

Zadání úloh 6. série – str. 2 • Řešení úloh 4. série – str. 4

Téma 1: Zobrazování počasí – str. 9

Mgr.^{MM} Aneta K. Lesná: Poznámky a zamyšlení – str. 10

Téma 4: Do hlubin – str. 11 • Téma 5: Sdílení tajemství – str. 16

Doc.^{MM} Matej Lieskovský: Ne tak úplně nové objevy ve sdílení
tajemství – str. 16

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

jarní soustředění je úspěšně za námi a jak už to bývá, tak se ke konci chýlí i letošní ročník našeho semináře. V tomto čísle na vás čeká poslední série úloh doprovázená příběhem ze života organizátora. Kromě toho v tomto čísle ještě naleznete řešení úloh ze čtvrté série a další příspěvky k tématům.

Přejeme vám příjemné prožití Velikonoc a hodně štěstí při řešení úlozek a problémů.

organizátoři MĚM

Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 26. 5. 2014

Vlak zastavuje. Probouzím se, vyhlédnu z okna – Praha hlavní nádraží. V hlavě se mi začnou honit vzpomínky na uplynulý týden. Tentokrát jsem však opravdu v Praze a soustředění již nenávratně skončilo. Unavená, ale zároveň plná pozitivních dojmů se ploužím ke koleji. Sundávám batoh ze zad a okamžitě usínám. Velká papírová cedule, rýžový klobouk, popsaná tabule, frisbee, bederní rouška, prázdný talíř, . . .

Úloha 6.1 – Obdélník a čtverec (4b)

Obdélník $KLMN$ a čtverec $KOPN$ mají takovou vzájemnou polohu, že bod O leží na kružnici vepsané trojúhelníku KLM . Vypočtete poměr délky a šířky obdélníku $KLMN$.

Sluníčko už je vysoko nad obzorem, když konečně otvírám oči. Vyškrábu se z postele a mířím přímo k ledničce. S čím větší nadějí ji otvírám, s tím větším zklamáním odcházím. Tajná skříňka s trvanlivějšími zásobami neposkytuje o moc povzbudivější pohled. Na jejím dně se povaluje pouze pár rozlámaných špaget. . .

Úloha 6.2 – Špagetová (4b + bonus)

Důsledkem nehomogenity gravitační síly velmi hmotných objektů (černé díry) dochází k tzv. špagetizaci – „roztahování objektů“. Uvažujte černou díru o hmotnosti m . a) Určete poloměr černé díry (tak, aby částice s podsvětelnou rychlostí v této vzdálenosti nemohla uniknout do nekonečna) b) Určete velikost síly roztahující molekulu ve vzdálenosti R o vazebné délce l c) Předpokládejte, že molekula H_2 se roztrhne, když ji roztahuje síla $F_k = 3 \cdot 10^{-8}$ N. Stanovte podmínku pro m , aby roztržení molekuly mohli pozorovat vzdálení pozorovatelé. Bonus: jak se podmínka změní, když místo předpokladu o F_k budeme předpokládat chování vodíkové vazby podle Lennard-Jonesova potenciálu? Uvažujte molekulu padající z nekonečna.

Mé zásoby se ukázaly jako značně nepoužitelné, třeba mě zachrání kluci vedle. Klepu. Nic. Klepu znova. Nic. Nahlédnu tedy dovnitř, zda tam opravdu nikdo není. Není, ale na stole se na mě usmívá velký bochník čerstvého chleba. Rozhoduji se situaci prozkoumat blíže, když v tom stoupnu na jeden z mnoha barevných míčků válejících se po celém pokoji.

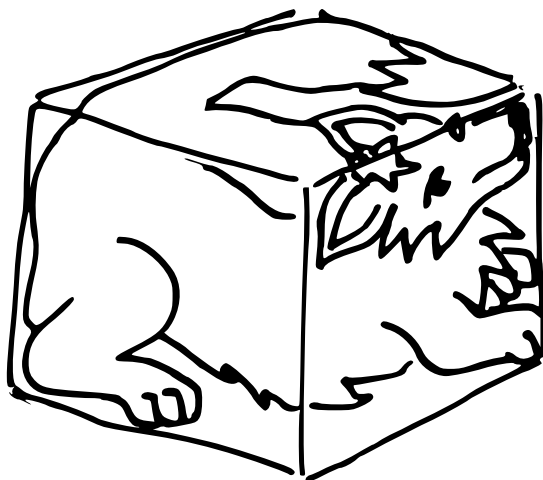
Úloha 6.3 – Barevné míčky (2b)

Na podlaze máme v řadě N barevných míčků. Každý z nich je buď červený, zelený nebo modrý. Chtěli bychom je přeuspořádat tak, aby byly vlevo všechny červené, uprostřed zelené a vpravo modré. V každém kroku můžeme vzít dva míčky a vyměnit jejich pozice. Kolik takových prohození bude určitě stačit na seřazení míčků?

S nepořízenou a bolavými zády opouštím pokoj spolubydlících a vydávám se na lov do nejbližšího obchodu. „Hele, jogurty v akci!“ Pokrývám dno košíku a zkoumám dál místní nabídku. Krásná červená jablíčka s ještě příjemněji vyhlížející cenovkou. Zaplňuji druhé patro prostoru vymezeného pro nákup a přemýšlím, kolik jablíček mohu sníst k jednomu jogurtu. . .

Úloha 6.4 – Kruhy v obdélníku (2b)

Máme obdélník, který lze pokrýt 25 kruhy o průměru 2. Dá se potom také pokrýt 100 kruhy o průměru 1?



Řešení úloh

Úloha 4.1 – Mnohoúhelník

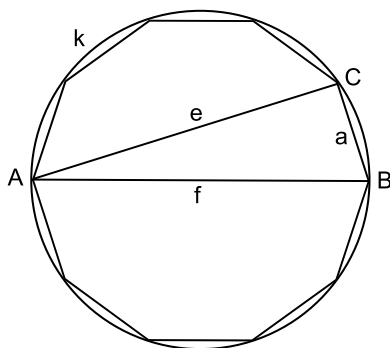
(3b)

Zadání:

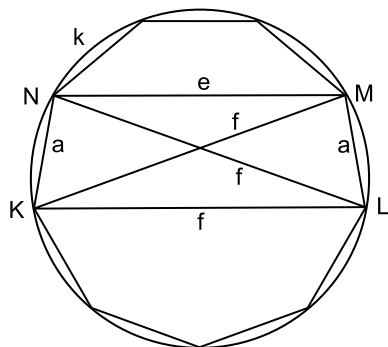
Sestrojte pravidelný mnohoúhelník, když znáte délku nejdelší a druhé nejdelší úhlopříčky. Aby to nebylo moc jednoduché, tak ale neznáte počet stran mnohoúhelníku.

