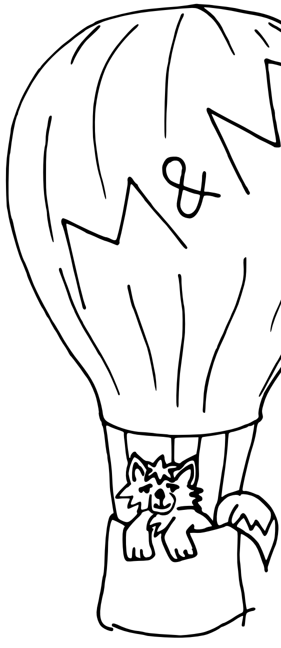
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XX / Číslo 2



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Zadání úloh

Termín odeslání druhé série: 25. 11. 2013

Oběma rukama pevně svíral skalní výčnělek. Desítky shybů nebyly problém, ale visel zde dlouho. Moc dlouho. Důsledky znal, nechtěl se loučit se světem. Všechny možnosti záchrany svépomocí už však vyčerpal, nezbývalo než čekat. Prsty pomalu klouzaly. Smiřoval se se svým osudem. V duchu se loučil se svými blízkými. Neměl sem jezdit. Proč já? Prsty povolily... Zaklapl knihu a na zadní stranu dopadla slza. Neměl na to. Díval se do neurčita a snažil se zahnat myšlenky, které mu vířily hlavou. Dlaní otřel vlhký povlak na knize. Jeho pozornost upoutal velký červený kříž.

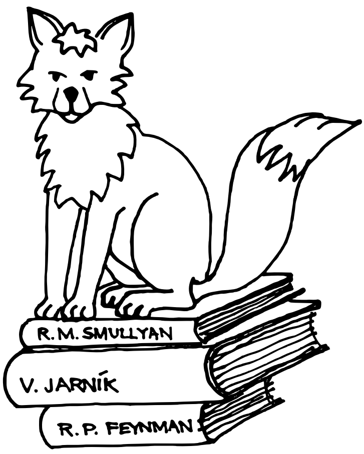
Úloha 2.1 – Kříž (3b)

Papír ve tvaru čtverce tužkou rozdělíme na 9 menších stejně velkých čtverců. Po odstřihnutí 4 rohových čtverců dostaneme kříž. Jak ho lze rozdělit dvěma řezy tak, aby ze vzniklých částí bylo možné opět poskládat čtverec?

Opatrně vzal knihu do ruky a nesl ji do knihovny. Před uložením do nejsvrchnější police vyndal zprostředka záložku. Už se k ní nikdy nevrátí. Slezl ze židle a prohlížel si přebaly ostatních knih.

Úloha 2.2 – Knihovna (2b)

Regál obsahuje N knih seřazených podle svého názvu, přičemž žádné dvě knihy se nejmenují stejně. Chtěli bychom je přeuspořádat tak, aby každá byla na pozici právě o K větší nebo menší. Pro jaká K v závislosti na N to můžeme provést?



Podíval se z okna. Venku pršelo. Nedaleké stromy byly schovány za hustou bílo-šedou zdí a v poryvech větru se kymácely ze strany na stranu. Dostal chuť na čaj. Zamířil do kuchyně. Sáhl po svém nejoblíbenějším a s láskou se pustil do jeho přípravy. Vzpomněl si, že před několika dny se odhodlal k boji se špinavým prádlem. Pračka byla prázdná, a tak zamířil do sušárny.

Úloha 2.3 – Sušárna (4b)

Venku je $0\,°\mathrm{C}$ a prší. V malé nevětrané sušárně vytopené na $25\,°\mathrm{C}$ se snažíme usušit velké množství mokrého prádla. Po několika dnech je prádlo stále mokré. Pomůže sušení rychlé vyvětrání? Kolik vody zkondenzuje v místnosti nebo kolik vody se odpaří z prádla po jednom rychlém vyvětrání?

