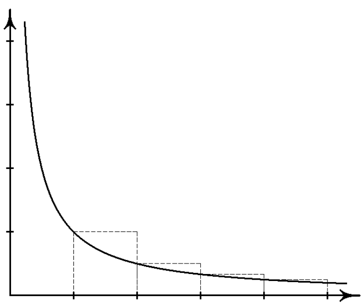
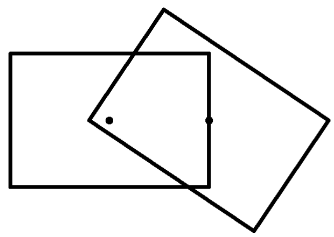
Cihličky

dr Tomáš Brauner

Mám zde pár poznámek k článku doc. Matouše Jiráka a bcl Roberta Špalka z minulého čísla. Nejprve dokážu, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{l}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = +\infty$. Názorný je následující postup (viz obrázek): Vidíme, že $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{i}$, což se rovná obsahu vyznačených obdélníčků. Ten je větší než $\int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}$, takže $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} > \ln(n+1)$. Funkce $\mathrm{f}(n) = \ln(n+1)$ však pro $n\to\infty$ roste nade všechny meze — ke každému číslu k totiž mohu najít takové n_0, že $\ln(n_0+1) > k$, stačí vzít např. $n_0 = e^{k+1}-1$. Tím je tedy žádaný důkaz podán.





Dále — těžko bude někdo dokazovat, že daný postup stavění cihliček je nejlepší, tj., že se tak s n cihličkami dostanu nejdále. Ukážu teď, jak lze nějakou tu cihličku uspořit, ale netvrdím, že můj způsob je nejlepší.

Délku cihličky označme a, šířku b. Přesah můžeme oproti předchozímu řešení zvětšit tím, že vrchní cihličku otočíme, tak, jak je to znázorněno na obrázku vpravo. Přesah pak bude $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, pootočením získám $\Delta_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)$. Spodní cihličku mohu podobně natočit, tak, aby těžiště horních $(n-1)$ cihliček bylo nad rohem spodní cihly. Tímto získáme $\Delta_2 = \sqrt{a^2+b^2}-a$. Celkem pak $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)$. Otočením pouhých dvou ve stavbě z deseti cihliček se dostaneme dál, než když použijeme o 23 cihliček více a stavíme podle původního řešení. ($\frac{3}{2}a(\sqrt{2}-1) < \frac{a}{2}(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{33})$). Je to způsobeno tím, že pro větší n je každá následující cihlička posunuta jen nepatrně. Pokud neměříme pouze posunutí ve směru osy x, zvětšíme celkové posunutí posouváním každé cihličky též ve směru osy z: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots)$.

literatura: E. Humbal, E. Pelantová: O posloupnosti harmonických čísel, MF Rozhledy 4/1995

(Tam najdeme zajímavý odhad: $\ln(n+1) < \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} < \ln n + 1$.)

Cihličky

doc. Matouš Jirák

1. Součet řady

Doplňuji důkaz, že součet řady $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}$ je pro $i \to \infty$ nekonečný.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} <$$

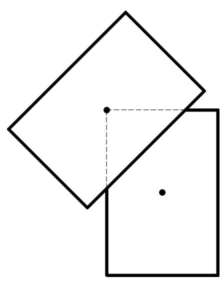
$$< 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$

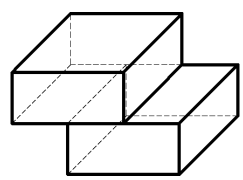
2. Maximální plocha průmětu, průmět do kterého lze vepsat největší kružnici.

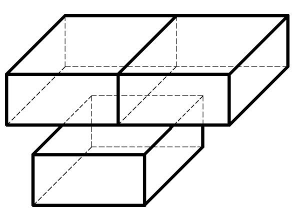
Pozn. red.: Doc. Matouš Jirák se snažil na cihličku, která ležela na podložce postavit dalších n−1 cihliček tak, aby plocha průmětu do roviny podložky, resp. poloměr kružnice vepsané do průmětu byl maximální. Úlohu řešil postupně pro n=1 až 10 pro obecné rozměry cihliček a potom uvádí řešení pro speciální cihličky s rozměry krabičky od sirek (t.j. a=5,2 cm b=3,5 cm). Uspořádání cihliček totiž významně závisí na rozměrech. My z technických důvodů publikujeme pouze výsledky pro uvedený speciální případ.

