

Řešení úloh 5. série – str. 2 • Řešení úloh 6. série – str. 7  
Shrnutí výsledků témat – str. 12

Doc.<sup>MM</sup> Aneta Šťastná: Pevnost latexové trubice – str. 31

Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula: Stern-Brocotův strom – str. 34

---

*Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.*

## Milé řešitelky, milí řešitelé,

doufáme, že si užíváte letní pohodu, náladu a počasí. Organizátoři si letní volno užívají na maximum, čas na vydání dalšího čísla jsme si ale samozřejmě našli. Tímto číslem končí jubilejní dvacátý ročník našeho semináře. Během něj jste doširoka i dohluboka rozebrali pět témat a vyřešili dvacet pět úloh.

Vítězem tohoto ročníku se zaslouženě stala Dr.<sup>MM</sup> Aneta Lesná. Anetě srdečně gratulujeme.

V tomto závěrečném čísle časopisu na vás čekají řešení úloh z minulých čísel a také závěrečná shrnutí k tématkům.

Přejeme příjemné počtení, přejeme vám všem krásný a na zážitky bohatý srpen a těšíme se na vás v příštím školním roce.

Vaši organizátoři MĚM

# Řešení úloh 5. série

## Úloha 5.1 – Převoz ryb (4b)

### Zadání:

*Chceme z přístavu X do přístavu Y převést co nejvíce ryb. Vzdálenost mezi X a Y je 100 kilometrů, máme 300 kg ryb a loďku, která může vézt maximálně 100 kg nákladu. Námořníci ale navíc každý kilometr sní kilo ryb, jinak odmítají veslovat. Pokus se najít způsob, jak převést co nejvíce ryb. Celou cestu plujeme podél pobřeží, přičemž ryby si můžeme kdekoliv na pobřeží odložit a poté opět vyzvednout, nikdo nám je nesní.*

### Řešení:

Na začátku máme 300 kg ryb, proto z přístavu X může vyplout třikrát plně naložená loďka. Všimneme si, že si musí dvakrát odložit zbytek ryb na pobřeží a nechat si jen zásobu, která vystačí právě zpět do přístavu. Převoz ryb takovýmto způsobem má spotřebu 5 kg/km.

Jakmile máme jen 200 kg ryb, tak nemusíme plout třikrát, proto při spotřebě 5 kg/km uplujeme 20 km.

Od 20. kilometru se spotřebují jen 3 kg/km, protože nám stačí plout dvakrát směrem vpřed a jednou se vracet. Takto na 100 kg ryb uplujeme  $(33 + \frac{1}{3})$  km a jsme na  $(53 + \frac{1}{3})$  km a máme 100 kg ryb.

Nakonec už plujeme jen do přístavu Y se spotřebou 1 kg/km. Zbývá nám  $(46 + \frac{2}{3})$  km a proto do přístavu dovezeme  $(53 + \frac{1}{3})$  ryb.

Někteří z vás počítali jenom s celočíselnými rybami, což dává smysl, protože třetina ryby, která námořníkům zbyla, se už normálním zákazníkům nedá prodat.

## Úloha 5.2 – Hlasování (4b)

### Zadání:

Před tebou leží klobouk s  $N$  papírky. Na každém lístku je číslo od 1 do  $K$ , tedy hlas pro jednoho z  $K$  vybraných námořníků. Hlasování vyhraje jedinec, který získá nadpoloviční většinu hlasů. Vymysli co nejefektivnější algoritmus, který na vstupu dostane  $N$  čísel z množiny  $\{1, \dots, K\}$  ( $N$  i  $K$  mohou být velká čísla) a na výstupu oznámí číslo vítěze nebo odpoví, že nikdo zvolen nebyl. Jelikož si toho ovšem námořníci nedokáží moc zapamatovat, může si algoritmus uložit do paměti pouze konstantně mnoho čísel velikosti řádově  $N^1$ .

### Řešení:

Klíčovým pozorováním bylo všimnout si, že pokud někdo vyhraje, musí mít nadpoloviční počet hlasů, tedy víc než všichni ostatní dohromady. Pokud každý hlas vítěze spárujeme s hlasem jiného kandidáta, musí zbylé hlasy patřit vítězi (pokud existuje). Navíc pokud bychom spárovali dva hlasy kandidátů, z nichž ani jeden nevyhrál, znamená to, že zbude o 2 více hlasů vítěze, tedy opět všechny zbývající patří vítězi. Můžeme tedy vždy spárovat libovolnou dvojici různých hlasů.

Konkrétní algoritmus vypadá následovně. Vezmeme první hlas a odpovídajícího kandidáta prozatím prohlásíme za vítěze, jelikož právě zbývají pouze jeho hlasy. Zároveň si budeme pamatovat, kolik hlasů má náš kandidát navíc, nyní tedy jeden. Podíváme se postupně na každý další hlas. Pokud je to hlas pro našeho kandidáta, zvýšíme počet přebývajících hlasů o 1. Pokud ne, snížíme jej o 1, což odpovídá spárování dvou různých hlasů. Kdykoli počet přebývajících hlasů klesne na 0, prohlásíme za vítěze kandidáta z následujícího hlasu obdobně, jako jsme to udělali na začátku algoritmu. Takto zpracujeme všechny hlasy.

Pokud vítěz existuje, pak případné zbývající hlasy patří jemu. Ještě jednou tedy projdeme všechny hlasy a spočítáme, zda má dotyčný kandidát nadpoloviční počet hlasů. Pokud ano, máme vítěze, pokud ne, vítěz neexistuje.

Rozbor složitosti: Jelikož pouze dvakrát přečteme vstup a pro každý hlas provedeme konstantně mnoho operací, sebehne algoritmus v čase  $\mathcal{O}(N)$ . Průběžně si pamatujeme pouze číslo kandidáta a počet přebývajících hlasů, kterých je nejvýše  $N$ , tedy paměťová složitost je konstantní, přesně jak bylo v zadání požadováno.

Honza Mikel

## Úloha 5.3 – Pálení listu (5b)

### Zadání:

Jakou lupu bychom měli použít k zapálení obyčejného bílého papíru za jarního slunečného dne? Důležitý je sběrný průřez, ze kterého je sluneční světlo zaostřeno

<sup>1</sup>Tato konstanta však nesmí být závislá na  $N$  ani  $K$ . Není tedy možné například spočítat, kolik měl každý hlasů, a vybrat maximum, jelikož by to vyžadovalo  $\mathcal{O}(K)$  paměti.

do jednoho bodu na papíře. Výsledek se pokuste co nejkvalifikovaněji odhadnout<sup>2</sup>. Můžete použít jakékoli prostředky (výpočet, vyhledávání na internetu nebo v literatuře, experiment), pravděpodobně je budete potřebovat zkombinovat. Svoje závěry podložte a na zdroje se odkazujte.

### Řešení:

Než se pustíme do řešení, je radno poznamenat, že toto je úloha odhadovací. S takovými úlohami se v reálném životě potkáme často – potřebujeme přibližně vědět, za jak dlouho se na kole dostaneme do Horní Dolní, kolik vody budeme poté potřebovat k umytí toho kola, nebo právě jakou si vzít lupu k rozdělení ohníčku. Nepotřebujeme tedy vědět přesné číslo, ale mít jakousi představu. Pojedu tam hodinu, nebo celý den? Bude mi stačit kýbl, nebo si mám vzít rovnou hadici? Stačí mi moje (babiččiny) brýle, nebo si na to musím koupit něco speciál?

Fyzikální odhad ale neznamená odhad od boku. Je to v podstatě jen velmi nepřesný výpočet, kde si ale stále musíme držet představu o té nepřesnosti. Jsou pak možné dva přístupy: Můžeme se snažit odhadovat co nejbliž reálné hodnotě – střed, a pak je třeba o to pečlivěji určit nepřesnost odhadu. Nebo můžeme dávat všude nějakou rozumnou rezervu, a odhadnout „co už musí stačit“ (do půl dne tam určitě budu, měly by stačit tři kýble, ...), tedy jde o odhad maximální nebo minimální. My se zde budeme snažit o odhad střední. Abychom zapálili papír, musíme jej ohřát na teplotu vznícení  $T_v = 505 \text{ K}$ <sup>3</sup>. Papír zapálíme tak, že zaostříme sluneční světlo pomocí lupy o obsahu (sběrném průřezu)  $S_l$  na malou plošku velikosti  $S_p$ . V tomto případě bude papír přijímat výkon

$$P_{\text{in}} = IS_l(1 - \alpha),$$

kde  $I = 100 \text{ Wm}^{-2}$ <sup>4</sup> je tok záření ze Slunce v  $\text{Wm}^{-2}$  a  $\alpha = 0,65$ <sup>5</sup> je albedo (odrazivost), tj. podíl odražené a dopadlé energie.

Papír bude zároveň vyzařovat energii jako šedé těleso podle vzorce

$$P_{\text{out-z}} = \epsilon 2S_p \sigma T^4,$$

kde  $\epsilon = 0,95$ <sup>6</sup> je emisivita,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  je Stefan-Boltzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota.  $S_p$  je dvojnásobná kvůli tomu, že papír vyzařuje z obou stran. Dále je papír ochlazován vedením tepla z ozáření plošky do okolních oblastí papíru a okolním vzduchem. Pro vedení tepla v ustáleném stavu platí

$$P_{\text{out-v}} = S\lambda \frac{T_v - T}{d},$$

<sup>2</sup>Ve fyzice pojmem odhadnout nemyslíme střelení od boku, ale zjednodušený výpočet na základě modelu, o kterém sice víte, že úplně přesně nepopisuje realitu, ale věříte, že je dostatečně blízko, a je dostatečně jednoduchý na to, abyste s ním byli schopni pracovat.

<sup>3</sup><http://www.tforensic.com.au/docs/article10.html>

<sup>4</sup><http://www.stavebnictvi3000.cz/clanky/zarovka-usporna-zarovka-mnozstvi-svetla/>

<sup>5</sup><http://vixra.org/pdf/1110.0035v1.pdf>

<sup>6</sup>[http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d\\_447.html](http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html)

kde  $S$  je plocha, přes kterou je teplo vedeno,  $\lambda = 0,05 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  koeficient tepelné vodivosti,  $T = 300 \text{ K}$  okolní teplota a  $d$  vzdálenost od ohřívajícího místa, kde už se papír neohřívá.

Různé druhy papíru se zapalují různě obtížně. My tady uvažujeme obyčejný bílý kancelářský papír, ale je nám asi jasné, že tmavý papír bude mít jiné vlastnosti než světlý a tenký jiné než tlustý. Tmavý papír bude mít mnohem menší odrazivost, a tím pádem bude mnohem efektivněji absorbovat záření, bude mít ale i větší ztráty zářením. Tenký papír bude mít menší ztráty vedením uvnitř papíru oproti přenosu tepla do vzduchu než tlustý papír. To je ale podstatný poznatek... Vzhledem k tomu, že tenký papír se obecně (tj. i sirkami) zapaluje snáz, než tlustý, lze vyvodit, že vedení tepla v papíru je větší ztráta než přenos do (klidného) vzduchu. Proto přenos tepla do vzduchu uvažovat nebudeme. Tepelné ztráty pak jsou  $P_{\text{out}} = P_{\text{out-z}} + P_{\text{out-v}}$ .

Aby se papír zahřál z počáteční teploty na teplotu vznícení, musí být po celou dobu dopadající výkon  $P_{\text{in}}$  větší než vyzařovaný  $P_{\text{out}}$ . Protože se teplota zvyšuje a při  $T_v$  je největší, musí platit

$$IS_1(1 - \alpha) > 2\epsilon S_p \sigma T_v^4 + S\lambda \frac{T_v - T}{d}.$$

Zbývá nám ale ještě spousta parametrů, jejichž hodnoty musíme odhadnout... Začneme ploškou, na kterou lze sluneční světlo zaostřit. Zkoušela jsem tři čočky o různých ohniskových délkách (1,5 až 6 cm), a všemi se mi podařilo zaostřit světlo do plochy cca  $1 \text{ mm}^2$ , musím ale uznat, že jsem použila dosti kvalitní optické vybavení, takže pro sichr počítejme  $S_p = 10 \text{ mm}^2$ .

Plocha  $S$ , skrz kterou je vedeno teplo papírem, je plášť válce o průměru 3 mm (přibližně z plochy osvětlené oblasti) a výšce rovné tloušťce papíru (cca 0,11 mm), tedy  $S = 0,5 \text{ mm}^2$ .

Vzdálenost od osvětleného místa  $d$ , ve které se už papír nezahřívá, budeme muset prostě odhadnout hodně od oka. Měřit teplotu v určitém bodě papíru je prakticky nemožné. Nepozorovala jsem žádné změny teploty papíru 0,5 cm od osvětleného bodu, a blíž jsem se nedostala, stanovme tedy hranici s rezervou na 1 mm.

Po dosažení zjistíme, že ztráty vedením jsou oproti ztrátám zářením zanedbatelné

$$P_{\text{out-z}} = 0,07 \text{ W}, \quad P_{\text{out-v}} = 0,005 \text{ W},$$

takže si nemusíme ani dělat těžkou hlavu se ztrátami přenosem tepla do vzduchu (nefouká-li vítr). Vychází  $S_1 = 20 \text{ cm}^2$ , a potřebujeme tedy čočku o průměru přibližně 5 cm.

Jak již bylo naznačeno na začátku, tohle je odhad, prováděný spíše řádově. Navíc jsme stále některé parametry neuvážili. Nejdůležitějším z nich je dle mého názoru absorpce světla čočkou. Čočka může být různě tlustá a z různých materiálů (sklo, plast), a i když se nám zdá průhledná, absorbuje v infračervené a ultrafialové oblasti, tím nám vznikají další ztráty, které bohužel na naší úrovni

nejsme schopni kvantifikovat (pouze vám prozradím, že polymethylmetakrylát, tedy plexisklo, propouští mnohem lépe v infračervené oblasti než normální sklo). Navíc všechny materiálové konstanty zde použité jsou nějaké střední hodnoty pro viditelné světlo.

Viktor & Zuzka

## Úloha 5.4 – Kód (4b)

### Zadání:

*Kolik existuje 1000-ciferných čísel, které obsahují pouze liché cifry a každé dvě sousední cifry se liší nejvýše o 2?*

### Řešení:

Do zadání se vloudila chyba, což způsobilo, že řešení není vůbec tak elegantní, jak bylo zamýšleno. Původně jsme se chtěli ptát na počet čísel, jejichž sousední cifry se liší právě o 2. Ale ukázalo se, že mezi řešiteli máme dva dobré matematiky, kteří si poradili i se ztíženou verzí.

Označme si  $a(n)$  počet čísel dlouhých  $n$  cifer, které končí na 1,  $b(n)$  počet čísel délky  $n$  končících na 3 a  $c(n)$  počet čísel délky  $n$  končících na 5. Ze symetrie bude  $a(n)$  také počet čísel délky  $n$  končících 9 a  $b(n)$  počet cifer délky  $n$  končících na 7.

Dle zadání platí rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} a(n) &= a(n-1) + b(n-1), \\ b(n) &= a(n-1) + b(n-1) + c(n-1), \\ c(n) &= 2b(n-1) + c(n-1). \end{aligned}$$

Celkový počet slov délky  $n$  splňující podmínky zadání pak bude

$$s(n) = 2a(n) + 2b(n) + c(n).$$

To můžeme upravit:

$$\begin{aligned} s(n) &= 2a(n) + 2b(n) + c(n) = 4a(n-1) + 6b(n-1) + 3c(n-1) = \\ &= 2s(n-1) + 2b(n-1) + c(n-1) = 2s(n-1) + c(n). \end{aligned}$$

Zde vidíme náznak rekurentního vztahu pro  $s(n)$ . Vadí nám jenom  $c(n)$ , ale toho se naštěstí umíme zbavit:

$$\begin{aligned} c(n) &= s(n-1) - 2a(n-1) = s(n-1) - (2a(n-2) + 2b(n-2)) = \\ &= s(n-1) - (4a(n-3) + 4b(n-3) + 2c(n-3)) = \\ &= s(n-1) - 2s(n-3). \end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme lineární rekurentní vztah

$$s(n) = 3s(n-1) - 2s(n-3).$$

K nalezení 1000. členu této rekurence můžeme přistoupit různými způsoby. Šlo by například využít libovolný tabulkový kalkulátor (MS Excel, ...). My zvolíme matematicky čistší řešení pomocí tzv. charakteristické rovnice.

