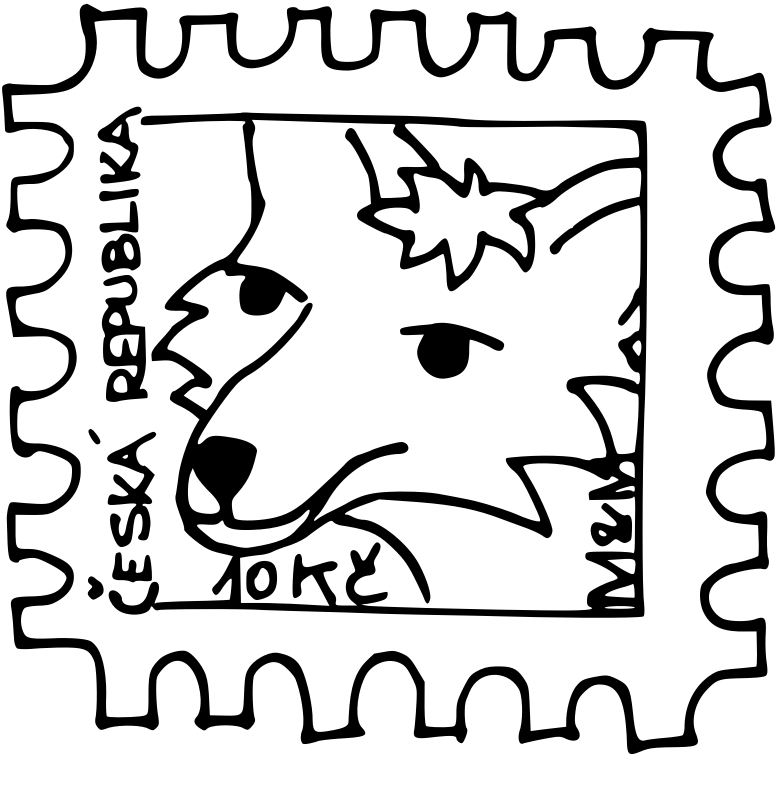
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XIX / Číslo 7-8



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí kamarádi,

držíte v rukou poslední číslo devatenáctého ročníku našeho časopisu.

Během roku jsme vyřešili soustu úloh, prošli si zajímavými články a sepsali několik příspěvků k tématkům. Řešení posledních dvou sérií najdete na následujících stránkách.

Vítězem tohoto ročníku se stal Dr.$^{\text{MM}}$ Filip Homza, kterému tímto srdečně gratulujeme.

Doufáme, že s námi zůstanete i v následujícím ročníku, kde vás čekají další zajímavá témata k zamyšlení a úlohy k řešení.

Příjemné čtení tohoto i dalších čísel vám přejí

organizátoři M&M

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Trojúhelníková tabulka (2b)

Zadání:

Do čtvercové sítě nakreslila holčička postupně kladná celá čísla. Do prvního sloupce prvního řádku nakreslila jedničku. Každé následující číslo nakreslila o jeden sloupec víc napravo a jeden řádek výš než předcházející. Pokud bylo předchozí číslo v prvním řádku, nakreslila následující místo toho do prvního volného políčka prvního sloupce. Část výsledné tabulky je vidět níže:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				

Určete pozici (číslo řádku a číslo sloupce), kam nakreslila číslo 2013.

Řešení:

Holčička psala čísla do diagonál. V prvním řádku jsou čísla, která také vyjadřují počet již napsaných čísel. Každá diagonála obsahuje o jedno číslo víc než předchozí. V n-té diagonále je napsáno n čísel a celkem je již napsáno $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ čísel.

Najdeme si nejmenší číslo v prvním řádku, které je větší než 2013. Hledáme nejmenší (přirozené) n, které splňuje

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 2013\,,$$

$$n = 63\,.$$

Číslo v prvním řádku a 63. diagonále (63. sloupci) je 2016. Hledané číslo 2013 je o 3 menší, takže bude ležet o 3 řádky níž a 3 sloupce více vlevo, tj. 4. řádek a 60. sloupec.

xlfd

Úloha 5.2 – Kružnice a lichoběžník (3b)

Zadání:

Kružnici K je vepsán lichoběžník $ABCD$. Nechť úhlopříčky AC a BD v tomto lichoběžníku jsou na sebe kolmé. Rovnoběžky $AB = a$ a $CD = c$ jsou průměry kružnic K_a a K_c. Spočti v závislosti na a a c obvod a obsah plochy, která je uvnitř kruhu K, ale zároveň vně kruhů K_a a K_c.

Řešení:

Nejprve zjistíme, jak situace popsaná v zadání vypadá. Lichoběžník vepsaný kružnici bude rovnoramenný.[1] Střed kružnice K, označíme jej S, bude ležet uvnitř lichoběžníku. To je tvrzení, které si zaslouží důkaz (přesto se v žádném z řešení neobjevil).

V případě obecného vepsaného lichoběžníku můžeme jednoduše najít protipříklad, kdy bude střed kružnice ležet mimo něj. Vezmeme si na pomoc další údaj ze zadání, úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že základna AB je delší než CD. Sestrojíme nad úsečkou AB pravoúhlý trojúhelník ABX tak, aby bod S ležel mimo něj. Vrchol X trojúhelníku je průsečík úhlopříček. Pokud padne vně kružnice (nebo přímo na kružnici), dostaneme spor (celý lichoběžník včetně průsečíku jeho úhlopříček musí ležet uvnitř kružnice, do které je vepsán).

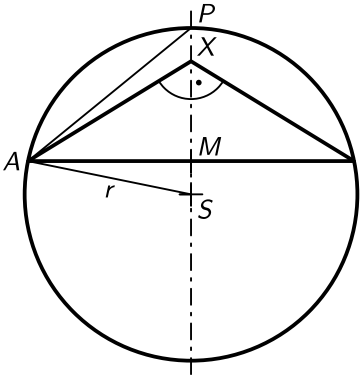
Označíme další body, jak je znázorněno na obrázku u5.2.1. Úhel AXB je pravý, takže $|\sphericalangle AXM| = 45°$. Délky úseček SA i SP jsou stejné – poloměr kružnice, r, a trojúhelník ASP je tedy rovnoramenný. Zřejmě platí $|\sphericalangle ASP| > 90°$, takže $|\sphericalangle SPA| < 45°$. Z obrázku je vidět, že musí platit $|\sphericalangle XAM| < |\sphericalangle PAM|$, a protože mají oba trojúhelníky společný pravý úhel u vrcholu M, tak také $|\sphericalangle MXA| > |\sphericalangle MPA|$.

Tím jsme se ale dostali ke sporu. Protože potřebujeme $|\sphericalangle AXM| = 45°$ a $|\sphericalangle SPA| < 45°$, nemůže platit $|\sphericalangle AXM| > |\sphericalangle APM|$. Má-li bod X ležet uvnitř kružnice, musí být střed S uvnitř lichoběžníku. (Tím se obrátí nerovnost $|\sphericalangle ASP| > 90°$ a spor zmizí.) Pokud by byla strana AB přímo průměrem kružnice K, body C a D splynou a místo lichoběžníku budeme mít jen trojúhelník.

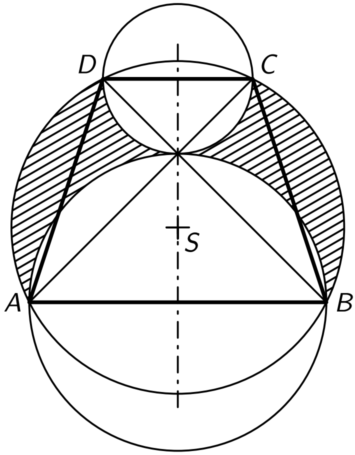
Zbývají kružnice K_a a K_b. Tyto kružnice budou Thaletovou kružnicí nad úsečkou AB, respektive CD. Průsečík úhlopříček, X, tvoří pravoúhlý trojúhelník jak nad stranou AB, tak i CD. Obě kružnice tedy budou procházet bodem X, který bude jejich jediným společným bodem. Na obrázku u5.2.2 vidíme celkovou situaci. Vyšrafovaná oblast je plocha, jejíž obsah a obvod hledáme.

K odvození samotných výrazů pro obsah a obvod se nám bude hodit vztah mezi středovým a obvodovým úhlem v kružnici. Pokud na kružnici zvolíme

[1] Střed kružnice musí ležet na ose každé její sečny, protože vzdálenost od středu k oběma krajním bodům sečny je stejná, právě poloměr kružnice. Osy strany AC a BD, které jsou sečnami, musí mít alespoň jeden společný bod. Protože jsou strany rovnoběžné, budou mít společnou celou osu a výsledný lichoběžník bude podle této osy symetrický, tedy rovnostranný.