Řešení:

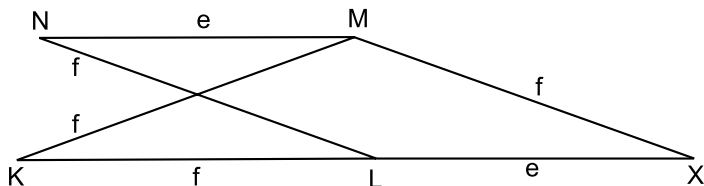
Délku nejdelší úhlopříčky mnohoúhelníku označíme f , druhé nejdelší e a délku strany a .



Pokud je počet stran sudý, pak je úhlopříčka délky f zároveň průměrem k kružnice opsané mnohoúhelníku. Sestrojíme tedy průměr AB a nad ním kružnici k . Poté narýsujeme kružnici se středem v bodě A a poloměrem e , která protne kružnici k v bodě C . Tím získáme trojúhelník ABC s délkami stran e , f , a . Velikost $|BC|$ je nutně a , jelikož k je kružnice opsaná a AB , AC dvě sousední úhlopříčky vedené z bodu A . Nyní jsme získali délku a , kterou pouze nanášíme po obvodu kružnice a sestrojíme tak mnohoúhelník. Pokud nanášení „nevyjde“, znamená to, že má lichý počet stran.



V takovém případě bude „uprostřed“ mnohoúhelníka rovnoramenný lichoběžník $KLMN$ s délkami základů e , f a délkami úhlopříček f . Délka jeho ramen pak nutně bude a a kružnice k mu opsaná bude i opsanou kružnicí celého mnohoúhelníka.



Lichoběžník sestrojíme posunutím. Nejprve sestrojíme trojúhelník KXM , kde $|KX| = e + f$, $|XM| = |KM| = f$. Poté posuneme XM ve směru XK o e . Toto posunutí zobrazí úsečku XM na LN . Body $KLMN$ jsou vskutku vrcholy hledaného lichoběžníka, což snadno ověříme. $|KL| = |KX| - |\text{posunutí}| = e + f - e = f$, $|MN| = |\text{posunutí}| = e$ a nakonec $|LN| = |XM| = f$ a $|KM| = f$ jsme zvolili.

Honza Mikel

Úloha 4.2 – Poissonova (3b)

Zadání:

Uvažujme uzavřenou nádobu se vzduchem. Nádobu přetlakujeme na tlak p_1 při pokojové teplotě. Poté na krátký čas otočíme ventilem, než se vyrovná tlak v nádobě s okolím. Jaký tlak bude v nádobě po vyrovnání teplot plynu s okolím?

Uvažujte tlaky blízké atmosferickému tlaku. Mohla by se hodit aproximace $(1+x)^n \approx 1 + xn$ pro $x \ll 1$.

Řešení:

Rozdělme si popsany postup na jednotlivé děje. V prvním kroku přetlakujeme vzduch v nádobě na tlak p_1 při pokojové teplotě T_0 . V tomto stavu bude vzduch splňovat stavovou rovnici

$$p_1 V = R n_1 T_0, \tag{1}$$

kde V je objem nádoby, R molární plynová konstanta, n_1 látkové množství vzduchu¹ v nádobě a T_0 termodynamická pokojová teplota.

Následuje krátké otočení ventilu. Protože děj proběhne za relativně krátkou dobu, lze zanedbat výměnu tepla mezi vzduchem v nádobě a okolním plynem a

¹Vzduch je směs a pro směsi není látkové množství definováno. Protože ale můžeme předpokládat, že všechny složky vzduchu budou mít podobnou teplotu, lze za látkové množství vzduchu považovat součet látkových množství složek vzduchu, tj. počet všech částic dělený Avogdrovou konstantou.

tudíž lze tento děj považovat za adiabatickou expanzi. Pro parametry plynu po expanzi bude opět platit stavová rovnice

$$p_0 V_E = R n_1 T_2, \quad (2)$$

kde V_E je objem vzduchu původem z láhve po expanzi a T_2 je teplota vzduchu po expanzi. Děj byl ale adiabatický, takže bude splněno také

$$p_1 V^\varkappa = p_0 V_E^\varkappa,$$

odkud lze vyjádřit V_E jako

$$V_E = V \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \quad (3)$$

kde \varkappa je Poissonova konstanta².

Po uzavření ventilu se objem plynu v nádobě sníží opět na V a látkové množství se sníží z n_1 na n_2 ³. Stavová rovnice pro plyn v nádobě po uzavření ventilu bude mít tvar

$$p_0 V = R n_2 T_2. \quad (4)$$

Nakonec necháme plyn zchladnout na pokojovou teplotu (isochorické chlazení), přičemž tlak se změní na konečných p_3 splňující stavovou rovnici

$$p_3 V = R n_2 T_0 \quad (5)$$

Ten vyjádříme p_3 pomocí p_1 a známých konstant. Nejprve podělme rovnici (5) rovnicí (4) a dostáváme

$$p_3 = \frac{T_0}{T_2} p_0. \quad (6)$$

Nyní potřebujeme vyjádřit T_2 . Dosazením (3) do (2) dostáváme

$$p_0 V \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa}} = R n_1 T_2 \quad (7)$$

a dělením rovnice (7) rovnicí (1) získáme

$$\frac{p_0}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \frac{T_2}{T_0},$$

odkud

$$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{-1 + \frac{1}{\varkappa}} T_0, \quad (8)$$

²Poissonova konstanta pro daný plyn je definována jako poměr isobarické a isochorické tepelné kapacity plynu.

³Po uzavření ventilu zůstane část původního vzduchu z nádoby vně nádoby a dalších dějů se již neúčastní

a konečně dosazením (8) do (6) dostaneme

$$p_3 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\varkappa}} p_0,$$

což je požadovaný vztah. Za předpokladu, že jsme přetlakovali nádobu o výrazně méně než jeden atmosferický tlak⁴, tj. platí

$$p_1 = p_0 + \Delta p_2; \text{ kde } \Delta p_1 \ll p_0,$$

potom pro přetlak na konci Δp_3 platí

$$\begin{aligned} p_0 + \Delta p_3 = p_3 &= p_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\varkappa}} = p_0 \left(\frac{p_0 + \Delta p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\varkappa}} = \\ &= p_0 \left(1 + \frac{\Delta p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\varkappa}} \approx p_0 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \frac{\Delta p_1}{p_0}\right) = \end{aligned}$$

(protože $\Delta p_1 \ll p_0$, pak $\frac{\Delta p_1}{p_0} \ll 1$ a použití aproximace je ospravedlnitelné)

$$= p_0 + \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \Delta p_1$$

tedy

$$\Delta p_3 \approx \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \Delta p_1$$

Pro plyn s dvouatomovými (obecně lineárními) molekulami je Poissonova konstanta $\varkappa = \frac{7}{5} = 1,4$. Protože drtivá většina vzduchu (dusík a kyslík) je tvořena dvouatomovými molekulami, lze předpokládat, že i pro vzduch bude Poissonova konstanta rovná 1,4.