Budeme hledat řešení ve tvaru  $s(n) = x^n$ . Lze ukázat, že jako lineární kombinaci takovýchto řešení lze zapsat libovolné řešení našeho rekurentního vztahu. Chceme, aby platilo  $x^n = 3x^{n-1} - 2x^{n-3}$ , neboli  $x^3 = 3^2 - 2$ . Tato rovnice má kořeny  $1$ ,  $1 - \sqrt{3}$  a  $1 + \sqrt{3}$ . Řešení rekurence budeme tedy hledat ve tvaru

$$s(n) = k + (1 - \sqrt{3})^n l + (\sqrt{3} + 1)^n m.$$

Ručně dopočítáme, že  $s(1) = 5$ ,  $s(2) = 13$  a  $s(3) = 35$ . To dosadíme do rovnice výše a dostáváme tak tři lineární rovnice o třech neznámých, jejichž řešení je

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})}, \\ l &= -\frac{(1 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} - 5)}{2\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})}, \\ m &= -\frac{-33 - 19\sqrt{3}}{3(1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}. \end{aligned}$$

Tyto hodnoty dosadíme do odvozené rovnice a můžeme dopočítat, že

$$s(1000) \doteq 5,2 \cdot 10^{436}.$$

*Kuba*

## Řešení úloh 6. série

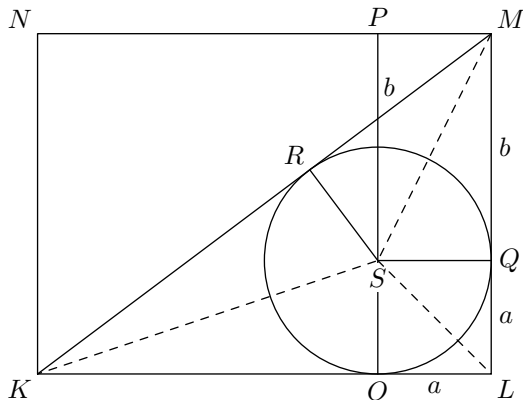
### Úloha 6.1 – Obdélník a čtverec (4b)

#### Zadání:

Obdélník  $KLMN$  a čtverec  $KOPN$  mají takovou vzájemnou polohu, že bod  $O$  leží na kružnici vepsané trojúhelníku  $KLM$ . Vypočítejte poměr délky a šířky obdélníku  $KLMN$ .

#### Řešení:

Označme si  $S$  střed kružnice vepsané trojúhelníku  $KLM$  a  $Q, R$  popořadě body dotyku kružnice se stranami  $LM$  a  $MK$ . Trojúhelník  $KOS$  je shodný s  $KRS$ ,



$LQS$  je shodný s  $LOS$  a  $MQS$  s  $MRS$ , vše podle věty SSu. Označme  $a = |LO| = |LQ|$  a  $b = |MQ| = |MR|$ . Dále  $|KO| = |LM| = a + b$ , protože to jsou strany čtverce. Z Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} |MK|^2 &= |KL|^2 + |LM|^2 \\ (a + 2b)^2 &= (2a + b)^2 + (a + b)^2 \\ a^2 + 4ab + 4b^2 &= 4a^2 + 4ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ 0 &= 2a^2 + ab - b^2 \\ 0 &= (a + b)(2a - b) \end{aligned}$$

Délky úseček musí být kladné, tedy  $b = 2a$  a poměr délky a šířky obdélníku  $KLMN$  je  $|KL|/|LM| = 4b/3b = 4/3$ .

Matěj

## Úloha 6.2 – Špagetová (4b + bonus)

### Zadání:

Důsledkem nehomogenity gravitační síly velmi hmotných objektů (černé díry) dochází k tzv. špagetizaci – „roztahování objektů“. Uvažujte černou díru o hmotnosti  $m$ . a) Určete poloměr černé díry (tak, aby částice s podsvětelnou rychlostí v této vzdálenosti nemohla uniknout do nekonečna) b) Určete velikost síly roztahující molekulu ve vzdálenosti  $R$  o vazebné délce  $l$  c) Předpokládejte, že molekula  $H_2$  se roztrhne, když ji roztahuje síla  $F_k = 3 \cdot 10^{-8}$  N. Stanovte podmínku pro  $m$ , aby roztržení molekuly mohli pozorovat vzdálení pozorovatelé. Bonus: jak se podmínka změní, když místo předpokladu o  $F_k$  budeme předpokládat chování vodíkové vazby podle Lennard-Jonesova potenciálu? Uvažujte molekulu padající z nekonečna.



**Řešení:**

Na začátek je nutné podotknout, že pro výpočet čehokoli týkajícího se černých děr je na místě použít obecnou teorii relativity. To ale po vás chtít nemůžeme, a tak výsledek počítáme špatně – newtonovsky.

Černá díra je objekt natolik hmotný, že z gravitačního pole v jejím blízkosti neunikne ani světlo, tedy informace. Proto je jako její poloměr (Schwarzschildův poloměr) definována vzdálenost od středu, ve které je úniková rychlost (rychlost právě potřebná k opuštění gravitačního pole) rovna rychlosti světla. Co je pod Schwarzschildovým poloměrem není možné zjistit. V prvním bodě se po nás chce odvodit závislost Schwarzschildova poloměru  $r$  na hmotnosti černé díry  $m$ .

Vyjdeme ze zákona zachování energie. Kinetická energie tělesa se spotřebuje na vyrovnání potenciálové energie v gravitačním potenciálu černé díry, tedy

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\varkappa m \mu}{r},$$

kde  $\mu$  je hmotnost tělesa,  $\varkappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$  gravitační konstanta a  $v$  rychlost tělesa, v našem případě  $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Z toho plyne

$$r = \frac{2\varkappa m}{c^2}.$$

Máme-li dvouatomovou molekulu o délce  $l$  ve vzdálenosti  $R$  od středu černé díry (orientovanou radiálně), liší se velikost gravitační síly působící na jednotlivé atomy a tento rozdíl natahuje vazbu mezi nimi. Předpokládáme molekulu vodíku jako v následující otázce, tedy oba atomy jsou stejné a mají hmotnost  $\mu$

$$F = F_g(R) - F_g(R + l) = \frac{\varkappa m \mu}{R^2} - \frac{\varkappa m \mu}{(R + l)^2} = -\varkappa m \mu \frac{l(2R - l)}{R^2(R - l)^2}.$$

Výraz můžeme ještě zjednodušit, neboť  $l \ll R$ , a proto lze  $l$  oproti  $R$  v součtech zanedbat

$$F = -\varkappa m \mu \frac{2l}{R^3}$$

Předpokládáme tedy molekulu vodíku, kde hmotnost atomu vodíku je  $\mu = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  a síla potřebná k přetržení vazby je  $F_v = 3 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ . Chceme nyní najít hraniční černou díru, u které můžeme roztržení takové molekuly pozorovat, tj. stane se na Schwarzschildově poloměru. Dosadíme  $R = r$ .

$$F = -2\varkappa m \mu l \frac{c^6}{8\varkappa^3 m^3} = -\frac{\mu c^6 l}{4\varkappa^2 m^2}$$

Odtud hmotnost černé díry

$$m = \frac{c^3}{2\varkappa} \sqrt{\frac{\mu l}{4F}} = 4 \cdot 10^{20} \text{ kg}.$$

Poloměr takové černé díry by byl  $r = 6 \cdot 10^{-7}$  m. Nejmenší (nepřímo) pozorované černé díry mají hmotnost  $10^{31}$  kg, takováhle černá díra je tedy trošku mimo. . .

V bonusové otázce se organizátoři ptají, jak by to vyšlo s uvažováním Lennard-Jonesova potenciálu (potenciál běžně používaný pro popis chemické vazby). Chtějí tím naznačit, že vazebnou sílu v předchozím odstavci odvodili trochu pochybným způsobem, aby úlohu na úkor korektnosti zjednodušili (a zde se k tomu veřejně přiznávají).

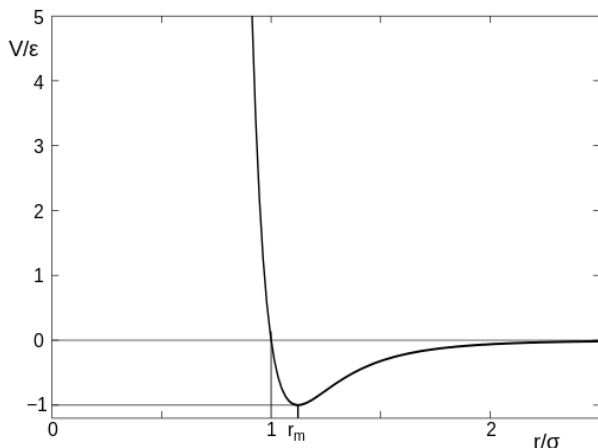
Lennard-Jonesův potenciál je popsán vztahem

$$V_{\text{LJ}} = \varepsilon \left( \frac{l_0}{l} \right)^{12} - 2\varepsilon \left( \frac{l_0}{l} \right)^6,$$

kde  $\varepsilon = 7,3 \cdot 10^{-19}$  J je vazebná energie chemické vazby v molekule vodíku,  $l_0 = 7,4 \cdot 10^{-11}$  m je délka vazby ve stavu minimální energie molekuly a  $l$  je aktuální délka vazby.

Budeme předpokládat rovnovážný stav, tedy že síla Lennard-Jonesova potenciálu, která drží molekulu pohromadě, se vyrovná se slapovou silou černé díry z minulého odstavce  $F_{\text{LJ}} = F_G$ . V takovém případě bude molekula nataženější než  $l_0$ .

$$\varepsilon \frac{l_0^{12}}{l^{11}} - 2\varepsilon \frac{l_0^6}{l^5} = -\frac{mc^6 l}{4\pi^2 m^2}$$



Abychom mohli určit podmínku pro hraniční hmotnost černé díry, musíme ještě nějak definovat, kdy se tedy molekula roztrhne. Při pohledu na průběh Lennard-Jonesova potenciálu vidíme, že s rostoucím  $l$  potenciál velmi rychle konverguje k nule (přesně nula je v nekonečnu) a celkem rozumně se jí blíží už při  $l = 2l_0$ , vezměme tedy tohle jako podmínku roztržení vazby. Po dosazení do vztahu výše už můžeme odvodit výraz pro hmotnost černé díry.

$$m = \frac{4c^3}{\varkappa} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 7,7 \cdot 10^{39} \text{ kg}$$

Je tedy vidět, že s odhadem síly vazby se organizátoři fakt seklí. Teď už nám vyšla celkem rozumná supervelká černá díra, takové máme jako pozůstatky prvních hvězd v historii vesmíru.

Dále je třeba si rozmyslet, jestli daná hranice je minimum nebo maximum. Platí, že se vzdáleností od černé díry potenciál klesá pomaleji než síla ( $r$ -krát), proto na Schwarzschildově poloměru (definovaném přes potenciál) je u těžší díry gradient síly menší než u lehčí díry. Nalezená mezní hmotnost je tedy maximumem.

*Zuzka*

## Úloha 6.3 – Barevné míčky (2b)

### Zadání:

*Na podlaze máme v řadě  $N$  barevných míčků. Každý z nich je buď červený, zelený nebo modrý. Chtěli bychom je přeuspořádat tak, aby byly vlevo všechny červené, uprostřed zelené a vpravo modré. V každém kroku můžeme vzít dva míčky a vyměnit jejich pozice. Kolik takových prohození bude určitě stačit na seřazení míčků?*

### Řešení:

Nejdříve bychom si chtěli nasypat popel na hlavu, neboť jsme v zadání zapomněli zmínit, že nás zajímá *nejmenší* počet prohození, který určitě bude stačit. Většina z vás nicméně zadání pochopila takto, takže (snad) k žádné větší újmě nedošlo.

Nechť červených míčků je  $C$ , zelených  $Z$  a modrých  $M$ . Budeme předpokládat, že platí  $C \geq Z \geq M$ , v ostatních případech to bude fungovat podobně. Nejdříve vezmeme všechny modré míčky a přesuneme je na správná místa – na to je třeba maximálně  $M$  prohození. Poté vezmeme všechny zelené míčky a přesuneme je na správná místa – to opět spotřebuje nejvýše  $Z$  prohození. Jelikož jak modré, tak zelené míčky jsou na správných místech (druhým přehazováním jsme modré míčky nemohli rozházet), pak i červené musí být na správných místech. Potřebujeme tedy  $Z + M$ , což je nejvýše  $\frac{2N}{3}$ , jelikož  $C \geq \frac{N}{3}$  (jinak by nebylo největší).

Proč to nejde lépe? Uvažme případ, kdy je všech míčků stejně a jsou uspořádané tak, že nejdříve jsou všechny zelené, pak modré a pak červené. Je zřejmé, že nemá smysl prohazovat dva míčky stejné barvy, stejně tak nemá smysl cokoliv provádět s míčkem, který je ve správné pozici. Pokud prohodíme dva míčky, na které jsme předtím ještě nesáhli, pak se vždycky právě jeden dostane na správnou pozici. Pokud prohodíme dva míčky, ale jeden z nich se už předtím účastnil jednoho prohození (ale skončil na špatném místě), pak po prohození budou oba dva na správném místě. Na každé tři různobarevné míčky tedy spotřebujeme nejméně dvě prohození, celkem na  $N$  míčků tedy musíme použít alespoň  $\frac{2N}{3}$  prohození.

$\mathcal{O}(N)$  dra

## Úloha 6.4 – Kruhy v obdélníku (2b)

### Zadání:

Máme obdélník, který lze pokrýt 25 kruhy o průměru 2. Dá se potom také pokrýt 100 kruhy o průměru 1?

### Řešení:

Vezmeme si libovolný obdélník, který se dá pokrýt 25 kruhy o průměru 2. Jeho „poloviční“ obdélník, tj. podobný obdélník s polovičními délkami stran, se dá jistě pokrýt 25 kruhy o průměru 1, stačí původní obdélník i s jeho kruhy dvakrát zmenšit<sup>7</sup>. Náš původní obdélník nyní překryjeme čtyřmi polovičními obdélníky a každý z polovičních obdélníků pokryjeme 25 kruhy o poloměru jedna. Tím pokryjeme celý obdélník celkem  $4 \cdot 25 = 100$  kruhy, jak jsme chtěli.

*Pepa*

## Řešení témat

### Téma 1 – Zobrazování počasí

Během roku jsme obdrželi k tomu tématu několik příspěvků. Postupně se rozvíjel jejich přínos od prvotních opakování zjevných fakt naznačených už v zadání po ucelené rešerše týkající se určitých aspektů tohoto tématu, které byly také patričně bodově ohodnoceny. Bohužel nikdo neprovedl žádný experiment. Třeba příští ročník bude experimentálně bohatší. Na závěr otiskujeme poslední došlé příspěvky.

*Zuzka*

### Počasí a lidová moudrost (13 b)

*Dr.<sup>MM</sup> Aneta Lesná*

Nejsme zdaleka první, koho napadlo pokusit se předpovědět počasí pozorováním přírody. Relativně dlouho ani jiná možnost nebyla. Z generace na generaci si lidé předávali snadno zapamatovatelné průpovědky, které jim orientaci v rozmarech počasí měly usnadnit. Pokud je „moderní člověk“ vezme na milost, mohou mu být užitečné nejen jako zálesácká pomůcka.