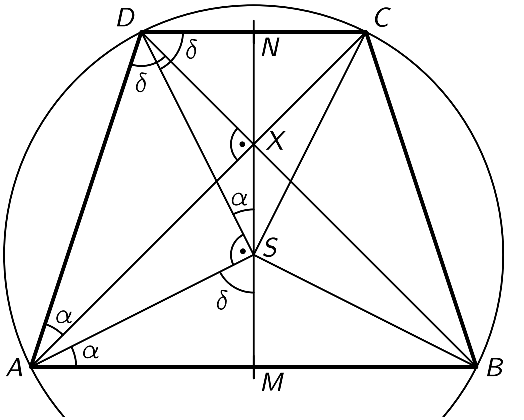


Obr. u5.2.1



Obr. u5.2.2

dva body tak, že polopřímky ze středu kružnice k těmto bodům svírají úhel φ, budou polopřímky z libovolného třetího bodu na kružnici svírat úhel $\varphi/2$, případně $180° - \varphi/2$ pokud zvolíme třetí bod tak, že úhel bude tupý. (Důkaz jde lehce vymyslet nebo najít na mnoha místech, takže jej zde nebudeme uvádět.)



Obr. u5.2.3

Ukažme teď, že trojúhelníky AMS a SND, jako jsou označeny na obrázku u5.2.3, jsou shodné. Podle pravidel pro středové a obvodové úhly bude velikost úhlu DSC dvojnásobkem úhlu DAC (označíme $|\sphericalangle DAC| = \alpha$). Díky symetrii lichoběžníku podle osy MN víme, že velikost úhlu DSN bude polovinou $|\sphericalangle DSC|$, a tedy rovna α. Analogicky můžeme ukázat, že pokud si označíme $|\sphericalangle ADB| = \delta$, bude také $|\sphericalangle ASM| = \delta$.

Trojúhelníky AMS a SND jsou podobné trojúhelníku AXD (pravý úhel u vrcholů M, N, resp. X a jeden další shodný úhel). Jsou tedy podobné i sobě navzájem a protože $|SA| = r = |SD|$, jsou i shodné. Délky jejich dalších dvou stran jsou zřejmě $a/2$ a $c/2$. Poloměr kružnice K je přepona těchto trojúhelníků, tedy

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}\,.$$

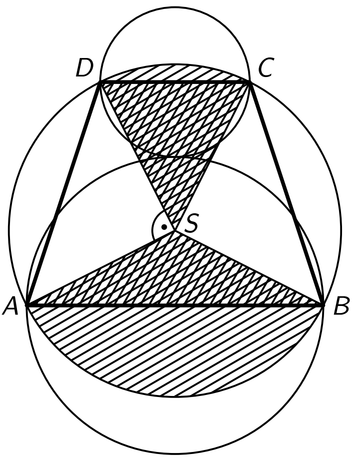
Vraťme se k hledanému obvodu obrazce. Zřejmě je tvořen polovinou obvodu kružnice K_a, polovinou obvodu K_b a dvěma čtvrtinami obvodu kružnice K (úhlopříčky svírají pravý úhel, takže oblouk AD, resp. BC je čtvrtinou obvodu). Průměry kružnic K_a a K_c jsou zadané, poloměr K už také známe, takže obvod je

$$o = \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi c}{2} + 2 \cdot \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(a + c + \sqrt{a^2 + c^2}\right)\,.$$

Obsah hledaného obrazce bude obsah kruhu K zmenšený o polovinu kruhu K_a a polovinu kruhu K_b, dále zmenšený o dvě kruhové úseče nad úsečkami AB a CD. Obsahy všech kruhů už umíme spočíst. Obsah úseče nad AB je obsah kruhové výseče ASB mínus obsah trojúhelníku ASB. Analogicky pro úseč nad úsečkou CD.

Celkový úhel výsečí okolo bodu S bude $180°$, protože $|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle BSC| = 90°$, jak už jsme ukázali dříve. Společný obsah výsečí je tedy polovina obsahu kruhu K a obsah hledaného obrazce je

$$\frac{S_K}{2} - \frac{S_{K_a}}{2} - \frac{S_{K_b}}{2} + S_{\Delta ABS} + S_{\Delta CDS}\,.$$



Obr. u5.2.4

Každý ze zmíněných trojúhelníků je tvořený dvojicí shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami délky $a/2$ a $c/2$, jak už jsme odvodili u obrázku u5.2.3. Obsah každého z trojúhelníků ABS a CDS je tedy $ac/4$.

Hledaný výraz pro obsah obrazce je

$$\frac{\pi\left(a^2 + c^2\right)}{8} - \frac{\pi a^2}{8} - \frac{\pi b^2}{8} + \frac{2ac}{4} = \frac{ac}{2}\,.$$

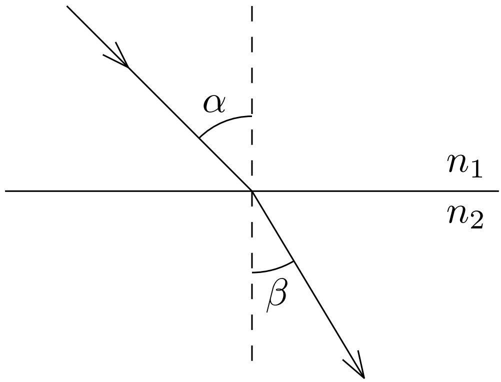
Marble

Úloha 5.3 – Sklenice (4b)

Zadání:
Naplníme válcovou sklenici s hladkými stěnami vodou. Vezmeme-li ji do ruky a podíváme se shora ven skrz stěnu pod hladinou vody, můžeme vidět jen otisky svých prstů. Zbytek stěny se chová jako zrcadlo. Zkuste vysvětlit, čím je způsobeno, že vidíme právě jen otisky prstů a nic dalšího. Můžeme stejný jev pozorovat, i když ke sklenici přiložíme jiný předmět, než prst? Který? Proč? Co se stane, když sklenici vyprázdníme nebo naplníme jinou tekutinou?

Řešení:
Na rozhraní dvou opticky různých prostředí dochází k lomu světla, který se řídí Schnellovým zákonem (Obr. u5.3.1)

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \,.$$



Obr. u5.3.1

Při úhlu dopadu

$$\varphi \geq \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

dochází k tzv. úplnému odrazu. V takovém případě nejsme schopni pozorovat objekty v prostředí n_2, rozhraní se chová jako zrcadlo.

Uvažujeme index lomu světla ve vzduchu $n_a = 1$, ve vodě $n_w = 1{,}33$ a ve skle $n_g = 1{,}5$. Aby na rozhraní sklo-vzduch (obr.2) došlo k totálního odrazu, musí pro úhel dopadu platit

$$\alpha \geq \arcsin\frac{n_a}{n_g} \,.$$

V mezním případě (úhel lomu $\psi = \frac{\pi}{2}$) α nabývá hodnoty přibližně 42°, přičemž daný paprsek dopadá na rozhraní voda-sklo pod úhlem

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_w}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_w}\cdot\frac{n_a}{n_g}\right) = \arcsin\frac{n_a}{n_w} \,.$$

Na rozhraní vzduch-voda se tedy lomí pod úhlem $\frac{\pi}{2} - \beta$, přičemž

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_a}{n_w}\right)^2}\,.$$

Paprsek tedy dopadá na hladinu pod úhlem

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{n_w}{n_a}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \arcsin\left(\frac{n_w}{n_a}\sqrt{1 - \left(\frac{n_a}{n_w}\right)^2}\right) = $$
$$= \arcsin\sqrt{\left(\frac{n_w}{n_a}\right)^2 - 1}\,.$$

Po dosazení za n_w a n_a dostaneme velikost mezního úhlu $\gamma \approx 61°16'$. Budou-li tedy světelné paprsky dopadat na vodní hladinu pod úhlem γ a menším, bude na rozhraní stěny sklenice a vzduchu docházet k úplnému odrazu a za stěnou nic neuvidíme. Budeme-li se dívat pod větším dopadovým úhlem, rozhraní se nebude chovat jako zrcadlo a budeme moci pozorovat předměty za stěnou sklenice.

Dojde-li k zrušení rozhraní sklo-vzduch, například přiložením prstů (ideálně vlhkých či mastných, aby dobře přilnuly k povrchu sklenice), zvětší se index lomu prostředí n_x za stěnou sklenice. Budeme-li uvažovat například mokré prsty ($n_x = n_w$) a dosadíme za $n_a = 1$, dostaneme pro úhel dopadu na hladinu:

$$\sin\gamma = \sqrt{n_w^2 - n_x^2} = \sqrt{n_w^2 - n_w^2} = 0 \to \gamma = 0\,.$$

K úplnému odrazu tedy nebude docházet a budeme moci pozorovat mokré prsty za stěnou sklenice.

