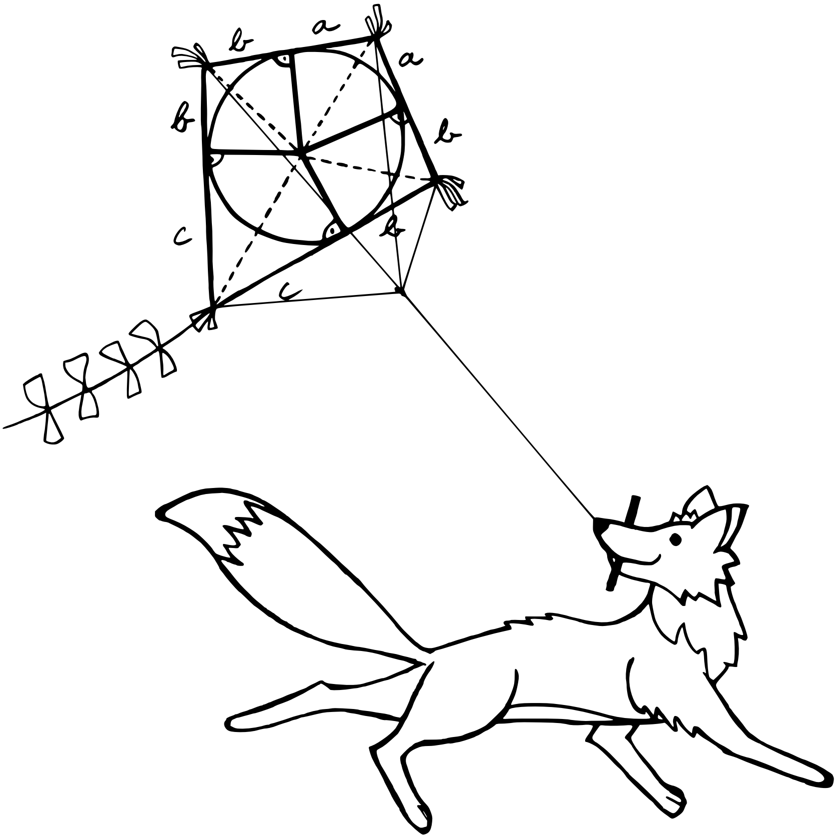
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 2



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,

řešení úloh z první série dorazilo opravdu mnoho. Moc nás těší váš zájem! Abyste mohli pokračovat ve stejném duchu, přinášíme vám další čtyři úlohy a vedle nich tématka na zamýšlení. Ta jsou opět tři a zabývají se například pohybem výtahů, meteoritů či šachových figurek. Moc se těšíme na vaše příspěvky[1].

Ty nejpilnější z vás už i stihla zasloužená odměna – účast na podzimním soustředění v Zelené Lhotě. Další akcí, kde se můžete potkat s našimi organizátory, je Den otevřených dveří na Matfyzu. Ten se koná ve středu 26. listopadu v Praze. Celodenní program je nabitý vědou, zajímavými lidmi a užitečnými informacemi. Rozhodně vás všechny srdečně zveme. Další informace a podrobný program naleznete na adrese `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/` .

Letos v našem týmu přibyli hned čtyři noví organizátoři z řad bývalých řešitelů – schválně jestli si někde při čtení časopisu povšimnete jejich rukopisu. Přejeme příjemné čtení, dumání i hloubání.

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání druhé série: 25. 11. 2014

… a i poslední strom se skácel pod úderem blesku. Magnus měl konečně volnou cestu. I vyrazil v širé pole. Jeho kůň ho unášel dál a dál po zelených pastvinách království, až po chvíli stanuli u hradeb města. Magnus ihned poznal, že toto je ono město, kde sídlí mistr jeho řádu. Pozdravil strážného u brány dvěma grošíky a veda koně za ohlávku, kráčel vzhůru vstříc veliké mramorové věži. Cestou do kopce ho zaujal stroj takový, jaký ještě nikdy neviděl. Pohyboval se ďábelskou rychlostí vzhůru podél cesty. Magnus byl moudrý a zasvěcený do tajů fungování světa, proto mu vrtalo hlavou, kde ten podivný stroj získává energii pro svůj bleskurychlý pohyb.