Vzpomínky na nedávné dobrodružství se nořily z hlubin. Snažil se je zahnat do nejtemnějších a nejzapadlejších koutů mysli. Neúspěšně. Proč? Proč já? Usedl ke stolu. Již dlouho byly jeho jedinými obyvateli modrá šestihranná tužka a sněhově bílý arch papírů. Chvíli si pohrával s ostrým psacím nástrojem, když si všiml duhových proužků, které se nečekaně objevily na bílé podložce. Rozhlédl se. Křišťálově průzračný dokonale pravidelný čtyřstěn. Bez jediného škrábance, bez jediné bublinky uvnitř. Válel se na dřevěné podložce, jako kdyby tam patřil již od nepaměti.

Úloha 2.4 – Čtyřstěn (2b)

Součet úhlů kolem každého vrcholu čtyřstěnu je roven $180\,°$. Ukažte, že všechny stěny čtyřstěnu si jsou podobné.

Zadání témat

Téma 4 – Do hlubin

Evropská unie se rozhodla přidělit grant na geologický výzkum Mariánského příkopu. Cílem je vypravit ponorku na dno příkopu a nasbírat co největší množství vzorků.

Úkolem je promyslet, propočítat, připravit... všechno! Např.: Jak má vypadat ponorka (tvar, velikost, materiál, těsnění, vstupy/výstupy, ...)? Robotická nebo s nějakou minimální posádkou? Případně co ta posádka bude potřebovat? Jak bude realizována komunikace s ponorkou? Jak budeme sbírat vzorky? Jak bude ponorka poháněna? Kolik paliva bude potřeba? A kolik je vhodné vzít do rezervy? Jak dlouho je rozumné, aby mise trvala? Jak bude probíhat?

Zuzka

Téma 5 – Sdílení tajemství

Představte si, že potřebujete zabezpečit atomovou bombu. K jejímu ovládání má přístup jen několik vysoce postavených státních představitelů. Odpálení bomby by mělo dalekosáhlé důsledky, a proto nechcete, aby to mohl udělat jen jeden člověk sám. Na druhou stranu v okamžiku války je občas potřeba jednat rychle a není možné čekat, až se sjedou všichni generálové. Pokud bude na místě dostatek dostatečně kvalifikovaných osob, měly by mít možnost s bombou libovolně zacházet.

Podobná situace se nemusí týkat jen odpalování bomb. Například na dveřích do Korunní komory, kde jsou uschovány české korunovační klenoty, je sedm zámků. Klíč od každého z nich má jedna významná osoba. Aby mohly být klenoty vyzvednuty, musí se všichni sejít. Nevýhodou zde je, že stačí, aby byl jeden klíč ztracen, a ke klenotům se už nikdy nikdo nedostane. Naším cílem bude vymyslet nějaké důmyslnější systémy. Ty mají v současnosti překvapivě velké uplatnění například při zabezpečování dat.

Matematicky si celou situaci můžeme představit tak, že pro odpálení bomby je potřeba nějaký tajný klíč – hodně velké číslo. Chtěli bychom, aby tento klíč nikdo neznal sám, ale když se sejde dostatek kvalifikovaných osob (ty nazveme autorizovanou skupinou), tak aby ho dokázaly spočítat. Pěkné by navíc bylo, aby skupina osob, která není autorizovaná, nemohla o klíči zjistit v principu vůbec nic. Tedy aby z toho, co dohromady znají, nemohli ani odhadnout, jaký z klíčů bude správný s větší pravděpodobností. To by jim jinak mohlo pomoct při případném zkoušení možností.

V praxi je potřeba, aby sdílené tajemství bylo opravdu velké číslo, aby pravděpodobnost, že na něj někdo přijde pouhým zkoušením, byla téměř nulová. Tím se ale my trápit nemusíme. Ve většině případů půjde uměle tajemství libovolně zvýšit, případně bude určitě možné použít schéma vícekrát a sestavit výsledný klíč z několika menších.