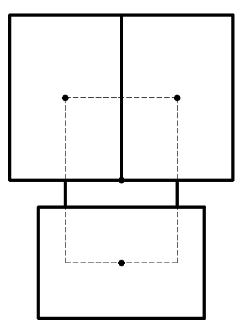
V tabulce jsou maximální dosažené obsahy S_n a maximální poloměry r_n. Uspořádání která nejsou zřejmá jsou vyobrazena níže; je-li pro maximální obsah uspořádání jiné než pro maximální poloměr, je nakresleno nejdříve to s maximálním obsahem.

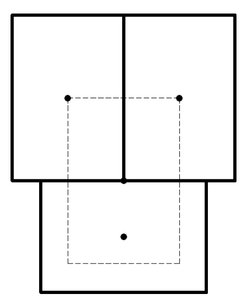
n	S_n[cm^2]	r_n[cm]
1	18,2	1,75
2	33,34	2,6
3	48,475	2,8945
4	57,58	3,25(?)
5	72,8	3,677
6	72,8	3,677
7	72,8	3,677
8	81,9	4,375
9	109,2	5,2
10	≥109,2	≥5,2

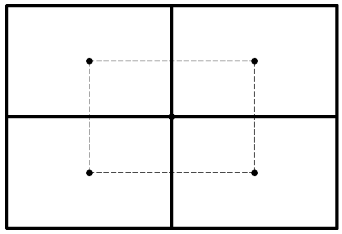


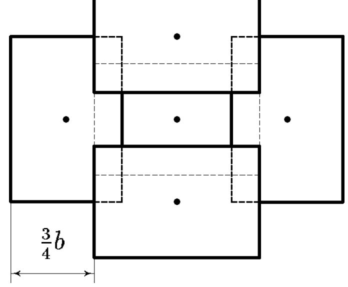


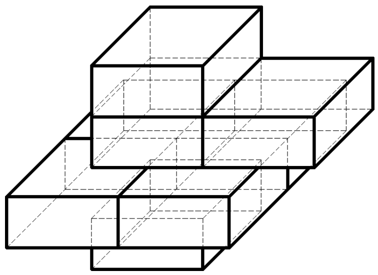


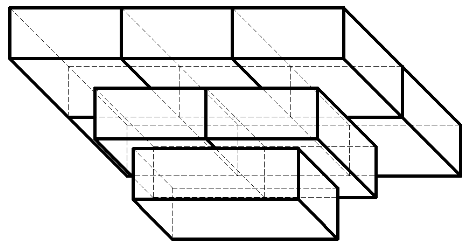










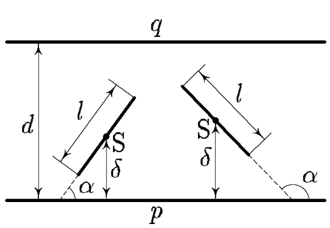


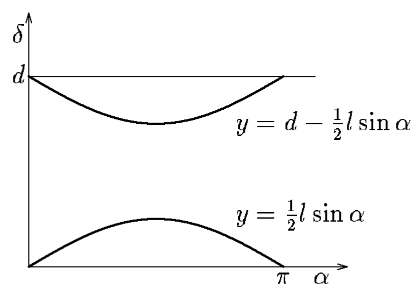
Hod jehlou

Matouš Jirák

K článku Tomáše Braunera, který počítal pravděpodobnost protnutí čar vzdálených $2r$ sirkou délky r, doplňuji, že lze spočítat pravděpodobnost pro obecnou vzdálenost čar větší než r takto:

Nechť $d\ldots$ vzdálenost čar
$l\ldots$ délka jehly





Jehla dopadne náhodně na ubrus, jehož vzor je tvořen řečenými čarami. V polovině své délky má jehla střed S, vdálenost tohoto středu od čáry p označme δ. Vzdálenost středu od q je potom $(d - \delta)$. Uvažujeme-li, že jehla a čára (přímka)

p spolu svírají úhel α orientovaný zprava doleva, snadno již vyjádřím podmínku, kdy jehla jednu z linek křižuje. K tomu dojde právě tehdy, když:

$$(\frac{1}{2}l \cdot \sin\alpha > \delta) \quad \bigvee \quad [\frac{1}{2}l \cdot \sin\alpha) > d - \delta]$$

.