Úloha 2.1 – Záhada vagónku (4b)

Zmíněný stroj je obyčejný vagónek o hmotnosti m bez vlastního pohonu. Pod kopcem je roztlačený na rychlost v_1 a poté vyjede setrvačností po kolejích na vršek kopce o výšce h. Ztráty energie odporem vzduchu, třením apod. jsou zanedbatelné, stejně tak je zanedbatelná rotační hmota koleček. Pak můžeme spočíst rychlost v_2 na vrcholu kopce podle učebnicového vztahu pro zachování energie

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = mgh\,,$$

kde g je gravitační zrychlení.

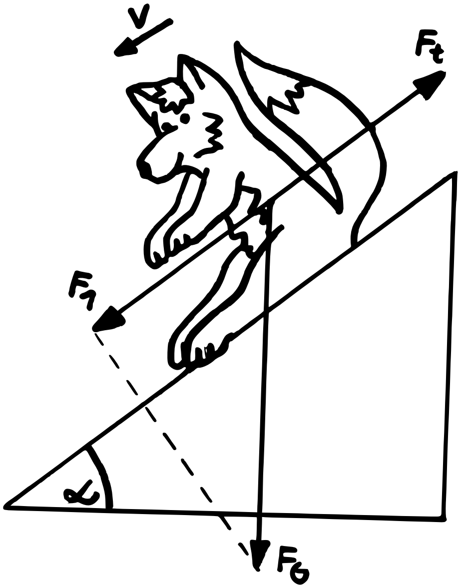
[1] Podrobný návod na řešení témat najdete v prvním čísle.

Také víme, že rychlost pohybu tělesa nejde určit absolutně, ale jen vůči nějaké vztažné soustavě, a že fyzikální zákony platí stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Vezměme tedy soustavu, která se vůči předchozí pohybuje horizontálně rychlostí v_x. Rychlosti vagónku v ní budou $v_1 + v_x$ a $v_2 + v_x$. Výškový rozdíl se samozřejmě nezmění, takže pravá strana uvedené rovnice pro zachování energie zůstane stejná. Levá strana se ale „rozbila“, protože

$$\frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_2^2\right) \neq \frac{1}{2} m \left[(v_1 + v_x)^2 - (v_2 + v_x)^2\right] .$$

Neplatí zachování energie? Neplatí ekvivalence vztažných soustav? Kde je chyba?



Konečně Magnus shledal, jak se celá ďábelská věc má. Vystoupiv až na vrchol, pokračoval tedy za svým cílem. Jak míjel místní krčmu, zaslechl dva panoše ve při. Jeden tvrdil druhému, že mu nemůže prozradit, kolik kterých drahokamů zahlédl v královské pokladnici. Magnus přistoupil k panošovi a poradil mu, aby užil lsti: zprávu může povědět pomocí hádanky. Oba panoši souhlasili a první se jal vyprávět.

Úloha 2.2 – Drahokamy (3b)

První panoš povídá: „V pokladnici jsou tři druhy drahokamů. Když se počty drahokamů jednotlivých druhů vynásobí, vyjde 36.“

Druhý panoš se dožadoval dalších informací, první tedy odvětil: „Počet drahokamů v pokladnici je stejný jako počet hostí v této krčmě.“

Druhý panoš stále nebyl spokojený, a tak první dodal: „Každý druh má svou hromádku. Největší z hromádek musí mít cenu alespoň tisíce grošíků, ne-li víc.“ To druhému panoši stačilo.

Kolik bylo v pokladnici kterých drahokamů?

Magnus byl učený a řešení mu ihned vytanulo na mysl. Požehnal panošům a kráčel dál, až konečně dorazil k veliké mramorové věži, k sídlu svého mistra. Zanechav koně před branou, vystoupil Magnus do věže a prošel vstupní halou. Odtud vedly dvě chodby, jedna nahoru a druhá dolů. Magnus se vydal jednou z nich, a za okamžik stanul v malé prázdné místnůstce. Z té vedly hned tři chodby a z další dokonce čtyři. Navíc byly chodby vzájemně propojené a vedly do různých směrů. Magnus, potěšen mistrovou vynalézavostí a vtipem, přemýšlel, kolik by takových místností mohlo ve věži být.