Zkusme se nejdříve zamyslet nad vylepšeným příkladem pro korunovační klenoty. Může se stát, že někdo z vrcholných státních představitelů onemocní a nebude se moct otevírání Korunní komory zúčastnit. Proto bychom chtěli, aby komoru mohlo otevřít libovolných šest osob ze sedmi, které nějakou část tajemství vlastní. Co s tím? A co kdybychom měli obecně n osob a chtěli bychom, aby tajemství umělo získat libovolných $n-1$ z nich, ale ne méně? Část tajemství je pro nás opět nějaké číslo či skupina čísel. Předpokládáme, že algoritmus, jak části tajemství zkombinovat do výsledného tajemství, znají všichni.

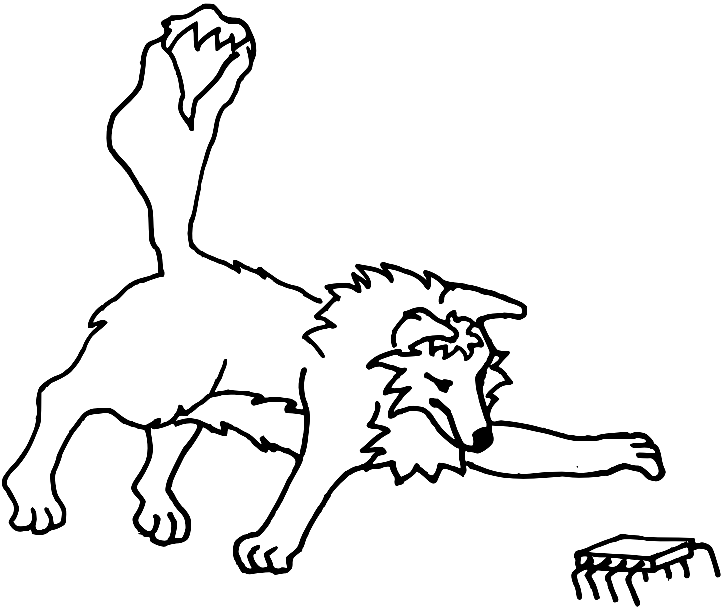
Další aplikací by mohlo být například schéma umožňující zaměstnancům banky otevírat a kontrolovat bankomaty. Aby nikdo ze zaměstnanců nemohl při kontrole bankomatu nějaké peníze ukrást, je běžné, že bankomat musí otevírat alespoň dva zaměstnanci současně. Dejme tomu, že banka má 30 zaměstnanců. Chtěli bychom mezi ně rozdělit tajemství tak, aby ho společně uměli zjistit libovolní dva z nich, ale ne jen jeden sám. Jak bude potřeba schéma upravit, pokud nějaký zaměstnanec přibude, nebo ubude? Jak by vypadal algoritmus pro n zaměstnanců?

Všechny předchozí otázky lze spojit do jednoho obecného schématu. Představme si, že máme n osob a chtěli bychom, aby tajemství dokázalo zjistit libovolných k z nich ($1 \le k \le n$), ale aby $k-1$ o tajemství nevědělo nic. Dokázali byste si poradit i s takto zobecněným problémem?

Ani takto obecné schéma ale nemusí stačit pokaždé. Mějme krále a tři vojevůdce. Líbilo by se nám, aby tajemství znali všichni tři vojevůdci nebo král s jedním vojevůdcem. Je možné vytvořit i takové schéma?

Zkuste vymyslet nějaké praktické aplikace, kde se sdílení tajemství hodí. A navrhnout, co by schéma v daném konkrétním případě mělo splňovat, případně i popsat vhodné schéma.