*When Clouds Look Like Black Smoke*

*A Wise Man Will Put On His Cloak*

Mraky připomínající kouř jsou zde mraky typu cumulus congestus. Pokud na ně svítí slunce, jsou většinou zářivě bílé. Ve stínu (ostatních mraků, ...) se mohou jevit jako velmi tmavé. Tyto mraky tvarem často připomínají karfiol. Díky množství vodní páry mají schopnost ztemnit oblohu. V raných fázích bouře se začínají objevovat mraky typu cumulus. Krátce poté dosáhne bouře vrcholu a začne pršet. Použitelnost rčení je nejvyšší v přímořských oblastech.

<sup>7</sup> matematicky vyjádřeno – použít stejnolehlost

*Red sky at night, sailor's delight.  
Red sky in the morning, sailors take warning.*

*Red sky at night, shepherd's delight.  
Red sky in the morning, shepherd's warning.*

*Morgenrøde gir dage bløde.*

*Kveldsrøde gir dage søde.*

*Rosso di sera, bel tempo si spera,  
rosso di mattina mal tempo si avvicina.*

Jen rozšířenost tohoto rčení ukazuje na jeho generacemi otestovanou pravdivost. (Vím přibližně o patnácti, v Bibli (Matouš 16:2b-3) je tento jev interpretován jako znamení nebes, zmiňuje se o něm i W. Shakespeare ve své hře „Venus and Adonis“.) Důvod zmíněného významu ranních a večerních červánků je celkem jasný. (Hlavním důvodem obou je rozptýlení krátkovlnných složek spektra. Jeden rozdíl je v tom, že potřebná vlhkost v ranním případě přichází, večer je již na odchodu.)

*When the wind is blowing in the North  
No fisherman should set forth,  
When the wind is blowing in the East,  
'Tis not fit for man nor beast,  
When the wind is blowing in the South  
It brings the food over the fish's mouth,  
When the wind is blowing in the West,  
That is when the fishing's best!*

Velmi přesné v západoevropských oblastech. Při přiblížení oblasti nízkého tlaku vzduchu se obvykle zvednou východní větry. Bývají nepříjemně teplé, suché a prašné v létě a mrazivě studené v zimě. Oblast často následující severní větry bývají studené a bouřlivé. Plavba v podmínkách těchto větrů vyžaduje mnoho zkušeností a loď schopnou překonat nápor silných vln. Jižní větry většinou přinášejí teplejší počasí, takže pokud rybolov není úspěšný, je alespoň příjemný. Když vanou západní větry, mělo by dlouho panovat příhodné jasné počasí a relativně stálé povětrnostní podmínky. Dle mého názoru tyto verše mohou být užitečné každému, kdo se nachází v relevantní oblasti s omezenými možnostmi předpovědi počasí.

*No weather is ill, if the wind be still.*

Klidné podmínky většinou indikují dominanci oblasti vysokého tlaku vzduchu. Protože jde o rozsáhlé oblasti klesajícího vzduchu, často nedochází k jevům jako je oblačnost, větrno či déšť. Zcela jiným případem je takzvané „ticho před bouří“, kdy bouřná buňka na severu provádí tah vzhůru. Toto bývá jasně identifikovatelné pohledem na západ, kde by blížící se bouře měla být jasně rozpoznatelná. V zimě

ale navíc klidný vítr a jasná obloha mohou indikovat přítomnost „polárního vysokého tlaku“, který je často doprovázen velmi studeným větrem. Teploty okolo ( $-35^{\circ}\text{C}$ ) většinou nebývají vnímány jako příznivé. Tohle rčení lze používat pouze s rozmyslem.

*When halo rings the moon or sun, rain's approaching on the run.*

*Circle around the moon, rain or snow soon.*

Jev zvaný halo je způsoben refrakcí světla ledovými krystaly ve vysokých nadmořských výškách. Vlhkost v těchto oblastech předchází sestupu vlhkosti níže a je dobrým indikátorem příchodu aktivního systému. Halo se často vyvine do takzvaného „mléčného nebe“, kdy se nebe jeví jako jasné, ale typická modř je úplně potlačena nebo těžko zaznamenatelná. Tento rozsáhlý, hustý mrak typu cirrostratus je jasným indikátorem příchodu oblasti nižšího tlaku vzduchu. Během nejchladnějších zimních dnů halo okolo slunce obvykle ukazuje na přítomnost velmi studeného a obvykle čistého vzduchu nad povrchem. – Pozor na kruhy.

*When windows won't open, and the salt clogs the shaker,*

*The weather will favour the umbrella maker!*

Dřevo i sůl jsou dobrými absorbenty vlhkosti. Na tom je ostatně založena většina známých metod předpovědi počasí pomocí šišky. Sůl se hodí vždycky.

*A cow with its tail to the West makes the weather best,*

*A cow with its tail to the East makes the weather least.*

Krávy nemají rády, když jim do očí fouká vítr, stojí tedy zády k větru. Toto je tedy jen další zmínka o slibnosti západních větrů a prokletých východních větrech.

*A summer fog for fair,*

*A winter fog for rain.*

*A fact most everywhere,*

*In valley or on plain.*

Mlha se tvoří, když se vzduch ochladí tak, že dochází ke kondenzaci vody. Aby byl vzduch letní noci chladný, nebe musí být jasné, aby přebytečné teplo mohlo být vyzářeno do vesmíru. Se zimní mlhou je to něco úplně jiného. Nad rozsáhlými vodními plochami bývá vzduch vlhčí než nad zemí. Když se vlhký vzduch posune nad zem, často dojde k tvorbě mlhy a srážek.

*When sounds travel far and wide,*

*A stormy day will betide.*

Tato poučka může být užitečná v létě, ale nemusí platit v zimě. Vlhký vzduch je lepším tepelným vodičem než suchý vzduch, takže vlhký vzduch před bouří nese zvuk dále. V zimě je dalším důležitým faktorem teplota vzduchu. Pokud je vzduch teplý a vlhký, pravidlo stále platí. Pokud je vzduch velmi studený, je také velmi hustý a dobře vede zvuk. Pokud se zvuky dobře rozléhají, může to znamenat, že přetrvá chladné, jasné počasí.

*If clouds move against the wind, rain will follow.*

Tato zásada platí pouze za určitých podmínek, na základě takzvaného „pravidla křížících se větrů“. Spoléhat se na ni pravděpodobně nedá.

*A coming storm your shooting corns presage,  
And aches will throb, your hollow tooth will rage.*

Částečně potvrzený fenomén indikačních kloubů, který byl již dříve předmětem mého zkoumání, si našel cestu i do lidové slovesnosti. Skeptici zde ale upozorňují na možnost ovlivnění selektivní paměti a jinými temnými silami.

### **Metoda pro zálesáky líné, teplých nápojů chtivé**

Jak všichni víme, na povrchu nápoje v hrnku se občas utvoří bublinky. Většina z nás si jich ani nevšimne, ale některé lidi zaujalo to, že ve dnech, které se později jeví jako deštivé, mají tendenci zůstávat v okolí středu hladiny, slunečné dny naopak nějakým způsobem stimulují migraci bublinek k okrajům. Vysvětlením je (samozejmě) opět atmosférický tlak. Pokud je vysoký, může způsobit přesun bublinek k okrajům. Co znamená přítomnost vyššího či naopak nižšího tlaku vzduchu ve vztahu k budoucímu počasí asi všichni víme. Když nemám šišku, uvařím si kafe.

## **Poslední poznámky šíleného meteorologa (10 b)**

*Dr.<sup>MM</sup> Aneta Lesná*

Ve svém posledním příspěvku k nepochybně velmi plodnému tématu zobrazování počasí se nejprve pokusím zaměřit na zodpovězení otázek a reakce na podněty naznačené v rámci předchozích příspěvků. Následně se s vámi podělím o (opravdu poslední) zálesácko-meteorologické postřehy.

### **Červánky a duha**

Jako červánky se navzdory zavádějícímu názvu označuje zbarvení oblohy do červené, růžové, oranžové nebo i žluté barvy. Jednou z podmínek pro jejich vznik je větší množství zvířeného prachu v atmosféře. Vlivem poklesu teploty mohou vodní páry kondenzovat na částicích prachu v podobě ledových krystalků. Když tyto krystalky ozařují sluneční paprsky, dochází v nich k lomu a rozptylu světla a obloha se nám jeví barevně.

Podmínka zvířeného prachu je často splněna v létě za západu slunce, často po větrném dni. Ranní červánky nejsou častým jevem. Letní noci bývají vlivem tlakové výše mírné a bezvětrné, takže ráno vzduch neobsahuje částice, od nichž by se světlo mohlo odrážet. Pokud se červánky ráno vytvoří, znamená to, že noc byla větrná a přibývalo oblačnosti. Lze tedy očekávat příchod studené fronty a špatného počasí.

Důležitost prachových částic se výmluvně ukázala po výbuchu sopky Krakatoa roku 1883, kdy všude na světě při západu Slunce vznikaly pozoruhodné červánky. Podle některých teorií takový pohled inspiroval i Edvarda Muncha a jeho obraz *Výkřik*.

Optický úkaz zvaný duha se projevuje jako skupina soustředných barevných oblouků, které vznikají lomem a vnitřním odrazem slunečního nebo měsíčního světla na vodních kapkách v atmosféře. Pokud podobný úkaz vznikne díky ledovým krystalkům v atmosféře, nazývá se halo.

Ve vlhkém vzduchu prochází světlo každou jednotlivou kapkou. Voda má větší index lomu než vzduch, světlo se tedy láme. Index lomu je různý pro různé vlnové délky světla a kapka má tvar koule. Světlo se tedy na rozhraní optických prostředí rozkládá na jednotlivé barevné složky, které se odrážejí na vnitřní stěně kapky a opouštějí ji pod různými úhly. Kapky ve stejné úhlové vzdálenosti od zdroje světla (Slunce či Měsíce) se pak jeví, jako by měly stejnou barvu. Duhy proto mívají tvar kruhu, případně jeho části.

Bouřkové systémy na severní polokouli se většinou pohybují od západu k východu. Pokud se duha objevuje částečně v důsledku vlhkosti, je nasnadě, že duha na západě může být předzvěstí deště, zatímco duha na východe okolo západu slunce indikuje, že „dešť odchází“.

## Zvířátka

Podívejme se nejprve opět na problematiku mravenců a mravenišť. Ta jsou pro zálesáky obecně velmi cenná. Je známo, že severní strana mravenišť bývá nejstrmější. Ale proč? Ukazuje se, že důvodem je pravděpodobně teplota. Severní strana je „redukována na minimum“, zatímco ostatní stěny zachytávají co možná nejvíce světelné energie. Jinou kapitolou je chování malých stavitelů v závislosti na počasí. Před bouří se mravenci zdržují v okolí vchodu do mraveniště, občas vchod i zatarasí. Také mají tendenci stavět mraveniště se strmými svahy. Důvodem všech těchto změn v chování je atmosferický tlak, přesněji jeho pokles. Proč strmé svahy? Podle mého názoru jde opět o pokus mraveniště „redukovat“, aby povrch zmoklý během bouře byl co možná nejmenší. Roli hraje samozřejmě i změna úhlu dopadu dešťových kapek, které pak mohou mít méně devastující účinky.

Blíží-li se dešť, začnou se někteří reprezentanti hmyzí říše chovat velmi nepřátelsky. Vosy mají zvýšenou tendenci bodat a blechy koušou jako divé. (Ano, dobře vím, že blechy nejsou hmyz.) Hmyz ale signalizuje počasí i méně agresivními způsoby. Pokud motýli a včely poletují na loukách a berušky se vesele rojí, lze očekávat příznivé počasí. Pokud tyto insekti zalezou, většinou to nebývá dobrá



zpráva. Cvrčci jsou známí jako teploměr chudých. Počet cvrknutí jednoho cvrčka během čtrnácti sekund by po sečtení s číslem 40 měl dát teplotu ve stupních Fahrenheita. Převod mezi stupni Celsia a Fahrenheita asi všichni známe. Pavučiny upavoučené před bouří bývají silnější a mívají více podpurných vláken.

Kromě toho, že se krávy otáčejí zády k větru (jak bylo podrobněji zmíněno a teoreticky využito v jednom z dřívějších příspěvků), mohou být užitečné i jinak. Pokud je dobytek na pastvě roztroušen bez viditelných shluků, bývá to předzvěst příznivého počasí. Čím těsnější uskupení, tím horší předpověď. Před deštěm mívají krávy tendenci polehávat, nedávat mléko, případně vyvádět v přístřešcích. Viníkem je pravděpodobně opět atmosferický tlak.

Důvodem, proč ptáci před bouří létají nízko, je fakt, že nižší tlak asociovaný s přicházející bouří nedělá dobře jejich uším. Vlastně jim způsobuje bolest a drží je při zemi. Pokud ptáci posedávají na drátech elektrického vedení, je to další důvod k obavám. Stejně jako náhlé utichnutí ptačího zpěvu a křiku. Poněkud kontroverzní je metoda založená na tom, že racci prý před bouří nelétají a zůstávají na pláži. Pravdou pravděpodobně je, že racci, kteří neradi postávají či chodí a kdykoli mohou, zůstávají nad mořem, kde na hladině i spí, pouze za velmi špatného a vážně nebezpečného počasí, kdy nemají jinou možnost, přistanou na břehu. Jejich přítomnost na pláži tedy není ani tak předzvěstí špatného počasí, jako spíše signálem, že počasí už špatné je.

Žáby před deštěm často hlasitěji kvákají. Taková rosníčka navíc, jak je asi všem známo, „signalizuje“ nadcházející počasí svými pohyby například na žebříčku. Nepřesnost může samozřejmě být značná.

Důvody chování zvířat jsou samozřejmě částečně záhadou, často těžko jednoduše popsatelné, ale existují jisté společné znaky a vodítka. Viníkem číslo jedna je téměř vždy atmosferický tlak. Dále jsou zde faktory jako teplota, vlhkost, vítr či zkušenost, které ale často využívají i lidé.

Kočky si před deštěm často myjí prostor za ušima. Většina zvířat cítí změny tlaku a má jakýsi šestý smysl, který může být využit i člověkem. Pokud se jako zálesák vydáváte do opravdu nepříznivých končin, odolné zvířátko nemusí být špatným společníkem. Vzpomeňme si na zvířecí celebrity jako je například svišť Phil z Punxsutawney. Když nic jiného, budete mít s čím si povídat, až vám z neustálého pozorování mraků, mravenců, lišek, šišek, cvrčků, koček lehounce přeskočí.

## Mrakolog amatér

Velmi důležitým ukazatelem počasí jsou také mraky. Jejich typologie je ale natolik složitá a místy matoucí, že jakýkoli zjednodušený výklad z mé strany by pravděpodobně přinesl více škody než užitku. Zájemce o detailnější studium typů mraků odkazuji například na anglickou Wikipedii<sup>8</sup>. V rámci základních informací lze pouze říci, že existují mraky vysoké, nízké i prostřední, mraky zlověstné, dobrozvěstné i neutrální, mraky různých typů a subtypů či samozřejmě různých barev.

<sup>8</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_cloud\\_types](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_cloud_types)

Mají také své odborné názvy a pokud typologii v obrysech zvládnete, může vám ušetřit ne jeden zkažený výlet.