Přiložíme-li ke sklenici předměty, které těsně přilnou ke stěně (nezůstane mezi nimi a sklenicí vrstva vzduchu) a jejichž index lomu bude větší než index lomu vody (např. medovník, $n_{med} = 1{,}49$), budeme je moci skrz sklenici pozorovat (nebude docházet k úplnému odrazu pro žádný paprsek). Bude-li pro jejich index lomu platit $n_a < n_x < n_w$, bude se mezní úhel dopadu paprsků na hladinu, pro které bude docházet k úplnému odrazu na rozhraní n_g-n_x, spolu s rostoucí velikostí n_x zmenšovat. Při indexech lomu blízkých n_a budeme moci pozorovat dané předměty jen pod velkým dopadovým úhlem (pro menší úhly bude docházet k totálnímu odrazu), přičemž s rostoucím indexem lomu předmětu n_x budou předměty pozorovatelné pro stále širší spektrum úhlů.

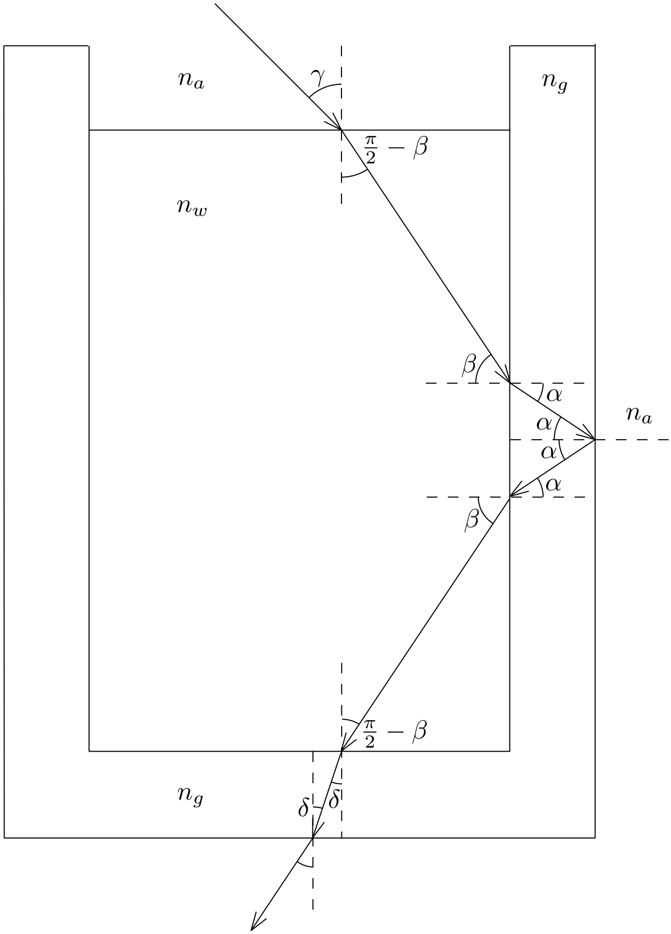
Pokud sklenici vyprázdníme ($n_w \to n_a$), k totálnímu odrazu opět nedojde ($\gamma = 0$). Naplníme-li sklenici jinou tekutinou s indexem lomu $n_a < n_t < n_w$, bude se s rostoucím indexem lomu n_t zvětšovat úhel paprsků, u kterých bude docházet k úplnému odrazu na rozhraní sklo-vzduch. Vyplníme-li sklenici tekutinou s indexem lomu $n_t > n_w$ (např. etanol $n_e = 1{,}36$), mezní úhel, pro který bude docházet k úplnému odrazu, dále poroste ($\gamma_e \approx 67°$). Při indexu lomu $n_m = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ a větším (např. glycerol (olej) $n_{gly} = 1{,}473$) již bude docházet k totálnímu odrazu u všech paprsků dopadajících na hladinu.

Již víme, že dojde-li na rozhraní sklo-vzduch k totálnímu odrazu, nemůžeme pozorovat předměty za stěnou sklenice. Ale co vlastně vidíme?

Dopadne-li na hladinu světelný paprsek pod úhlem γ (Obr. u5.3.2), nejprve se dvakrát lomí ($\gamma \to (\frac{\pi}{2} - \beta)$, $\beta \to \alpha$), následně se odráží (α) na rozhraní stěny sklenice a vzduchu, opět se dvakrát lomí ($\alpha \to \beta$, $(\frac{\pi}{2} - \beta) \to \delta$), kde

$$\delta = \arcsin\left(\frac{n_w}{n_g}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \arcsin\left(\frac{n_w}{n_g}\sqrt{1 - \left(\frac{n_a}{n_w}\right)^2}\right) =$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{n_w^2 - n_a^2}{n_g^2}}\,.$$



Obr. u5.3.2

Na rozhraní dna sklenice a vzduchu tedy paprsek dopadá pod úhlem $\delta \approx$ $\approx 36°$. Jelikož je tento úhel menší než mezní úhel $\alpha \approx 42°$, nedochází k úplnému odrazu a paprsek se dále láme do vzduchu. Světelné paprsky, které dopadají do našeho oka tedy neprochází stěnami sklenice (úplný odraz), ale jejím dnem. Ve skutečnosti tak vidíme dno sklenice.

Peťa

Úloha 5.4 – Trojúhelníkový štít (2b)

Zadání:

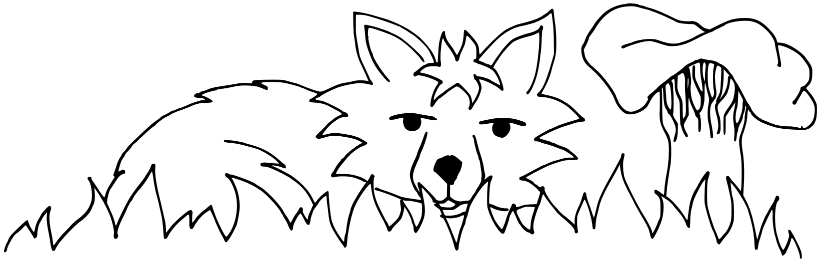
Štít je tvořen velkým trojúhelníkem, který je vyskládaný nepřekrývajícími se dlaždicemi ve tvaru tojúhelníku podobného velkému, ale zmenšeného v poměru 1 : n. Kolika způsoby se lze dostat z horní dlaždice na nějakou dlaždici ve spodní řadě, pokud smíme každou dlaždici navštívit jen jednou a můžeme se pohybovat jen doleva, doprava a dolů mezi dlaždicemi se společnou hranou?

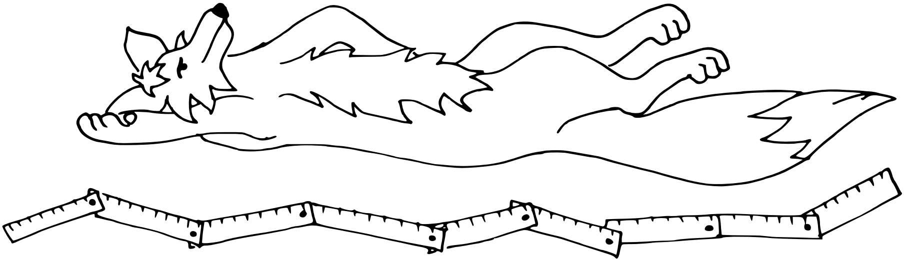
Řešení:

Omezíme se pouze na dlaždice, jejichž špička směřuje vzhůru – jen po nich totiž můžeme přejít do další řady pod nimi. V první řadě existuje jedna taková dlaždice, ve druhé dvě, až v poslední řadě je takových n. Ať už jsme do řady přišli přes kteroukoliv dlaždici, vždy se můžeme přesunout do libovolné jiné dlaždice ve stejné řadě a můžeme to udělat právě jedním způsobem (protože se dlaždice nesmí opakovat). Cesta trojúhelníkem je tedy jednoznačně určena tím, že z každé řady kromě poslední vybereme jednu dlaždici, ze které se posuneme směrem dolů.

Celkem takových cest existuje $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) = (n-1)!$. Pokud bychom si dovolili se ještě v poslední řadě posunout na libovolnou dlaždici (i takovou, jejíž špička směřuje dolů), měli bychom celkový počet různých cest $(2n-1)(n-1)!$, neboť počet všech dlaždic v poslední řadě je $2n-1$.

Honza





Úloha 5.5 – Pozorujeme teleso (4b)

Zadání:
Spočítajte efemeridu na polnoc SELČ 31. 3. 2013/1. 4. 2013 pre teleso, ktorého dráhové elementy sú v tabuľke. Aké by to tak mohlo byť teleso a kde na oblohe sa bude nachádzať? Bude pozorovateľné?

e	0,22267
a	1,45784 AU
i	10,82873°
Ω	304,33802°
ω	178,79123°
P	642,9275 dní
T	*21. 10. 2013, 18.08:18,6 LSEČ*

Řešení:
Samotné počítanie je pekne priamočiaré, stačí dosadzovať do vzorčekov v zadaní. Trochu väčšiu výzvu predstavuje vyriešenie Keplerovej rovnice, ale aj tá pri troche snahy padne a dostaneme hodnotu excentrickej anomálie $E = 4{,}51$.

