpor, a síly způsobené prouděním vzduchu, bylo by tedy vhodné ověřit, zda skutečně lze předpokládat, že bude aerodynamická síla za letu ve vodorovné poloze (nebo nějaké jiné rozumně definované poloze) působit přibližně nahoru.

Dále se Dominika zamýšlí nad porovnáním papírových letadélek s „velkými" letadly – to je také další téma, kterým se můžete zabývat. Myslíte si něco jiného než Dominika?

Hlavním rozdílem mezi papírovou vlaštovkou a běžným letadlem (např. dopravním) je, mimo rozdílnou velikost a konstrukční náročnost, způsob letu. Letadla využívají vztlakovou sílu obtékané tekutiny vznikající v důsledku tvarování křídel (v případě vlaštovky je náběžná hrana zanedbatelně široká), které nejsou deskového průřezu jako u vlaštovky, ale speciálně formované. „Vztlaková síla" dále umožňuje řídit průběh letu (vzlétání, přistávání, změna výšky, směru) změnami polohy kormidel, křídel na ocasu atd.

Experimentáně pak studuje trajektorii letu šipky velkoplošníku a obyčejné papírové koule. Srovnáním délky doletu tří papírových modelů jsme došli k závěru, že nejdelší dolet má model nazvaný velkoplošník. Druhý nejdelší dolet má model dlouhá šipka, třetí místo náleží z hlediska doletu papírové kouli. Nicméně pokud se na experiment díváme z hlediska efektivity a bereme v potaz i časové nároky na výrobu jednotlivých modelů, dojdeme k závěru, že nejefektivnější způsob přepravy listu papíru vzduchem je pomocí modelu papírové koule, přičemž efektivitu spočteme jako poměr doletu ku výrobnímu času. I zde se uplatňuje pravidlo tzv. Occamovy břitvy, které praví, že nejjednodušší řešení bývá obvykle to nejlepší (William Ockham (1287–1347)).

Aerodynamický střed je zajímavým podnětem. Dle autorky je za letu ve vodorovné pozici v podstatě těžištěm modelu letadélka, jako by ve všech místech mělo jen jednu vrstvu papíru. Nicméně je to stále jen její odhad a sama uznává, že je dost hrubý. Navrhnete někdo lepší parametr pro popis stability letadélka ve směru nahoru-dolů? Dál je třeba upozornit, že ač autorka tvrdí, že ideálně chceme mít aerodynamický střed co nejblíž těžišti, aby se letadélko nehoupalo, pozorovala větší dolet pro velkoplošník, kde tomu tak není – ten se naopak houpe silně. Kde je chyba? Jak do toho zapadá autorkou popsaný aerodynamický střed? Je houpání dobré, nebo špatné?

Dalším zajímavým podnětem je tvrzení, že papírové letadélko má zanedbatelnou náběžnou hranu. Je to pravda? Jak je náběžná hrana definovaná? Mělo by smysl setrojit papírové letadélko s tvarovanými křídly, jako mají „velká“ letadla?

Téma 2 – Stavba draka

K tématu se nám sešla celkem tři řešení: Doc.[MM] Markéta Calábková popisovala podmínky, které musíme klást na délky a úhly mnohoúhelníku, aby splňoval pěkné vlastnosti popsané v prvním problému.

Problém: Zatím však zůstává otevřené, jak tyto vlastnosti popsat, když si zakážeme úhly a díváme se jen na délky stran (např. z délek 5, 2, 2, 2 vyrobíme jen konvexní čtyřúhelník. Nebo: existují čtyři délky, které tvoří čtyřúhelník, ale nikdy ne s opsanou kružnicí?).

