Studentský časopis pro bádání v oblastech matematiky a fyziky

M&M číslo 5

Toto je poslední číslo v tomto školním roce. Všichni jste zváni na soustředění. Pokud chcete jet, pošlete vyplněnou přihlášku co nejdříve, abychom věděli kolik nás bude. Rubriku o příspěvku do konference vyplňovat nemusíte, ale přesto Vás prosím, zkuste si pro ostatní něco připravit. Nemusí to být úplně vážné a nemusí to ani být jen matematicko-fyzikální. Od toho je konference.

Omlouváme se všem, kterým jsme napsali špatné bodové ohodnocení do tabulky (vzhledem k počtu chyb soudím, že jsem u toho musel spát — M. Č.).

TÉMA IV: PROSTORY VÍCE DIMENZÍ

Pravidelná tělesa v R^4

dr. Tomáš Bárta

Průlom do problému pravidelných těles konečně udělal Tomáš Bárta. Bohužel kvůli nedostatku času a značné rozsáhlosti jeho článku uvedu jen stručné shrnutí výsledků. Doufám, že jak Tomáš, tak všichni zájemci o více dimenzí přijedou na soustředění.

Definice: Mějme pravidelné těleso T v R^n, jehož povrch tvoří $(n-1)$-rozměrná tělesa V. Nyní vezmeme všechna tělesa V vycházející z jednoho vrcholu tělesa T a do středu každého z nich umístíme vrchol. Dva vrcholy spojíme hranou pokud jim odpovídající $(n-1)$-dimenzionální tělesa sousedí. Dostaneme vrcholy a hrany nového $(n-1)$-dimenzionálního tělesa, které nazveme U. Pak o tělese T řekneme, že je složeno z V systémem U, značíme $T=(V,U)$.

Pár příkladů:

Ve třech dimenzích je např. T=krychle=(čtverec,trojúhelník)=(4,3), protože je složena ze čtverců a v každém vrcholu se stýkají tři čtverce. Jejich středy tvoří trojúhelník (těleso U z předchozí definice). Ve čtyřech dimenzích jsme zatím nalezli simplex=(4,4), hyperkryhli=(6,4) a B4=(4,6). Uvědomme si, že čísla v závorce musí odpovídat pravidelným tří rozměrným mnohostěnům a oba tyto mnohostěny musejí mít stejný počet hran vycházející z jednoho vrcholu. Zbývají tedy kombinace (4,12), (12,4), a (8,8). O ostatních kombinacích, tj. o (6,6), (6,12), (12,6), (12,12) a (20,20) lze snadno ukázat, že nemohou existovat, neboť se vedle sebe kolem jednoho vrcholu nevejdou ani v trojrozměrném prostoru, natož aby šli skládat k sobě na zakřiveném povrchu čtyřrozměrného tělesa (analogie s rovinou — pokud se např. 3 sedmiúhelníky nevejdou k jednomu vrcholu v rovině, těžko z nich můžeme postavit pravidelný mnohostěn).

Tomáš Bárta se pokoušel určit, kolik mají tři zbývající možná tělesa buněk, stěn, hran a vrcholů. Napíšu zde jen počty stěn: 720 čtyřstěnů pro (4,12), 144 dvanáctistěnů pro (12,4) a 24 osmistěnů pro (8,8). Nad těmito čísly bych doporučoval ještě se zamyslet, protože mě vyšlo 120 dvanáctistěnů pro (12,4). Postup (ten si myslím, že je správný) jakým na to Tomáš přišel jen velmi hrubě popíšu pro toto těleso. Vzal si jeden dvanáctistěn a na každou jeho stěnu přilepil (myšlenkově, nebo ještě lepší je nákres) další dvanáctistěn a tak pokračoval, přičemž je třeba dát pozor na to, aby u každého vrcholu byly 4 dvanáctistěny a u každé hrany tři. Skončí se v okamžiku, kdy je povrchem takovéto slepeniny opět dvanáctistěn. Komu to není jasné, ať si tímto způsobem zkusí v rovině zkonstruovat graf povrchu trojrozměrného dvanáctistěnu z pětiúheníků tak, že ke každému vrcholu přiléhají tři. Také můžete zkusit popřemýšlet nad tím, jak se dá uvedený postup ve čtyřech dimenzích přehledně znázornit na dvourozměrném papíře (kresby trojrozměrných těles se už pro několik desítek těles stávají nepřehlednými a my bychom měli jít do stovek). Za to, že to jde, ručím vlastí zkušeností.