Je třeba podotknout, že tento výpočet zanese do výsledku chyby. Kromě nepřesnosti aproximace je tu také nepřesnost stavové rovnice (vzduch není ideální plyn, lze zpřesnit např. van der Waalsovou rovnicí na úkor jednoduchosti výpočtu). Další problém nastává při vypouštění vzduchu z nádoby. Stavová rovnice a rovnice popisující adiabatický děj platí pro ideální plyn v *rovnováze*, což za určitých podmínek (velký rozdíl tlaků, rychlé vypouštění, ...) nemusí být splněno. Naopak, kdybychom vypouštěli příliš pomalu, došlo by k předání tepla vzduchu v nádobě.

Z historického hlediska je popsán pokus zajímavý tím, že se jednalo o první experimentální zjištění Poissonovy konstanty plynu v historii. (Postup byl obrácený, z naměřených tlaků před a po odvozovali velikost Poissonovy konstanty.)

Luboš

⁴Což kdyby nebyla pravda, nastanou další problémy, viz dále

Úloha 4.3 – Barvení grafu (4b)

Zadání:

Máme acyklický orientovaný graf⁵ s nejdelší orientovanou cestou délky⁶ maximálně k . Ukažte, že lze vrcholy grafu obarvit nejvýše k barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy se stejnou barvou.

Řešení:

Acyklický orientovaný graf je buď prázdný, nebo v něm existuje alespoň jeden vrchol, do kterého nevede žádná hrana. (Kdyby to nebyla pravda, tak pokud půjdeme z libovolného vrcholu proti směru hran, vždy budeme mít kam jít. Ale protože je graf konečný, dostaneme se tímto způsobem jednou do vrcholu, ve kterém jsme už byli, a najdeme tak orientovanou kružnici.) Obarvěme všechny takové vrcholy barvou číslo 1 a dále uvažujme graf bez nich. Ten je stále acyklický, tedy dle předchozího obsahuje nějaké vrcholy, do kterých nevede žádná hrana. Obarvíme je barvou číslo 2, odebereme z grafu a dále pokračujeme stejným způsobem, dokud není graf prázdný. Takto jsme rozdělili vrcholy do různě barevných vrstev, kde mezi vrcholy jedné vrstvy nevedou žádné hrany, obarvení je tedy korektní. Konečně vrstev (a použitých barev) je právě tolik, kolik je vrcholů na nejdelší orientované cestě, a ta má délku nejvýše k .

Matěj

Úloha 4.4 – Kruhy (2b)

Zadání:

Ukažte, že kruh s průměrem 2 lze pokrýt sedmi kruhy s průměrem 1.

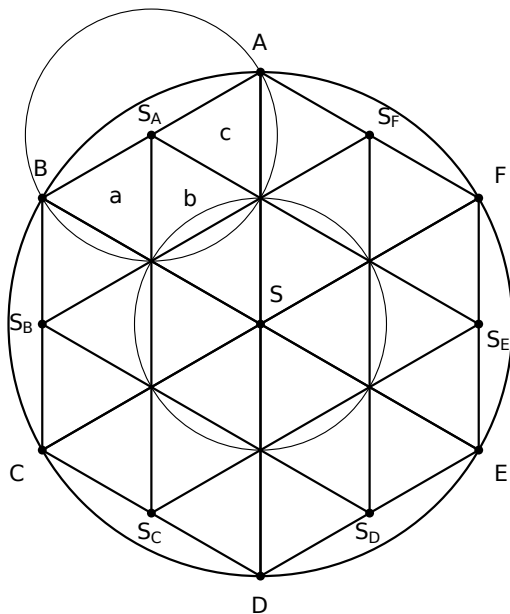
Řešení:

To, že kruh lze pokrýt, nejsnáze ukážeme tak, že nějaké jeho pokrytí najdeme. Možných pokrytí je (nespočetně) mnoho a postupů, jak k nim dojít, taktéž, ukáží tedy jen jeden, který mi připadá nejjednodušší.

Kruh s průměrem 2 si označme jako k a jeho střed jako S . Teď si úlohu maličko upravíme. Místo abychom pokrývali celý k , tak si ho rozdělíme na nějaké části a každou z částí pokryjeme zvlášť. Ježto se s „hranatými“ objekty pracuje trochu lépe než s kulatými, tak si ještě k „zhranatíme“. Pěkným zhranacením kruhu je nějaký pravidelný mnohoúhelník – máme sedm kruhů, tak si zvolíme pravidelný šestiúhelník, který má spoustu pěkných vlastností.

⁵ Graf si můžete představit jako nějaké body, například města, (těm se říká *vrcholy*) pospojované cestami (těm se říká *hrany*), pokud se cesty kříží tak vždy mimoúrovňově (tj. přejet na jinou cestu se dá jen ve městě). *Orientovaný* znamená, že všechny cesty jsou jednosměrky. *Acyklický* znamená, že když vyrazíte z libovolného města, tak už do něj nikdy nemůžete dojet zpět.

⁶ Cesta délky k je cesta, během které navštívím k měst, včetně počátečního a koncového.



Kruhu k tedy vepíšeme pravidelný šestiúhelník, jako je to na obrázku. Úsečky spojující S a vrcholy šestiúhelníku nám šestiúhelník rozdělí na šest rovnostranných trojúhelníků o straně 1. Tyto trojúhelníky ovšem malými kruhy ještě nepokryjeme – budeme tedy dělit dále a každý trojúhelník si středními příčkami rozdělíme na čtyři rovnostranné trojúhelníčky o straně $0,5$ (viz obrázek).

Všechny malé trojúhelníčky, které mají jeden vrchol v bodě S , tvoří pravidelný šestiúhelník o straně $0,5$ – ten pokryjeme jedním kruhem se středem v bodě S . A zbytek? Vezměme si třeba trojúhelník ABS . Trojúhelníčky a, b, c tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníku se stranou $0,5$ a středem v bodě S_A – kruh se středem v S_A trojúhelníčky a, b, c pokryje.

Umístěním středů kruhů do bodů $S, S_A, S_B, S_C, S_D, S_E, S_F$ pokryjeme všechny trojúhelníčky. Zbývají už jen kruhové úseče AB, \dots, FA . Ty jsme ale vlastně už pokryli, neboť půlkruh se středem v S_A má větší výšku než příslušná úseč.

