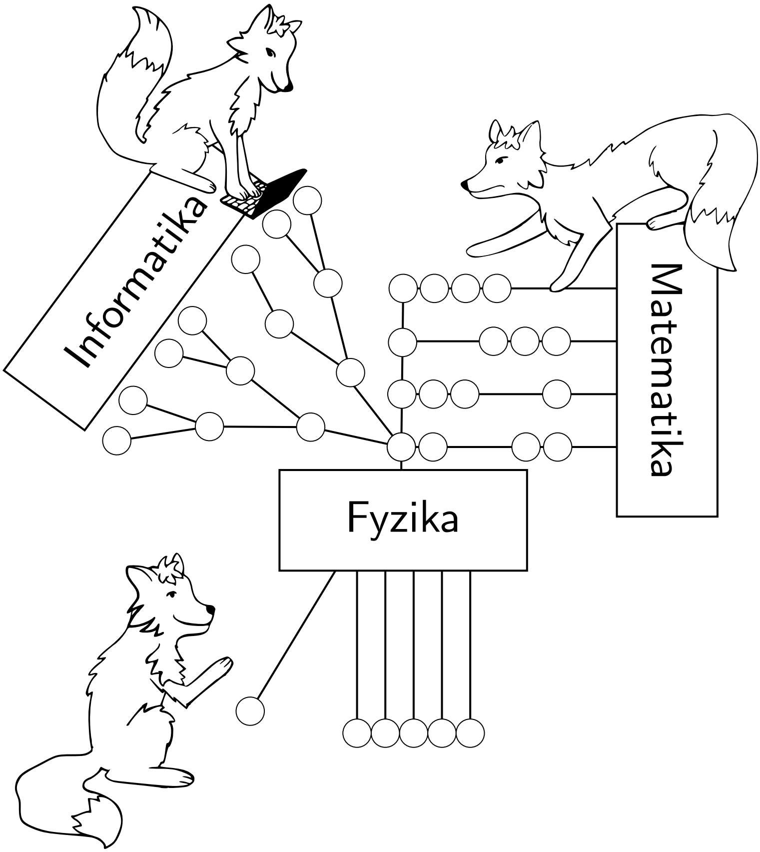
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXI / Číslo 1



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milý příteli matematiky, fyziky či informatiky,

právě čteš časopis M&M, časopis určený pro zvídavé středoškoláky. V jeho rámci se snažíme zábavnou formou prezentovat zajímavé úlohy z matematiky, fyziky a obecné i aplikované informatiky. Důraz přitom klademe na to, aby každý mohl o problémech sám uvažovat. A aby mohl poté společně s ostatními sdílet své závěry.

V průběhu školního roku zdarma vychází zpravidla sedm čísel časopisu. V nich najdeš nejrůznější úlohy a témata k zamyšlení a někdy i zajímavé články. První číslo právě držíš v ruce.

Jak se zapojit do korespondenčního semináře M&M a co všechno Ti nabízíme se dozvíš na straně 7.

Zadání úloh

Termín odeslání první série: 21. 10. 2014
(22. 9. 2014 pro účast na podzimním soustředění)

V prvních šesti číslech uveřejňujeme samostatné úlohy. Tyto úlohy bývají trochu těžší než obvyklé školní, často vyžadují buď hlubší zamyšlení nebo nějaký trik. Středoškolské znalosti by k jejich vyřešení ale měly stačit. Pokud přijdeš na řešení některé z úloh, pošli nám jej (jak to udělat se dozvíš na konci časopisu). My ho opravíme a zašleme zpět. V některém z dalších čísel pak uveřejníme vzorová řešení zadaných úloh.

U každé úlohy je uveden počet bodů za správné řešení. Přiměřenou část z těchto bodů lze získat i za řešení neúplné. A naopak za velmi zajímavé nebo elegantní řešení můžeš dostat i bodovou prémii.

Léto se pomalu chýlilo ke konci a já se už nemohl dočkat, až vyrazíme na šifrovačku. Přeci, kdo by se nechtěl na začátku školního roku potulovat ve dvě ráno stěží při dvou stupních nad nulou s docházející baterkou neznámo kde – ve ztemnělém lese za zvuku houkajícího sýčka, vlastních kroků a funění spolutrpitelů. Já jo, a nějak se mi podařilo přemluvit i své dva sourozence. Bohužel další nadějné myslitele pro náš tým „Máme rádi Rikiho“ se mi už sehnat nepodařilo. Ale co, říkal jsem si, alespoň budu moci beztrestně ujídat zásoby Radkovi a Julče, zatímco budou namáhat svoje hlavy a luštit ostošest.