Tomáš dále zobecnil pojem duálních mnohostěnů a pokoušel se udělat jakýsi úvodní vhled do další (páté) dimenze. Doufám, že budeme moci vše důkladně prodiskutovat na naší pracovní konferenci a případně najít další zajímavé výsledky.

Zobecnění některých planimetrických úloh

doc. Tomáš Brauner

Opět z nedostatku času uvedu jen výsledky.

Věta 1: Těžiště n-simplexu dělí těžnici (spojnici vrcholu s těžištěm protilehlé stěny) v poměru 1:n. Důkaz se provede z integrálního vzorce pro těžiště. Přitom se použije znalosti objemu (n-1)-dimenzionálního řezu n-simplexu (n-1)-rovinou rovnoběžnou s podstavou.

Věta 2: Označme r, resp. R poloměr koule vepsané, resp. opsané pravidelnému n-simplexu. Pak je $R = n \cdot r$. Důkaz plyne přímo z věty 1, neboť r je vzdálenost těžiště k podstavě a R k vrcholu.

Věta 3: Označme S povrch n-mnohostěnu opsaného n-kouli o poloměru

r. Pak pro objem mnohostěnu platí $V = Sr/n$. Důkaz se provede rozřezáním mnohostěnu na simplexy s vrcholem ve středu koule, jejichž výška je r a jejichž objem umíme spočíst.

Věta 4: Součet čtverců tělesových úhlopříček n-rovnoběžnostěnu se rovná součtu čtverců hran rovnoběžnostěnu. n-rovnoběžnostěnem se myslí průnik n různoběžných vrstev (omezených dvojicemi rovnoběžných n-rovin). Důkaz: matematickou indukcí podle n. Rovnoběžnostěn v další dimenzi se stvoří z předchozího jeho zdvojením tak, že se posune původní rovnoběžnostěn do další dimenze.

TÉMA VI: CO JE UVNITŘ?

Řešení úvodní úlohy

Jak mnozí z Vás správně napsali, plné a prázdné těleso se liší velikostí momentu setrvačnosti. Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů vůči ose o je definován jako

$$I = \sum m_i r_i^2, \tag{1}$$

kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých bodů a r_i jsou jejich vzdálenosti od osy o. Pro tuhé těleso přejde tato suma v integrál, což však pro řešení úvodní úlohy není podstatné. Podstatné je, že duté těleso má hmotu rozloženou dále od osy své symetrie, a proto má vůči ní větší moment setrvačnosti než těleso plné při jejich stejné hmotnosti M. V definici I se totiž vyskytuje kvadrát vzdálenosti od osy o. Snadný způsob jak odlišit např. dutý válec od jinak stejného plného válce je pustit je po nakloněné rovině dolů a sledovat, který se valí rychleji, popř. který dojede dřív dolů. Dutý válec má větší I, a proto se na jeho roztočení spotřebuje více energie a zbude mu méně na translační pohyb. Plný válec se tedy valí rychleji.

Někteří z vás se pokusili popsat valení tělesa po nakloněné rovině také kvantitativně. Dá se přitom buď vyjít ze zákona zachování energie nebo z momentové věty (pro moment sil vůči bodu D, kde se válec dotýká roviny)

$$RMg \sin\alpha = (I + MR^2) \cdot \frac{a}{R}.$$

K momentu I kolem osy válce jsme zde museli přičíst ještě moment těžiště válce vůči bodu D. Přitom R je poloměr válce, g tíhové zrychlení a α je sklon nakloněné roviny. Snadno vyjádříme zrychlení válce

$$a = \frac{MgR^2 \sin\alpha}{I + MR^2}.$$

Dále uvedu stručný přehled toho, na co jste přišli. Zájemci o podrobnější informace doufám přijedou stejně jako autoři na soustředění, kde bychom mohli případné nejasnosti vyjasnit.