Úloha 2.3 – Místnosti (3b)

Určete, pro jaká přirozená čísla N je možné sestavit síť chodeb a místností splňující následující podmínky:

- Počet místností je $2N$.
- Počet chodeb vedoucích z jednotlivých místností je právě $1, 1, 2, 2, \ldots, N, N$.

Místnosti mohou být libovolně pospojované (mohou například existovat dvě místnosti takové, že se z jedné nelze dostat do druhé). Každá chodba spojuje přímo právě dvě různé místnosti a nemá žádné odbočky, ale chodby se mohou mimoúrovňově libovolně míjet. Navíc mezi každou dvojicí místností vede nejvýše jedna chodba.

Konečně stanul Magnus v kruhové místnosti při vrcholku věže. Ta však zela prázdnotou. Na kamenné zdi byla viditelná tři numera. Magnus shledal, že se jedná o dílo magické, a jal se jej blíže prozkoumávat. Další dvě čísla byla na stropě. Určitě spolu musela nějak souviset. Někde musel být nějaký vztah. Okenní římsa byla symbolem rovnosti. Svíčky na stole byly tři tečky znázorňující postup do nekonečna. Celá místnost byla plná dolních indexů a Magnus nevěděl, která čísla patří do jakého oboru… Matěj se probudil. Před očima se mu pomalu prolínal obraz Mistrovy kruhové pracovny a jeho pokoje. Magnův příběh se mu pomalu vytrácel z mysli. Ale problém ze snu si Matěj pořád pamatoval. Sedl ke stolu a začal přemýšlet nad důkazem.

Úloha 2.4 – Racionální sen (4b)

Dokaž, že reálné číslo k je racionální (tj. dá se zapsat ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou celá čísla a n není nula) právě tehdy, když mezi čísly k, $k+1$, $k+2$, $k+3$, ... můžeme vybrat tři, která tvoří geometrickou posloupnost.[2]

Zadání témat

Téma 4 – Dopad meteoritu

Z vesmíru na zemský povrch dopadají meteority různých velikostí a složení. Mají široké spektrum rychlostí, a kvůli tomu mají jejich dopady přehršel rozličných důsledků pro Zemi, její atmosféru, hydrosféru, litosféru a jiné.

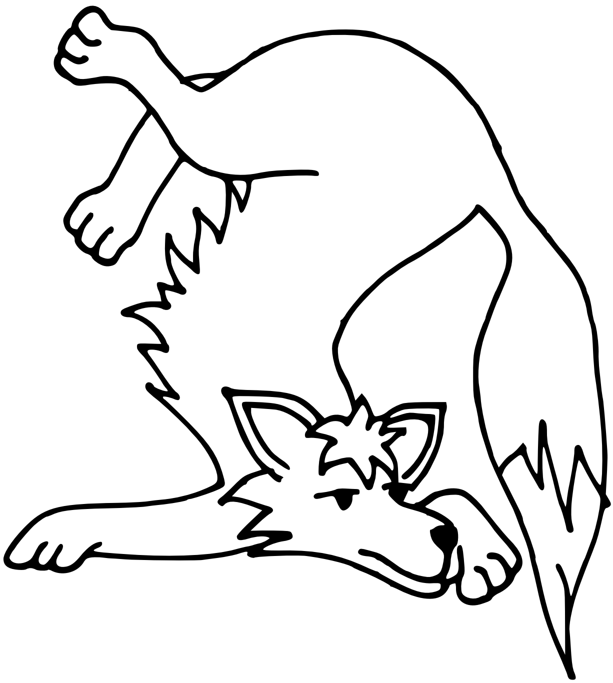
[2] Jejich velikost tedy bude a_0, a_0q a a_0q^2, kde a_0 a q jsou kladná reálná čísla.