O(N)dra

Řešení témat

Téma 1 – Zobrazování počasí

V tomto čísle prezentujeme článek Mgr.^{MM} Anety K. Lesné, ve kterém nás seznamuje s dalšími metodami předpovědi počasí. Některé z nich vysvětluje, některé částečně, některé vůbec. Dává tím prostor k vašim dalším reakcím.

Poznámky a zamyšlení

(10 b)

Mgr.^{MM} Aneta K. Lesná

Podívejme se ještě na problém zjišťování úrovně „roztáhnutí“ šišky. Protože podstatou „roztahování“ šišky je zvětšování úhlů mezi středem šišky a šupinkami, nabízí se celá řada řešení, která se zdají býti elegantnější než například obkreslování šišky nebo jiné metody založené na pozorování tvaru celé šišky. Z tohoto pohledu by mohlo být dobré prostě měřit úhel mezi středem a určitou šupinkou. To je s neporušenou šiškou poněkud špatně proveditelné, ale i jen rozpůlená šiška poskytuje snadno pozorovatelné a měřitelné úhly, na základě jejichž změn by bylo možné sestavit stupnici vlhkosti. Pokud bychom z jakýchkoli důvodů neměli k dispozici prostředky k půlení šišky či úhloměr (přičemž obojí je v zálesáckých podmínkách relativně pravděpodobné), dá se měřit i „vzdálenost“ mezi určitými dvěma šupinkami šišky. Zde je odvození stupnice poněkud složitější, ale po vystavení (suché) šišky mnoha různým úrovním vlhkosti vzduchu by měla vzniknout relativně spolehlivá škála.

Jsme toho názoru, že fenomén zhoršení chronické bolesti kloubů v závislosti na počasí si zaslouží prostor. Vysvětlení je ve skutečnosti pravděpodobně velmi jednoduché. Bolest kloubů se často rapidně zhorší před příchodem deště. Vysvětlení, že lidem ve vlhkém prostředí klouby navlhnou a začnou „skřípat“ se může zdát nereálné. A nereálné skutečně je. Ukazuje se, že nejdůležitějším faktorem je zde atmosferický tlak. To, že klouby (a jiné věci) mohou v různých tlakových podmínkách pracovat různě, je asi jasné. Se změnou barometrického tlaku většinou přichází změna počasí. Proto změny intenzity bolesti kloubů opravdu mohou být svázány se změnou počasí. Proto se dají počítat jako relativně spolehlivý způsob předpovědi počasí.

Existuje mnoho dalších způsobů předpovídání počasí v zálesáckých podmínkách. Kromě již zmíněných červánků je zde snad všem známá možnost předpovídat počasí na základě míry a typu oblačnosti (typy mraků, . . .). Podobně jako červánky může fungovat i duha. Obecně platí, že duha na západě předchází deštivé počasí, duha na východě slunečné počasí.⁷

Důležitým ukazatelem může být i měsíc. Pokud je červenavý nebo bledý, je ve vzduchu prach. Pokud je velmi jasný a „ostrý“, může to znamenat vyčištění vzduchu díky nižšímu atmosferickému tlaku, který většinou doprovází dešť. Pokud je okolo měsíce kruh (pravděpodobně způsobený průchodem světla skrz mraky typu cirrostratus), dá se v nejbližších dnech očekávat dešť. (Tyto metody mohou za určitých podmínek být velmi nespolehlivé. Velkou roli hraje například úroveň znečištění ovzduší.)

Dále je možné udělat táborák a pozorovat dým. Pokud stoupá rovně vzhůru, dešť by v nejbližší době neměl přijít. Pokud se kouř rozptýluje a klesá, je to pravděpodobně zapříčiněno nízkým barometrickým tlakem, což může být před-

⁷Poznámka redakce: Dokázal by někdo vysvětlit, na jakém principu fungují červánky a duha, a zda a jak souvisí s následným počasím?

zvěstí deště. (Tato metoda samozřejmě může fungovat pouze za bezvětří.)⁸

Ranní rosa většinou znamená, že deštivé počasí v nejbližší době nehrozí. Tato metoda ztrácí smysl, pokud během dané noci přšelo.

Říká se, že rostliny voní nejlépe před bouří. To může být založeno na faktu, že rostliny mají tendenci vypouštět odpadní látky za sníženého tlaku.⁹ Pokud najednou cítíte kompost, může to být varování přírody před deštěm. Není bez zajímavosti, že močály za sníženého tlaku vypouští velké množství plynů. To se projeví charakteristickým zápachem, který může předcházet bouři.

K měření vlhkosti vzduchu pomocí vlasů často není potřeba žádná složitá aparatura. Mnoho lidí vlhkost prostě „cítí ve vlasech“. Jejich vlasy se často začnou vlnit nebo třepit. Podobný rincip funguje u listů dubů a javorů, které mají tendenci se ve vlhkém prostředí „muchlat“, což také může předpovídat dešť.¹⁰

Pokud jde o předpověď s pomocí zvířat, existují i méně známé metody. Říká se, že mravenci v období před deštěm staví mraveniště s velmi strmými svahy.¹¹ Pokud se blíží dešť, například želvy prý mají tendenci hledat vyvýšená stanoviště. Proto se den či dva před deštěm často objevují u silnic. (Pro předpověď v České republice je tato metoda bohužel pravděpodobně irelevantní. . .)

Zuzka

Téma 4 – Do hlubin

Do tohoto čísla přišly hned čtyři příspěvky. Zde otiskujeme kompilát příspěvků Doc.^{MM} Mateje Lieskovského, Mgr.^{MM} Kristýny Ilievové a Mgr.^{MM} Anety Lesné, které se zabývaly především vhodným tvarem ponorky, metodami sestupu a vze-stupu a nutností posádky, případně vybavením nutným pro její rozumné fun-gování. Stále však zbývá několik nedořešených problémů, jako je navigace/komu-nikace s ponorkou. I k bodům řešeným v tomto příspěvku často chybí numerický návrh. Dr.^{MM} Dominik Krasula sepsal bulvární článek trefně popisující některé aspekty rozsáhlých misí, jako je cirkus okolo jejich financování. Celé příspěvky si můžete přečíst na webu tématka.

Tvar ponorky

Asi nejstarší „ponorky“ byly potápěčské zvony. Ty mají jednu zásadní nevýho-du, tlak uvnitř je stejný jako venku. Vzhledem k problémům s toxicitou různých plynů (včetně kyslíku) a potřebným množstvím plynu (bude stlačen vodou na 1/1100 původního objemu) je zřejmé, proč potápěčský zvon nemůžeme použít.