Doc. Tomáš Bárta nalezl podmínku pro to, aby válec po nakloněné rovině neklouzal. Vychází z toho, že třecí síla $f \cdot R$ (R je kolmý tlak, jímž působí válec na podložku, f koeficient smykového tření) musí být větší než síla, jež způsobuje zrychlení a. Musí tedy platit

$$Mg\sin\alpha - Ma = \frac{MIg\sin\alpha}{I + MR^2} < Mgf\cos\alpha,$$

a tedy

$$f > I\mathrm{tg}\alpha/(I + MR^2).$$

Pokud tato podmínka není splněna, válec se bude pohybovat se zrychlením $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ a otáčet se s úhlovým zrychlením $\varepsilon = mgf\cos\alpha/I$.

bcl. Daniel Klír udělal experiment na určení poloměru dutiny v dutém válci na základě měření doby valení válce po nakloněné rovině. Ze známých vztahů umíte jistě určit zrychlení pomocí této doby a ujeté dráhy s. Platí $a = 2s/t^2$. Z výše uvedeného vztahu pro zrychlení zase určíme I pomocí a. Vše co ještě potřebujeme pro určení poloměru R_1 dutiny ve válci je vzorec pro moment setrvačnosti dutého válce. Ten odvodil Dan pomocí integrace

$$I = \rho\int_{R_1}^{R} 2\pi x h x^2 dx = \frac{1}{2}\pi(R^2 - R_1^2)l\rho(R^2 + R_1^2) = \frac{1}{2}M(R^2 + R_1^2).$$

Dr. Tomáš Bárta se nepříliš úspěšně pokoušel počítat co se děje s malou kuličkou zavřenou v dutém válci valícím se po nakloněné rovině. O něco úspěšnější byl s popisem valení gumové kostky po vodorovné rovině. Předpokládal, že kostka neklouže po podložce a že odrazy od podložky jsou dokonale pružné. Moment setrvačnosti krychle vůči její hraně určil tak, že si nasekal krychli na $n \times n$ malých hranolků a ty považoval za body.

$$I(n) = \frac{M}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 + j^2)\cdot\frac{d^2}{n^2} = \frac{Md^2}{3n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$I = \lim_{n\to\infty} I(n) = \frac{2}{3}md^2$$

Délka hrany krychle je zde označena jako d. Výpočet uvedených sum byl proveden na základě znalosti vzorce $\sum i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, který můžete najít v tabulkách nebo dokázat matematickou indukcí. Pohybovou rovnici pro kostku, kterou Tomáš našel nebudu psát, protože stejně nejde snadno vyřešit.

Skutečně pěkně si s úlohou pohrál *bcl Aleš Návrat.* Jednak důkladně nastudoval teorii tenzoru setrvačnosti, který je zobecněním momentu setrvačnosti a spočetl momenty setrvačnosti pro mnohá tělesa (kouli, válec k různým osám, kužel, krychle, rotační paraboloid). Dále si uvědomil (stejně jako Dan Klír), že výše uvedený vzorec pro zrychlení válce (či koule) na nakloněné rovině nezávisí na R ani na M, protože jak pro válec tak pro kouli je $I/MR^2 = konst.$ nezávislé na M i na R. Zrychlení koberce, který se odmotává dolů po nakloněné rovině je tedy konstantní v čase, ačkoli se mění poloměr odmotávající se role i její hmotnost. Zrychlení závisí jen na sklonu roviny a na tíhovém zrychlení $a = 2g\sin\alpha/3$. Poslední úlohou, kterou Aleš řešil, byl obtížný úkol Honzy, který měl poznat ve kterém ze dvou kamenných válců je zakletá princezna a ve kterém kouzelník. K tomu účelu aproximoval tělo černokněžníka i princezny válci, koulemi, krychlemi, kuželem a rotačním paraboloidem. Po obtížném výpočtu, který Honza, jenž nebyl tak hloupý jak se tradovalo, hladce zvládl, se ukázalo, že princezna má větší moment setrvačnosti. Honza tedy pustil oba válce z kopce a z toho pomalejšího vysvobodil princeznu, bez rizika setkání se starým nerudným černokněžníkem. Z Alešových výsledků uvedu alespoň vzorce co mu integrací vyšly pro moment setrvačnosti koule $I = \frac{2}{5}mr^2$, válce vzhledem k ose symetrie $I = \frac{1}{2}mr^2$ a kužele vzhledem k ose symetrie $I = \frac{3}{10}mr^2$.