Když si nakreslíme graf $y = \frac{1}{2}l \cdot \sin\alpha$ a $y = d - \frac{1}{2}l \cdot \sin\alpha$ na intervalu $\alpha \in (0, \pi)$ (neboť jiných hodnot α nabývat nemůže a všech hodnot z tohoto intervalu nabývat smí), vidíme, že předchozí nerovnosti jsou splněny pro body ležící ve vyšrafované části grafu. Z geometrické pravděpodobnosti víme, že poměr obsahů vyšrafovaných částí ku ploše (πd), do které je graf vepsán, udává pravděpodobnost p, že jehla „protne“ čáru.

Plochu nad křivkou dostaneme integrací:

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}l\sin\alpha = [-\frac{1}{2}l\cos\alpha]_0^\pi = \frac{1}{2}l - (-\frac{1}{2}l) = l$$

Druhá křivka má stejný tvar, obsah útvaru nad ní je stejný. Pravděpodobnost p je tedy

$$p = \frac{2l}{\pi d}.$$

Tuto pravděpodobnost vyjádřeme počtem příznivých jevů m, kdy sirka protne čáru, ku počtu n všech jevů (počtu hodů jehlou):

$$p = \frac{m}{n}$$

Porovnáním předchozích dvou vztahů dostáváme:

$$\frac{2l}{\pi d} = \frac{m}{n}$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme experimentálně zjistit hodnotu čísla π, avšak s přesností omezenou tím, jak změříme délku jehly, vzdálenost čar (jak přesně rýsujeme) a jak dlouho u pokusu vydržíme.

Já jsem si řekl, že číslo π zná každý na spoustu míst, ale že by bylo zajímavé, tímto pokusem poměrně přesně změřit délku jehly, narýsujeme-li „prkna“ dostatečně přesně.

Popíšu teď dva pokusy, které jsem provedl.

Hod párátkem.

Jsa znechucen skličujícím faktem, že všechny jehly jsou zmagnetované a nemaje tenčího předmětu úsečce se svým tvarem přepodobňujícího, užil jsem svým tesákem upravené párátko délky 5.96 cm k hodu na podlahu — papír, na němž načrtnuty dle pravítka pečlivě ve vzdálenostech 10 cm dle nejlepšího vědomí a svědomí čáry byly. Závěr: párátko nejde zmagnetovat, avšak po 1200. hodu jsem zjestil, že dochází k obrušování. Párátko se během 2000 pokusů zkrátilo na 5,90 cm. Neblahý to materiál!

Mohu-li považovat l $\approx$ 5,9 cm, pak hodnota π získaná pokusem (*celkem provedeno 2000 pokusů, tabulku výsledků nepřetiskujeme — pozn. red.)*

$$\pi = \frac{2l \cdot n}{m \cdot d} \approx 3,087,$$

což se od skutečné hodnoty π liší asi o 2%. Pokus zcela neuspokojivý. Pouze jsem se přesvědčil, že touto metodou (s něčím jiným než s párátkem) lze číslo π získat.

Hod jehlou

Protože při pokusech s párátkem jsem provedl celkem 2000 dřepů s nevalným výsledkem, rozhodl jsem se, že přípravě dalšího pokusu věnuji větší péči:

1. Papír 1 $\times$ 2 m, aby nedocházelo k okrajovým jevům.
2. Použil jsem jehlu, avšak odmagnetoval jsem ji přidržením nad ohněm v kleštičkách na cukr.
3. Pod papír jsem našel rovnou podlahu.
4. Jehlu jsem uchopoval důsledně za špičku a pouštěl tak, aby padala orienovaná vertikálně a od papíru se odrazila naprosto náhodným směrem.

Provedl jsem 1200 pokusů hodu jehlou. Zkusme ze zjištěných hodnot určit délku jehly $l = \frac{m}{n}\frac{\pi d}{2}$. *(Tabulky pokusů autor přikládá, ale my je nepřetiskujeme — pozn. red.)*

$m = 510$ …počet pokusů s příznivým výsledkem
$n = 1200$ …počet všech pokusů
$\pi \doteq 3.1415926536 \qquad d = 10$ cm