Kuba



Řešení témat

Téma 1 – Měření počasí

K tématu zobrazování počasí jsme obdrželi dva příspěvky, oba spíše kvalitativní než kvantitativní. Nejprve otiskujeme příspěvek Dominiky Tanglové, kde autorka navrhla několik možných experimentů. Žádný ale neprovedla, a dala tak prostor dalším řešitelům.

První návrhy (5b)

Dominika Tanglová

Šišku lze nakalibrovat nejspíše více způsoby, ale tento mi připadal nejjednodušší a nejpřesnější. Pro co nejpřesnější měření je potřeba mít osobní meteostanici s měřičem rychlosti větru. Nejprve zjistíme vlhkost vzduchu a roztažení šišky, kterou obkreslíme na papír. Poté ponoříme šišku do nádoby s vodou tak, aby byla celá ponořená. Ponořenou ji necháme 15 minut, a poté vyndáme a opět obkreslíme. Šišku necháme vysušit, na dosušení s co nejmenší možnou vlhkostí použijeme troubu na nízkou teplotu, aby se nespálila. Po vytažení šišky z trouby ji opět obkreslíme. Podle těchto zjištění můžeme sestrojit přibližnou stupnici.

Pro zjištění rychlosti větru pověsíme šišku do volného prostoru kolmo k zemi. Pro vychýlení šišky můžeme použít větrák, u kterého změříme rychlost proudění vzduchu. Zaznamenáme vychýlení. Podle těchto hodnot sestrojíme stupnici. Pro správné měření musí být rychlost proudění vzduchu konstantní, protože šiška by se rozhoupala kvůli nárazům větru. Stupnici přiděláme na horní polovinu provázku, aby nevadila pohybu, ale byla co nejblíže provázku. Pro přesné měření je důležité umístit měřič na otevřené prostranství.

Další měřič vlhkosti vzduchu jde vyrobit z pramene vlasů. Na kartón připevníme pomocí špendlíku brčko tak, aby se volně pohybovalo. K druhému konci připevníme pramen vlasů, druhý konec připevníme k hornímu okraji čtvrtky. Podle aktuální vlhkosti vzduchu uděláme značku na čtvrtce. Poté namočíme vlasy a opět uděláme značku na čtvrtce. Podle naměřených údajů uděláme stupnici.

Všechny tyto metody nikdy nebudou úplně přesné, protože jsou ovlivněny dalšími věcmi, které znehodnocují měření.

Poznámka redakce: Samozřejmě že žádná reálná metoda není nikdy úplně přesná. Žádné měření z principu nemůže být úplně přesné. Ale přesto se měří a výsledky se publikují. Jinak bychom se nikam nedostali, že ano. Takže jde o to alespoň odhadnout (i kdyby to bylo jen „od oka“), jak velká (tj. číselně) ta nepřesnost bude.

Druhý příspěvek nám zaslal Dominik Krasula, který se zabýval sociologickým průzkumem na téma Znalost lidí o zálesáckých metodách zobrazování počasí. Uvádíme jeho mírně zkrácenou verzi.

Výzkum veřejného mínění (4b)

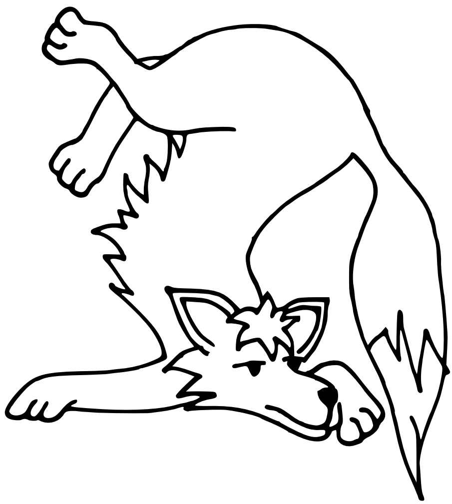
Dominik Krasula

Toto téma jsem se rozhodl zpracovat formou průzkumu veřejného mínění. Oslovil jsem přes třicet lidí (převážně SŠ studentů). Jelikož jsem se v podstatě ptal lidí na řešení[1], neuvádím zde svůj názor na danou problematiku.