Potiaľ je všetko v poriadku, ale keď začneme počítať koeficienty A, B a C, narazíme na problém: nesedia nám kontrolné súčty. Kde je problém? Inu, problém je v článku a pochádza už zo zdrojovej knihy. A kde presne? Na strane 24 vidíme vzorec c5.12, v ktorom je pre koeficient C_2 uvedené: $C_2 = \cos i \sin\Omega \sin\epsilon + \sin i \cos\epsilon$. Správne ale má byť $C_2 = \cos i \cos\Omega \sin\epsilon + \sin i \cos\epsilon$. Táto jedna zámena kosínu za sínus vedie k tomu, že nám výsledok nevychádza.

Keď si vzorček opravíme, výchadzajú už kontrolné súčty správne. Potrebujeme ešte zistiť súradnice Slnka. Použitím nejakej vhodnej služby (napríklad kalkulátoru efemeríd na stránke `www.true-node.com`) zistíme, že o polnoci bude Slnko na súradniciach $\alpha = 10°26'$ a $\delta = 4°29'$, čo znamená, že sa Slnko nachádza v oblasti súhvezdia Ryby.

Takže nám stačí podosadzovať zistené údaje a dopočítať, že hľadané teleso sa bude o polnoci nachádzať na súradniciach $\alpha = 355°20'$ a $\delta = 3°11'$, takže aj naše hľadané teleso sa nachádza v súhvezdí Rýb, len pár stupňov od Slnka.

To ale ešte nutne neznamená, že by nemohlo byť pozorovateľné. Stačí aby bolo dostatočne jasné na to, aby sa v žiare Slnka nestratilo.

Skúsme chvíľu rozmýšľať, aké teleso by to mohlo byť. Môžeme napríklad skúsiť spočítať jeho maximálnu a minimálnu vzdialenosť od Slnka, teda $r_{\min} = a(1 - e) = 1{,}13\,\mathrm{AU}$ a $r_{\max} = a(1 + e) = 1{,}78\,\mathrm{AU}$. Takže najbližšie prilieta skoro k dráhe Zeme, najďalej sa vzdiaľuje až za dráhu Marsu. To je správanie typické pre blízkozemné asteroidy skupiny Amor. Nebudem vás ďalej napínať, v tomto prípade sa jedná o asteroid 433 Eros, ktorý bol objavený v roku 1898. A čím je práve tento kúsok zaujímavý? Tak napríklad tým, že ho v roku 2000 obiehala sonda NEAR Shoemaker (Near Earth Asteroid Research, meno Shoemaker dostala až po štarte po známom pozorovateľovi komét a asteroidov), ktorá svoju misiu zakončila mäkkým pristátim na jeho povrchu 12. 2. 2001, i keď pristátie v pôvodných plánoch misie nebolo.

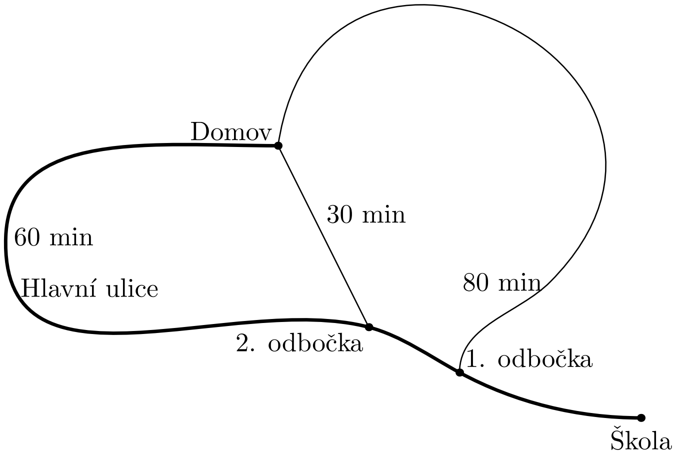
No a tým sa dostávame k odpovedi na otázku pozorovateľnosti. Asteroid Eros je malý, voľným okom vidieť nie je, a tak v takto malej uhlovej vzdialenosti od Slnka nie je pozorovateľný ani väčšími ďalekohľadmi.

Jeffer

Řešení úloh 6. série

Úloha 6.1 – Roztržitý profesor matematiky (3b)

Zadání:
Roztržitý profesor se vrací pozdě večer ze školy domů a cestou se zaobírá jistým zajímavým problémem, který jej dnes napadl. Jde po hlavní ulici a nedává pozor, když tu mu náhle zatrne – narazil na známou odbočku. Ví, že takové odbočky jsou tady dvě a oběma trefí domů. Tou první mu cesta od školy domů trvá 80 minut, druhou 30 minut, a pokud neodbočuje a jde stále po hlavní ulici, je na cestě celkem 60 minut. Ke své smůle ale není schopen odbočky rozlišit (bez toho, aby jimi šel tak daleko, že se mu už nevyplatí se vracet – a žádné neznámé zkratky rozhodně nemíní zkoušet, ztratit se takhle navečer, to by mu ještě scházelo). Vlivem zahloubání taky zapomněl, jestli už dnes nějakou míjel. Navíc je mu jasné, že pokud je teď u první odbočky a půjde dál, tak než dojde ke druhé, myšlenky mu spolehlivě utečou jinam a bude zase ve stejné situaci. Jak se má profesor zachovat, aby domů dorazil co možná nejdříve?



Řešení:
Nejdůležitejší je si uvědomit, že profesor se musí svou strategií řídit na každé křižovatce, na kterou přijde. Nepamatuje si, jestli už míjel nějakou odbočku, nemůže si tedy ani zapamatovat upravenou strategii. Pokud mu poradíte, aby odbočil, nebude jeho očekávaná délka cesty domů $(80 + 30)/2 = 55$ minut (jak vyplývá z chybné úvahy, že profesor je u obou odboček se stejnou pravděpodobností 1/2), nýbrž 80 minut – vždy odbočí už na první křižovatce a na druhou se nikdy nedostane. Vypadá to, že je nejlepší se držet hlavní cesty a dorazit domů za rovnou hodinu.

Když jsme počítali průměrnou délku cesty při odbočení, chtěli jsme, aby se profesor aspoň někdy vyskytoval i u druhé odbočky. Aby se tou naší radou neřídil pokaždé. Co kdyby se rozhodl odbočit s nějakou pravděpodobností p? Pak by očekávaná doba strávená na cestě byla rovna

$$\mathrm{E}t(p) = p \cdot 80 + (1 - p) \cdot (p \cdot 30 + (1 - p) \cdot 60) = 30p^2 - 10p + 60.$$

(Na první křižovatce odbočí s pravděpodobností p a cesta mu pak bude trvat 80 minut. S pravděpodobností $1-p$ na ní neodbočí a potom dojde na druhou, kde s pravděpodobností p odbočí a cesta mu bude trvat 30 minut, nebo opět neodbočí a pak bude na cestě 60 minut.)

Jaká pravděpodobnost odbočení je nejvýhodnější? Hledáme minimum $\mathrm{E}t(p)$ na uzavřeném intervalu $[0,1]$. Zderivujeme a hledáme p, pro něž je derivace rovna nule (tečna grafu $\mathrm{E}t(p)$ je v tom bodě vodorovná, je to bod podezřelý z extrému):

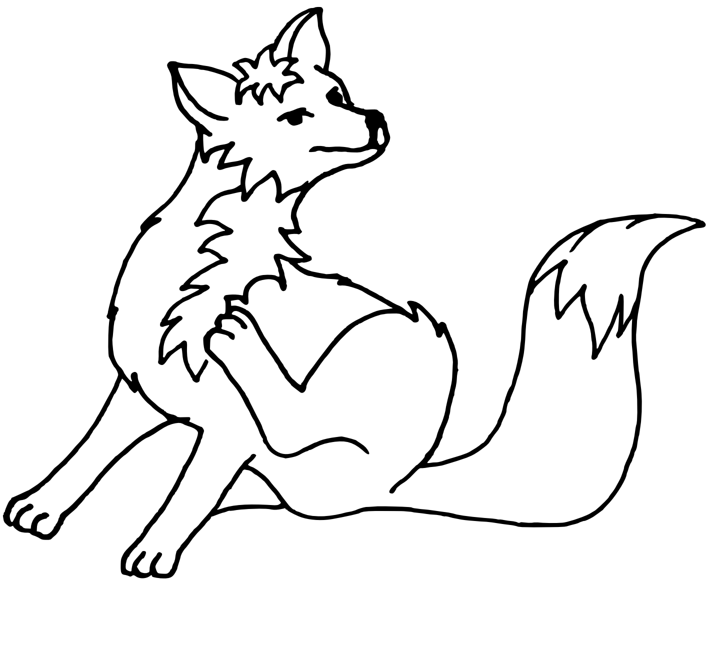
$$(\mathrm{E}t(p))' = (30p^2 - 10p + 60)' = 60p - 10$$

$$60p - 10 = 0$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$(\mathrm{E}t(p))'$ je spojitá na $[0,1]$, minimum je proto v jednom z koncových bodů intervalu nebo v některém z bodů, ve kterých je derivace nulová. Hodnota $\mathrm{E}t(1/6) = 355/6 \doteq 59{,}1667$, což je… hm. No, je to trochu míň než 60 minut. Aspoň že se profesor může jednoduše rozhodovat hodem kostkou a nemusí nic počítat.