### Zálesácká kadeřnice

Objevil se podnět k prozkoumání jevu, kdy se vlasy některých lidí za zvýšené vlhkosti začínají vlnit či třepit. Z výzkumu vyplývá, že důvodem může paradoxně být přílišná suchost vlasů. Vlasy se skládají primárně z lipidů, vody a proteinu jménem keratin, který je důležitým faktorem v rámci síly a struktury vlasu. Změny v případě těchto složek mohou ovlivnit kvalitu vlasu. Právě lidé se suchými vlasy nejčastěji trpí krepatěním vlasů ve vlhkém počasí. Když je venku vlhko, suché či porézní vlasy absorbují přebytečnou vodu, což má vliv na interakce mezi keratinovými proteiny. Důsledkem je „otok“ vlasu a poruchy v jeho svrchní vrstvě, zvané kutikula, což může vytvořit dojem krepatění.

Pokud jsou vlasy dobře hydratovány, změny prostředí, například vlhkosti, na ně mávají menší vliv. Některé vlasy jsou ke krepatění náchylnější, například vlasy poničené přehříváním, chemickými barvami či bezohledným česáním. Nadužívání šamponu, gelu s alkoholovouází a některých jiných přípravků také může podporovat vysoušení. Pokud jste jedním z lidí s příležitostně beznadějně krepatými vlasy, pomoci vám mohou například hydratující kondicionéry či jiné přípravky nebo obecně šetrnější zacházení.

### Táborák

Jak někteří předpokládali, stoupání či naopak rozptýlování a klesání dýmu (možný ukazatel blízkosti bouře) není důsledkem rozdílu tlaků vzduchu a kouře. Důvod je jiný. Atmosférické fronty, které většinou provází deštivé počasí, jsou charakterizovány vrstvou teplého vzduchu nad vrstvou chladného vzduchu. Pokud se nade mnou nachází rozhraní teplotních vrstev a já rozdělám táborák, dým se v chladnější vrstvě ochladí, a po střetu se vzduchem teplejším, než je sám, logicky nebude ve stoupání pokračovat. V případě přítomnosti takového teplotního rozhraní se rovněž dá očekávat příchod deště.

### Cítím bouřku

V minulém příspěvku jsme se lehce dotkli okolností a příčin „pachu bouře“. Především díky poznámkám organizátoru mám pocit, že si toto téma zaslouží hlubší zamyšlení a výzkum. Pokusím se zde shrnout některé ze svých poznatků ohledně tohoto jevu, díky jehož projevu může zkušený zálesák poznat (například), zda se blíží bouřka či zda bouřka nedávno proběhla.

Jednou z prvních předzvěstí blížící se bouřky může být pronikavý, nasládlý zápach připomínající některým lidem pach chlóru. Viníkem je ozon. K jeho vzniku dochází v atmosféře, kde působením elektrického výboje (zde například blesku) mohou z podvojných molekul vzniknout volné atomy kyslíku a dusíku. Některé z nich rekombinují na oxid dusný, z něhož reakcí s jinými atmosférickými chemikáliemi může vzniknout molekula ozonu. Díky vertikálním pohybům větru

obecně spojeným s bouřkami často dochází k přesunu části ozonu z vyšších vrstev na úroveň nosu. Zanedlouho často přijde ona bouřka a s ní dešť.

S deštěm přichází i jiné pachy. Padající dešťové kapky přenášejí pachové molekuly z různých (hlavně suchých) povrchů do vzduchu. Takto se v přírodě může do vzduchu dostat část pachu různých rostlin. Ve městech tyto pachy často pochází z betonových a asfaltových povrchů. Samozřejmě ne všechny tyto pachy jsou příjemné. Z podobných důvodů se „pach deště“ může výrazně měnit v závislosti například na ročním období. Na jaře a v létě, kdy vše roste a kvete, má často dešť až opojnou vůni. Deště nedlouho před zimou naopak v některých oblastech z pochopitelných důvodů přináší do vzduchu pach organického odpadu a hniječích mršin. Dalo by se velmi zjednodušeně říci, že dešť často jen zdůrazní vůně a pachy konkrétního prostředí.

Této skupině deštných pachů náleží název petrichor. První definici provedli v roce 1964 mineralogové Isabel Joy Bear a R. G. Thomas v rámci Australia's Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization. Petrichor definovali jako pach, který vzniká, když se vzdušné molekuly z těl rostlin či živočichů usazují na minerálních či půdních povrchích. (Původ molekul je různý. Některé studie například naznačují, že rostliny v suchých podmínkách produkují jistou kombinaci olejů, jejímž účelem je hlavně inhibice růstu a minimalizace konkurence z hlediska zdrojů vody. Tyto molekuly se pak hromadí na kamenech a v půdě.) Během sucha molekuly chemicky rekombinují s jinými přítomnými prvky. Když pak přijdou deště, dojde k uvolnění aromatické kombinace mastných kyselin, alkoholů a uhlovodíků.

Pach vlhké země a zatuchliny, který je charakteristický pro krajinu po bouři, je z větší části způsoben aromatem geosminu, mimo jiné produktu metabolismu bakterií actinomycetes a některých řas. Ten také může kontaminovat vodu či víno a zanechávat vlhký zápach. Geosmin jsou lidé schopni detekovat již v koncentraci pěti částic na trilion, což zhruba odpovídá kávové lžičce ve dvou stech olympijských bazénech.

Mnohé z popsaných deštných pachů obecně v přírodě slouží jako cenné ukazatele. Někteří biologové se například domnívají, že petrichor po vniku do vody slouží rybám jako signál začátku třetí sezóny. Aroma geosminu může například podle některých uznávaných mikrobiologů fungovat jako jakýsi maják pro velbloudy, kteří s jeho pomocí snáze naleznou cestu k oáze. Bakterie produkující geosmin je za to používají k přenosu spor.

Existují i jiné, často silné instinktivní metody předpovědi příchodu bouřky. Kromě toho, že to někteří prostě cítí, je signálem často například charakteristické chování větru. Tyto metody jsou silně subjektivní a snažit se podat o nich výklad by nebylo nepodobné snaze napsat knihu obsahující univerzální důvod atraktivity vonných květin.

## Kdo se bojí, není zálesák

Téměř žádná předpověď počasí nefunguje stoprocentně, výjimkou nejsou ani mé (mnohdy pološílené) návrhy. Máte-li pocit, že teď o počasí víte dost, sbalte šišku, zverimex, mraveniště a pár čísel M&M a hurá do lesa!

## Téma 2 – Kozy

Po delší odmlce přišly ke konci školního roku dva příspěvky od Dr.<sup>MM</sup> Anety Lesné a Dr.<sup>MM</sup> Dominika Krasuly. Oba volně navazují na předešlé nápady a zabývají se i zobecněním vypásání do prostoru.

Dr.<sup>MM</sup> Aneta Lesná se zabývala i myšlenkou, jestli je lepší úvaz nebo vedení. Pro rovinné vypásání se domnívá, že vedení má horší geometrii. Detailní fyzikální rozbor bohužel neuvádí, jen tvrdí, že při použití vedení bude muset překonávat větší odpor. Bude se vůbec koza moci pohybovat?

Dále oba autoři zavedli trojrozměrný případ, kde kůl můžeme pevně připevnit k libovolnému bodu prostoru. Oba shodně tvrdí, že pokud kozu uvážeme shodně jako při dvojrozměrném modelu, tak se nám vypasené objekty změní následovně:

- kružnice přejde na sféru,
- kruh přejde na kouli,
- mezikruží přejde na sférickou vrstvu, někdy také nazývanou „mezikoulí“.

Aneta uvádí, že obdobně můžeme vytvořit  $n$ -stěny, ale již nezmiňuje, jak přesně. Dominik tvrdí, že uvázáním, které v rovině vytvoří trojúhelník, vytvoří v prostoru trojboký jehlan (uvažuje pouze jeden poloprostor, jinak by podle jeho úvah koza vypasala šestistěn). Opravdu tomu tak je? Co koza vypase ve skutečnosti?

Oba autoři se pokoušeli vyrobit těleso, které vznikne posunutím plošného útvaru. Máme dva shodné plošné útvary, po kterých se může koza pohybovat. Umístíme je do vzdálenosti  $v$  a na oba místo kozy uvážeme pohyblivý kroužek, ke kterým přivážeme lano o délce  $v$ . Koza se může volně pohybovat po očku umístěném na tomto laně. Toto uvázání Dominik nazval jako výtah. Aby opravdu vzniklo požadované těleso, musí být plošné útvary (podstavy) útvary rovinné. To znamená, že pokud tento útvar vytvoříme v prostoru, tak koza vyžere pouze plošný útvar. Jak toho docílíme?

Nakonec ještě uvádíme původní text, jak vytvořit rozptylku v prostoru.

## Rozptylka

(6b)

*Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula*

Vezmeme dva kůly  $k_1[x; y - d - l]$  a  $k_2[x; y + d + l]$ , ke každému z kůlů  $k_1$  a  $k_2$  přivážeme kůl se dvěma oky, tedy  $K_1(k_1, [y; x - l]; d)$  a obdobně pro  $K_2$ . Mezi kůly se dvěma oky natáhneme lano  $L_1([y, x - l]; [y; x + l], 2m)$ . Kozu uvážeme úvazem délky 0 k tomuto lanu, tedy se může volně pohybovat podél lana  $L_1$ , ale nesmí se od něj vzdálit. Nutno dodat, že vzdálenost  $2m$  nesmí být větší než  $2d + 2l$ . Necháme-li kozu létat, získáme půlku trojrozměrné rozptylky, pouze okraje budou trochu nepravidelné.

Dominik uvažuje pro všechny popsané body souřadnici  $z = 0$  a nepředpokládá vypásání oblasti  $z < 0$ . Co za útvar takto uvázaná koza ve skutečnosti v prostoru vypase?

Poslední příspěvky k tomuto tématu přinesly více otázek než odpovědí, proto vám stále necháváme prostor je v příštím ročníku analyzovat v rámci účastnického příspěvku.

*xlfd***Téma 3 – Flatfox**

Během ročníku jsme byli svědky toho, jak se možnosti Flatfoxu rozšiřovaly s každým příspěvkem – implementace aritmetických operací, bloková struktura programu a knihoven, simulace dalších registrů, ale i rozšíření na verzi FlatFox++, která spoustu z už běžných modulů zahrnula jako instrukce, a nakonec i praktický důkaz Turingovské úplnosti jazyka a jiné zajímavé úvahy o jeho možnostech. Také jste řešili jednoduché úlohy a hlavolamy. Díky všem, které téma zaujalo a kteří se zúčastnili (alespoň ve vlastních úvahách).

Jako poslední příspěvek, který ukazuje možnosti FF++, otiskujeme článek Doc.<sup>MM</sup> Mateje Lieskovského, který v FF++ naimplementoval jednoduchý 8bitový procesor *Vixen Mk.I*. Na webu tématka též najdete řešení některých úloh od Dr.<sup>MM</sup> Pavla Součka.

*Tom***Vixen Mk.I.**

(14b)

*Doc.<sup>MM</sup> Matej Lieskovský*

Již dříve jsem předvedl metodu pro naprogramování libovolného Turingova stroje ve FlatFoxu, který je tedy nutně Turing-kompletní. Vzhled FlatFoxích programů mě ale přiměl zamyslet se nad poněkud alternativním využitím. Dovolte abych vám představil Vixen Mk.I.: 8-bitový mikroprocesor sestavený kompletně ve FlatFox++.

Vixen Mk.I. má 256 bytů RAM, která je adresovatelná po jednotlivých bytech, a ROM pro nahrání programu o délce až 256 instrukcí (obojí indexováno od nuly). Vixen Mk.I. používá jednoduchý programovací jazyk se čtyřmi instrukcemi, kde

každá bere jakožto parametr právě jeden byte, který je interpretován buď jako adresa v RAM nebo ROM.

	Instrukce	Adresa	Popis
0	SKPZ	RAM	Pokud na zadané adrese je nula, přeskočí následující instrukci.
1	GOTO	ROM	Přejde na instrukci na zadané adrese.
2	INCx	RAM	Navýší hodnotu na zadané adrese o 1.
3	DECx	RAM	Sníží hodnotu na zadané adrese o 1.

Program může skončit jedním ze tří způsobů:

- Konec zdrojového kódu – Pokud by měla být vykonána instrukce na adrese 256, program se ukončí.
- Přetečení paměti – Pokud by mělo dojít k přetečení libovolné buňky RAM, program se ukončí.
- Podtečení paměti – Pokud by mělo dojít k podtečení libovolné buňky RAM, program se ukončí.

Vždy je obnoven stav RAM před instrukcí, která způsobila přetečení nebo podtečení.

## Jak je Vixen Mk.I. implementován

- R je pracovním registrem pro interní výpočty procesoru.
- G obsahuje zdrojový kód a pointer na aktuální instrukci. Pro detailní popis zápisu viz níže.
- B je paměť RAM. Na začátku programu by měla obsahovat vstupní data programu.
- C většinou obsahuje aktuálně používanou konstantu (velikost paměťové jednotky): 256 pro práci s RAM, 1024 pro práci s ROM.
- M a Y jsou registry pro dočasné uložení výsledků a početní operace.

Prosím podívejte se na příložený model Vixen Mk.I., v následující sekci bude vysvětlen účel jednotlivých částí.

*Pozn. red.: Model i další dokumentaci najdete na stránce tématu.*

Program začíná v levém horním rohu. Nejdříve dojde k nastavení C=256 a poté vstoupí do hlavní smyčky.

Hlavní sloupec kódu je ten druhý (a nejdelší) sloupec zleva. Obsahuje kód, který se spouští s každou instrukcí. Prvním krokem je získání aktuální instrukce z ROM (GET OP). Je pořízena kopie ROM, od té je oddělen pointer, díky kterému je následně zahazena paměť „před“ hledanou instrukcí. Poté je získána samotná instrukce a ta je rozdělena na kód instrukce a parametr. Následuje volba instrukce podle jejího kódu.

Instrukce GOTO (vlevo od hlavního sloupce) funguje nejjednodušeji, nemusí se totiž zabývat RAM. Jednoduše nastaví pointer u zdrojového kódu na hodnotu svého parametru a spustí GET OP.

Ostatní instrukce naopak neaktualizují pointer u zdrojového kódu – tuto činnost delegují specializovanému bloku NEXT, který navýší hodnotu pointeru a předá běh programu opět GET OP. Blok NEXT navíc umí detekovat konec zdrojového kódu (přetečení pointeru) a podporuje signalizaci v registru Y, kterou může instrukce SKPZ zažádat o dvojnásobné navýšení pointeru.

Všechny tři zbývající instrukce – SKPZ, INCx, DECx (v tomto pořadí se nacházejí i v procesoru, všechny doprava od hlavního sloupce) – fungují podobně. Stejným způsobem jako GET OP získával instrukci z ROM, tyto instrukce získají obsah požadované buňky RAM.

Funkce SKPZ se podívá do RAM a pak podle výsledku nastaví signalizaci Y pro NEXT a spustí blok NEXT. Funkce INCx navýší požadovanou buňku RAM a poté nahlédnutím do RAM zkontroluje, zda nedošlo k přetečení, které případně opraví a nahlásí. Jinak volá NEXT. Funkce DECx musí kvůli destruktivnosti podtečení (mohlo by dojít k vymazání celé paměti!) nejdříve nahlédnout do RAM a zkontrolovat, že k tomu nedojde, a teprve poté sníží hodnotu v požadované buňce. Možné podtečení hlásí, jinak volá NEXT.

### Zápis vstupu

C obsahuje 256 paměťových buněk RAM s čísly 0 až 255 a stejným rozsahem hodnot. Buňka RAM číslo  $j$  nastavená na hodnotu  $a$  je zapsána číslem  $a \cdot 256^j$ , stav celé paměti RAM je pak součet zápisů všech buněk RAM.