Odpovědi se snažím rozdělit do skupin dle dotazovaných. Velmi zajímavé bylo sledovat odpovědi podle hudebního zaměření, nejkvalitnější odpovědi poskytovali metalisti a metalistky. Folkaři úlohu začali rozebírat velmi vážně, ale většinou nedošli k nějakému komplexnějšímu výsledku. Milovníci klasiky bohužel většinou odmítli odpovídat, nebo neměli racionální odpověď. Herci odpovídali buď velmi rozumně, přičemž někdy rozvinuli i myšlenky, které mne ani nenapadly, nebo naopak odmítali odpovídat. Všichni členové studentské rady odmítli odpovídat. Dotazovaní hrající na hudební nástroje obvykle odpovídali uvážlivě, nicméně celková odpověď nebyla příliš přínosná. Většina dotazovaných odpovídala celkem rozumně nebo odpovídat odmítla. Vyjímkou jsou ovšem yaoistky (obě souhlasily

[1] Zde nemůžeme dost dobře mluvit o řešení problému. Zadání tématu je velmi široké a nejde v něm o vyřešení všech dílčích problémů uvedených na začátku, ale o diskusi o tématu formou odborných článků.

se zveřejněním svých odpovědí). První situaci zhodnotila „Já bych si vycvičila veverku, a ta by ji snědla“, přičemž se nadšeně usmívala. Druhá pronesla následující návrhy: „Kýve se – fouká vítr“, „Je mokrá – prší“, „Šiška nejde vidět – je tma“, „Má růžové tričko – bude teplo“. Většinou dotazovaní s odmítavým přístupem měli nejlepší odpovědi.



Nejčastější odpovědí bylo pozorování větru pomocí výkyvů šišky vůči původní poloze (19 lidí). Čtyři lidé vzali v úvahu stín, vržený šiškou. Velká část (12) kritizovala měření počasí pomocí šišky, neboť většinou měří něco, co vypozorujeme bez ní. Často kritizované bylo i to, že většinou měříme aktuální počasí. Dva rovněž zmínili dvojznačnost získaných hodnot: Když šiška ukazuje vlhkost vzduchu, tak to nemusí být předzvěst deště, naopak může být po dešti. Někteří zajímavě rozvinuli otázku špatné viditelnosti, pěkné bylo „Když nevidíme provázek, je mlha“. Jeden se zamyslel nad zvýšením objemu šišku v důsledku naplnění vlhkostí. Pět lidí se zajímalo o parametry šišky, jako tvar špičky či druh stromu, tři o délkou provázku. Někteří se nesmířili s myšlenkou, že by museli předpovídat počasí podle šišky. Jeden se zamýšlel nad měřením teploty v závislosti na délce provázku. Samozřejmě jako při každé anketě se vyskytlo několik vtipných odpovědí, například „Když chytne, je hodně velké vedro.“, „Když hoří, držíš ji moc blízko nad táborákem.“, „Ji vystrčím z okna, ne?“, „Když ji roztočím, tak zmrzne!“ nebo „Uletí ti? Je vichřice!“

Asi nejzajímavější byla myšlenka měření pohybu mraků. Šiška nám zde slouží jako závaží. Provázek vizuálně rozříznе oblohu. Ideální je jej umístit tak, abychom jej vizuálně měli na hranici mraků. Pohybují-li se mraky, tak po nějakém časové úseku již nebude provázek na hranici mraku. Toto měření má různé způsoby použití, slouží zvláště při měření povětrnostních podmínek ve vyšších atmosférických vrstvách, z čehož se již dá počasí, máme-li dostatečné znalosti, předpovídat celkem dobře.