Matěj



Úloha 6.2 – Diamantová planetka (4b)

Zadání:

Byla nebyla jednou jedna kulová diamantová planetka, která se otáčela kolem své osy jednou za jednu hodinu a 45 minut. Právě tak rychle, že na jejím rovníku se odstředivá síla přesně vyrovná gravitační. Planetka byla v celém objemu homogenní až na jednu malou jeskynní dutinu o velikosti většího hangáru umístěnou kus pod povrchem přímo na rovníku. (Planetka sama je mnohem větší než tato dutina.)

Uvnitř této dutiny žil jeden zvědavý skřítek. Jednoho dne upustil malou kuličku tak, že její počáteční rychlost je zhruba 1 cm/s. Jak se bude kulička dál volně pohybovat? (Uvažujte zcela obecný směr počáteční rychlosti.)

Řešení:

U většiny problémů je vhodné začít analýzou toho, co víme. V tomto případě o planetě víme, že je z diamantu (můžeme si tedy dohledat její hustotu ϱ), známe periodu rotace T a víme, že se na rovníku vyruší gravitační síla F_g s odstředivou F_o.

$$F_{g,\mathrm{povrch}} = \frac{\kappa m M}{R^2} = F_{\mathrm{o,povrch}} = \omega^2 R\,,$$

kde κ je gravitační konstanta, M hmotnost planety (tu nahradíme $M = V\varrho = 4/3\pi R^3\varrho$), R její poloměr, ω úhlová rychlost rotace (kterou si vyjádříme jako $2\pi/T$) a m hmotnost testovacího tělesa. Abychom se zbytečně v našich výpočtech nevláčeli s hmotností testovacího tělesa, budeme pracovat se zrychleními, gravitační si označíme g a odstředivé o. Po dosazení dostaneme

$$g = \frac{4\pi R^3\varrho\kappa}{3R^2} = o = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\,,$$

a vidíme, že se nám jediná neznámá, tedy poloměr planety, vyruší, a po dosazení číselných hodnot dostaneme vždy pravdivý výrok. Planeta může být zkrátka libovolně velká (malá). Takže dodané údaje jsou k ničemu? No, některé ano …

Soustředíme tedy svou pozornost na kuličku v dutině. Jaké na ni působí síly? Předně obě zmíněné, gravitační a odstředivá, dále síla Coriolisova a odporová síla vzduchu (tu si dovolím zanedbat, však všichni víme, co dělá …). Gravitační a odstředivá síla se na rovníku vyrovná, a vzhledem k tomu, že máme dutinu těsně pod rovníkem, a nevíme jak hluboko, ani jak velkou, jenom víme, že má být „těsně“ pod rovníkem a „malá“, tak je to jasný signál, abychom i tady předpokládali, že se vyrovnají. Jenom pro ověření, uvnitř planety platí:

$$g = \frac{\kappa M r}{R^3}\,;\quad o = \omega^2 r\,.$$

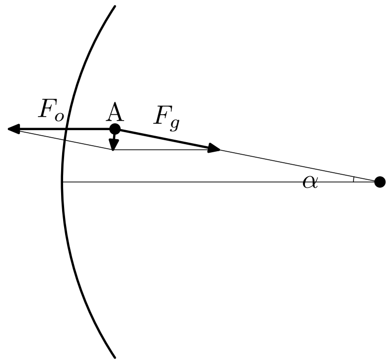
Takže velikost obou zrychlení závisí na vzdálenosti od středu planety r stejně, a tím pádem je ve všech bodech planety stejná. Jenom mají mimo rovinu rovníku různý směr. Gravitační zrychlení směřuje vždy do středu planety, odstředivé ven rovnoběžně s rovinou rovníku, viz. Obrázek 1. Jejich výslednice a

v obecném bodě A vzdáleném r od středu planety a na zeměpisné šířce φ má velikost (jelikož velikostně $g = a$)

$$a = 2g \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{8}{3} \kappa \pi \varrho r \sin \frac{\varphi}{2}$$

a směřuje k rovině rovníku a mírně od středu planety.

Takže to zanedbáme. Nemáme nejmenší představu o parametru r, a φ je malé (protože dutina je malá), takže tím menší je $\sin \frac{\varphi}{2}$, takže to bude v pořádku. Alespoň jsme zjistili, že naše planeta v tomto stavu nevznikla, protože síly, které se ji snaží zploštit do disku, musí být na pólech obrovské.



Obr. u6.2.1

Zbývá nám tedy Coriolisova síla. Ta je definována jako

$$\vec{F}_{\mathrm{c}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,,$$

kde $\vec{v}$ je rychlost testovacího tělesa, a zbylé veličiny už jsme tu měli. Křížek značí vektorový součin, výsledkem vektorového součinu dvou vektorů je vektor (někteří tomu říkají pseudovektor) kolmý na oba původní vektory. Jeho velikost je pak maximální, pokud jsou násobené vektory kolmé, a nulová, pokud jsou rovnoběžné. Vektor úhlové rychlosti směřuje podél osy rotace tělesa.

Jistě jste se v zeměpise učili, nebo budete učit, že tato síla stáčí vodní a vzdušné víry na severní polokouli na východ a na jižní na západ (tedy pokud původně mířily na sever) a na rovníku nepůsobí. To je ovšem jedna konkrétní aplikace této síly, a nikoli její typická vlastnost. Typicky totiž v zeměpise zkoumáte objekty, které se pohybují po povrchu planety. Máme-li těleso na rovníku pohybující se rychlostí v podél rovníku, pak Coriolisova síla směřuje k nebo od středu planety, což nám pohyb jaksi nevychyluje. Pokud se pohybuje po poledníku, pak je jeho rychlost rovnoběžná s úhlovou rychlostí rotace planety, a Coriolisova síla je nulová. Při pohybu po poledníku mimo oblast rovníku má rychlost tělesa nenulovou složku ve směru ven rovnoběžně s rovinou rovníku, která dává Coriolisovu sílu ve směru rovnoběžky, tedy na východ nebo na západ, a dochází k vychylování.

V našem případě máme kuličku pohybující se neznámým směrem rychlostí $v = 1\,\mathrm{cm/s}$. Případ si rozdělíme na tři základní podpříklady, tedy pohyb ve směru k/od středu planety neboli nahoru–dolů, sever–jih a východ–západ, ostatní pohyby jsou jenom jejich kombinací.

Pohyb sever–jih je triviální, tam žádné Coriolisovo zrychlení nepůsobí.

Při pohybu nahoru–dolů je Coriolisovo zrychlení rovno

$$a_{\mathrm{c}} = -2\frac{2\pi}{T}v\ 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}\,,$$

a směřuje na východ (na těleso pohybující se nahoru) nebo na západ (na těleso pohybující se dolů). Jak správně odhadl Mgr.[MM] Viktor Skoupý, po jednom metru pohybu se odchýlí o 10 cm. A to je docela hodně, že? Taky máme pekelně rychle se točící planetu …

Při pohybu východ–západ má Coriolisovo zrychlení stejnou velikost jako v předchozím případě, a směr nahoru (na těleso pohybující se na západ) nebo dolů (na těleso pohybující se na východ).

A teď pozor, komplikace: V obou případech nám narůstá rychlost ve směru, který také způsobuje Coriolisovo zrychlení kuličky, akorát v komplementárním směru. Takže kulička nám mění rychlost v obou zmíněných směrech, ať už ten původní byl jakýkoli. Vezměme si např. pohyb směrem na západ. Coriolisova síla působí zrychlování ve směru nahoru, a na tuto nově vzniklou rychlost působí Coriolisovo zrychlení směrem na východ, tedy původní rychlost se zmenšuje, a pokud máme dost velkou dutinu, může přejít až v pohyb směr východ. Pak ale začne působit Coriolisova síla směrem dolů, až nám zvrátí pohyb nahoru v pohyb dolů, atd. Tady vidíme, že by mohlo jít o periodický pohyb. Pokusme se tedy popsat tento pohyb s obecnou počáteční rychlostí, kde $v_{0,\text{západ}}$ a $v_{0,\text{nahoru}}$ jsou její průměty do směrů našich os. Průmětem rychlosti kuličky do osy sever–jih se nebudeme zabývat, protože v něm může působit jen zrychlení způsobené výslednicí tíhové a odstředivé síly, které jsme už zanedbali.