G obsahuje 256 paměťových buněk ROM a pointer. Pointer je číslo od 0 do 255. Paměťové buňky ROM jsou očíslovány od 0 do 255. Každá buňka ROM obsahuje 2 bity udávající instrukci a 8 bitů udávajících adresu (RAM nebo ROM, záleží na instrukci). Buňka ROM číslo  $j$  nastavená na instrukci  $i$  s parametrem  $a$  je zapsána číslem  $256(i+4a) \cdot 1024^j$ . Stav celé paměti ROM je pak součtem zápisů všech buněk ROM a pointeru. Tím je mimo jiné docíleno snadné modifikovatelnosti pointeru.

### Poznámky od vývojáře

Omezený počet registrů vyžadoval určité žonglování s čísly a bylo potřeba si uvědomit, které hodnoty již nebudou potřeba. Například původní varianta DECx počítala s „rozebráním“ paměti na požadovanou buňku a části před a po ní, které by následně byly opět složeny dohromady. Tento plán byl zavržen, chyběl k tomu jeden registr.

Určitým nedostatkem je chybějící dereference adres – vzhledem k omezené délce zdrojového kódu není možné využít všechny buňky paměti v jednom programu. Omezený výběr instrukcí, chybějící dereference adres i nedostatek paměti jsou problémy, které by měly být řešeny 16-bitovým Vixen Mk.II.

Na procesoru je vidět několik nedokonalostí, například oddělení kódu instrukce od parametru bylo upravováno, což je patrné z poněkud neelegantní kličky v dráze programu.

Celý procesor rozhodně není optimální, některé cykly trvají i výrazně přes tisíc kroků (například  $B=261632$   $C=0$ ), což je zapříčiněno pomalým přístupem k buňkám s vyššími čísly. U tohoto modelu to ještě není kritické, ale Vixen Mk.II. by už rozhodně vyžadoval efektivnější algoritmus pro přístup k buňkám. Problematickým je spočítání  $x^y$ , které aktuálně běží v  $O(N)$  krocích. Pokročilejší algoritmy ale budou zápasit s malým počtem dostupných registrů.

Pohledy profesorů a spolužáků, když jsem debugoval vytisknutý procesor na papíře, byly k nezaplacení.

## Téma 4 – Do hlubin

Na závěr ročníku přinášíme poslední příspěvek k tématu: Úvahu nad využitím osvědčených metod od Anety Lesné. Článek Anety Lesné je pěkně napsaný a úvahy nad plány mise logicky uzavírá. Dále nám dorazil příspěvek Jakuba Koláře, který ale nepřináší nic nového – naopak prezentuje názory na některé aspekty mise bez bližšího vysvětlení. Můžete si jej přečíst na webové stránce tématu.

*Zuzka*

Na závěr. . .

(8 b)

*Dr.<sup>MM</sup> Aneta Lesná*

(Shrnutí poznatků a postřehů. Možné aplikace pro naši situaci.)

### Trocha historie

Touha poznávat mořské hlubiny je snad stará jako lidstvo samo. Udělejme si tedy nejprve malou procházku dějinami hlubokomořského průzkumu a podrobněji zmiňme některé dosud opomíjené události a historická fakta, která nám mohou pomoci vyřešit náš problém. . .

Už Vikingové používali na lanech přivázaná závaží s dutým dnem k získání informací o hloubce dané části moře a vlastnostech mořského dna (pomocí vzorku sebraných zvířím na dně, . . .). Měřilo se samozřejmě většinou v sázích. V roce 1521 se Fernão de Magalhães snažil změřit hloubku Atlantiku pomocí zatíženého lana o délce méně než osm set metrů. Dno ale překvapivě nenašel.

Za konstruktéra první ponorky se obecně považuje nizozemský architekt Cornelius Drebbel. Jeho ponorná loď se skládala z dřevěného rámu potaženého zvířecí kůží. Pohon zajišťovala vesla, přičemž otvory, kterými vycházela z trupu, byly (téměř) vodotěsně utěsněné. Loď mohla takto klesnout až do hloubky přibližně patnácti stop. Drebbel svou loď testoval v Temži někdy mezi lety 1620 a 1624. Je možné, že se v tomto vozidle krátce svezl i král Jakub I. Stuart.

Britský vědec John Ross roku 1818 jako první ukázal, že i ve velkých hloubkách se nachází život, když s pomocí speciálního zařízení lovil medúzy a červy v hloubce přibližně dva tisíce metrů. Přírodovědec Edward Forbes ale přesto kolem roku 1843 tvrdil, že ve velkých hloubkách je biodiverzita malá a s rostoucí hloubkou se snižuje. V takzvané teorii Abyssus prohlášoval, že v hloubkách větších než



přibližně 550 m nemůže být žádný život. Poslední hřebík do rakve této teorie poskytl Michael Sars, když roku 1850 ve hloubce přibližně 800 m našel bohatou mořskou faunu.

První systematický průzkum hlubin oceánu byl proveden expedicí Challenger na palubě lodi HMS Challenger pod vedením Charlese W. Thomsona v letech 1872–1876. Expedice zjistila, že oceán i ve velmi velkých hloubkách hostí rozmanité a bohaté ekosystémy. Roku 1930 se William Beebe a Otis Barton stali prvními lidmi, kteří kdy dosáhli spodních vrstev oceánu, když se potopili do hloubky přibližně 435 m, kde pozorovali medúzy a krevety. V roce 1934 batysféra překonala hloubku 923 m. Roku 1948 Otis Barton vytvořil nový rekord, když se potopil do hloubky 1370 m. Komunikace s hladinou probíhala pomocí telefonu

Roku 1960 Jacques Piccard a Donald Walsh poprvé dosáhli dna Mariánského příkopu, tedy hloubky asi 10 740 m, v batyskafu Trieste. Pozorovali ryby a jiné tvory mořských hlubin. Roku 2012 se James Cameron stal třetím člověkem na dně Mariánského příkopu a prvním mužem, který se tam ponořil sám. Společníkem mu bylo jeho plavidlo Deepsea Challenger.

## Výbava pro hloubkové mise

Jedním z prvních nástrojů pro průzkum oceánského dna bylo ono duté závaží používané v jisté formě už Vikingy, které James Clark Ross použil roku 1840 v hloubce asi 3700 m. Princip je jasný: díky vzduchové bublině závaží po dosažení dna „vcucne“ část jeho povrchu, kterou je pak možné dopravit na břeh. Závaží na lanech se samozřejmě používala i k jednodušším úkolům, například ke zjištění hloubky dna v určité oblasti.

Podobná závaží na palubě HMS Challenger byla už poněkud vyspělejší, oficiální název takového zařízení byl „Baillie sounding machine“. S jejich pomocí se britským výzkumníkům podařilo nasbírat stovky vzorků ze všech oceánů světa kromě Severního ledového oceánu. V rámci mise byly použity i „plovoucí bagry“ a „naběračky“ zavěšené na lanech, s jejichž pomocí bylo možné získat vzorky sedimentů a biologického materiálu ze dna.

Poněkud pokročilejším zařízením je takzvaný „gravity corer“. Skládá se z otevřené trubice s olověným závažím a spouštěcím mechanismem, který „corer“ uvolní ze závěsu, když dojde ke kontaktu s mořským dnem a malé závaží zavadí o „pevnou zem“. „Corer“ spadne na dno a pronikne do hloubky až deseti metrů. Zdvihnutím je možné získat dlouhý válcovitý vzorek dna, ve kterém zůstávají zachovány vrstvy sedimentů na dně. Takto mají vědci například možnost zjistit přítomnost či absenci některých fosilií v bahně, které mohou indikovat podnebné podmínky v minulosti, například během dob ledových. Vzorky hlubších vrstev mohou být získány kombinací s vrtákem. Vrtací plavidlo JOIDES Resolution je schopno získávat vzorky z hloubek až 1500 m pod úrovní oceánského dna. Fungovalo například v rámci mezinárodního projektu Ocean Drilling Program.

Od druhé světové války se k průzkumu nejen hloubky dna používaly nástroje založené na odrazu vlnění – radary a sonary. Princip je jasný. Zvuk vyslaný z lodi

je odražen ode dna zpět k lodi, čas potřebný k návratu signálu je úměrný hloubce vody. Sledováním prodlev mezi vysláním a návraty a záznamem na pásku lze získat kontinuální obraz mořského dna. Většina oceánského dna byla mapována tímto způsobem.

Mimo to se o poznání mořských hlubin samozřejmě zasloužily televizní kamery, teploměry, tlakoměry či seismografy. Tyto nástroje jsou buď spuštěny na dno pomocí lan nebo připevněny k ponorným bójím. Velmi pokročilý je dnes například díky různým lehkým plavidlům i výzkum oceánských proudů.

## S posádkou či bez?

V současnosti globálně stoupá počet pilotovaných ponorných plavidel.<sup>9</sup> Americký DSV Alvin řízený Woods Hole Oceanographic Institution, je ponorka pro tři pasažéry, která se může ponořit do hloubky asi 3600 m a je vybavena mechanickým manipulátorem pro sběr vzorků ze dna. Poprvé se Alvin ponořil roku 1964 a má za sebou více než tři tisíce ponorů s průměrnou hloubkou asi 1829 m. Z jeho výzkumných zásluh jmenujme například podíl na objevu obřích trubcovitých červů (*Riftia pachyptila*) na dně Pacifiku v blízkosti ostrovu Galapagos (Galapágy).

Jedno z prvních bezobslužných hlubokomořských plavidel bylo vyvinuto University of California s grantem od Nadace Allana Hancocka na počátku padesátých let dvacátého století ve snaze vyvinout ekonomičtější metodu pořizování fotografií míle pod mořskou hladinou pomocí bezobslužné třisetlibrové ocelové sféry zvané bentograf, která obsahovala fotoaparát a stroboskop. Originální bentograf úspěšně pořídil sérii snímků, ale zasekl se mezi jakýmsi kameny a návrat se nezdařil.

Takzvané Remote Operated Vehicles (ROV) se stále více používají k podmořskému průzkumu. Bývají řízeny skrz kabel připojený k lodi na hladině. Mohou dosáhnout hloubek až 6000 m. Nové objevy v robotice také vedly ke zrodu Autonomous Underwater Vehicles (AUV). Tyto robotické ponorky jsou předem naprogramovány a z povrchu nedostávají žádné instrukce. Plavidla HROV kombinují znaky ROV a AUV, jsou schopna pracovat samostatně či s kabelem. ROV Argo byl použit k lokaci vraku RMS Titanic. Poněkud menší ROV Jason tento vrak částečně prozkoumal. Pokud jde o Mariánský příkop, dva ze čtyř dosud uskutečněných sestupů byly mise ROV. Šlo o japonský Kaiko (1996) a americký Nereus (2009).

## Současnost... Lindenbaum

Náhled do historie nám odhalil jisté překvapivé skutečnosti a ukázal nám, jak slepí jsme v některých ohledech byli. Některé věci jsou teď jasnější než kdy dříve. Plavidlo může mít posádku, ale potřeba není. V obou případech zkušenost ukazuje, že úspěšnost mise je více než pravděpodobná. Využití posádky lze doporučit

<sup>9</sup>Poznámka redakce: Je otázkou, zda i u těchto misí byla posádka nutná, nebo si jen oceánografové vymohli, aby mohli být u toho a vidět to na vlastní oči. Když jsou k tomu prostředky, tak proč ne, že...

například v případě, že v rámci sestupu chceme v tomto ohledu vytvořit nějaký nový rekord – poslat tam prvního černocho, první ženu, prvního psa, nebo něco podobného. Ke sběru vzorků můžeme použít osvědčených postupů, například na bázi vrtáku a „coreru“. Pohybliví roboti také nemusí být na škodu, ale je otázka, zda jejich využití něčemu prospěje, či zda zde jde hlavně o zvuk, který tento nápad má, a zajímavost představy robota projíždějícího Challenger Deep sem a tam. Za pokus by stálo kromě sběru na dně příkopu také něco zanechat. Třeba českou vlajku. (Ne, nevím, jak tam bude vlát a kdo ji uvidí.)<sup>10</sup>

Problémy navigace a komunikace byly dosud rovněž poněkud přeceňovány. V případě bezobslužného plavidla v podstatě odpadají. Před více než půl stoletím proběhla bez problému „posádková“ mise batyskafru Trieste, relativně nedávno ponor Jamese Camerona. V rámci něj byly použity například spolehlivé komunikační kabely umožňující přenosy skrz trup ponorného plavidla. Spolehlivých komunikačních metod je tedy více než dost.

Mám pocit, že letošní práce mnoha řešitelů semináře v rámci tohoto tématu přinesla ovoce a společně s množstvím historických zkušeností může snad v budoucnu pomoci řešit skutečné problémy hlubokomořských misí. Je vskutku škoda, že ročník už končí.

## Téma 5 – Sdílení tajemství

Na závěr školního roku přišly hned čtyři příspěvky (od tří autorů) se spoustou doplnění a nápadů. Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula a Doc.<sup>MM</sup> Markéta Calábková přispěli dalším návrhem pro realizaci hry kámen, nůžky, papír. První jmenovaný pak nabízí i řadu vylepšení k již publikovaným návrhům. Dr.<sup>MM</sup> Aneta K. Lesná se pokusila o celkové shrnutí.

Otiskujeme nejzajímavější pasáže zaslaných článků. Na závěr připojujeme též autorské řešení otázek, které bohužel nebyly zcela dořešeny.

### Kámen, nůžky, papír pomocí šifrování (4b)

*Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula*

Hráči se domluví na nějaké metodě, jakou budou šifrovat. Šifra vždy závisí na nějakém heslu. Pokud někdo získá heslo, tak šifru vyřeší. My budeme pro jednoduchost používat jednoduchou šifru a to sčítání.

*Příklad:* slovo je „kámen“, heslo je „aaaa“, potom zašifrované slovo je „lbnfo“ ( $k+a=l$ ,  $a+a=b$ , ...)

Oba hráči vyberou, co chtějí poslat za znak, a nějakým heslem jej zašifrují. Pro hráče A použijme metodu z příkladu, hráč B bude šifrovat „papír“ heslem „dzzzz“, čímž získá „tapír.“

Nyní si je pošlou a zaheslují soupeřovu šifru stejným heslem, jaké použili na svůj znak.

<sup>10</sup>Poznámka redakce: Vlajka bude na dně Mariánského příkopu asi stejně platná, jako na Měsíci. . . Vlát nebude, a vidět bude jen na videu, které sami natočíte.

Takže z „tapír“ se stane „ubqjs“ a z „lbnfo“ se stane „pbnfo“.

Nyní si svá hesla řeknou a odšifrují odpověď.

Smyslem dvojitého zaheslování je to, že máme-li libovolnou kombinaci pěti čísel, umíme najít heslo pro vytvoření jakéhokoliv ze znaků. Jenže tím, že tím heslem zašifruje i soupeřův znak, se to zabezpečí. Neboť kdyby si heslo změnil, aby měl lepší znak, tak soupeři vyjde po rozšifrování nesmysl, neboť stejné heslo použije také a tím podvod prozradí.

Nutno ještě dodat, že v popisu si posílají informace oba zároveň, pro větší jednoduchost textu, nicméně tato metoda jde použít i při postupném posílání.