Poznámka redakce: V první řadě bych ráda ocenila ohleduplnost autora článku, protože nezveřejňuje výroky ostatních bez jejich souhlasu. Dále bych chtěla upozornit, že z odpovědí dotazovaných opět získáváme další návrhy experimentů k provedení. Navíc můžeme, jak bylo řečeno již v zadání tématu, určovat počasí kvantitativně. Ovšem test měření výšky nad táborákem bych raději neodoporučovala :). A jak z aktuálního stavu počasí něco předpovědět, je otázka další, a výrazně obtížnější, nicméně jakékoli návrhy jsou také vítány.

Zuzka

Téma 2 – Kozy

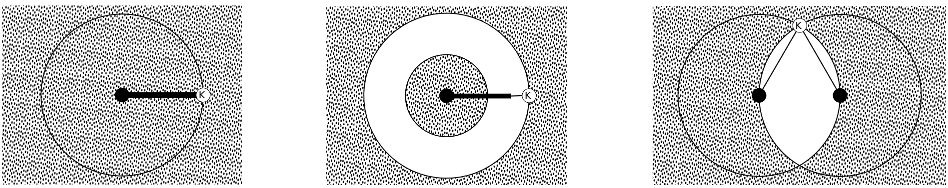
K tématu přišlo v dřívějším termínu odeslání určeném pro zájemce o soustředění šest příspěvků. Většina řešitelů nejprve nakreslila pár navrhovaných obrazců, a poté vymyslela nějaké vlastní.

Často jste používali slovní popis, který nebyl doprovázen obrázkem nebo konkrétními hodnotami, takže se špatně představuje, co tím autor myslel. Proto se nebojte ke všemu kreslit obrázky a popsat u nich rozměry.

V obrázcích zde publikovaných budeme dodržovat konvenci, že svislé kůly budou zobrazeny plným kolečkem, kůly vodorovné tlustou čarou, provazy tenkou čarou a pohyblivá očka kroužkem. Obrázky budou situaci zachycovat v půdorysu.

Kružnice (1 bod)

Lucie Studená si vymyslela vlastní útvar, a to kružnici (Obr. 1 vlevo), kterou popsala takto: „Jednoduše pomocí kozy vytvoříme v trávníku mimo v zadání popsaných příkladů například kružnici tak, že navážeme na středový kůl ještě jeden, a ten přes očko přichytíme ke koze.“



Obrázek 1: Vlevo: kružnice – Lucie Studená; uprostřed: mezikruží – Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Linda Langerová, Lucie Studená, Otto Hollmann, Dominik Krasula, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček; vpravo: čočka – Lucie Studená

Mezikruží (1 bod)

Na to, jak udělat mezikruží, přišli všichni autoři příspěvků.

Útvar vytvoříme rotováním kruhu po kružnici. Obě dvě dílčí části už umíme sestavit, tak je jenom spojíme dohromady. Obrázek 1 uprostřed je více než výstižný.

Čočka (1 bod)

Většinou jste si všimli, že pokud kozu uvážeme nějakým způsobem, tak vypase nějaký útvar. Když kozu uvážeme jiným způsobem, tak vypase jiný útvar. Následně když kozu uvážeme oběma způsoby naráz, tak vypase průnik těchto úvarů. Tohoto principu jste využívali u všech složitějších útvarů.

Typickým příkladem byla např. čočka (Obr. 1 vpravo), kterou navrhla Lucie Studená: „Ještě je možné udělat například tvar čočky. Dám dva kůly na určitou vzdálenost od sebe a navážu na ně stejně dlouhé provázky, dlouhé jako vzdálenost mezi kůly. Oba přivážu na kozu. Pak bude koza v podstatě chodit po (a v) kružnici, dokud nedosáhne špičatého bodu, kde budou oba provázky napnuté. Může ještě přejít na druhou kružnici a vypást druhou polovinu.“

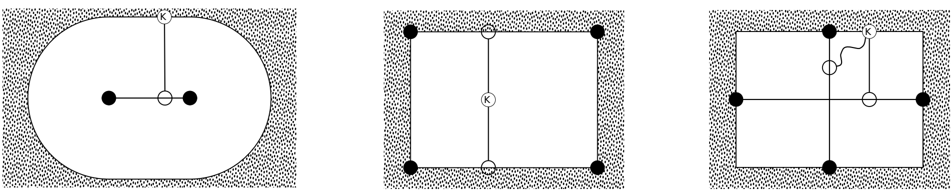
n-úhelník

Dále jste se zabývali útvary, které mají rovné hrany.