TÉMA VII: AKUSTIKA

Úvodní úloha

Od doc. Matouše Jiráka

Toto téma nabízí široký prostor jak teoretikům, tak experimentátorům. Zajímavé by také bylo dozvědět se něco o hudbě — které tóny ladí, jak jsou vytvořeny stupnice, akordy.... Zde uvedu stručný seznam toho, co již bylo uděláno a jinak navrhuji nechat příspěvky do konference.

- Kytara. Zvuk vzniká chvěním strun, které je přenášeno na tělo kytary. Výška tónu závisí na délce a tloušťce struny, hustotě materiálu a síle, kterou je napínána. Základní frekvence struny je rovná $\frac{v}{2l}$, kde l je délka struny a v je rychlost šíření vlny strunou. Rychlost $v = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$. bcl. Pavel

Franc a bcl. Pavol Habuda se pokoušeli tento vzorec odvodit, ale protože jsem postupu nerozuměl (M. V.), chtěl bych nechat odvození až na konferenci. Pokud byste chtěli nad kmitáním struny přemýšlet (připravit si příspěvek) můžete zkusit rozmyslet, jak se bude měnit tvar struny, když ji za prostředek trochu vytáhnu a pak pustím. (Na počátku bude mít tvar vprostřed zlomené čáry a bude v klidu.) Kromě základní frekvence může struna kmitat i na frekvencích, které jsou jejím celistvým násobkem. Kmitání struny je většinou složením kmitů základních i vyšších harmonických. To souvisí s barvou tónu.

- V píšťale a flétně je zvuk způsoben kmitáním zvukového sloupce. Prouděním kolem hrany vznikají turbulence a rezonancí je zesílen jeden konkrétní tón. U otevřené píšťaly bude vlnová délka tónu rovná dvojnásobku délky píšťaly u zavřené čtyřnásobku. Nikomu se nepodařilo vysvětlit, jak funguje flétna, t.j., jak souvisí vzdálenost odkrytých dírek s výškou tónu. Možná je tento problém příliš složitý, pak by ale možná bylo zajímavé zjistit, jak lidé přišli na to, kde mají otvory být. Mohli to nějak dělat zkusmo, ale jak postupovat, aby se správné rozložení dírek našlo co nejdříve? Vždyť posunutí jednoho otvoru ovlivní různě více tónů.

- Při foukání přes hrdlo láhve vzniká zvuk podobně jako v píšťale. Jinak je tomu rozechvívání kroužením prstem po okraji skleničky. Podrobněji se tímto zabýval dr. Václav Račanský. Je třeba aby sklenka i prst byly odmaštěné. Prst neklouže po okraji úplně rovnoměrně. Sklo se vždy trochu napruží a pak povolí. Pan doktor dělal experimenty a zjistil, že pokud je vody ve skleničce méně, je tón vyšší. Také si všiml malých vlnek, které se tvořily při stěnách sklenky. Hřbety vln byly kolmé ke stěnám.