*Poznámka redakce: Algoritmus, jak je popsáný, vyžaduje, aby si oba hráči vyměnili dvakrát zašifrované zprávy ve stejném okamžiku. Pokud ji například hráč A pošle první, hráč B z přijaté zprávy dokáže určit jeho klíč. Stačí od výsledku odečíst zprávu, kterou před tím poslal. Pokud zná klíč, zná i volbu hráče A a má ještě prostor podvodně změnit svou volbu. Jak autor správně podotýká, po odeslání první zprávy lze najít klíč, aby pomocí něj mohla být na odeslanou zprávu zašifrována libovolná volba.*

*Požadavek, aby výměna dvou šifrovaných textů proběhla současně, je stejně silný, jako aby si oba hráči vyměnili současně svou zvolenou hodnotu. Algoritmus nám tedy v ničem nepomůže.*

*Naštěstí existuje řešení. Stačí zvolit trochu komplikovanější šifru, u které z původního a zašifrovaného textu nebude možné určit klíč, pomocí kterého bylo šifrováno. Popis takové šifry by vydal na samostatný článek, většina běžně používaných šifer ale tuto podmínku splňuje. Kupříkladu lze využít libovolnou proudovou šifru, z blokových pak mimo jiné DES, AES, ...*

## Hrátky po SMS (6b)

*Doc.<sup>MM</sup> Markéta Calábková*

Co se kámen-nůžky-papír týká, měla bych jeden návrh, i když to určitě nebude původní řešení. Když to tedy budu posílat esemeskou, tak to zkusím textově. Líbí se mi, že slova „kámen“, „nůžky“ i „papír“ mají pět písmen. Tak budu používat KAMEN, NUZKY a PAPIR. Tak chci začít nůžkami. Mohla bych třeba vzít slovo KAMEN a jeho písmena nějak popřeházet, třeba na ANKEM. Potom písmena tohoto slova posunu podle hesla. . . třeba RPAIP, což je přesmyčka z PAPIR. A kvůli větší bezpečnosti to ještě můžu celé posunout o určitý počet míst v abecedě, takže o nějaké písmeno, třeba B. Toto slovo pošlu, obdržím kamarádovu volbu a zpět pošlu heslo a písmeno, v našem případě bude zpráva ve tvaru RPAIP B. To si už rozluští a zjistí, že jsem použila KAMEN a PAPIR, takže jsem proti němu hrála chybějící slovo, tedy NUZKY.

Předpokládám, že na druhé straně je člověk :) . Používám hesla psaná písmeny anglické abecedy, která má 26 písmen. Když na to poštvu nějaký algoritmus, nepozná na první pohled, co je to za slovo. Musí každé písmeno zpátky posunout podle nějakého hesla, ovšem stačí mu bohužel zkusit jedno. To je ale přesmyčka, takže  $5! = 120$  možností. V každé z těchto možností posune každé

písmeno slova o pár pozic zpět, takže krát 26, a pokaždé musí vyzkoušet všechny možné přesmyčky, jestli to náhodou není jedno ze slov, které hledá, takže zase 5! možností. A když mu žádná sedět nebude, ví jistě, že to slovo, které zkoušel jako klíč, je řešením. Musí tedy prozkoušet  $120^2 \cdot 26 = 374\,400$  možností. To je dost málo, to má za chvilku. Ale faktoriál roste poměrně rychle, takže už přesmyčka z PAPIRPAPIRPAPIR a KAMENKAMENKAMEN požaduje k prozkoušení 26místný počet možností. Samozřejmě si místo KAMEN, NUZKY, PAPIR mohu zvolit nějaká svá hesla, která mohou být dosti dlouhá (všechna tři stejně), ale která předem kamarádovi sdělím, aby měl jistotu, že nepodvádím. A nebo můžu uvažovat v jakékoliv jiné abecedě o větším počtu znaků. Prostě to můžu zesílit.

Ale pozor na mnohoznačnost. V případě pouhého KAMEN, NUZKY, PAPIR se nemohu splést, tedy nevyjde mi někde mnohoznačný závazek, pro který by existovalo více povolených klíčů. Ale pro jiná hesla bych s těmi přesmyčkami a vším tím kombinováním mohla přehlédnout možnost, že mi vyjde závazek, pro který by fungovalo víc klíčů. Čím více znaků abeceda má, tím je toto bezpečnější. Tomuto problému se mohu vyhnout, když si vyberu nějakou sekvenci znaků jako hesla pro jedno slovo a na něm pak provádím nepatrné úpravy – čím méně se budou jednotlivá slova lišit, tím lépe pro nás. Třeba v jednom slově od sebe budou písmena vzdálená nejméně 2 pozice v abecedě, ve druhém vytvořím pár vzdálený o jednu pozici a ve třetím bude dvojice stejných písmen. Nebo tak nějak.

*Poznámka redakce: I přes počáteční nedůvěru se ukázalo, že algoritmus více-méně funguje. A to mimo jiné díky posunu výsledku v abecedě. Kdyby k němu nedošlo a ve výsledném slově se vyskytlo například P, mohlo by vzniknout pouze jako Z+P a už bychom věděli, že třetím, tedy zvoleným, symbolem je kámen. Takto jednoduché úvahy posun v abecedě znemožní.*

*Na druhou stranu frekvence pravděpodobnosti výskytu jednotlivých znaků v součtu dvou permutovaných klíčových slov bude značně nerovnoměrná. Pokud budeme studovat rozdíly pravděpodobnosti výskytu písmene oproti pravděpodobnosti výskytu předchozího písmene, příliš nám frekvenční analýzu neznepříjemní ani posun všech písmen v abecedě. Pro skutečně fungující systém bychom tedy ještě potřebovali zvolit šikvná kódová slova, aby z hlediska frekvenční analýzy vycházely pravděpodobnosti podobně až na posun v abecedě. To by ale mělo být možné.*

## Hra kámen, nůžky, papír vyřešena

Celkem do redakce přišla tři až na drobnosti fungující řešení. Dvě jsou otištěna výše. Třetí od Doc.<sup>MM</sup> Markéty Calábkové, využívající obtížnost rozkladu velkých čísel na prvočísla, bylo otištěno v minulém čísle. Nevýhodou tohoto řešení byla nutnost posílat velmi vysoká čísla. Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula zaslal následující nápad, jak velikost přenášených čísel zmenšit:

Problémem schématu popisovaného Doc.<sup>MM</sup> Markétou Calábkovou je velký objem přenášených dat. Což by zvláště při častějším užívání bylo velmi nepraktické. Vhodným řešením je přeposílat čísla v nějakém „menším tvaru“. Ukážeme si to

na menším příkladu: Hráč chce poslat číslo 5764352. Může místo něj ale poslat číslo  $7^4 + 449$ .

Hráči si tedy na začátku udělají seznam vysokých mocnin. Například pro každé tři řády jednu. Poté vždy vygenerují číslo, jenž chtějí poslat a najdou jemu nejbližší mocninu. A číslo napíše jako součet této mocniny a nějakého dalšího celého (i záporného) čísla. Pokud toto číslo bude příliš vysoké, tak i jej může zapsat jako součet mocnin a dalšího menšího čísla.

Použitelnost tohoto návrhu je velmi závislá na tom, jak úsporně bychom dokázali čísla skutečně reprezentovat.

Za autorské řešení problému lze považovat řešení Dr.<sup>MM</sup> Dominika Krasuly uvedené výše. Další alternativou by bylo využít nějakou tzv. hešovací funkci. To jsou funkce, k jejichž výsledku (tomu se obvykle říká heš) je velmi obtížné (s naším výpočetním výkonem nemožné) najít vstup, který se převede na daný výsledek. Každý z hráčů by mohl zahešovat svůj zvolený symbol doplněný o nějaký náhodný řetězec. Pak by si hráči navzájem vyměnili heše a následně i řetězce, které hešovali. Heš by fungoval jako závazek, hešovaný řetězec pak na ověření.

### Další poznámky a nevyřešené otázky

Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula ukazuje, že jeho metoda sdílení tajemství uveřejněná ve čtvrtém čísle může sloužit jako prostředek pro technickou realizaci klíčů vyhovujícím abstraktní definici podle Doc.<sup>MM</sup> Markéty Calábkové.

Zároveň ale upozorňuje, že zatím nikdo nepřišel s analýzou bezpečnosti jeho metody, ke které jsme vybízeli. V tomto má bohužel pravdu. Základním nedostatkem metody bylo, že předpokládala, že osoby sdílející tajemství budou mít klíče tvořeny součinem prvočísel a tato prvočísla budou tak velká, že nebude možné klíče faktorizovat. Některá prvočísla by se ale měla vyskytovat ve více klíčích. Dva klíče obsahující stejné prvočíslu ale dokážeme částečně faktorizovat pomocí Eukleidova algoritmu na hledání největšího společného dělitele.

Na závěr připojme několik spíše filosofických poznatků Dr.<sup>MM</sup> Anety K. Lesné. Ve svém příspěvku se nejdříve snaží obsáhle argumentovat proti stížnosti Doc.<sup>MM</sup> Mateje Lieskovského na podmínku zadání, že pokud je pro znalost klíče potřeba  $k$  osob,  $k - 1$  nesmí o klíči vědět vůbec nic. Na závěr pak připojuje následující text:

### Alternativní metody sdílení tajemství (4b)

*Dr.<sup>MM</sup> Aneta K. Lesná*

Zamysleme se opět například nad možností sdílení tajemství v rámci větší skupiny lidí. Poněkud zanedbanou možností je situace, kdy jeden člověk ví něco a všichni ostatní ví zbytek. Mohlo by tedy například fungovat schéma, kdy se (například) každý zaměstnanec může dostat do své schránky pouze v doprovodu jiného zaměstnance. Hlavní klíč ke schránce zaměstnance X drží sám zaměstnanec X. Vedlejší klíč drží všichni ostatní zaměstnanci. Toto může být využitelné například k ochraně zaměstnanců před nátlakem ze strany kriminálních živlů.

Další možností zamotání přístupu je například situace, kdy roli hraje schopnost využít informaci přidělenou konkrétní osobě. Subjekty v rámci společenství si například mohou vymyslet vlastní jazyk (podobný například takzvané „prasečí latině“ či jazyku Gibberish, ale v závislosti na účelu asi o poznání složitější), pomocí něhož si budou předávat důležité informace včetně třeba hesel a klíčů. Získáváme tak další „vrstvu“ ochrany. Šlo by o takový soukromý „kód Navajo“. Jazykové šifrovací systémy mohou mít i různé podskupiny. Je třeba možné, že jeden ze zaměstnanců zná informace předané ostatním zaměstnancům jako jejich hesla, ale neví, jaké jiní zaměstnanci používají šifrovací systémy. Nemusíme se tedy bát jedinému zaměstnanci svěřit hesla ostatních, aby jim je připomínal a v případě změny oznamoval. Zaměstnanec A tedy rozděluje „hesla“ pro další měsíc, zaměstnanec B své „heslo“ přijme a pomocí algoritmu B z něj vytvoří použitelné heslo, případně klíč.

Možností sdílení tajemství je celá řada a z historie víme, že rafinované systémy přenosu a utajení informací mohou být velmi cenné. Proto podle mého názoru rozhodně má smysl pokračovat ve studiu a výzkumu klíčů, metod přenosu informací a jejich utajení, a to jak teoreticky, tak příležitostně i v praxi.

*Kuba*

## Konference ze soustředění

Pevnost latexové trubice

(8b)

*Doc.<sup>MM</sup> Aneta Šťastná*

### Úvod

V tomto článku vám představím obsah svého konferenčního příspěvku, na kterém jsem pracovala spolu se Zdeňkem Garčicem a Tomášem Gavenčiakem na jarním soustředění M&M v Chaloupkách. Dozvíte se v něm o tom, jakou aparaturu jsme k měření zvolili, jak vyjdou při porovnávání trubice jednotlivých značek, jaký je vliv různých přídomků (Sensitive, Extra Safe, Featherlite Ultima, Joy, ...) na pevnost trubice a jak dramaticky dokáže olej změnit vlastnosti latexu.

### Způsob zavěšení

Při práci s latexovými trubicemi bylo třeba nejvyšší opatrnosti, jelikož sebemenší kontakt s ostrými předměty způsobuje miniaturní trhliny v materiálu. Tyto trhliny se při zatížení materiálem šíří a značně zmenšují jeho výslednou pevnost.

Naším cílem bylo vymyslet závěsné zařízení, jehož součástí a zároveň nejslabším článkem by byla latexová trubice. Celková nosnost takového zařízení pak určuje pevnost latexové trubice v tahu. K jeho sestavení jsme nakonec použili malý kovový kroužek, karabinu, kýbl, bramboru a háček ve stropě <sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Zařízení bylo kvůli velkému prodloužení zatěžované trubice potřeba umístit do výšky zhruba 2 metry nad zemí.

Nejdříve jsme do zaslepeného konce trubice nasunuli hladký kulovitý předmět bez ostrých výstupků, jehož poloměr byl větší než poloměr kroužku. Pro naše účely dané parametry dostatečně splňovala brambora, kterou jsme si s laskavým svolením kuchařky vypůjčili z kuchyně. Následně jsme protáhli nezaslepený konec trubice kroužkem a jeho konec jsme uvázali na madlo kýblu. Přestože přímé uvázání konce trubice ke kýblu může působit pochybně, v praxi se tato možnost uchycení ukázala jako nejšetrnější. Opatření s bramborou bylo potřebné kvůli tomu, že obyčejný uzel se posouval ke konci kondomu a následně se rozvázal. Uzel na otevřeném konci trubice (na rozdíl od druhého konce kondomu) se nerozsvazoval díky pevné hraně na konci kondomu, která byla dostatečně široká na to, aby neprošla uzlem.

Posledním krokem konstrukce závěsného zařízení bylo připojení kroužku k háčku ve stropě pomocí karabiny. Kroužek tak držel na háčku pomocí karabiny, kondom neprošel kroužkem díky navléknuté bramboře a na kondomu byl zavěšený kýbl, do kterého jsme mohli začít pomalu přidávat zátěž.

Vzhledem k tomu, že jsme neměli k dispozici siloměr ani normální závaží, použili jsme místo nich různé druhy předmětů. Každý druh musel splňovat to, že od něj máme k dispozici více kusů, že každý kus má normovanou hmotnost a že součet hmotností více kusů předmětů jednoho druhu dává dohromady hmotnost jednoho kusu jiného druhu. Mezi používaná závaží patřil ruční granát (350 gramů), krabice mléka (1064 gramů) a nenačatá dvoulitrová pet-lahev s kofo-lou (2098 gramů). Pro naše potřeby (a s naší přesností) byly tyto předměty postačující.

## Měření

Zatěžování latexové trubice muselo probíhat postupně a pomalu. Chtěli jsme totiž měřit statickou pevnost trubice, ne dynamickou, která je menší a byla by obtížně měřitelná. Při měření dynamické pevnosti kondomu bychom museli zohlednit nejen hmotnost předmětu, ale i rychlost, kterou do kýble spadl nebo byl vržen.

Zpočátku při měření nastávaly problémy s perforací trubice při uchycování. Kondomy praskaly již při malém zatížení a přímo v místě uchycení. Tento problém jsme vyřešili změnou aparatury tak, aby neobsahovala žádné ostré součásti. Přesto jsme nadále sledovali, v jakém místě trubice praskají a zda nenastala při manipulaci nějaká lokální porucha materiálu. Nejčastějšími místy prasknutí byla špička, lem a prostředek kondomu. Mnohokrát se stalo, že kondom praskl ve více různých místech současně, což potvrzuje, že materiál byl opravdu na hraně svých možností a přetržení nastalo kvůli zatížení.

Při měření jsme nejdříve zkoumali, zda kondom unese samotný kýbl o hmotnosti 570 gramů. To byla naše minimální měřitelná nosnost. Dále jsme postupně přidávali ruční granáty. Tři granáty jsme vyměnili za jednu krabici mléka. K té jsme postupně přihazovali granáty a pokud kondom vydržel, tak jsme je nahradili



druhou krabicí mléka. Dvě krabice mléka jsme mohli nahradit jednou kofolou, a tak dále.

Mezi měřené značky kondomů patřily *Mondos*, *Primeros*, *You&me* a *Durex*. Měření jednotlivých typů kondomů jsme prováděli vždy třikrát. Některá měření byla evidentně ovlivněná chybou v sestavování aparatury (nečistota na brambore, odření kondomu při sestavování apod.) a jejich výsledky proto vycházely řádově mimo očekávanou nebo již ověřenou nosnost kondomu. Taková měření jsme pak nezařazovali do výsledků. V tabulce je vždy uvedený průměr hmotností závaží přepočítaný na gravitační sílu, kterou byl kondom zatížen při přetržení.