Úloha 1.1 – Uloupené bonbony (2b)

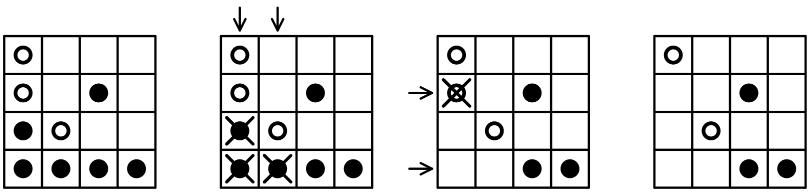
Měli jsme společné zásoby bonbonů. Jednoho dne však zásoby zmizely. Chceme vědět, kdo bonbony snědl – jestli jeden z nás, nebo někdo cizí. Nikdo se ke krádeži nechce přiznat, protože by se mu ostatní poté pomstili.

Navrhněte strategii, na které se máme domluvit, abychom jen s pomocí mince dokázali určit, zda bonbony ukradl někdo z nás. Zároveň ale nesmí být zjistitelné, kdo to byl. Já a moji sourozenci dodržíme smluvená pravidla a nestane se, že by se dva spojili proti jednomu.

Záhada se nakonec nějak vyřešila, i když bonbony zpátky už nedostaneme. Teď si ještě pořádně připravit hlavy, abychom šifrovačkou prošli bez úhony, a možná ji ještě vyhráli. Já jsem se rozhodl, že nejjednodušší bude začít pěkně od základů – starověký Řím, caesarovka, neviditelné inkousty, vyrývání názvu dalšího stanoviště do dřevěné tabulky zalité voskem... No, na Julču jsem tím moc dojem neudělal; ta se mi vysmála, že se budu skutečně hodit jen na to jídlo, a sama se pustila do řešení matematické úlohy.

Úloha 1.2 – Podivná deskovka (4b)

Na některých políčkách tabulky $2n \times 2n$ je černá nebo bílá kulička. Nejprve odebereme všechny černé kuličky, které jsou ve sloupci spolu s nějakou bílou kuličkou. Poté odebereme bílé kuličky, které jsou ve stejném řádku jako nějaká ze zbylých černých kuliček. Ukažte, že na konci nemohlo zbýt zároveň více než n^2 černých a více než n^2 bílých kuliček.



Matematika? Kdo kdy viděl na nějaké šifrovačce matematickou úlohu? To už jistě budu úspěšnější s tou svojí caesarovkou. Tak jsem alespoň doufal, že Radek se do toho pustí za nás za oba a překvapí. A taky že překvapil, vytáhl nějakou fyziku.

Úloha 1.3 – Nakloněný kelímek (4b)

Lehký plastový kelímek ve tvaru vysokého kvádru stojí na desce, kterou pomalu nakláníme (takovým směrem, aby se kelímek otáčel kolem hrany své podstavy). Kelímek neklouže, ale při dosažení určitého úhlu desky se překlopí. Kolik bychom do něj měli přibližně nalít vody, aby byl tento úhel co největší?

Jako bonus zkuste určit chybu provedeného odhadu množství vody, případně výsledek upřesnit při zohlednění konkrétní hmotnosti a výšky těžiště kelímku.

Já teda moc fyzik nejsem, ale čas ještě určit umím a bylo skoro za pět dvanáct. Nejvyšší čas vyrazit na vlak. Popadl jsem ty své dva génie a naše batohy a uháněl s nimi na nádraží. Dal jsem pokoj, až když už jsme pohodlně seděli ve vlaku.

Úloha 1.4 – Lístky (4b)

A tam jsme začali uvažovat, zda si koupit celodenní jízdenku, nebo jednotlivé lístky. Celodenka stojí a, každý jednotlivý lístek b a koupit si lístek či celodenku není problém těsně před nástupem do dopravního prostředku. Předem ale nevíme, kolik přesunů bude potřeba – může se stát, že zakysneme hned po prvním přesunu, horní limit ale žádný nemáme (organizátoři jsou všeho schopní). Jezdit na černo nám slušnost prostě nedovolí.

Pro zadané a a b určete, po kolika projetých jednotlivých jízdenkách si už máme konečně koupit celodenní (Radek to říkal rovnou). Pro každý možný předem známý počet přesunů je přitom jasné, co je nejlevnější, a tedy i kolikrát víc bychom zaplatili vámi navrženým postupem oproti jasnozřivému optimu. Cílem úlohy je navrhnout takový postup, abychom i v nejhorším případě (tedy pro každý možný počet přesunů) zaplatili co nejmenší násobek optimální ceny.