Zabývejte se meteority různých parametrů. Co se děje s meteoroidem při průletu atmosférou? Jak se bude meteoroid zpomalovat (zrychlovat) při průletu atmosférou? Jaké nejmenší těleso může po průletu atmosférou dosáhnout povrchu Země? Jak velký kráter zanechá? O kolik stupňů se zvedne průměrná teplota vody při dopadu do oceánu? Jak se změní průměrná roční teplota?

Proveďte kvalifikovaný odhad a srovnejte dopadové energie meteoritu, který dopadl na konci křídy na Yucatánský poloostrov, a meteoritu, který dopadl nedávno na území Ruské federace.

Dále se můžete zabývat šířením tepla v rámci litosféry, chováním atmosféry, dlouhodobými změnami podnebí či například vlivem na nebeskou mechaniku Země.

Luboš



Téma 5 – Pokrytí šachovnice

Mějme šachovnici a figury pohybující se podle standardních šachových pravidel. Jaké obrazce mohou vzniknout z polí, která nejsou ohrožována žádnou figurou?

Začněme s klasickou šachovnicí 8×8 a kompletní sadou figur pro jednoho hráče[3]. Mohou neohrožovaná pole, na kterých současně nestojí žádná figura, tvořit obdélník? A co čtverec, kříž či „kruh“?

Jak se situace změní, pokud budeme současně vyžadovat, aby každá figura byla ohrožována nějakou jinou? Pomůže nám, pokud využijeme figury obou hráčů?

Nemusíme se ale omezovat na klasickou šachovnici. Uvažujme libovolnou obdélníkovou šachovnici a libovolné šachové figury v jakémkoli množství. Existuje tvar, který nemůže z neohrožovaných polí vzniknout? Co se změní, pokud musí být každá figura zároveň ohrožována nějakou jinou?

Rozmístěte figury tak, aby neohrožovaná pole tvořila co nejhezčí obrázek domečku či Rikiho.

Kuba

Téma 6 – Výtahy

Pokud jsi někdy strávil delší dobu v budově s mnoha výtahy, jistě tě napadlo, proč je nutné vždy čekat tak dlouho, než nějaký přijede. A určitě jsi přemýšlel, zda by to nešlo vymyslet lépe.

V tomto tématku budeme zkoumat, jak vymyslet pro budovu s N patry a K výtahy co nejlepší algoritmus pro řízení výtahů.

Taková běžná kancelářská budova může mít ovšem mnoho různých požadavků:

- Jednak můžeme optimalizovat dle různých kritérií. Zatímco uživatele bude zajímat spíše doba čekání a jízdy, vlastníka více potěší nízká spotřeba výtahu, bude tedy chtít, aby výtahy jezdily co nejméně. Nabízí se zkoumat jednotlivá kritéria samostatně nebo také najít rozumný kompromis.

- Také je možné, že některá patra budou mít speciální funkce, a během dne tedy bude různý provoz výtahů. Tak například v některém patře bude jídelna, kam budou chodit zaměstnanci na oběd. Naopak ráno budou lidé do budovy přicházet a jezdit hlavně nahoru a odpoledne zase dolů. Můžeme si klást otázku, jak co nejlépe vyřešit tyto špičky. Nebo třeba do kterého patra je ideální umístit jídelnu. A co teprve, pokud na některém patře má kancelář ředitel, kterého bychom chtěli upřednostnit? Jaký to může mít dopad na ostatní?

- Nebo se může stát, že programujete výtah pro mrakodrap. Jak potom zařídit, aby cesta zezdola nahoru netrvala příliš dlouho?

[3] Oba střelci mohou být umístěni na polích stejné barvy.

Na výběr se nabízí mnoho otázek a jistě sám přijdeš na další. Řešit je lze zcela obecně. Ale může být zajímavé zkoumat i komplexnější návrhy s jednodušším zadáním, například pro nějaký konkrétní počet výtahů. Nebo třeba zkoumat výtahy s konkrétním poměrem N/K, či vliv tohoto poměru na algoritmus.

Honza Mikel

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.