⁸Poznámka redakce: Mohl by někdo spočítat rozdíly tlaků jednotlivých plynů (chladnoucího dýmu z táboráku a atmosférického za stavu nízkého tlaku)? Nemohlo by mít na tento jev vliv ještě něco jiného, např. přes vliv na rychlost chladnutí dýmu?

⁹Poznámka redakce: Pokusí se někdo alespoň kvalitativně popsat vlivy na difúzi pachových molekul do vzduchu a ve vzduchu?

¹⁰Poznámka redakce: Pokusil by se někdo příčiny krepatění vlasů a kroucení listů vysvětlit podrobněji? Není to tak těžké. . .

¹¹Poznámka redakce: Zajímalo by nás, co k tomu ty mravence vede. Nějaké teorie?

Ještě během druhé světové války měla většina válečných ponorek tvar trupu, který na první pohled připomínal loď. Z velké části to bylo dáno skutečností, že ponorky tehdy nebyly schopny dlouhodobého ponoru a tak většinou cestovaly na hladině a ponořily se jen v boji. Proto byla prioritizována rychlost na hladině. Je pravda, že lidé si s ponorkami často asociují spíše tento tvar.

Ponorky, které byly optimalizovány pro rychlost pod hladinou (jako například některé brzké pokusy a moderní válečné ponorky) mají trup doutníkovitého tvaru. Tento tvar jim dovoluje cestovat relativně rychle a na velké vzdálenosti pod hladinou.

Často přítomná „plachta“ – vyvýšená část na hřbetní straně trupu ponorky – slouží jako kapitánský můstek při plavbě na hladině, kdy zvyšuje výšku otevřené paluby nad hladinou bez nutnosti zvednou celý trup ponorky příliš vysoko. Je dobré si povšimnout, že takovéto ponorky často nemají možnost se ponořit do velké hloubky.

Bathysféry jsou extrémně primitivní zařízení, která sloužila k průzkumu velkých hloubek. Jednalo se o duté koule, které byly spuštěny do hloubky na kabelech. Tvar koule byl používán kvůli tomu, že nejlépe snáší vysoký tlak. Válcovité ponorky potřebují trup s trojnásobně tlustší stěnou než kulovité.¹² I proto mnoho ponorek má dvojitý trup, kde vnější je hydrodynamický a nemusí odolávat tlaku, zatím co vnitřní je optimalizovaný pro odolnost vůči tlaku bez ohledu na hydrodynamiku, je tedy kulový.

Jelikož chceme, aby ponorka nebyla extrémně velká a těžká, vyplatí se nám mít co nejmenší kulovitou kabinu a většinu zbývajících systémů, které mohou být vystaveny tlaku, umístit mimo ni. A právě uspořádáním těchto systémů můžeme určit tvar ponorky. Hydrodynamický trup nám pomůže zkrátit jinak nezajímavý čas potřebný k sestupu a vynoření. No, a jelikož primární směr pohybu je vertikální, vyplatí se nám postavit ponorku, která bude mít hydrodynamický doutníkovitý tvar, ale vertikální.

Hlavním problémem při ponoru do velkých hloubek je vztah mezi pevností materiálu a vztlakem. Ponorka s dostatečně silnými ocelovými stěnami, které by vydržely tlak na dně Mariánského příkopu, který později naměřili, že činí 1086 bar, by byla natolik těžká, že by klesla ke dnu a už by se nevynořila. Tlak na dně Challenger Deep je přibližně 111 MPa. Nepopíráme, že posádka by pravděpodobně mohla přežít i ponor se stěnami tenčími, než patnáct centimetrů, ale vzhledem k tomu, že si své posádky ceníme více než pár kilogramů materiálu, jsme se rozhodli stěny navrhnout tak, aby vydržely tlak větší než běžný tlak na dně Mariánského příkopu.

Sestup a vzestup

Obecně chceme, aby hustota ponorky byla co nejbližší hustotě vody. Jelikož ale ona sférická kabina má hustotu větší než voda, potřebujeme něco, čím tento rozdíl vyrovnáme. Problém je ale v tom, že většina materiálů (pěny, plyny) je v těchto

¹²Poznámka redakce: mohl by to někdo ověřit?

hloubkách stlačitelná, a proto nepoužitelná. Vztlková kapalina, často benzín, se využívá proto, že je lehčí než voda, a přitom má podobně nízkou stlačitelnost jako voda. V dnešní době se ale prosazuje používání speciálních, málo stlačitelných pěn, které mají výhodu v tom, že nevyžadují nádrže a mohou naopak samy sloužit jako strukturální prvek.

Z bezpečnostního hlediska chceme, aby ponorka byla o něco méně hustá než voda a aby k ponoru bylo potřeba odhoditelného balastu.

V zájmu stability zároveň požadujeme, aby se těžiště nacházelo pod středem výtlačku, a tudíž se nám ponorka nepřevrátila. Proto musí být vztlková kapalina (nebo pěna) umístěna v horní části ponorky.

Možným řešením je plovák z plechu naplněný benzínem. Benzín je dostatečně lehký a přitom prakticky nestlačitelný. Proto je schopen vyvozovat vztlak nezávisle na hloubce ponoru. Ventilem se benzín vypouští a je nahrazován vodou z okolí, tím se ponorka stává těžší, klesá pomalu ke dnu, a překonává tím rozdílné hustoty jednotlivých vrstev vody v oceánu. Batyskaf Trieste¹³ klesal též díky balastní zátěži, která byla před vzestupem odhozena. Balastní zátěží byly vpředu a vzadu na plováku jímky zatížené 9 tunami železných broků. Zátěž byla ovládána elektricky z kabiny. Uzávěr byl tvořen cívkami, kterými protékal proud, elektromagnetické pole cívek přitahovalo broky a ty uzavřely otvor. Při přerušení proudu se broky sypaly z jímky a ponorka se vynořila na hladinu.

Uvažuje se též o možnosti použití pěny typu Isofloat, jejíž mnohé vlastnosti (schopnost přestát obrovské tlaky potvrzená při použití v rámci Deepsea Challenger, ...) nebyly v počátcích projektu doceněny¹⁴. Hustota takové pěny se pohybuje okolo hodnoty 700 kg/m³. V souvislosti s tím je jasné, že délka ponorky bude výrazně méně než dvacet metrů, protože nám konstrukce s použitím pěny dává oproti původní konstrukci větší „volnost“.

Potřebujeme posádku?

Mariánský příkop je stále nedostatečně probádaný, ale proč na jeho probádání posílat do hlubin další lidi? Vždyť Mariánský příkop je asi 2550 km dlouhý a průměrně 69 km široké podmořské údolí. Jedná se tedy o 175950 km² velké území, což je přibližně srovnatelné s rozlohou Uruguaye.