Nakonec jsme to nějak zvládli, jídla bylo tak akorát, ani moc nepršelo, ani nesněžilo, zmrzly nám jenom nosy a prsty u nohou. A kam jsme až došli? No, nakonec jsme to zvládli až domů, i když tam už jsme se museli vzájemně podpírat, abychom neusnuli ve stoje. Ale bylo to super. Tak zase příště.

Zadání témat

Témata jsou obecněji zadané problémy. Také vždy obsahují nějaké otázky a námět, kudy téma dále rozvíjet. Jsou především příležitostí hlouběji se ponořit do určitého problému a zkusit vymyslet něco vlastního. To je postup podobný skutečné vědecké práci. Zajímavé příspěvky otiskneme v některém z dalších čísel.

Jak řešit téma

Vyber si jeden z navrhovaných podproblémů, nebo si vymysli vlastní, který se tématu týká (to bude ohodnoceno zvláštním bodovým bonusem), a vyřeš ho, jako by to byla úloha z čísla. Své řešení pak hezky sepiš, aby mělo formu článku, a článek nám pošli. Pro inspiraci se můžeš podívat na řešení témat z minulých let.

Podrobné řešení některého z podproblémů bude bodově hodnoceno řádově lépe, než souhrnný článek krátce zmiňující kdeco bez pokusu o vysvětlení. Navíc můžeš, narozdíl od úložek, na příspěvky ostatních reagovat – rozvíjet je, nebo naopak bořit jejich představy. Proto se hodí poslat i částečná řešení, postřehy, nebo nápady na další podproblémy, které třeba nezvládneš vyřešit sám. Takovéto příspěvky dávají prostor ostatním a mohou je inspirovat. A protože víc hlav víc ví, můžete na tématech pracovat i ve skupinách.

Téma 1 – Papírová letadélka

Jistě jste někdy s kamarády skládali vlaštovky, šipky, nebo jiné létající objekty z papíru, a pak se trumfovali, čí doletí nejdál. Někteří zastávali názor, že nejdál doletí vlaštovka. Jiní nedali dopustit na klasické šipky a jejich schopnost držet směr, a čím štíhlejší, tím lepší. (A jiní házeli papírové koule.) Co se na to podívat trochu fyzikálně? Vždyť let, to je vlastně takový šikmý vrh ve vzduchu…

Vyzkoumejte, jak takové ideální letadélko, které doletí nejdál ze všech a poletí rovně, vyrobit a jak ho správně hodit. Jako možný začátek vaší cesty za aerodynamikou vám nabízíme následující podúkoly:

1. Popište základní designy papírových letadélek. Které parametry jsou důležité (délka, délka ocasu, délka křídel, vzdálenost křídel od špičky, úhel křídel, gramáž papíru, …) a má smysl je zkoušet měnit?
2. Pro určitý typ experimentálně zjistěte, jak jeho dolet závisí na některém z těchto parametrů. (Např. proměřte závislost doletu šipky na velikosti „těla“ oproti křídlům.)
3. Určete, jak se experimentální dolet letadélka liší od šikmého vrhu se zanedbáním vlivů vzduchu.
4. Popište síly působící na letadélko za letu. Zamyslete se, čím se let papírových letadélek v tomto liší od skutečných letadel?
5. Jak se mění rychlost hozeného letadélka během volného letu?
6. Jak správně hodit letadélko, aby doletělo co nejdál? Pod jakým úhlem, s jakým náklonem, jaké parametry by ještě mohly být důležité? Liší se to pro různá letadélka? Svoje tvrzení samozřejmě podpořte výpočtem nebo experimentem, jako u každého fyzikálního problému.

Tak jen směle do toho. Podělte se o své zkušenosti a rozšiřte je o další zkoumání. Na vaši práci pak mohou navazovat jiní. Navíc čím víc dat, tím víc srovnání. Jenom tak letadélko M&M poletí opravdu ze všech nejlépe.