Markéta nakousla také otázku spojitého převádění mnohoúhelníků a jeho vztahu ke konvexitě. Zde opět zůstává velký prostor k bádání, konkrétně můžete začít třeba takhle:

Problém: Jaké čtyřúhelníky vytvoříme ze čtyř úseček o délkách 1, 1, 1, 1 když jednu zafixujeme v rovině? Některé jsou v nějakém smyslu daleko (stačí je jen malinko upravit) a jiné jsou diametrálně odlišné a při jejich převedení se třeba musí projít přes nějaký specifický tvar čtyřúhelníka.

Dr.[MM] Dominik Krasula se zabýval zobecňováním trojúhelníkové nerovnosti. Zjistil také zajímavý fakt, že pokud z délek sestrojíme nekonvexní n-úhelník, můžeme z nich také sestrojit konvexní čtyřúhelník (jak jsem naznačoval výše, naopak to neplatí). Jeho důkazu jsem ale úplně neporozuměl a pro ostatní bude jistě zajímavé se nad tím také zamyslet.

Problém: Dokaž (nebo vyvrať) Dominikovo tvrzení, že jde-li z úseček daných délek sestrojit nekonvexní n-úhelník, pak z nich lze sestrojit i konvexní čtyřúhelník (podmínku si můžeš zpřísnit, např. požadovat stejné pořadí úseček).

Stanislav Lukeš se podrobněji zabýval n-úhelníky, kterým se dá vepsat kružnice. Tento problém řešil úvahami o námotávání lomené čáry na kružnici, v závislosti na kružnici (co se stane, když je kružnice třeba jen bod?) a hýbaní s namotanou čarou (jak je ovlivněné paritou čísla n?).

V dalších řešeních můžete vesele navázat na výsledky prvních průkopníků, nebo se pustit do nových problémů. Směle do toho!

Pepa

Téma 3 – Reakce v miskách

Ke třetímu tématu došly zatím dva příspěvky. Bohužel se v případě Bc.MM Přemysla Šťastného jednalo jen o schéma bez sepsaného vysvětlení, což se také projevilo na bodovém zisku. Je zajímavé, že ač obě schémata simulují totéž (chloraci methanu), jsou dosti odlišná.

Níže jsou obrázky obou schémat (tedy, přesněji, jejich upravených verzí), originály naleznete na našich webových stránkách. XML soubory si můžete stáhnout a následně nahrát do Machinations možností Import v záložce File. Navíc se na stránkách (konečně) objevil návod k jednotlivým prvkům Machinations.

Matej

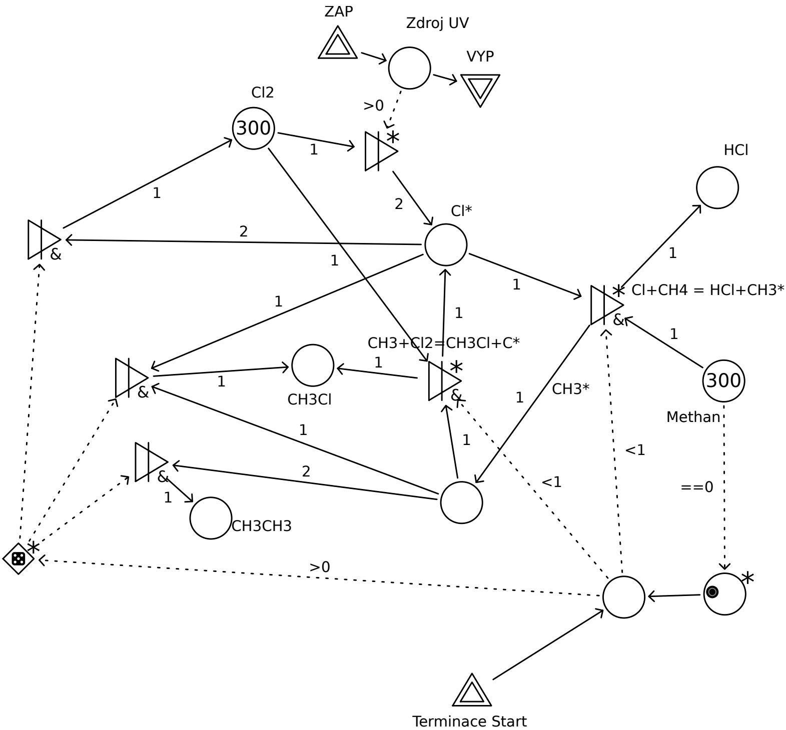


Schéma chlorace od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Patrika Nácovského