Mořské dno je různorodé, stejně jako pevnina je zvlněné a určitě nebude po tak velké ploše, jakou má Mariánský příkop, jednolitě, ale bude pravděpodobně rozmanité. I to je třeba prozkoumat, proto jeden ponor na několik hodin či dnů a pravděpodobně ani týdnů k průzkumu a získání dostatečného množství vzorků stačit nebude. A posílat někoho z lidí na několik měsíců do hlubin? Byl by to ohromný psychický i fyzický nápor. Tento vyvolený by musel projít spoustou zdravotních, psychických a fyzických testů, speciálním výcvikem apod. Poslat na dno robota je po několika stránkách výhodnější.

¹³http://cs.wikipedia.org/wiki/Batyskaf_Trieste

¹⁴http://cs.wikipedia.org/wiki/Batyskaf_Trieste

Ponorka nemusí zajišťovat vhodné podmínky pro naše křehké tělesné schránky, může být odolnější, lehčí, a tudíž výkonnější. A v případě, že se ztratí či porouchá, nastane problém ztráty vzorků a peněz, které byly třeba na jeho sestavení, ale nikdo nebude truchlit nad ztrátou lidského života. Příkladem je osud dálkově řízené japonské ponorky Kaiko, která nabrala vzorky bakterií ze dna Mariánského příkopu, ale roku 2003 zmizela během tajfunu beze stopy, protože se přetrhlo lano, na kterém byla upoutána. Vzhledem k tomu, že voda pohlcuje většinu radiových vln, je systém GPS k hledání ztracených ponorek v budoucnu nepoužitelný.¹⁵

Zajištění potřeb posádky

Podle Doc.^{MM} Mateje Lieskovského je, pokud už musí být, dostatečná jednočlenná posádka vybraná podle následujících kritérií:

- dobrý potápěč
- schopnost práce pod tlakem
- není klaustrofobní
- obecně v dobré fyzické a psychické kondici
- vědecké znalosti a zkušenost s ponorkami výhodou

Souhrn podpory života

Potřebné činnosti k udržení příznivých podmínek pro život:

- Odstaňování CO₂ a doplňování O₂ (Kyslík byl poskytován z tlakových lahví a oxid uhličitý byl odebírán při průchodu vzduchu nádobami s natronovým vápnem. Podobný okruh se používal v dýchacích přístrojích už od 19. století a nachází se i v moderních kosmických lodích a skafandrech.)
- Kontrola vlhkosti (Tento problém bývá často řešen kondenzací na studeném vnitřním povrchu kabiny a sběrnou nádrží na spodku kabiny.)
- Termoregulace (U hladiny bude relativně teplo a elektronika hřeje, u dna je naopak téměř nula – posádka bude potřebovat vézt s sebou teplé oblečení, vytápění je nepraktické).
- Jídlo a pití
- Záchod

Důležitá je taky prevence požáru, který by mohl být ve stísněném prostoru, kde není možno větrat, katastrofální.

¹⁵Toto je prosím podstatné sdělení pro další řešení komunikace s ponorkou a navigace.

Zásoby

Celá mise od ponoření až znovu do vynoření trvala asi 8,5 hodiny – z fyziologického hlediska na tuto dobu fyzicky zdatný člověk nepotřebuje ani jídlo ani pití, ale i kdyby si naši oceanauti do gondoly vzal každý litr vody a svačtinu, bylo by to zcela zanedbatelné. Nejlepší asi bude nechat každého člena posádky vybrat si malé množství vlastního jídla. Mohlo by jít například o čokoládu. (Tu ostatně k nabytí sil použila i posádka batyskafru Trieste.) Jen připomínáme, že délka mise by neměla přesáhnout dvanáct hodin. Přesto by bylo dobré vytvořit nouzovou zásobu potravin pro tři lidi na tři dny. Rozsah takové zásoby bude stanoven v souladu s všeobecně uznávanými normami.

Záchod

Na takto krátkou dobu strávenou v ponorce se mi nabízí jako řešení jednorázové absorpční plenky, což ale dospělému člověku může přijít ponížující. Na delší expedice by se dal využít podobný princip záchodu jako u kosmických lodí. Jednalo by se o odsávací nástavce, jimiž je mírným podtlakem vzduchu odsávána moč do sběrné nádoby a odtud vypouštěna mimo loď, při velké potřebě by se jednalo o nádobu, která by pracovala podobně jako vysavač s větrákem.

Poznámka Doc.^{MM} Mateje Lieskovského ke geologický průzkum

Geologický průzkum na dně Mariánského příkopu je celkem zajímavý problém. Předchozí mise zjistily, že dno je pokryto vrstvou organického materiálu neznámé tloušťky. Pokud chceme sbírat volně ležící kameny (pokud tam vůbec jsou), musíme nejdříve mít způsob, jak je na dně pod sedimentem najít. Je možné je najít pomocí sonaru. Co když ale kameny nenajdeme? A pokud už nějaké najdeme, nedokutálely se tam odněkud? Proto může být důležité odebrání vzorku přímo ze dna. Po dosednutí na dno bychom tedy využili dutého vrtáku k odebrání vzorku. Výzvou zůstává mimo jiné vyrovnání reakčního točivého momentu vrtáku.

Návrh robota Mgr.^{MM} Kristýny Ilievové

Robot by mohl fungovat nejen zcela samostatně, ale s pomocí světlovodného kabelu by ho mohl řídit lidský operátor. Robot by mohl využívat systému kamer. Záznam z nich by však byl jen doplňkovou informací, protože je obtížné natáčený prostor správně nasvítit, aby záběr byl kvalitní. Mezi objektivem a snímaným předmětem totiž plave spousta částic. Naše světla je musí osvítit tak, aby se zobrazily co nejméně. A nastavit správně osvětlení je u pohyblivého se robota poněkud obtížné.

Vzorky by se mohly nabírat podobným způsobem jako je sbírání pylu u včel. Jednalo by se o vyklopitelný mechanismus (jakési komůrky) na spodní části robota. Robot by se přiblížil ke dnu, tento mechanismus by se vyklopil, pohybem robota vpřed by se vzorek nabral a komůrka by se zase zaklopila zpět. Do každé komůrky by se nabral vzorek z jiné oblasti Mariánského příkopu.