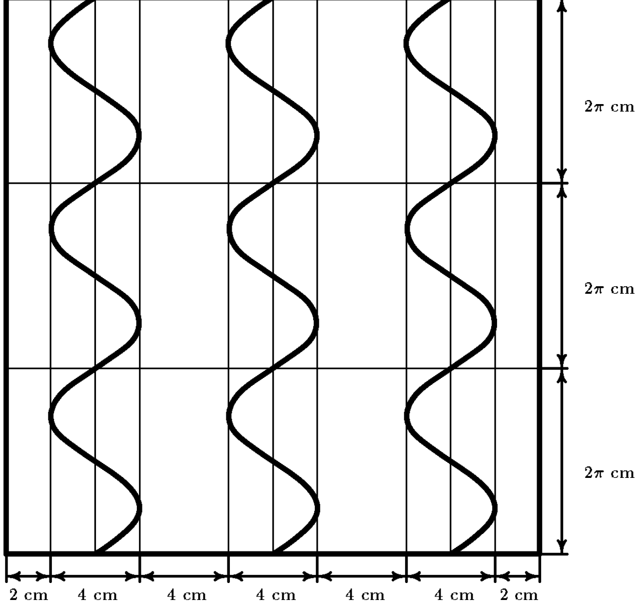
Pro tyto hodnoty je $l = 6,6759$ cm $\doteq 6,68$ cm.

Ve skutečnosti měla jehla délku $l = 6,625$ cm (měřeno posuvným měřítkem s noniem). Přesnost je poměrně velká, uvažme, že absolutní chyba $\Delta l = 0,005$ cm, relativní chyba $\delta_l = 0,008$ (tedy 0,8%), což je velmi přesné na to, že jsme provedli pouze 1200 pokusů.

Sinusoida

Rozhodl jsem se provést experiment, jehož teoretický výsledek neznám. Nechť se oň pokusí řešitelé.

Mějme obdélník 24 cm $\times$ 6π cm, do tohoto obdélníku vepišme tři sinusoidy $y = 2\sin\alpha$ dle obrázku.



Padne-li jehla těžištěm a jedním svým koncovým bodem do obdélníku, ptáme se na výsledek pokusu. Výsledek je kladný, protnula-li jehla některou sinusoidu alespoň v jednom bodě. Určete pravděpodobnost, s jakou jehla délky l protne některou sinusoidu.

Úlohu jsem řešil experimentálně. Výsledky pro různě dlouhé „jehly“ jsou uvedeny v tabulce. (l je délka jehly, $\sum$ je počet pokusů,$\sum\oplus$ počet pokusů s kladným výsledkem a $p = \sum / \sum\oplus$.) Jako jehly bylo pro délku 1,38 cm použito cvočku ze sešívačky, pro 3,24 cm jehly, pro 4,40 cm sirek a házela se několikrát celá krabička sirek najednou.

l [cm]	$\sum$	$\sum\oplus$	p[%]
1,38	96	13	13,5
3,24	96	35	36,5
4,40	101	51	50,5
5,37	96	57	59,4
6,625	96	69	71,9

l [cm]	$\sum$	$\sum\oplus$	p[%]
7,78	96	70	72,9
7,98	96	73	76,0
8,52	96	84	87,5
10,65	96	86	89,6

Stanovení čísla e

Matouš Jirák

Téma rozsypaných zápalek úzce souvisí s pravděpodobností. Ta však nemusí být jenom geometrická. Teorii pravděpodobnosti můžeme najít všude. Řekl jsem si, že pokusů s jehlou a ubrusem už bylo dost, a zkusil jsem najít experimentálně hodnotu základu přirozeného logaritmu e.

Platí, že poměr počtu všech permutací n prvkové množiny bez samodružných prvků k počtu všech permutací této množiny se pro $n \to \infty$ limitně blíží $\frac{1}{e}$.

Vzal jsem 20 kartiček očíslovaných 1, …20. Vždy jsem je promíchal a jejich náhodné pořadí porovnal s permutací $\{1,2,3,4, \ldots, 20\}$. Pokud alespoň jedno číslo v permutaci mělo sobě rovný index (t.j. jeho pořadí bylo stejné jako to číslo), napsal jsem závěr pokusu $\ominus$. Jinak jsem napsal $\oplus$. Pokusů bylo provedeno celkem 150. Poměr všech pokusů, u nichž jsem napsal $\oplus$, ku počtu všech pokusů se blíží $\frac{1}{e}$.

Spočtené hodnoty e po každých 30 pokusech:

č.	30	60	90	120	150
e	2,14	2,50	2,81	2,50	2,68

Závěr: experiment je v souladu s teorií.