- Nad Pythagorovým problémem se v příspěvku zamýšlel pouze dr. Dan Klír. Domnívá se, že výška tónu nezávisí jen na hmotnosti, ale i na tvaru, materiálu a rychlosti dopadu. Tyto údaje o pěti kladivech se zřejmě nedochovaly, a tak by možná bylo zajímavé zamyslet se nad tím, jaká asi byla ta čtyři kladiva, co ladila (stejný materiál, geometricky podobná... atp., nevím jaká) a vysvětlit proč ladila. Zajímavé by možná bylo zjistit, jak se dělají zvony. Je to snad podobný problém. Zní-li více zvonů najednou, musí ladit (může z nich být i sestavená nějaká zvonkohra). Jak se mají zvony odlít, aby ladily? Jak se ladí zvony?

- Na odlišení duté kuličky navrhl dr. Dan Klír porovnat hlasitost dopadu. Domnívá se, že dutá kulička hozená ze stejné výšky by měla být tišší, protože je lehčí a menší energie se může přeměnit na zvuk.

- Barva tónu. Zatímco výška závisí na periodě vlnění, barva závisí na tvaru vlny. Tón s určitou barvou je možné získat složením tónů se sinusovým průběhem s frekvencemi, které jsou celočíselnými násobky tónu základního. Souvisí to s Fourierovými řadami.

- O měření výšky tónu toho mnoho vypracováno nebylo, pouze dr. Morf popisoval princip ladičky uveřejněné v Amatérském rádiu.

- O zvuku vydávaném při otáčení destičkou na lanku většina badatelů soudila, že je to svištění vzduchu proudícího kolem destičky. bcl. Jan Mysliveček se domnívá že se tu uplatní i Dopplerův efekt — když se destička od nás vzdaluje, je tón nižší než když se přibližuje. Zajímavý příspěvek zaslal bcl. Tomáš Klír (Odvolává se na habilitační spis V. Strouhala: Ueber eine besondere Art der Tonerregung, Vimperk 1878). Píše, že prouděním vzduchu kolem destičky a drátu vzniká třecí tón. Tím je rozechvívána struna s jedním koncem pevným (ten držíme) a druhým téměř pevným (hmotnost destičky je totiž mnohem větší, než hmotnost struny). Tón by tedy závisel nejen na rychlosti s kterou vzduch proudí kolem destičky, ale i na délce struny. Nemohu posoudit do jaké míry má autor pravdu, ani nevím jak má zvuk znít. Bylo by dobré, kdyby se podařilo nějakému experimentátoru nástroj vyrobit, nebo alespoň nahrát zvuk z filmu Krokodýl Dundee.

REKREAČNÍ ÚLOHY (ŘEŠENÍ):

1. Úloha — Plástev Medu

Mohou nastat tyto případy:

- Některé kružnice jsou celé uvnitř. Každá má obvod 2π.

- Kružnice leží u vrcholu. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je násobkem π, a tedy součet oblouků při vrcholech je násobkem π.

- Kružnice je přeťata stranou mnohoúhelníka. Plástev je středově souměrná podle středu kterékoliv strany. Pokud bude nějaká kružnice samodružná (střed kružnice na středu strany) bude uvnitř mnohoúhelníka ležet půlka s obvodem π. Ke každé jiné kružnici najdu středově souměrnou takovou, že uvnitř leží taková část jaká u té prvé leží vně. Součet oblouků příslušných této dvojici je tedy 2π.

Díky symetrii můžeme i obsah mnohoúhelníka poskládat z šestiúhelníků. Číslo n ze vztahu $C = n\pi$ udává, kolikrát je obsah mnohoúhelníku větší než obsah půlky šestiúhelníčku.

2. Úloha — Spojené písty

označení:

p	tlak vzduchu ve válci na počátku
$p_1,\ p_2$	tlaky v prvním a druhém válci po přepuštění
p_a	atmosférický tlak
n	látkové množství vzduchu ve válci
$n_1,\ n_2$	látková množství v prvním a druhém válci po přepuštění ($n = n_1 + n_2$)
S	obsah průřezu válců
h	původní výška pístu M_1 nad dnem válce

Mezi písty a stěnami válců samozřejmě nemohou být mezery, to by se tam neudržel žádný tlak, na obrázku v zadání jsou malé mezery pouze z důvodu přehlednosti. Kohout K nemusíme nechat otevřený, můžeme přepustit pouze část plynu.