Zuzi

Téma 2 – Tvorba draka

V tématku se budeme zabývat problémem, co můžeme vyrobit za útvary, pokud k dispozici dostaneme několik úseček se zadanými délkami. Pokud ti někdo dá tři délky, je snadné z nich vyrobit trojúhelník. Pro nakreslení do roviny stačí pravítko a kružítko. Pokud máš úsečky ve formě dřevěných tyček, stačí je prostě dát k sobě. Pokud ovšem… platí trojúhelníková nerovnost – každá úsečka musí být kratší než součet ostatních dvou. Co když ale dostaneme čtyři úsečky a chceme z nich vyrobit draka, tedy nějaký pěkný čtyřúhelník?

Problém 1: Platí něco jako n-úhelníková nerovnost – jednoduchá podmínka na délky úseček, která je splněna právě tehdy, když z těchto úseček můžeme sestrojit n-úhelník? Jakou podmínku musíme zvolit, pokud navíc chceme, aby náš n-úhelník byl nějaký pěkný, například konvexní? Abychom mu mohli opsat či vepsat kružnici? Aby byl středově symetrický nebo prostě jen pěkně létal?

Jednotlivé podmínky mohou být záludné až obludné, neboj se proto odhadovat, experimentovat, či programovat.

Nyní si přestav, že jednu z úseček zafixuješ v rovině. Počet trojúhelníků, které můžeš sestrojit je potom buď 0 (pokud trojúhelníková nerovnost neplatí), nebo 2 (jeden v každé polorovině určené pevnou úsečkou). Zajímavou otázkou je, co se stane, když opět dostaneme více úseček, například čtyři. V tom případě můžeme vytvořit mnoho rozmanitých čtyřúhelníků, určitě ale ne jen tak ledajakých, například pokud dostaneme délky 3, 3, 3, 8, nějaký čtyřúhelník sestrojíme, ale určitě musí být hodně „spláclý“. Zato čtyřúhelník o úsečkách 1, 1, 1, 1 může být spláclý, jak se mu zachce, zato ale musí mít rovnoběžné protější strany, neboť je to kosočtverec.

Problém 2: Dovedeš říct něco o tom, jak může vypadat množina čtyřúhelníků (pětiúhelníků, šestiúhelníků, …), které můžeme zkonstruovat, pokud máme zadané délky úseček a jednu úsečku máme zafixovanou? Některé čtyřúhelníky mezi sebou můžeme převádět tak, že jejich vrcholy pouze trochu spojitě posuneme. Jde to ale vždycky, nebo jsou nějaké extrémní případy, za které se už nedá posunout, aniž bychom změnili délky úseček? Jakou množinu vykreslují další vrcholy čtyřúhelníku? Problém je lepší řešit s konkrétními délkami a až poté se třeba zamyslet nad nějakými obecnějšími principy.

Pepa

Téma 3 – Reakce v miskách

Chemické reakce se běžně zapisují jako dlouhé rovnice, které naprosto postrádají tu zajímavost toho, když je člověk pak může pozorovat ve zkumavce. Ne všechno ale je praktické (nebo bezpečné) zkoumat ve zkumavce – nešlo by to přeci jen nějak zapsat?

Většina chemických reakcí je ve skutečnosti úžasně jednoduchá – vezme nějaké reaktanty a (občas za pomoci nějakých katalyzátorů) je promění v produkty. Toto chování umožní simulovat nástroj Machinations, který najdete na webových stránkách Jorise Dormanse[1].

Machinations je celý o posouvání žetonků na schématu, které si sami navrhneme. Schéma pozůstává z jednotlivých misek, ve kterých můžeme skladovat žetonky, zdrojových konektorů, pomocí kterých budeme žetonky posouvat, stavových konektorů, pomocí kterých může jedna část schématu ovlivnit druhou, a různých speciálních prvků s funkcemi jako například náhodné rozdělování žetonků a podpora komplexních převodů žetonků mezi miskami. Kompletní návod včetně ukázkových schémat v Machinations naleznete na webu M&M, v sekci Témata.

A co přesně budeme simulovat? Rozhodně zkuste odsimulovat svoje oblíbené chemické pokusy a cokoliv z chemie, co vám přijde jako zajímavá výzva. Jako inspiraci můžete použít následující reakci:

[1] `http://www.jorisdormans.nl/machinations/`

Chlorace metanu
Navrhněte schéma simulující průběh chlorace metanu. Ta probíhá tak, že metan reaguje s radikály Cl, vzniklými rozkladem molekul Cl_2 ultrafialovým zářením. Podrobný mechanismus můžete nalézt například na české Wikipedii pod heslem Halogenace.

Hlavně bych se ale zaměřil na buněčný metabolismus.