V následujících výpočtech nebudeme uvažovat sférické souřadnice, a plochu danou směry východ–západ a nahoru–dolů budeme považovat za rovinu (ikdyž to vlastně je kulová plocha, ale to je jen nedostatek zavedení souřadnic, všechny síly, zrychlení a rychlosti jsou ve všech bodech pohybu v jedné rovině). Pokusíme se popsat dráhu, po které se pohybuje. Zapíšeme si pohybové rovnice

$$a_{\text{západ}} = \dot{v}_{\text{západ}} = 2\omega v_{\text{nahoru}} \qquad a_{\text{nahoru}} = \dot{v}_{\text{nahoru}} = -2\omega v_{\text{západ}}\,.$$

Tečka nad proměnnou zde znamená derivaci podle času. Taková soustava rovnic se řeší tak, že jednu z rovnic, např. tu první, zderivujeme celou podle času:

$$\ddot{v}_{\text{západ}} = 2\omega\dot{v}_{\text{nahoru}}\,,$$

dosadíme za $\dot{v}_{\text{nahoru}}$ do druhé rovnice:

$$\ddot{v}_{\text{západ}} + 4\omega^2 v_{\text{západ}} = 0\,,$$

a vyjde nám rovnice harmonického oscilátoru. Její řešení je obecně

$$v_{\text{západ}} = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t\,,$$

kde A a B jsou nějaké zatím neznámé konstanty. S pomocí tohoto výsledu spočteme druhou složku

$$v_{\text{nahoru}} = \frac{\dot{v}_{\text{západ}}}{2\omega} = -A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t$$

Když už máme složky rychlosti, tak integrací podle času získáme složky polohy kuličky

$$x_{\text{nahoru}} = \frac{A}{2\omega}\sin 2\omega t - \frac{B}{2\omega}\cos 2\omega t + C\,,\quad x_{\text{západ}} = \frac{A}{2\omega}\cos 2\omega t + \frac{B}{2\omega}\sin 2\omega t + D$$

Přibyly nám další konstanty C a D. Teď je za pomoci počátečních podmínek postupně eliminujeme. Zvolíme si, že kulička je vypuštěna z počátku soustavy souřadné:

$$x_{\text{nahoru}}(t=0) = 0 = -\frac{B}{2\omega} + C \to C = \frac{B}{2\omega}$$
$$x_{\text{západ}}(t=0) = 0 = \frac{A}{2\omega} + D \to D = -\frac{A}{2\omega}$$

Další počáteční podmínkou je počáteční rychlost, tedy

$$v_{\text{nahoru}}(t=0) = v_{\text{nahoru},0} = B\,, C = \frac{v_{\text{nahoru},0}}{2\omega}\,,$$
$$v_{\text{západ}}(t=0) = v_{\text{západ},0} = A\,, D = -\frac{v_{\text{západ},0}}{2\omega}\,.$$

A máme hotovo:

$$x_{\text{nahoru}} = -\frac{v_{\text{západ},0}}{2\omega}\,(1-\cos 2\omega t) + \frac{v_{\text{nahoru},0}}{2\omega}\sin 2\omega t\,,$$
$$x_{\text{západ}} = \frac{v_{\text{západ},0}}{2\omega}\sin 2\omega t + \frac{v_{\text{nahoru},0}}{2\omega}\,(1-\cos 2\omega t)\,.$$

Výsledkem je pohyb po kružnici.

Toto byl kompletní, ale poněkud složitý výpočet. Mohli jste si v jeho průběhu všimnout, že popisujete harmonický pohyb (nebo to rovnou od začátku předpokládat) odhadnout řešení v nějakém obecném formátu, a dosadit. Zde mi připadalo logičtější si „hádání“ nechat až na nejpozdější možnou chvíli, abych demonstrovala, kam až se dá výpočet dostat.

Další alternativou je spočítat trajektorii numericky podle iterativních vzorců:

$$v_{\text{západ},n+1} = v_{\text{západ},n} + \frac{4\pi}{T} v_{\text{nahoru},n}\Delta t \quad x_{\text{západ},n+1} = x_{\text{západ},n} + v_{\text{západ},n}\Delta t$$
$$v_{\text{nahoru},n+1} = v_{\text{nahoru},n} - \frac{4\pi}{T} v_{\text{západ},n}\Delta t \quad x_{\text{nahoru},n+1} = x_{\text{nahoru}_{\text{n}}} + v_{\text{nahoru},n}\Delta t$$

Když už jsme se v seriálu XVII ročníku M&M učili python, napíšeme si tento krátký prográmek právě v něm. Směr nahoru si označíme x a na západ y.

```
import math

# Konstanta 2 * omega
k = 4 * math.pi / 6340.0
# Casovy krok po kterém iterujeme
dt = 1
# Velikost počáteční rychlosti
v = 0.01
# Směr počáteční rychlosti
a = 0

x = 0
y = 0
vx = v * math.cos(a)
vy = v * math.sin(a)

print("%f %f %f %f" % (x, y, vx, vy))
for i in range(3000):
        x += dt * vx
        y += dt * vy
        vx, vy = vx - k * vy * dt, vy + k * vx * dt
        print("%f %f %f %f" % (x, y, vx, vy))
```

Po vykreslení bodů (x,y) nám opět vyjde kružnice.

Zuzka

Úloha 6.3 – Voják v bunkru (4b)

Zadání:

Voják je zavřen v bunkru, odkud nesmí vycházet. Potřebuje poslat ven z bunkru domluvený signál – právě jednou bliknout světlem nad vstupem. Světlo je na začátku zhasnuté a rozsvítí se při jedné jediné kombinaci stavu několika vypínačů v bunkru, při jakékoliv jiné je zhasnuté. Bohužel tu kombinaci voják nezná a stav žárovky venku neumí nijak zjistit. Vypínače jsou na stěnách tak daleko od sebe, že v jednu chvíli voják dosáhne jen na jeden z nich. V jakém pořadí je má přepínat, aby si byl jistý, že světlo bliklo právě jednou, a navíc aby vypínače nakonec zůstaly v původním stavu?

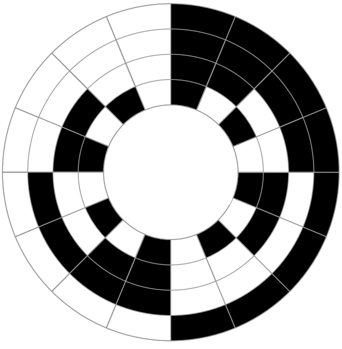
Řešení:

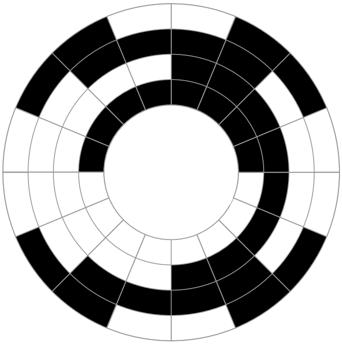
Aby měl voják jistotu, že blikne právě jednou, musí projít všechny kombinace vypínačů. Když si přepínač v původní poloze označíme jako 0 a přepínač v poloze opačné jako 1, tak dostáváme n bitové binární číslo. Řešíme úlohu, jak seřadit všechna binární čísla, která umíme zapsat n bity.

Budeme postupovat matematickou indukcí. Nechť máme sekvenci čísel délky m, pro kterou jsou podmínky splněny. Můžeme si všimnout, že pokud tuto sekvenci budeme procházet opačným směrem, tak dostaneme také správnou sekvenci. Přidáváme $m+1$ přepínač, který je v původní poloze 0. Začneme postupovat již určenou sekvencí pro m přepínačů. V libovolném kroku i se zastavíme a přepnemem $m+1$ přepínač do polohy 1. Dále začneme sekvenci procházet v opačném pořadí, až dorazíme do polohy $i+1$. Tím jsme prošli všechny možnosti, $m+1$ vypínač je v poloze 1. Nyní přepneme $m+1$ vypínač do polohy 0 a pokračujeme dopředným směrem v procházené sekvenci. Celkem jsme prošli všechny možnosti i pro polohu vypínače $m+1$ v poloze 0 (od 0 k i; od $i+1$ ke 2^m a k 0).

Víme tedy, jak postupovat, když budeme mít o vypínač víc. Ještě ukážeme, že máme správnou sekvenci pro $m=1$. To znamená, že máme jeden vypínač, který přepneme do polohy 1, a následně do polohy 0.