Zkusme nejprve zjistit, jaké by mělo být rozdělení plynu do válců, aby byly v rovnovážné poloze ve stejné výšce. Pak se zkusíme zabývat tím, jestli se po otevření kohoutu do tohoto stavu dostaneme. Uvažujeme, že stěny válců nejsou izolované a plyn má stále stejnou teplotu T.

Na každý píst působí dolů tíhová síla $M_1 g$, resp. $M_2 g$ a síla způsobená atmosférickým tlakem $p_a S$. Nahoru pak tlaková síla plynu pod pístem $p_1 S$, resp. $p_2 S$ a tahová síla lanka. Protože je lanko v klidu, musí táhnout obě závaží nahoru stejně velkou silou; označme její velikost F. Síla F musí být nezáporná, lanko nemůže píst tlačit. Síly působící na píst jsou v rovnováze, platí:

$$M_1 g + p_a S = p_1 S + F, \quad M_2 g + p_a S = p_2 S + F. \tag{2}$$

Je-li lanko natažené, pak je součet výšek pístů roven stále h (lanko se neprotahuje). Zdá se, že pokud by bylo závaží M_2 dost lehké a my přepustili trochu plynu, mohlo by se M_2 o hodně zvednout a M_1 klesnout jen o trochu. Pak by lanko nebylo natažené a součet výšek by tedy nemusel být h. Zkusme nejprv předpokládat, že natažené bude. Pak je součet výšek h a oba písty jsou ve výšce $\frac{h}{2}$. Pod každým je objem $S\frac{h}{2}$ a ze stavové rovnice tedy:

$$p_1 S\frac{h}{2} = n_1 RT, \quad p_2 S\frac{h}{2} = (n - n_1)RT. \tag{3}$$

Dosazením za $p_1 S$ z 3 do 2 dostáváme

$$M_1 g + p_a S = \frac{2n_1 RT}{h} + F, \quad M_2 g + p_a S = \frac{2(n - n_1)RT}{h} + F, \tag{4}$$

což je soustava dvou lineárních rovnic pro neznámé n_1, F. Sečtením, resp. odečtením rovnic a úpravami dostaneme řešení:

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{hg}{4RT}(M_1 - M_2), \tag{5}$$

$$F = \frac{M_1 + M_2}{2}g + p_a S - \frac{nRT}{h} = \frac{M_1 + M_2}{2}g + (p_a - p)S \tag{6}$$

(na úpravu F jsme využili stavové rovnice).

Nyní se musíme vrátit k našemu předpokladu. Bude-li $(M_1 + M_2)g > (p - p_a) \cdot 2S$ a $n_1 \in \langle 0, n\rangle$, pak lanko bude napnuté ($F > 0$), a n_1 udává, kolik plynu musíme nechat v prvním válci, aby byly písty stejně vysoko. Bude-li první podmínka splněná, ale $n_1 < 0$, bude to znamenat zhruba to, že píst M_2 je o tolik těžší než M_1, že plyn není možné rozdělit tak, aby písty byly stejně vysoko. Situace $n_1 > n$ nemůže, vzhledem k tomu, že na počátku je první píst nahoře, nastat.

Bude-li $(M_1 + M_2)g < (p - p_a) \cdot 2S$, pak lanko napnuté nebude a my musíme sestavit jiné rovnice. Ve vzorci 2 bude $F = 0$:

$$M_1 g + p_a S = p_1 S, \quad M_2 g + p_a S = p_2 S. \tag{7}$$

Označme výšku, ve které jsou písty stejně vysoko h' (nemusí to být h/2). Do 7 můžeme dosadit ze stavové rovnice

$$p_1 S = \frac{n_1 RT}{h'}, \quad p_2 S = \frac{(n - n_1)RT}{h'},$$

čímž dostaneme

$$M_1 g + p_a S = \frac{n_1 RT}{h'}, \quad M_2 g + p_a S = \frac{(n - n_1)RT}{h'}. \tag{8}$$

Soustava má řešení:

$$n_1 = \frac{M_1 g + P_a S}{(M_1 + M_2)g + 2p_a S} n, \tag{9}$$

$$h' = \frac{nRT}{(M_1 + M_2)g + 2p_a S}. \tag{10}$$

Zdálo se mi, že by mohlo jít z toho, jak vypadá rovnovážný stav na začátku (levý píst nahoře, pravý dole, lano napnuté) určit určit jestli bude na konci lanko napnuté nebo prověšené, ale (jak si můžete zkusit) nejde to.