Chlorace žetonků (6b)

Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Patrik Nácovský

Při zapnutí zdroje UV záření se začnou uvolňovat radikály chlóru (Cl), které spouštějí celou reakci. Zdroj UV záření lze během celé reakce libovolně zapínat a vypínat, čímž se ovlivňuje množství radikálů v reakci a tím i její rychlost. Radikály chlóru (Cl) a metan (CH_4) reagují ($Cl + CH_4 \to HCl + CH_3$) za vzniku kyseliny chlorovodíkové (HCl) a radikálů metanu (CH_3). Kyselina chlorovodíková (HCl) se ukládá. Radikály (CH_3) rozbíjejí molekuly chlóru (Cl_2). Jeden z takto vzniklých radikálů chlóru (Cl) se vrací na začátek a reaguje s metanem (CH_4). Druhý s radikálem metanu (CH_3) dává vznik ($Cl + CH_3 \to CH_3Cl$) chlormetanu (CH_3Cl, černá).

Při spuštění tlačítkem nebo vypotřebování metanu se spustí terminace. Tím se zastaví obě hlavní reakce ($Cl + CH_4 \to HCl + CH_3$) a ($Cl + CH_3 \to CH_3Cl$). Zůstanou misky s molekulami. Volné radikály chlóru (Cl) a metanu (CH_3) spolu reagují náhodně za vzniku chlóru (Cl_2), chlormetanu (CH_3Cl) a etanu (CH_3CH_3).

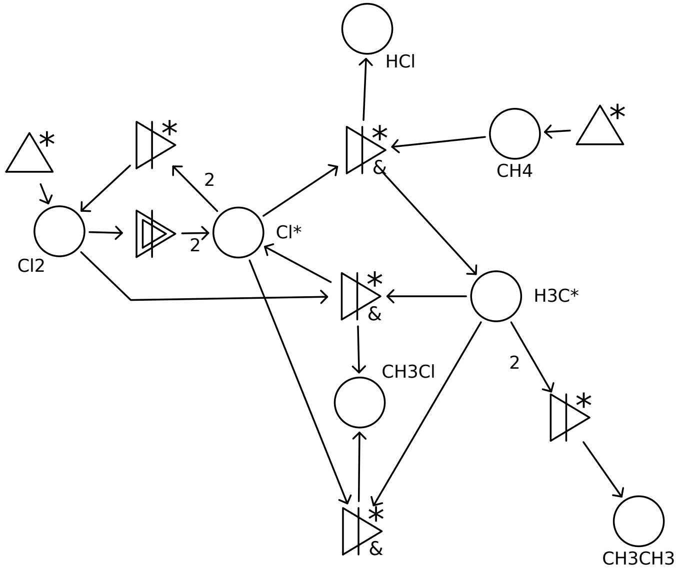
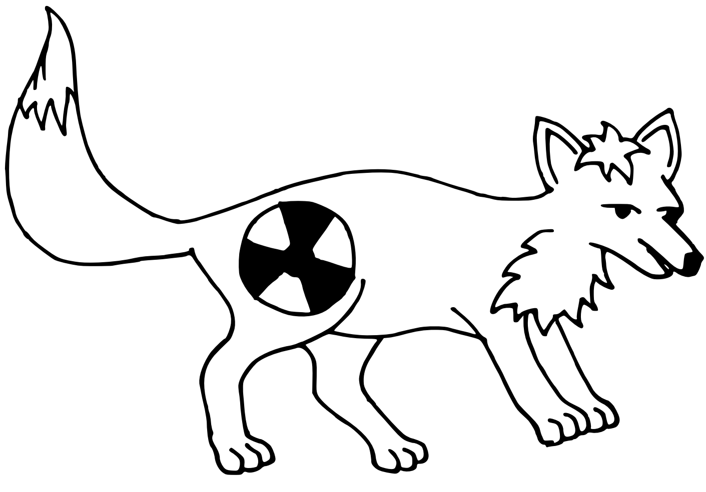