Takže umíme sestavit libovolnou sekvenci pro libovolné m. Všimneme si, že takovýchto kódů existuje celá řada, protože přepínač, který přepínáme, můžeme přepnout v libovolném kroku. Toto kódování čísel je celkem praktické a nazývá se Grayův kód. Používá se třeba pro absolutní určení polohy. Umíme určit barvu terčíku (černou nebo bílou), a na terčíku máme několik proužků (máme m snímačů).





Pokud bude čtecí hlava přecházet mezi těmito dvěma čísly, musí se v jeden okamžik změnit hodnoty všech snímačů (to je poměrně složité zajistit, senzory například neumíme srovnat zcela přesně na přímku). V mezistavu, kdy už některé snímače vidí novou barvu, ale jiné ještě ne můžeme na krátkou chvíli přečíst libovolné číslo a teprve následně očekávanou šestnáctku. Grayův kód tento problém elegantně řeší: mezi sousedními polohami se překlápí vždy jen jeden snímač, takže se nemusíme trápit synchronizací.

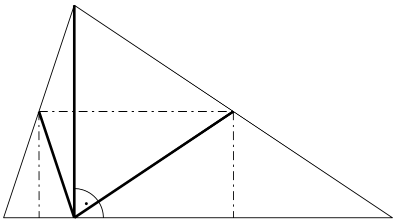
xlfd

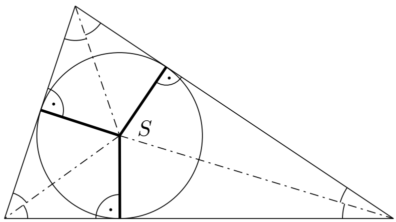
Úloha 6.4 – Dort (3b)

Zadání:
Cukrář dostal za úkol vyrobit trojúhelníkový dort s konkrétními délkami stran (přesně podle loga Společnosti přátel obecných trojúhelníků) a speciálně na něj i nechal vyrobit přesně pasující dortovou krabici. Jaké bylo však jeho zděšení, když zjistil, že dort vyrobil zrcadlově symetrický a nepasuje tedy do krabice! Co teď? Rozhodl se dort rozřezat co nejméně rovnými (vertikálními) řezy a naskládat jej do krabice už správně ozrcadlený. Tento dort nemá nijak rozlišené či zdobené vnější okraje, ale nesmíme ho nikdy překlopit polevou dolů! Jak tedy na to?

Řešení:
Přišla nám celkem tři řešení se třemi různými myšlenkami, které otiskujeme. První dvě řešení rozdělí trojúhelník na několik částí, kde každá je osově symetrická; takové části je už možné do krabice naskládat bez jejich překlápění.

Dr.[MM] Markéta Calábková si nejdříve všimla, že pravoúhlý trojúhelník lze rozdělit na symetrické trojúhelníky řezem od pravoúhlého vrcholu do středu přepony. Pak už stačí rozdělit obecný dort výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, a každý z nich rozdělit na dva symetrické. Toto řešení rozdělí dort na čtyři části, a můžete jej vidět na obrázku vlevo, čerchovaně jsou naznačeny osy symetrie dílů.

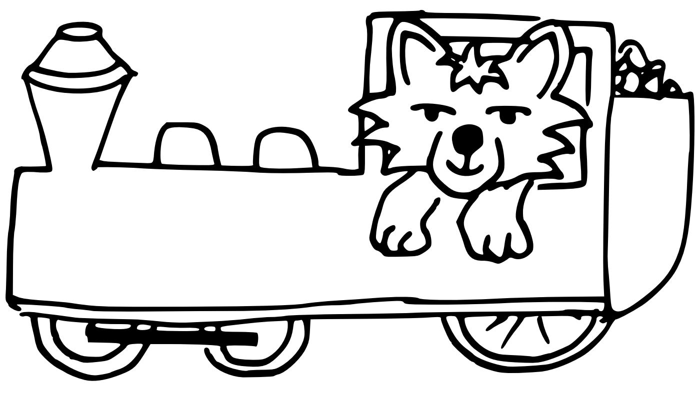




Bc.[MM] Barbora Kořánová najde střed kružnice vepsané S jakožto průsečík os úhlů, a řezy pak vede z S kolmo na strany dortu do míst dotyků kružnice vepsané, viz obrázek vpravo. Tyto řezy jsou stejně dlouhé, a proto je každý z výsledných tří dílů osově symetrický.

A Stěhule nakonec navrhl použít krabici dortu vzhůru nohama; tedy položit dort na její víko a přiklopit spodní částí. Toto řešení nemůžeme uznat úplně, protože těžko říci, jak je krabice zkonstruovaná a zda nějaké víko vůbec má ;-)

Tomáš



Výsledková listina po 5. sérii

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t1	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Homza	3.	87	3	3	4	2	5		17	87
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Calábková	2.	75	3		3	2			8	56
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Aranka Hrušková	3.	50	2			2	2		6	50
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Kufová	1.	49	2	2	3	2	1		10	49
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Kadlec	2.	94	2	0	0		3		5	46
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Aneta Šťastná	3.	86	2			2			4	45
7–8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kušnír	2.	40	2	1		1	0		4	40
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matej Lieskovský	3.	67	2		4	2			8	40
9–11.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Mička	4.	65	2	3		2			7	37
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Patrik Nácovský	2.	37	2			0			2	37
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Viktor Skoupý	3.	37	2		4		4		10	37
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak	1.	34	2	3		2			7	34
13–14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jaroslav Cerman	1.	31	2	1	0	1			4	31
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Vincena	2.	58	1			2			3	31
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Václav Skála	2.	28	1						1	28
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Buráň	4.	24							0	24
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Linda Langerová	2.	36				0			0	24
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Ullwer	4.	21							0	21
19–20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lubomír Grund	4.	58							0	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Štábl	2.	20	2		1	0			3	20
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dominika Macháčová	3.	16	2						2	16
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Magyarová	3.	15	2	2	0	0	2		6	15
23–24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Sabína Fraňová	4.	12							0	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Šafek	2.	12	2						2	12
25–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Bušáková	4.	14							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Dittrich	1.	11	2						2	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Ilievová	2.	11							0	11
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Mikel	4.	32							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček	1.	11							0	11
30–34.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zdeněk Garčic	2.	10	2						2	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kolář	2.	10	2				1		3	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dušan Stěhule	2.	10							0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jiřina Svobodová	3.	10							0	10
	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	4.	283							0	10

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t1	$\sum_0$	$\sum_1$
35–36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Bidlák	3.	12							0	9
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Václav Krchňák	1.	9							0	9
37–39.	Marek Biroš	2.	7							0	7
	Mark Daniel	3.	7	2	1					3	7
	Rostislav Zlatník	1.	7	1						1	7
40–43.	Jan Knížek	2.	6							0	6
	Valentína Straková	3.	6							0	6
	Antonín Teichmann	3.	6	3	1		2			6	6
	Štěpánka Titlová	1.	6							0	6
44–47.	Jan Alfery	1.	5							0	5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Svoboda	4.	29							0	5
	Kateřina Škorvánková	1.	5							0	5
	Vojtěch Václavík	3.	5	2						2	5
48–51.	Patrik Kroft	4.	4							0	4
	Michal Reška	1.	4							0	4
	Dávid Sekáč	2.	4							0	4
	Matěj Vanko	4.	4							0	4
52–62.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Dolejší	2.	21							0	3
	Lucie Draslarová	1.	3							0	3
	Jan Erhart	2.	7							0	3
	Tomáš Jungman	1.	3						3	3	3
	Kryštof Kolář	1.	3							0	3
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Kořánová	3.	3	2	0	1	0			3	3
	Jan Kučera	1.	3							0	3
	Jan Kulička	1.	3							0	3
	Olga Leskovjanová	2.	3	1						1	3
	Jakub Novák	1.	3							0	3
	Jan Škvára	3.	3							0	3
63–64.	Dávid Barbora	2.	2							0	2
	Jitka Fürbacherová	4.	2							0	2
65–67.	Zuzana Kuchařová	1.	1							0	1
	Timotej Mareš	1.	1							0	1
	Dávid Princík	4.	1							0	1