Zatím jsme zjistili, jak rozdělit plyn do válců tak, aby závaží byla ve stejné výšce. (V případě, kdy nám vyšlo $n_1 < 0$ to nejde.) My však chceme aby soustava do tohoto stavu přešla po otevření kohoutku sama, t.j., abychom nemuseli plyn přečerpávat. Po otevření kohoutu začne plyn proudit z místa vyššího tlaku do místa s tlakem nižším a není tedy možné, aby v konečné poloze byl tlak v pravém (původně prázdném) válci větší než ve válci levém. To znamená, že při stejné výšce pístů nemůže být množství plynu v pravém válci n_2 větší než množství v levém n_1. T.j., z rovnic 5 a 9, musí být $M_1 > M_2$.

Ještě mě napadá jeden problém. Plyn je po otevření kohoutu přiveden pod píst M_2 tenkou hadicí. Pokud by tento píst dosedal těsně na dno válce, vzduch by pak nemohl tlačil na celý píst, ale jen na část nad otvorem hadičky. Pak by bylo potřeba, aby i menší síla, kterou by plyn takto působil, alespoň trošku s pístem hnula. Pokud válec nedosedá těsně, plyn se může mezerami dostat na celou plochu a podmínka $M_1 > M_2$ snad stačí.

3. Úloha — Problémy na kosmické lodi

Protože v zadání úlohy nebylo zcela jednoznačné, co se má vlastně spočíst, bodovali jsme shovívavě a spíše správnost než úplnost vašich úvah. V autorském řešení uvádíme trochu podrobnější rozbor situace.

Nejprve se budeme zabývat drahou kosmické lodi obecně. Podle Keplerových zákonů (ty platí nejen pro oběh planet, ale pro obecný pohyb malého tělesa v gravitační poli o hodně hmotnějšího centra) bude kosmická loď (dále jen loď) obíhat po eliptické dráze. Parametry této elipsy se dají určit na základě znalosti dvou veličin. První z nich je celková mechanická energie vztažená na jednotku hmoty

$$\epsilon = \frac{E}{m} = -\frac{\kappa M}{r} + \frac{1}{2}v^2 \tag{11}$$

a druhým moment hybnosti na jednotku hmoty vůči gravitačnímu centru (střed Země)

$$l = L/m = rv_t. \tag{12}$$

Zde M resp. m je hmotnost Země resp. lodi a v_t je průmět vektoru rychlosti do směru kolmého k průvodiči ze středu Země. Ačkoliv vzdálenost r od středu Země a rychlost v lodi se při obíhání po elipse neustále mění (v případě kruhové dráhy ne), veličiny ϵ a l zůstávají konstantní. Z parametrů dráhy nás nejvíce budou zajímat vzdálenosti r_1, r_2 nejbližšího a nejvzdálenějšího bodu dráhy (tzv. perigeum a apogeum).[1] V perigeu i v apogeu platí $v = v_t$ a tedy $l = rv$. Z této rovnice můžeme vyjádřit r pomocí v a dosazením do (11) a drobnou úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro r

$$\epsilon r^2 + \kappa M r - \frac{1}{2}l^2 = 0.$$

Řešením této rovnice jsou vzdálenosti perigea a apogea od středu Země

$$r_{1,2} = -\frac{\kappa M}{2\epsilon} \pm \sqrt{\left(-\frac{\kappa M}{2\epsilon}\right)^2 + \frac{l^2}{2\epsilon}}. \tag{13}$$

Pro kruhovou dráhu je samozřejmě výraz pod odmocninou nulový, tj.:

$$r_1 = r_2 \equiv r_0 = -\frac{\kappa M}{2\epsilon_0}. \tag{14}$$

Přitom jsme r_0, ϵ_0 a l_0 označili parametry původní kruhové dráhy.