Název	Prům. síla [N]	1. kondom	2. kondom	3. kondom
You&Me	79,29	68,80	89,78	–
Mondos Joy	71,03	61,80	73,89	77,39
Mondos Classic	63,55	63,55	68,80	58,30
Durex Extra Safe	63,40	73,89	52,91	–
Primeros	50,37	47,82	52,91	–
Mondos Sensitive	47,74	35,43	60,05	–
Norma ISO 4074	39	–	–	–
Durex Featherlite Ultima	26,80	25,09	28,51	–

## Latex v oleji

Při používání kondomů se doporučuje používání lubrikantů pouze na bázi vody, nikoli oleje. Rozhodli jsme se tedy zjistit, jaký vliv má olej na pevnost a vlastnosti latexu. Vyzkoušeli jsme namočit kondom do oleje na pouhých pět minut a následně měřit jeho pevnost. Již po pěti minutách kondom viditelně nabobtnal a při měření neunesl ani námi měřitelné minimum (570 gramů), tedy více než desetkrát méně než jeho olejem nepolíbený kolega. Kondom, který byl v olejové lázni celou noc, se pak přímo rozpadal pod rukama.

Podobné výsledky měla studie vědců z Los Angeles publikovaná v časopise *Contraception* již v roce 1989. Kondomy lubrikované látkami na bázi oleje měly o 90 % sníženou pevnost při nafukování.

## Norma

Každý kondom musí splňovat normu ISO 4074. Mimo jiné má mít minimální délku 18 cm, má se umět natáhnout na 700 % své původní délky, snést vnitřní tlak 1 kPa, pojmout 18 litrů vzduchu a v tahu má prasknout až po zátěži větší než 39 N. Až na *Durex Featherlite Ultima* tuto normu všechny testované typy kondomů splnily.

V praxi se všechny kondomy v továrně testují na přítomnost děr pomocí tření. Kondom se navlékne na vodivou trubici a třením se na něm vytváří elektrostatické napětí. Pokud dojde k výboji, kondom obsahuje díru a je zařazený do zmetků.

## Závěr

Testování pevnosti latexových trubic v tahu byla velmi zajímavá a zábavná konference. Povedlo se nám mimo jiné ukázat, že kondomy toho vydrží opravdu hodně a že jsou velmi citlivé na poškození ostrými předměty. Také jsme doložili, že není vhodné používat lubrikanty na bázi oleje.

Chtěla bych poděkovat Tomáši Gavenčiakovi za přípravu a vedení této zajisté velmi inspirativní konference.

## Zdroje

- BERSTEIN, Gerald S., COULSON, Anne H., NAKAMURA, Robert M., VOELLER, Bruce. *Mineral Oil Lubricants Cause Rapid Deterioration of Latex*. Vancouver, 1996.  
[http://www.walnet.org/csis/med\\_research/oilstudy.html](http://www.walnet.org/csis/med_research/oilstudy.html)
- *Testy kondomů*. <http://www.kondom.cz/cz/testy-komodu>
- HADRBOLECOVÁ, Jana Bridget. *Jak se co dělá: Kondomy*. Praha, 2007.  
<http://old.stream.cz/video/6487-jak-se-co-dela-kondomy>
- ČSN EN ISO 4074: *Kondomy z přírodního latexu – Požadavky a zkušební metody*. Český normalizační institut, 2003. [www.csni.cz](http://www.csni.cz)

**Stern-Brocotův strom** (8b)  
*Dr.<sup>MM</sup> Dominik Krasula*

## Abstrakt

Mnozí už se setkali s tím, že někdo při sčítání zlomků prostě sečetl jmenovatele a čitatele. Tento na první pohled iracionální způsob součtu, použitý v málo známé matematické struktuře zvané Stern-Brocotův strom, má nečekané důsledky vedoucí mj. až k aproximacím iracionálních čísel.

## Úvod

V článku popisuji výsledky konference „Fareyovy zlomky“, jež obohacují o nástin historického pozadí zkoumání problému Stern-Brocotova stromu a Fareyových posloupností.

Nejprve bude vysvětleno, jak vypadá Stern-Brocotův strom, a uvedeno několik nezákladnějších vlastností. V druhé části práce vysvětlují souvislost Stern-Brocotova stromu s Fareyovými zlomky. V třetí části jsou pak probírány důsledky tohoto propojení. Na závěr jsou uvedena dvě méně důležitá tvrzení dokázaná v rámci konference.

V dodatcích je potom znázornění Stern-Brocotova stromu zdůrazňující jeho souvislost s Fareyovými posloupnostmi a poté důkaz Fareyovy domněnky.

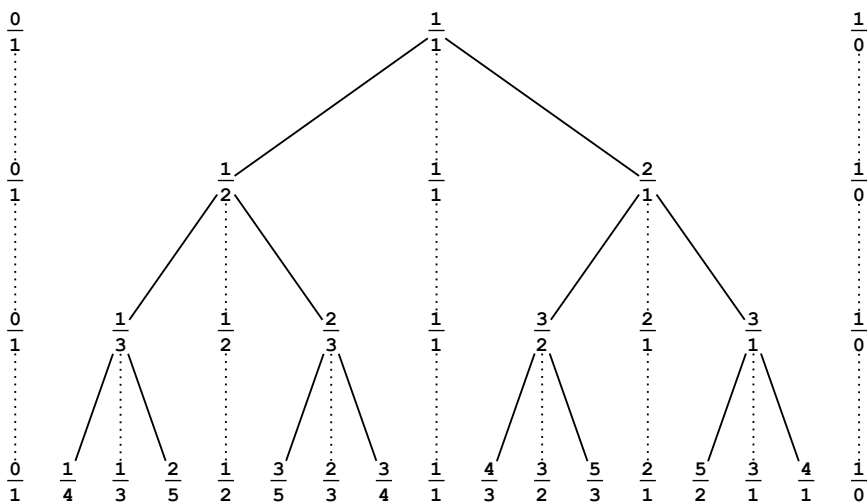
## Historicko-teoretický úvod do problematiky

Matematickou strukturu zvanou Stern-Brocotův strom objevil německý matematik Moritz Stern (1858) a nezávisle na něm francouzský hodinář Achilles Brocot (1851). Strom byl užíván pro aproximaci reálných čísel čísly racionálními. Brocot jej používal k vytvoření správných poměrů mezi kolečky hodiněk.

Abychom s ním mohli dobře pracovat bez zbytečných zmatků, definujme si pro začátek některé pojmy:

- Hodnota zlomku  $\frac{a}{b}$  je  $c$  takové, že  $bc = a$ .
- Velikost zlomku  $\frac{a}{b}$  se značí  $|\frac{a}{b}|$ , platí vztah  $|\frac{a}{b}| = a + b$ .
- Pojmem číslo je v tomto textu vždy myšleno celé číslo, ve většině případů jmenovatel nebo číselník zlomku.
- Jednotlivé zlomky budou značeny ve tvaru  $i_n$ , kde  $i$  je pořadí v řádce, bráno zleva doprava.  $2k$  bude celkový počet zlomků v hladině. Indexem  $n$  bude značena hladina, přičemž jako první je značena řada obsahující zlomek  $\frac{1}{1}$ .
- Součet zlomků  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  je  $\frac{a+c}{b+d}$ .

Nyní se již můžeme podívat na to, jak Stern-Brocotův strom vypadá:



Na začátku, v nulté řadě, jsou dva zlomky  $\frac{0}{1}$  a  $\frac{1}{0}$ . Vždy pak sčítáme dva sousední zlomky. Není potřeba se bát děsivě vyhlížejícího zlomku  $\frac{1}{0}$ , nemůžeme sice vyjádřit jeho hodnotu, neboť není definovaná, ale zapsat takový zlomek můžeme a dokonce jej můžeme přičítat. Použijeme totiž onen speciální způsob sčítání.

Abychom mu lépe porozuměli, je třeba se podívat na práci Johna Fareye staršího.<sup>12</sup> Britský geolog a spisovatel John Farey starší (1766–1826) si všiml, že pokud seřadíme všechny zlomky se jmenovatelem menším než nějaké  $n$  a čitatelem menším než jmenovatel, tak kdykoli vezmeme libovolnou trojici po sobě jdoucích zlomků a sečteme jmenovatele okrajových zlomků a čitatele okrajových zlomků, získáme zlomek mezi nimi, byť ne v základním tvaru.<sup>13</sup>

Co to znamená? Vezměme například  $n = 3$ . Pak máme řadu  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$ . Vyberme si zlomky  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{2}{3}$  a sečteme jejich jmenovatele a čitatele, získáme  $\frac{3}{6}$ , což je pouze rozšířený zlomek  $\frac{1}{2}$ . Stejně tak  $\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$ . Zde jsme dokonce získali základní tvar. Fareyova hypotéza říká, že to bude fungovat pro kterékoliv  $n$ . Což se ukázalo jako pravda a má to mnoho zajímavých a důležitých důsledků. Přesto však býval Fareyův přínos v této oblasti často podceňován, neboť nepodal žádný důkaz platnosti své hypotézy. První důkaz<sup>14</sup> poprvé podal francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789–1857)<sup>15</sup>. V současnosti převládá názor, že se Farey o důkaz vůbec nepokoušel, že příspěvek zveřejnil právě proto, že se ptal matematické veřejnosti, zda platí.

Nyní již můžeme přejít k Stern-Brocotově stromu a jeho souvislosti s Fareyovými zlomky. V levé části Stern-Brocotova stromu jsou Fareyovy posloupnosti. První hladina obsahuje Fareyovu posloupnost pro  $n = 1$ , druhá obsahuje všechny členy Fareyovy posloupnosti kromě těch, co již byly v předešlé hladině. Obdobně to platí pro další hladiny. Občas se této struktuře říká Fareyův strom<sup>16</sup>.

Stern-Brocotův strom je ještě rozšířen o pravou stranu, kde jsou zlomky inverzní k Fareyovým zlomkům.<sup>17</sup> Přejdeme k některým základním, již zmíněným, avšak nedokázaným vlastnostem:

i.) Zlomek obsahuje všechna nezáporná celá čísla. Neobsahuje žádná záporná.

Je to triviální tvrzení vyplývající přímo z chování stromu, nicméně je to důležitý první krok, stejně jako druhé tvrzení<sup>18</sup>.

ii.) Inverznost: Je-li člen  $i_n$  ve tvaru  $\frac{a}{b}$  pak  $(2k - i + 1)_n$  je ve tvaru  $\frac{b}{a}$ .

Toto tvrzení lze jednoduše dokázat indukcí. Pro prvních několik řad to platí triviálně. Mějme dvojici sousedních zlomků  $\frac{a}{b}$  a  $\frac{c}{d}$ . Jejich sečtením vznikne  $\frac{a+c}{b+d}$ . Z indukčního předpokladu musí existovat ve stejné řadě stejně daleko

<sup>12</sup>Znalost Fareyova díla není pro chápání Stern-Brocotova stromu nezbytná, nicméně zjednodušuje pochopení některých jeho vlastností. Hlavním důvodem pro zahrnutí však bylo objasnění, proč se původní práce jmenovala Fareyovy zlomky.

<sup>13</sup>Přejato z [1] strany 3, 4.

<sup>14</sup>Důkaz (nikoliv přímo Cauchyho) lze nalézt v dodatcích.

<sup>15</sup>Známý mj. díky Cauchy-Schwartzově nerovnosti, kterou dokázal (nikoliv však v plném rozsahu).

<sup>16</sup>Ve Fareyově stromě je však obvyklejší psát i zlomky předešlých hladin do hladiny nové. Není to však nic pevně daného, různí se to.

<sup>17</sup>Jedná se mj. o ukázkou toho, že racionálních čísel v intervalu  $(0; 1)$  je stejně mnoho jako v intervalu  $(1; \infty)$ .

<sup>18</sup>Které je tedy spíše důležitý „druhý“ krok.

od okraje (ale od druhého okraje!) dvojice sousedních zlomků  $\frac{d}{c}$  a  $\frac{b}{a}$ . Jejich sečtením získáme  $\frac{b+d}{a+c}$ .

Proto platí-li inverznost pro prvních několik řádků (což platí triviálně), musí platit pro všechny.

## Souvislost s Fareyovými posloupnostmi

Konečně se můžeme podívat na zajímavější vlastnosti. Začneme tvrzením, užívajícím námi zdefinovaný pojem<sup>19</sup> „velikost zlomku“: Nechť je  $H_n$  velikostí půlhladiny, tedy součtem hodnot všech zlomků v jedné polovině  $n$ -té řady. Pak  $H_n = 3^{n-1}$ . V první řadě je součet hodnot  $1 = 3^{(1-1=0)}$ ,<sup>20</sup> dále víme, že  $H_2 = 3$ . Takže nyní chceme pouze dokázat, že  $H_n = 3H_{n-1}$ .

Tvoříme-li nějakou řadu, tak každý zlomek předešlé řady použijeme právě dvakrát (plyne to triviálně z definice stromu). Takže zatím víme, že  $H_n = 2H_{n-1} + K$  a chceme nějak vyjádřit  $K$ .

**Lemma:** Každý zlomek z předešlých řad použijeme právě tolikrát, jako při tvoření  $(n-1)$ -ní řady.

**Důkaz:** Každý zlomek kromě  $\frac{0}{1}$  a  $\frac{1}{1}$ ,<sup>21</sup> které budou použity jednou, bude použit dvakrát. Plyne to z chování stromu. Toto platí pro tvoření každé řady, tedy i pro tvoření  $(n-1)$ -ní řady i pro tvoření  $n$ -té řady, takže  $K = H_n - 1$ .

Pěkným rozšířením tohoto tvrzení je: Sečteme-li všechny zlomky v hladině, bude hodnota výsledného zlomku vždy 1. Důkaz využívá inverznosti. Sečteme-li dva zlomky k sobě inverzní, získáme  $\frac{a}{a}$ . Pokud sčítáme tyto dvojice, tak získáme  $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_k}{a_1+a_2+a_3+\dots+a_k}$ , jehož hodnota je jedna.

Vraťme se však zpátky k tvrzením o velikosti zlomků:  $|(2i+1)_n + (2i+2)_n| = 3|(i+1)_{n-1}|$ .

Důkaz bude velmi podobný jako při předcházejícím tvrzení. Triviálně plyne, že dceřiné členy  $(2i+1)_n + (2i+2)_n$  obsahují dvojnásobek parentálního členu  $(i+1)_{n-1}$ , neboť byl při tvorbě dceřiných členů použit dvakrát. Ze struktury stromu plyne, že parentální a dceřiný člen jsou „vedle sebe“. Proto při tvoření členů  $(2i+1)_n + (2i+2)_n$  budou použity oba členy použité při tvorbě jejich parentálního členu, jejichž součet je  $(i+1)_{n-1}$ . A proto rovnost platí.

Dokonce z tohoto tvrzení můžeme vynechat pojem velikost. Neboť sečteme-li členy  $(2i+1)_n + (2i+2)_n$ , získáme jmenovatele i čitatele třikrát vyšší, než je jmenovatel a čítec v parentálním zlomku.

<sup>19</sup>Zatím jsem se v literatuře nesetkal s tvrzeními o Stern-Brocotově stromě zabývajícími se součtem čitatele a jmenovatele. Pokud některý čtenář nějaké takové tvrzení zná (najde), velmi ocením, pokud mi jej zašle a pomůže tím rozšířit tuto práci.