Robot by mohl plout pod vodou jako okřídlený kluzák bez motoru jen se zařízením pro změnu vztlaku, které by mohlo být tvořeno dvěma nádržemi s olejem. Jedna nádrž uvnitř trupu a druhá (pružná) vně by byly spojeny čerpadlem, které by pak přečerpáváním oleje z jedné nádrže do druhé měnilo objem plavidla. Protože hmotnost robota tak zůstává beze změny, vzroste nebo klesne jeho hustota, tudíž i vztlak. Robot by se nemusel z hlubin vynořit celý, ale oddělila by se spodní část se vzorky připojená na vnitřní nádrž s olejem, která by se předtím naplnila a vzorky vynesla na hladinu. A právě tato část robota by mohla nést GPS systém, aby se vzorky mohly po vynoření na hladinu vylovit.

Zuzka

Téma 5 – Sdílení tajemství

Z došlých tří řešení se pouze Doc.^{MM} Markéta Calábková zabývala nově položenou otázkou, jak hrát kámen, nůžky, papír po telefonu. Nabízíme její nápad:

„Zahrajme si Kámen, nůžky, papír :) Ale jak? Určitě by to teoreticky šlo pomocí velkých čísel. Tak třeba kamarádovi pošlu nějaké vážně velké číslo, třeba takových 100 míst. To číslo by bylo dělitelné nějakou velkou mocninou nějakého rozumně malého prvočísla, krát ještě nějaké další mocniny dalších čísel exponentem nepřevyšující tuto mocninu (klidně i jen první mocniny). V součinu by dávaly dost velké číslo na to, aby se nedalo dost efektivně faktorizovat. Tak obdržím volbu kamaráda a za odměnu mu pošlu všechna prvočísla vyskytující se v prvočíselném rozkladu toho čísla, tady podvádět nemůžu. S tím už si to číslo dokáže pohodlně rozložit, takže o něm už ví všechno a najde ten nejvyšší exponent, co se tam vyskytuje. Třeba bych to šifrovala pomocí zbytků po dělení třemi, co by ten nejvyšší exponent dával. Takže kámen by třeba byla 0, nůžky 1 a papír 2. To by zjistil, a byl by to ten symbol, který jsem zvolila na začátku.“

Toto řešení je teoreticky funkční. Vyžadovalo by ale opravdu hodně velká čísla. Odhad 100 míst je hodně podhodnocený. Dokázal by někdo odhadnou, kolik cifer by čísla přibližně musela mít? Můžete vyjít třeba z délky modulů dnes běžně používaných pro protokol RSA.

Určitě by ale šlo vymyslet i něco vyžadující podstatně menší množství dat. Třeba i takové, které byste byli v nejhorsím schopni nadiktovat po telefonu. Na takové řešení netrpělivě čekáme.

Doc.^{MM} Matej Lieskovský se vrátil ke schémátům pro sdílení tajemství a zapátral, co všechno lze nalézt na internetu. Kupodivu je toho docela dost.

Ne tak úplně nové objevy ve sdílení tajemství (4b)

Doc.^{MM} Matej Lieskovský

Posledně jsem předvedl svůj nápad na funkční metodu sdílení tajemství. Jak jsem následně zjistil, na tento problém jako první narazili pánové Adi Shamir a George

Blakley v roce 1979. Jejich řešení se výrazně liší od mého (které ale již také bylo objeveno přede mnou), a tak mi dovoluje, abych vám jejich metody přiblížil.

Blakleyovo schéma vychází z analytické geometrie. Skutečnost, že se 2 různoběžné přímky protínají v jednom bodě a 2 různoběžné roviny v jedné přímce, můžeme zobecnit na tvrzení, že se libovolné dvě různoběžné n -dimensionální nadroviny protínají právě v jedné $n - 1$ dimensionální nadrovině. Dále můžeme nahlédnout, že pokud je $n(n - 1)$ -dimensionálních nadrovin vzájemně různoběžných, budou mít společný právě jeden bod. Můžeme tedy uvažovat k -dimensionální prostor, ve kterém se nám v jednom bodě protíná $n(k - 1)$ -dimensionálních nadrovin, které jsou navzájem různoběžné. Libovolných k z nich nám umožní jednoznačně určit hledaný bod.

U tohoto schématu má smysl se zamyslet nad otázkou bezpečnosti při útoku $k - 1$. Pokud nás bude zajímat na hledaném bodě více jeho souřadnic, tak s každou nám známou nadrovinou můžeme získat i nějaké vztahy mezi souřadnicemi, neboť víme, že bod bude ležet na nám známé nadrovině. Řešením je zajímat se pouze o jednu souřadnici, kdy dokud žádná přímka tvořící průnik libovolných $k - 1$ nadrovin není na tuto souřadnicovou osu kolmá, tak útočník nezískává žádné informace navíc.

Tím se pěkně dostáváme k problémům, které toto schéma má. Nelze použít jen tak libovolné nadroviny. Vygenerovat náhodné nadroviny na kterých náš bod leží je ještě celkem jednoduché, stačí generovat náhodné normálové vektory (a pak nalézt náhodný jiný bod na ní ležící, ať jej nepoužíváme v rovnicích). Současně ale chceme, aby průsečnice libovolných $k - 1$ z nich nebyla kolmá na osu, která tvoří klíč (například x). Ideální by dokonce bylo, aby tyto průsečnice všechny svíraly s osou x relativně dost ostrý úhel, ať útočník nemůže tipnout nějaká omezení prostoru, ze kterého jsme bod vybírali, a tím si usnadnit práci (pokud by průsečnice byla téměř kolmá na x , stačilo by zkusit jen relativně malé okolí bodu největšího přiblížení).