Předpokládejme, že vypuštěním odpadu se původní hodnoty ϵ_0 a l_0 změnily o $\Delta\epsilon$ a Δl. Dosazením hodnot $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ a $l = l_0 + \Delta l$ do rovnice (13) snadno zjistíme parametry nové dráhy.

---

[1] Můžete si zkusit jak z těchto veličin vypočíst např. velkou poloosu dráhy, excentricitu resp. dobu oběhu. Jde jen o jednoduché geometrické úvahy resp. použití Keplerových zákonů

Nejprve zjistíme jakou rychlostí ν opouští kapalina kosmickou loď. Uvnitř lodi je tlak p_a a venku je vakuum $p = 0$. Platí tedy Bernouliho rovnice ve tvaru

$$p_a = \frac{1}{2}\rho\nu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu = \sqrt{\frac{2p_a}{\rho}}, \tag{15}$$

kde ρ značí hustotu vypouštěné kapaliny.

Jak se tedy změní energie ϵ a moment hybnosti l lodi? Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m\underline{v_0} = (m-\mu)\underline{v} + \mu\underline{\nu}, \tag{16}$$

kde $\underline{v_0}$, $\underline{v}$ resp. $\underline{\nu}$ je původní, konečný vektor rychlosti lodi resp. odpadu a μ je hmotnost odpadu. Podle definice je

$$l = r_0 v_t = r_0 \frac{m v_0 - \mu\nu_t}{m-\mu} = l_0 \left(1 - \frac{\mu}{m}\frac{\nu_t}{v_0}\right)\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^{-1}, \tag{17}$$

kde jsme využili zákon zachování hybnosti (16). Podobně

$$\epsilon = -\frac{\kappa M}{r_0} + \frac{1}{2}v^2 = \epsilon_0 \left(2 - \left[1 + \frac{\mu^2}{m^2}\frac{\nu^2}{v_0^2} - 2\frac{\mu}{m}\frac{\nu}{v_0}\cos\alpha\right]\left[1-\frac{\mu}{m}\right]^{-2}\right). \tag{18}$$

Při poslední úpravě jsme využili vzorce $\epsilon_0 = -v_0^2/2$ platného pro kruhovou dráhu a zavedli jsme úhel α mezi vektory $\underline{v_0}$ a $\underline{\nu}$. Těmito vztahy bychom mohli skončit, protože už nyní známe hodnoty l a ϵ nové dráhy na základě vztahu (13) i parametry dráhy. Ještě se zmíníme o speciálních případech.

Pokud vypustíme odpad do směru kolmo na okamžitou rychlost $\underline{v_0}$, bude $\nu_t = 0$ a $\cos\alpha = 0$ a předchozí vzorce se zjednoduší na

$$l = l_0\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^{-1}, \tag{19}$$

$$\epsilon = \epsilon_0\left(2 - \left[1 + \frac{\mu^2}{m^2}\frac{\nu^2}{v_0^2}\right]\left[1-\frac{\mu}{m}\right]^{-2}\right). \tag{20}$$

Všimněte si, že tvar výsledné eliptické dráhy vůbec nezáleží na tom, jestli vypustíme odpad směrem k Zemi, od Země nebo kolmo na tento směr. Bude na tom ovšem záviset prostorová orientace této elipsy.

Další speciální případ je že odpad vypustíme po a nebo proti směru letu. V tom případě je $\nu_t = \pm\nu$ a $\cos\alpha = \pm 1$. Tyto hodnoty můžete opět využít k výpočtu dráhy lodi. V případě vypuštění opadu proti směru dráhy se perigeum sníží a apogeum bude r_0 a v případě vypuštění po směru se naopak zvýší apogeum a perigeum bude r_0.

ADRESA SEMINÁŘE:

M&M – B211
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha 8, Libeň