Schéma chlorace od Bc.[MM] Přemysla Šťastného



Výsledková listina 1. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	4.	169	2	4		4		8		18	18
2.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ T. Domes	2.	17	2	1	4	4	6			17	17
3.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šťastný	2.	16	2	4	3	4			3	16	16
4.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Jochcová	4.	14			3		11			14	14
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Nácovský	4.	76	2	1	4	0			6	13	13
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Krasula	2.	92	2	3				7		12	12
7.–9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Doležalová	3.	11	2	1	4	1	3			11	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Johanovská	3.	11	2	2	3	4				11	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Žáček	2.	11	2	4	1	4				11	11
10.–11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Pokorný	3.	15	2	4		4				10	10
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	4.	91	2	4		4				10	10
12.–13.	M. Janka	3.	9	2	2	4	1				9	9
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kušnír	4.	82					9			9	9
14.–18.	A. Gajdová	4.	8	2	2		4				8	8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Knížek	4.	14	2	3	3					8	8
	S. Lukeš	2.	8	2			2		4		8	8
	E. Mlynárčiková	3.	8	2	1	5					8	8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škvára	4.	18		3	5					8	8
19.–20.	K. Mráz	4.	7	2	1	4	0				7	7
	M. Töpfer	2.	7	1	1	3	2				7	7
21.–25.	A. Mlezivová	1.	6	2	1			3			6	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Rozhoň	4.	27	2	4						6	6
	J. Tětek	1.	6			2	4				6	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Václavek	3.	21	2	4						6	6
	L. Vincenová	1.	6	2	4						6	6
26.–30.	O. Knopp	1.	5		1		4				5	5
	K. Smítalová	4.	5	2	2	1					5	5
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Souček	3.	70	2	3						5	5
	K. Stodolová	2.	5	1	2	2					5	5
	J. Zeman	3.	5	2	1	2	0				5	5
31.–35.	S. Burešová	1.	4	2	2						4	4
	L. Kopfová	1.	4	2	2		0				4	4
	J. Paidar	1.	4	2		2					4	4
	K. Stefanová	3.	4	0	1	3					4	4
	F. Zajíc	2.	5	2	2						4	4
36.–40.	A. Dejl	1.	3	2	1	0					3	3

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
	B. Požár	1.	3	2	1						3	3
	A. Šámal	1.	3	2			1				3	3
	M. Zika	3.	3	2			1				3	3
	M. Zoula	3.	3	2	1						3	3
41.–49.	R. Chasák	2.	2	0	1	1					2	2
	J. Dvořák	4.	2	1	1		0				2	2
	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Havelka	1.	13		2						2	2
	Mgr.$^{\text{MM}}$ K. Ilievová	4.	24	2							2	2
	Dr.$^{\text{MM}}$ L. Langerová	4.	51	2							2	2
	Bc.$^{\text{MM}}$ T. Paliesek	3.	15	2							2	2
	Bc.$^{\text{MM}}$ Z. Svobodová	3.	12	2							2	2
	M. Turek	3.	2	2		0					2	2
	P. Turinský	2.	2	2							2	2
50.–53.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Dittrich	3.	23	0	1						1	1
	J. Pekař	1.	1				1				1	1
	Mgr.$^{\text{MM}}$ D. Tanglová	1.	20		1						1	1
	T. Troján	1.	1		1	0					1	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`