<sup>20</sup>Toto je maličko sporné tvrzení. V první hladině je jen zlomek  $\frac{1}{1}$ , který má hodnotu 2, nicméně je v obou polovinách, takže při zobecněné formulaci „součet hodnot v  $n$ -té hladině je  $(2 \cdot 3^{n-1})$ “ by ji pak tento fakt nijak neomezoval.

<sup>21</sup>Nebude-li předem řečeno jinak, bude v částech probírající chování poloviny stromu popisována levá polovina.

Zde předpokládáme, že parentální zlomek je v hladině nad hladinou, kde jsou dceřiné zlomky. Co když je však ve vyšší hladině? Hodnota bude opět stejně velká, akorát velikost se bude násobit jiným číslem:  $|(2i + 1)_n + (2i + 2)_n| = (2c + 1) \cdot |(i + 1)_{n-c}|$ .

Důkaz je velmi podobný jako v jednoduchém případě, jen je potřeba se hlouběji ponořit do struktury stromu: Mějme parentální zlomek, jeho velikost označme  $K$ . Přičteme jej při tvorbě dceřiných zlomků dvakrát ( $2K$ ). Pomocí něj rovněž tvoříme další řadu, tím že jej sečteme s jeho parentálními zlomky ( $(2 + 1)K$ ) tyto nové dva zlomky s ním sečteme ( $+2K$ ). Nové dva zlomky s ním opět sečteme. . . Takto tvoříme nové a nové dvojice až dojdeme k naší požadované dvojici. I zde můžeme říci, že hodnota je stejná, neboť jmenovatel i číselník se násobí stejněkrát.

Ukázali jsme tedy, že hodnota součtu dceřiných zlomků je stejná jako hodnota jejich společného parentálního zlomku.

Vypadá to jako nedůležité tvrzení, které je pouhou hříčkou náhodně objevenou ve struktuře. Když se však nad tvrzením hlouběji zamyslíme, zjistíme, že to je důkaz toho, že ve Stern-Brocotově stromu se nacházejí Fareyovy řady. Neboť to, že součtem dvou hodnot je třetí, která, zapíšeme-li všechny zlomky do jedné řady, je mezi nimi, je vlastně stejný princip, jakým jsou definovány Fareyovy řady.

## Důsledek souvislosti s Fareyovými posloupnostmi

Nyní již můžeme Stern-Brocotovu stromu přisuzovat vlastnosti, jenž jsou dokázány pro Fareyovy posloupnosti. Jedním z nich je silné tvrzení „každé kladné racionální číslo je ve Stern-Brocotově stromě obsažené právě jednou“. V rámci konference bylo dokázáno méně silné tvrzení „každé kladné racionální číslo je ve Stern-Brocotově stromě obsažené maximálně jednou“.

Nejprve dokažme, že  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

**Důkaz:** Nejprve dokažme, že  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ . Provedeme ekvivalentní úpravy. Výraz vynásobíme hodnotou  $b(b+d)$  a získáme  $ab + ad < ba + bc$ . Po odečtení  $ab$  získáme  $ad < bc$  což je obecně známá nerovnost plynoucí z tvrzení  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .

Obdobně upravme nerovnost  $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  na  $da + dc < bc + dc$  a dále na  $da < bc$ . Získali jsme stejnou ostrou nerovnost.

Bohužel prvenství v objevení této vlastnosti si připsat nemůžeme. Bylo dokázáno dokonce mnohem dříve, než Farey požádal matematickou veřejnost o důkaz svého pozorování. Pravděpodobně první, kdo tuto nerovnost dokázal, byl Nicholas Chuquet (asi 1445–1488), který nerovnost používal při hledání aproximací iracionálních odmocnin. Důkaz této nerovnosti považoval za jeden ze svých největších úspěchů. Protože Stern-Brocotův strom obsahuje Fareyovy posloupnosti, víme, že díky němu můžeme aproximovat všechna kladná iracionální čísla. Mnohdy je postup pracný, ale aproximace některých iracionálních čísel se dají najít i překvapivě jednoduchou metodou. Krásným příkladem je zlatý řez<sup>22</sup>: Vezměme zlomek  $\frac{2}{1}$  a

<sup>22</sup>Zlatý řez lze vyjádřit jako  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Má spoustu zajímavých a důležitých vlastností, které však již jsou nad rozsah tohoto článku, dobrým zdrojem informací může být například [4].

pokračujeme cik-cak<sup>23</sup>. Tak získáme řadu konvergující ke zlatému řezu.

**Důkaz:** Vezměme několik členů této cik-cak řady. Jsou to  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$ . Vidíme, že jmenovatelé tvoří Fibonacciho posloupnost<sup>24</sup>. I čitatelé tvoří Fibonacciho posloupnost, ale jsou o jeden člen „popředu“. Poměry po sobě jdoucích Fibonacciho čísel konvergují ke zlatému řezu a proto tato cik-cak posloupnost k němu konverguje též.

Nyní stačí dokázat tvrzení o Fibonacciho číslech. Z vlastnosti stromu platí, že součet dvou po sobě jdoucích členů řady vytvoří třetí člen. Což je stejný rekurzivní vztah jako pro Fibonacciho posloupnost. Triviálně je jasné, že i první členy jsou stejné a proto se jedná o Fibonacciho posloupnost.

O Fibonacciho posloupnosti platí další zajímavé tvrzení: Největší číslo  $n$ -té řady je vždy  $(n + 1)$ -té Fibonacciho číslo. To, že tam dané Fibonacciho číslo bude, vychází přímo z předešlého tvrzení. To, že je největší dokážeme indukci. Pro prvních několik hladin tvrzení platí a čísla jsou „vedle sebe“, takže je určitě sečteme. A nemůže existovat větší číslo než součet maxim dvou předešlých hladin, neboť vždy sčítáme čísla z různých řad.

### Další vlastnosti Stern-Brocotova stromu

Další vlastností, vycházející ze znalosti Fareyových posloupností je nesoudělnost čísel zlomku. Každý zlomek je tedy v základním tvaru. Důkaz této vlastnosti byl jedním z hlavních předmětů studia této struktury v rámci konfery. Při hledání důkazu byla objevena další zajímavá vlastnost: Sčítáme-li dvě čísla, jsou vždy nesoudělná.

**Důkaz:** Nejprve je důležité si uvědomit, že sčítáme-li dvě čísla, tak vždy platí, že jedno z nich vzniklo součtem druhého z nich a nějakého třetího čísla. Nyní přejdeme k samotnému důkazu.

Pro prvních několik řad to platí. Nyní sčítáme  $a + (a + b)$  a získáme  $2a + b$ . Chceme dokázat, že  $\text{NSD}(a + b, 2a + b) = 1$ .

Víme, že  $\text{NSD}$ <sup>25</sup> nezměníme, když menší číslo odečteme od většího, proto můžeme napsat  $\text{NSD}(a + b, 2a + b) = \text{NSD}(a + b, 2a + b - (a + b)) = \text{NSD}(a + b, a) = \text{NSD}(a + b - a, a) = \text{NSD}(b, a)$ . Z indukčního předpokladu víme, že  $\text{NSD}(b, a) = 1$ , a proto i  $\text{NSD}(a + b, 2a + b) = 1$ .

Poslední vlastnost, již si ukážeme, je spíše jen hříčkou, nicméně právě proto jsem ji nechal nakonec, neboť ukazuje, jak široký je okruh zajímavých vlastností Stern-Brocotova stromu: Necht'  $i_n = \frac{a}{b}$ . Dále ať  $(k - i + 1)_n = \frac{c}{d}$ . Pak platí  $a + c = b = d$ .

**Důkaz:** Použijeme indukci, pro prvních několik řádků snadno ověříme platnost tvrzení. Nyní se to pokusme dokázat pro jakoukoliv vhodnou dvojici zlomků.

<sup>23</sup>Pojem je přejat z [1].

<sup>24</sup>Fibonacciho posloupnost je definována rekurentním vztahem, kde  $F_1 = F_2 = 1$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .

<sup>25</sup>NSD = největší společný dělitel. V současnosti se často nahrazuje značením gcd, přejatým z angličtiny.

Rozepišme si  $\frac{a}{b}$  jako  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}$ . Obdobně  $\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}$ . Poté víme, že  $a+c = a_1+a_2+c_1+c_2$ . Sčítání je komutativní operace a proto můžeme napsat  $a+c = (a_1+c_2) + (a_2+c_1)$ . Z indukčního předpokladu víme, že  $a_1+c_2 = b_1 = d_1$  a  $a_2+c_1 = b_2 = d_2$ . Proto  $a+c = b_1+b_2 = d_1+d_2 = b = d$ .

## Závěr

Článek zdaleka není vyčerpávající popis všech známých vlastností Stern-Brocotova stromu a Fareyových posloupností. Uvádí pouze ty vlastnosti, jež souvisely s výsledky konference „Fareyovy zlomky“.

Proto může čtenář tohoto článku znát, či později objevit, nějaké další zajímavé vlastnosti této struktury. V takovém případě určitě ocením, budu-li na ně upozorněn, díky čemuž může být tato práce rozšířena a stát se tímto vyčerpávajícím popisem.

## Poděkování

Chtěl bych poděkovat všem, kdo mě inspirovali k sepsání tohoto článku. Předně Janu Miklovi, jenž vedl konferenci Fareyovy zlomky, z jejíž výsledků práce čerpá.

Dále bych chtěl poděkovat všem těm, kterým jsem zaslal nedokončenou verzi tohoto článku a pomohli mi svými připomínkami zvýšit jeho úroveň.

## Reference

Praktická část (tvrzení a jejich důkazy), není-li předem řečeno jinak, byla odvozena na jarním soustředění M&M v dubnu 2014 v rámci konference s názvem Fareyovy zlomky, pod vedením Jan Mikla. Teoretická část čerpá z

- [1] [http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141945/PokrokyMFA\\_55-2010-2\\_2.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141945/PokrokyMFA_55-2010-2_2.pdf)

doplněna je o informace z

- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Brocot\\_tree](http://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Brocot_tree)  
 [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Farey\\_sequence](http://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence)  
 [4] [http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty\\_rez.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf)

Obrázek Stern-Brocotova stromu byl převzat z <http://en.wikipedia.org/wiki/File:SternBrocotTree.svg>.

Datum citací z internetových zdrojů: 13. 4. 2014.







## Výsledková listina XX. ročníku

Poř.	Jméno	R.	$\Sigma_{-1}$	Číslo						$\Sigma_1$
				1	2	3	4	5	6	
1.	Dr. <sup>MM</sup> A. K. Lesna	1.	96	8	9	9	19	13	38	96
2.	Dr. <sup>MM</sup> D. Krasula	1.	80	27	17	10	3	18	5	80
3.	Doc. <sup>MM</sup> M. Calábková	3.	151	20	16	3	11	7	11	68
4.	Doc. <sup>MM</sup> A. Šťastná	4.	154	14	8	9	5	16	13	65
5.	Doc. <sup>MM</sup> M. Lieskovský	4.	123	16	10	0	16	14	0	56
6.	Dr. <sup>MM</sup> P. Souček	2.	65	18	7	16	9	4	0	54
7.	Mgr. <sup>MM</sup> L. Studená	4.	34	16	8	5	5	0	0	34
8.	Dr. <sup>MM</sup> J. Kušnír	3.	73	8	4	8	4	6	2	32
9.	Dr. <sup>MM</sup> P. Náčovský	3.	63	13	7	3	2	1	0	26
10.–11.	Mgr. <sup>MM</sup> V. Končický	3.	23	0	9	1	2	0	11	23
	Dr. <sup>MM</sup> P. Vincena	3.	81	3	2	0	5	6	7	23
12.–14.	Mgr. <sup>MM</sup> O. Hollmann	4.	21	17	4	0	0	0	0	21
	Dr. <sup>MM</sup> A. Hrušková	4.	77	3	5	6	7	0	0	21
	Mgr. <sup>MM</sup> V. Rozhoň	3.	21	21	0	0	0	0	0	21
15.	Bc. <sup>MM</sup> D. Tanglová	1.	19	6	3	3	1	6	0	19
16.	Bc. <sup>MM</sup> J. Václavek	2.	15	6	4	0	5	0	0	15
17.	Mgr. <sup>MM</sup> A. Teichmann	4.	23	9	0	2	3	0	0	14
18.–20.	Bc. <sup>MM</sup> V. Bartovic	2.	13	11	1	1	0	0	0	13
	Mgr. <sup>MM</sup> L. Langerová	3.	49	6	0	3	4	0	0	13
	Bc. <sup>MM</sup> T. Paliesek	2.	13	7	2	4	0	0	0	13
21.–22.	Bc. <sup>MM</sup> J. Havelka	1.	11	6	5	0	0	0	0	11
	Mgr. <sup>MM</sup> K. Ilievová	3.	22	1	0	0	10	0	0	11
23.–24.	Mgr. <sup>MM</sup> J. Dittrich	2.	22	2	0	2	2	4	0	10
	Bc. <sup>MM</sup> Z. Svobodová	2.	10	0	4	1	1	0	4	10
25.–26.	Dr. <sup>MM</sup> F. Homza	4.	95	3	5	0	0	0	0	8
	J. Liška	2.	8	5	3	0	0	0	0	8
27.–28.	Bc. <sup>MM</sup> K. Kolář	2.	10	3	0	2	2	0	0	7
	Bc. <sup>MM</sup> J. Škvára	3.	10	3	0	0	0	0	4	7
29.	Mgr. <sup>MM</sup> L. Anh Dung	4.	27	0	0	0	6	0	0	6
30.–34.	T. Fiala	3.	5	0	0	0	5	0	0	5
	J. Nosková	4.	5	5	0	0	0	0	0	5
	J. Pokorný	2.	5	0	0	0	0	4	1	5
	A. Šedová	2.	5	5	0	0	0	0	0	5
	Bc. <sup>MM</sup> V. Václavík	4.	13	1	4	0	0	0	0	5
35.–40.	R. Hlavinka	2.	4	4	0	0	0	0	0	4
	E. Klimentová	4.	4	0	4	0	0	0	0	4

Poř.	Jméno	R.	$\Sigma_{-1}$	Číslo						$\Sigma_1$
				1	2	3	4	5	6	
41.–42.	Bc. <sup>MM</sup> J. Kolář	3.	14	0	0	1	0	0	3	4
	Mgr. <sup>MM</sup> M. Poljak	2.	38	4	0	0	0	0	0	4
	Mgr. <sup>MM</sup> V. Skoupý	4.	46	2	0	2	0	0	0	4
	J. Stanovský	2.	4	4	0	0	0	0	0	4
	D. Dimitrov	3.	3	3	0	0	0	0	0	3
43.–45.	Bc. <sup>MM</sup> M. Šafek	3.	15	2	0	0	0	0	1	3
	Bc. <sup>MM</sup> Z. Garčic	3.	12	0	2	0	0	0	0	2
	V. Hruška	2.	2	0	0	0	2	0	0	2
46.	Doc. <sup>MM</sup> J. Kadlec	3.	100	2	0	0	0	0	0	2
	F. Zajíc	1.	1	1	0	0	0	0	0	1
47.–50.	Mgr. <sup>MM</sup> J. Cerman	2.	33	0	0	0	0	0	0	0
	M. Kubeša	2.	0	0	0	0	0	0	0	0
	Bc. <sup>MM</sup> D. Macháčová	4.	16	0	0	0	0	0	0	0
	M. Müller	4.	0	0	0	0	0	0	0	0

Sloupeček  $\Sigma_{-1}$  je součet všech bodů získaných v našem semináři,  $\Sigma_0$  je součet bodů v aktuální sérii a  $\Sigma_1$  součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

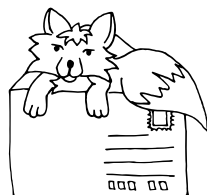
S obsahem časopisu M&M je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.

## Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

*E-mail:* [mam@matfyz.cz](mailto:mam@matfyz.cz)

*WWW:* <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.