Výsledková listina po 6. sérii

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	r5	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy							
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Homza	3.	87							0	87
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Markéta Calábková	2.	83	1			3	2	2	8	64
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Aranka Hrušková	3.	56			4		2		6	56
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Kadlec	2.	98	1		3				4	50
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Kufová	1.	49							0	49
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Aneta Šťastná	3.	89			1		2		3	48
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Mička	4.	71			4		2		6	43
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Viktor Skoupý	3.	42		3			2		5	42
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kušnír	2.	41		0	1				1	41
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matej Lieskovský	3.	67							0	40
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Patrik Nácovský	2.	37							0	37
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marian Poljak	1.	34							0	34
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jaroslav Cerman	1.	33	1				1		2	33
14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Vincena	2.	58							0	31
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Václav Skála	2.	28							0	28
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Buráň	4.	24							0	24
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Linda Langerová	2.	36							0	24
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Ullwer	4.	21							0	21
19–20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lubomír Grund	4.	58							0	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Štábl	2.	20							0	20
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dominika Macháčová	3.	16							0	16
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Magyarová	3.	15							0	15
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Václav Krchňák	1.	13			4				4	13
24–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Dittrich	1.	12	1						1	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Sabína Fraňová	4.	12							0	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Šafek	2.	12	0						0	12
27–32.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Bušáková	4.	14							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Ilievová	2.	11							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Kořánová	3.	11	1		4	3			8	11
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Mikel	4.	32							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Souček	1.	11							0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dušan Stěhule	2.	11			0	1			1	11

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
33–36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zdeněk Garčic	2.	10							0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Kolář	2.	10							0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jiřina Svobodová	3.	10							0	10
	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	4.	283							0	10
37–38.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Bidlák	3.	12							0	9
	Antonín Teichmann	3.	9	1				2		3	9
39–40.	Marek Biroš	2.	8	1	0					1	8
	Vojtěch Václavík	3.	8			3				3	8
41–42.	Mark Daniel	3.	7							0	7
	Rostislav Zlatník	1.	7							0	7
43–45.	Jan Knížek	2.	6							0	6
	Valentína Straková	3.	6							0	6
	Štěpánka Titlová	1.	6							0	6
46–49.	Jan Alfery	1.	5							0	5
	Ondřej Soukup	2.	5	1		4				5	5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Svoboda	4.	29							0	5
	Kateřina Škorvánková	1.	5							0	5
50–53.	Patrik Kroft	4.	4							0	4
	Michal Reška	1.	4							0	4
	Dávid Sekáč	2.	4							0	4
	Matěj Vanko	4.	4							0	4
54–63.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Dolejší	2.	21							0	3
	Lucie Draslarová	1.	3							0	3
	Jan Erhart	2.	7							0	3
	Tomáš Jungman	1.	3							0	3
	Kryštof Kolář	1.	3							0	3
	Jan Kučera	1.	3							0	3
	Jan Kulička	1.	3							0	3
	Olga Leskovjanová	2.	3							0	3
	Jakub Novák	1.	3							0	3
	Jan Škvára	3.	3							0	3
64–65.	Dávid Barbora	2.	2							0	2
	Jitka Fürbacherová	4.	2							0	2
66–68.	Zuzana Kuchařová	1.	1							0	1
	Timotej Mareš	1.	1							0	1
	Dávid Princík	4.	1							0	1

Výsledková listina XIX. ročníku

				Číslo						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_1$
1.	Dr.^{MM} Filip Homza	3.	87	18	11	27	14	17	0	87
2.	Dr.^{MM} Markéta Calábková	2.	83	7	12	8	21	8	8	64
3.	Dr.^{MM} Aranka Hrušková	3.	56	12	8	5	19	6	6	56
4.	Dr.^{MM} Jan Kadlec	2.	98	13	6	12	10	5	4	50
5.	Mgr.^{MM} Anna Kufová	1.	49	17	8	8	6	10	0	49
6.	Dr.^{MM} Aneta Šťastná	3.	89	8	0	10	23	4	3	48
7.	Dr.^{MM} Ondřej Mička	4.	71	7	5	11	7	7	6	43
8.	Mgr.^{MM} Viktor Skoupý	3.	42	6	10	6	5	10	5	42
9.	Mgr.^{MM} Jakub Kušnír	2.	41	11	9	7	9	4	1	41
10.	Dr.^{MM} Matej Lieskovský	3.	67	9	8	5	10	8	0	40
11.	Mgr.^{MM} Patrik Nácovský	2.	37	10	6	6	13	2	0	37
12.	Mgr.^{MM} Marian Poljak	1.	34	11	9	7	0	7	0	34
13.	Mgr.^{MM} Jaroslav Cerman	1.	33	6	6	7	8	4	2	33
14.	Dr.^{MM} Petr Vincena	2.	58	5	1	5	17	3	0	31
15.	Mgr.^{MM} Václav Skála	2.	28	11	7	0	9	1	0	28
16–17.	Mgr.^{MM} Michal Buráň	4.	24	13	11	0	0	0	0	24
	Mgr.^{MM} Linda Langerová	2.	36	6	4	9	5	0	0	24
18.	Mgr.^{MM} Karel Ullwer	4.	21	9	2	2	8	0	0	21
19–20.	Dr.^{MM} Lubomír Grund	4.	58	10	10	0	0	0	0	20
	Mgr.^{MM} Jiří Štábl	2.	20	6	4	5	2	3	0	20
21.	Bc.^{MM} Dominika Macháčová	3.	16	3	7	0	4	2	0	16
22.	Bc.^{MM} Zuzana Magyarová	3.	15	0	0	0	9	6	0	15
23.	Bc.^{MM} Václav Krchňák	1.	13	4	3	0	2	0	4	13
24–26.	Bc.^{MM} Jan Dittrich	1.	12	4	3	2	0	2	1	12
	Bc.^{MM} Sabína Fraňová	4.	12	9	3	0	0	0	0	12
	Bc.^{MM} Michal Šafek	2.	12	1	4	0	5	2	0	12
27–32.	Bc.^{MM} Eliška Bušáková	4.	14	4	7	0	0	0	0	11
	Bc.^{MM} Kristýna Ilievová	2.	11	6	3	2	0	0	0	11
	Bc.^{MM} Barbora Kořánová	3.	11	0	0	0	0	3	8	11
	Mgr.^{MM} Jan Mikel	4.	32	4	0	0	7	0	0	11
	Bc.^{MM} Pavel Souček	1.	11	11	0	0	0	0	0	11
	Bc.^{MM} Dušan Stěhule	2.	11	3	0	0	7	0	1	11

				Číslo						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_1$
33–36.	Bc.$^{\text{M}}$ Zdeněk Garčic	2.	10	8	0	0	0	2	0	10
	Bc.$^{\text{M}}$ Jakub Kolář	2.	10	4	1	0	2	3	0	10
	Bc.$^{\text{M}}$ Jiřina Svobodová	3.	10	10	0	0	0	0	0	10
	Prof.$^{\text{M}}$ Štěpán Šimsa	4.	283	0	0	0	10	0	0	10
37–38.	Bc.$^{\text{M}}$ Matěj Bidlák	3.	12	9	0	0	0	0	0	9
	Antonín Teichmann	3.	9	0	0	0	0	6	3	9
39–40.	Marek Biroš	2.	8	5	0	2	0	0	1	8
	Vojtěch Václavík	3.	8	0	0	3	0	2	3	8
41–42.	Mark Daniel	3.	7	4	0	0	0	3	0	7
	Rostislav Zlatník	1.	7	4	2	0	0	1	0	7
43–45.	Jan Knížek	2.	6	2	0	0	4	0	0	6
	Valentína Straková	3.	6	6	0	0	0	0	0	6
	Štěpánka Titlová	1.	6	6	0	0	0	0	0	6
46–49.	Jan Alfery	1.	5	0	0	5	0	0	0	5
	Ondřej Soukup	2.	5	0	0	0	0	0	5	5
	Mgr.$^{\text{M}}$ Josef Svoboda	4.	29	5	0	0	0	0	0	5
	Kateřina Škorvánková	1.	5	3	0	2	0	0	0	5
50–53.	Patrik Kroft	4.	4	4	0	0	0	0	0	4
	Michal Reška	1.	4	2	0	2	0	0	0	4
	Dávid Sekáč	2.	4	2	1	0	1	0	0	4
	Matěj Vanko	4.	4	4	0	0	0	0	0	4
54–63.	Mgr.$^{\text{M}}$ Jakub Dolejší	2.	21	3	0	0	0	0	0	3
	Lucie Draslarová	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
	Jan Erhart	2.	7	3	0	0	0	0	0	3
	Tomáš Jungman	1.	3	0	0	0	0	3	0	3
	Kryštof Kolář	1.	3	0	1	2	0	0	0	3
	Jan Kučera	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
	Jan Kulička	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
	Olga Leskovjanová	2.	3	2	0	0	0	1	0	3
	Jakub Novák	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
	Jan Škvára	3.	3	3	0	0	0	0	0	3
64–65.	Dávid Barbora	2.	2	2	0	0	0	0	0	2
	Jitka Fürbacherová	4.	2	2	0	0	0	0	0	2
66–68.	Zuzana Kuchařová	1.	1	1	0	0	0	0	0	1
	Timotej Mareš	1.	1	1	0	0	0	0	0	1
	Dávid Princík	4.	1	1	0	0	0	0	0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+" značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.