Pro vytvoření rovné hrany jste vymysleli způsob, jak kozu uvázat. Správným složením tohoto uvázání jste dostávali obdélník (Obr. 2 vpravo), čtverec, trojúhelník (Obr. 3 vlevo) a obecný n-úhelník.

Úvaz (1 bod)

Úvaz pojmenoval a navrhl Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček, používá ho i Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak a Lucie Studená (Obr. 2 vlevo). Jde o pevně natažené lano mezi dvěma kůly, na kterém je provlečeno očko s provazem. Toto očko se může volně pohybovat po prvním napnutém provazu. Předpokládáme, že provaz je dokonale pevný a



Obrázek 2: Vlevo: úvaz – Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak, Lucie Studená; uprostřed: obdélník pomocí vedení – Otto Hollmann, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak; vpravo: obdélník pomocí úvazu – Lucie Studená, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček

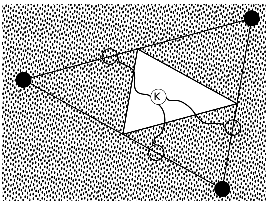
nelze jej nijak natáhnout. Teoreticky bychom mohli použít místo prvního provazu i kůl, protože provaz je statický.

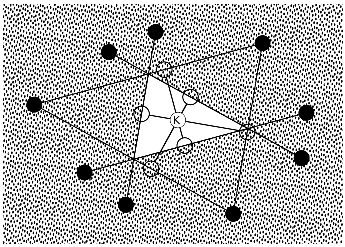
Vedení (1 bod)

Otto Hollmann popsal jinou strukturu, jak vytvořit rovnou hranu, kterou jsme nazvali vedení. Používá ji i Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Marian Poljak.

Jde o dvě dvojice kůlů, mezi kterými je pevně napnuto lano. Na těchto napnutých lanech je připevněno třetí lano pomocí dvou kroužků. Koza je pak uvázána na kroužku, který se může volně pohybovat po pohyblivém laně. Ve vedení jsou všechna lana stále napnutá.

Pokud použijeme jedno vedení, dostaneme okamžitě čtverec nebo obdélník. Za návrh obdélníka byl udělován 1 bod. Sestrojení trojúhelníka pomocí vedení je znázorněno na obrázku 3 vpravo.





Obrázek 3: Vlevo: trojúhelník pomocí úvazu (udělován 1 bod) – Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Marian Poljak; vpravo: trojúhelník pomocí vedení (udělován 1 bod) – Otto Hollmann;

Návrhy na další zkoumání

Podívejte se na trojúhelník vytvoření pomocí úvazů a vedení. V čem je ten hlavní rozdíl? Zkuste se zamyslet, jaké se zde vyskytují síly. Řekněme, že koza vyvíjí sílu F_{koza} směrem, kterým se pohybuje. Pokud máme nějaký kroužek navlečený na jiném laně tak, aby se tento kroužek mohl pohybovat, je potřeba aby na něj působila nějaká nenulová síla.

Vypase koza opravdu trojúhelník, nebo se do některých míst nedostane? Pohne se vůbec?

Samozřejmě si můžete vymyslet vlastní problém, kterým se budete zabývat. Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Marian Poljak např. navrhuje, že by bylo zajímavé, kdyby se úloha řešila v prostoru. Neváhejte a zjistěte i jestli kozy umí létat.

xlfd

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.