Metabolismus
Zkuste navrhnout schémata simulující jednotlivé části buněčného metabolismu – glykolýzu, fotosyntézu, citrátový cyklus a dýchací řetězec. Úkol je to věru rozsáhlý, nebojte se proto vytvořit a poslat nám jen menší části, někdo jiný je poté může rozšířit. A naopak, nebojte se použít už zveřejněné návrhy ostatních řešitelů.

Pokud narazíte na problém, budete mít otázky, nebo se jen budete chtít pochlubit fungujícím schématem, tak mi pište na `lieskovsky.matej+tema@gmail.com`

Matej

Informace o M&M

Co M&M nabízí

Časopis je zdarma a najdeš v něm úlohy, témata a články. M&M je taky soutěž o věcné ceny a o dort. Nejlepší řešitele zveme dvakrát do roka na bezva soustředění. A taky se můžeš dostat na Matfyz bez přijímaček. Konkrétní informace najdeš přímo v časopise, v jednotlivých sekcích.

Jak se zapojit

V průběhu školního roku vychází zpravidla sedm čísel časopisu. V nich jsou zadané různé podněty k přemýšlení. Pokud tě některá z úloh zaujme, pokus se najít řešení a poslat nám ho. K řešení přilož prosím také své jméno, adresu, e-mail, školu a rok maturity. Pokud chceš jet na soustředění, uveď prosím i telefon. Tyto údaje budeme využívat pouze pro potřeby M&M. Mimo údajů na výsledkové listině (jméno, škola, ročník) je nebudeme nikde zveřejňovat.

Svá řešení můžeš poslat buď elektronicky na náš e-mail `mam@matfyz.cz`, nebo poštou na adresu uvedenou na zadní straně. Každou úlohu prosím pošli na samostatném listě A4 resp. v samostatném souboru, aby si úlohy mohli rozdělit různí opravující. Na každý list uveď svoje jméno a číslo úlohy či tématu. Na tvou poštovní adresu ti pak budou zdarma chodit další čísla našeho časopisu.

Pokud by ses chtěl o M&M dozvědět více, podívej se na naše webové stránky `mam.mff.cuni.cz`, kde mimo jiné najdeš podrobná pravidla a archiv všech vydaných čísel z posledních 20 ročníků.

Soutěž

M&M není jen časopis, ale i soutěž. Za všechny došlé úlohy, příspěvky k tématům i články udělujeme body. U každé úlohy je uveden počet bodů za správné řešení, přiměřenou část z těchto bodů lze získat i za řešení neúplné. U témat a článků žádná horní hranice stanovena není – za dobrý příspěvek lze získat i 20 bodů. Na základě získaných bodů sestavujeme výsledkovou listinu. Na nejlepší řešitele čekají knihy a deskovky, autor nejlepšího příspěvku k tématku si bude moci smlsnout na dortu. A přibližně dvacet pět nejúspěšnějších řešitelů zveme dvakrát do roka na soustředění.

Soustředění

Vždy na podzim a na jaře připravujeme pro naše nejlepší řešitele týdenní soustředění. To se obvykle koná někde v blízkosti pěkné přírody. Soustředění je částečně odborné – máme pro vás připraveny přednášky z nejrůznějších oblastí matematiky, fyziky a informatiky. Dost času je věnováno i nejrůznějším hrám. Především je ale soustředění příležitost potkat fajn lidi s podobnými zájmy! Letošní podzimní soustředění se bude konat 10.–19. 10. 2014. Budeme na něj zvát nejlepší řešitele z minulého ročníku, ale i ty, kteří pošlou pěkná řešení úloh a témat z tohoto čísla. Budeme rádi, pokud nám společně se svými řešeními napíšeš, jestli bys na soustředění případně chtěl(a) jet.

Přijímací zkoušky na MFF

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy se rozhodla nejúspěšnějším řešitelům našeho korespondenčního semináře odpustit přijímací zkoušky. Konkrétně se to týká těch řešitelů, kteří získají za rok alespoň 85 bodů. Ti od nás dostanou „osvědčení úspěšného řešitele“, které pak mohou předložit fakultě.

Pokud máš ještě nějaké otázky, podívej se na náš web, nebo nám rovnou napiš. Kontakt najdeš níže. Těšíme se na tvá řešení!

Alena, Anet, Eliška, Honza, Honza Mikel, Jethro, Jirka, Kuba, Lubošek, Lukáš, Marble, Martin, Martina, Matěj, Matej, Míša, O(N)dra, Pepa, Peťa, Tomáš, Tonda, xlfd, Zuzi a Riki

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.