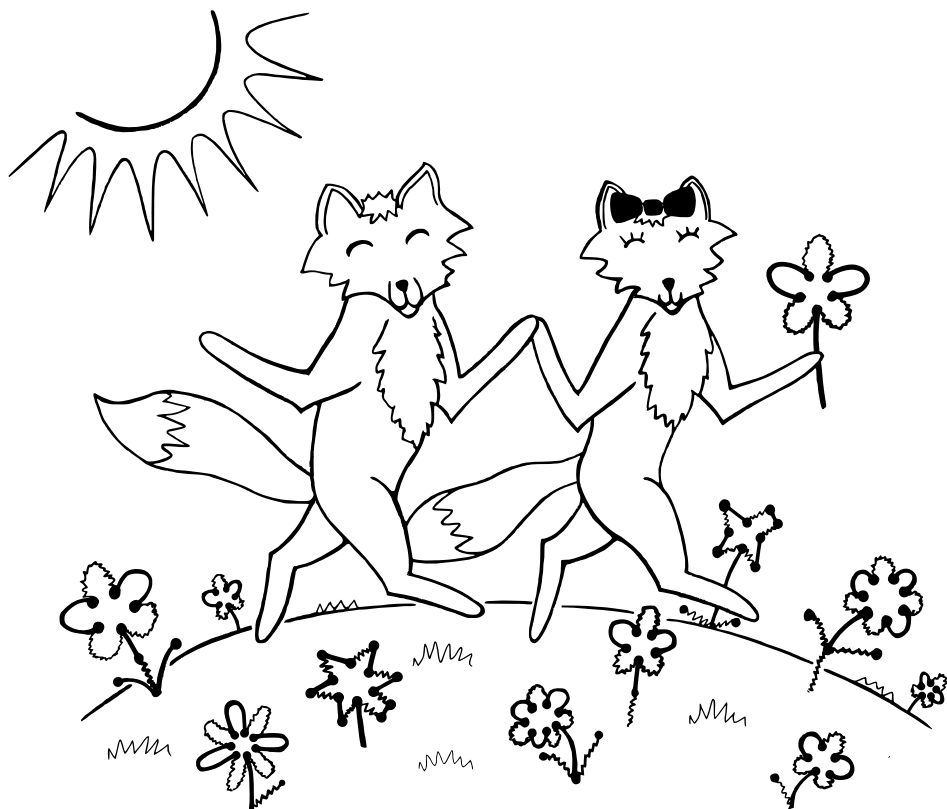
Jistou nevýhodou je také prostorová náročnost tohoto řešení, každý kus tajemství musí obsahovat popis k -dimensionální nadroviny, jehož velikost je $\mathcal{O}(k)$ pro pevnou „přesnost“ výpočtů (a tudíž i velikost klíčového prostoru).

Shamirovo schéma se celkem úspěšně vyhýbá některým problémům Blakleyova řešení. Toto schéma spoléhá na skutečnost, že libovolnými k body lze proložit právě jeden polynom $(k - 1)$ -ního stupně a naopak existuje nekonečno polynomů $(k - 1)$ -ního stupně, které prochází $(k - 1)$ body. Postup je v tomto případě úchvatně jednoduchý, stačí vybrat si klíč, ten použít jako absolutní člen a následně vygenerovat ostatní koeficienty polynomu náhodně. Dále si pak vybereme libovolných různých n bodů (kromě $x = 0$) ležících na křivce tohoto polynomu a jejich souřadnice rozdělíme mezi jednotlivé členy.

Toto schéma je bezpečné proti útoku $k - 1$ a velikost jeho částí je závislá pouze na přesnosti výpočtů (a tudíž velikosti klíčového prostoru).

Obě výše uvedená schémata jsou relativně jednoduchá na implementaci a fungují dobře. Mně se moc nelíbí jejich chování v diskrétním prostoru (kterému se v praxi nevyhnu), a tak doufám, že do příště sepišu detailnější rozbor schémat, co využívají čínskou zbytkovou větu.

Kuba



Výsledková listina 4. čísla

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Úlohy						Σ_0	Σ_1		
				r1	r2	r3	r4	t1	t4			t5	
1.	Dr. ^{MM} D. Krasula	1.	57						3	3	57		
2.–3.	Doc. ^{MM} M. Calábková	3.	133	3		2	2			4	11	50	
	Dr. ^{MM} P. Souček	2.	61	2	2	4	1				9	50	
4.	Mgr. ^{MM} A. K. Lesna	1.	45	3					10	5	1	19	45
5.	Doc. ^{MM} M. Lieskovský	4.	109							12	4	16	42
6.	Doc. ^{MM} A. Šťastná	4.	125	1		2	2					5	36
7.	Mgr. ^{MM} L. Studená	4.	34	1		2	2					5	34
8.	Dr. ^{MM} P. Nácovský	3.	62	1		1	0					2	25
9.	Dr. ^{MM} J. Kušnír	3.	65	2	2	0						4	24
10.–12.	Mgr. ^{MM} O. Hollmann	4.	21									0	21
	Dr. ^{MM} A. Hrušková	4.	77	3		2	2					7	21
	Mgr. ^{MM} V. Rozhoň	3.	21									0	21
13.	Bc. ^{MM} J. Václavek	2.	15	3	1		1					5	15
14.	Mgr. ^{MM} A. Teichmann	4.	23			1	2					3	14
15.–18.	Bc. ^{MM} V. Bartovic	2.	13									0	13
	Mgr. ^{MM} L. Langerová	3.	49	3			1					4	13
	Bc. ^{MM} T. Paliesek	2.	13				0					0	13
	Bc. ^{MM} D. Tanglová	1.	13	0		0	1					1	13
19.	Bc. ^{MM} V. Končický	3.	12	1			1					2	12
20.–21.	Bc. ^{MM} J. Havelka	1.	11				0					0	11
	Mgr. ^{MM} K. Ilieová	3.	22							10		10	11
22.	Dr. ^{MM} P. Vincena	3.	68	3			2					5	10
23.–24.	Dr. ^{MM} F. Homza	4.	95									0	8
	J. Liška	2.	8									0	8
25.	Bc. ^{MM} K. Kolář	2.	10				2					2	7
26.–28.	Bc. ^{MM} J. Dittrich	2.	18				2					2	6
	Mgr. ^{MM} L. Anh Dung	4.	27	3	1		2					6	6
	Z. Svobodová	2.	6				1					1	6
29.–32.	T. Fiala	3.	5	0	3		2					5	5
	J. Nosková	4.	5									0	5
	A. Šedová	2.	5									0	5
	Bc. ^{MM} V. Václavík	4.	13									0	5
33.–37.	R. Hlavinka	2.	4									0	4
	E. Klimentová	4.	4									0	4
	Mgr. ^{MM} M. Poljak	2.	38									0	4
	Mgr. ^{MM} V. Skoupý	4.	46									0	4

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Úlohy						\sum_0	\sum_1
				r1	r2	r3	r4	t1	t4		
	J. Stanovský	2.	4							0	4
38.–39.	D. Dimitrov	3.	3							0	3
	J. Škvára	3.	6							0	3
40.–43.	Bc. ^{MM} Z. Garčic	3.	12							0	2
	V. Hruška	2.	2				2			2	2
	Doc. ^{MM} J. Kadlec	3.	100							0	2
	Bc. ^{MM} M. Šafek	3.	14							0	2
44.–45.	Bc. ^{MM} J. Kolář	3.	11							0	1
	F. Zajíc	1.	1							0	1
46.–49.	Mgr. ^{MM} J. Čerman	2.	33							0	0
	M. Kubeša	2.	0	0		0	0			0	0
	Bc. ^{MM} D. Macháčová	4.	16							0	0
	M. Müller	4.	0							0	0

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

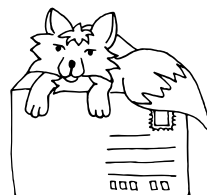
S obsahem časopisu M&M je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.