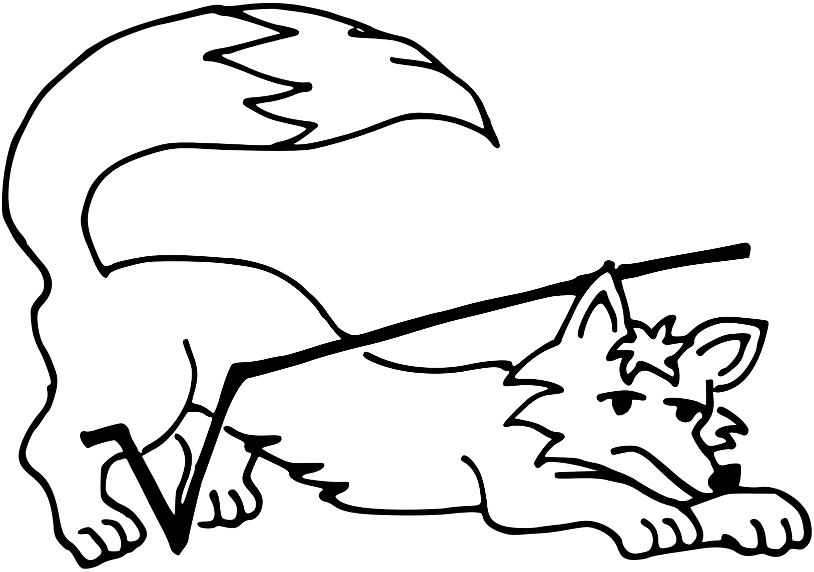
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XIX / Číslo 6



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

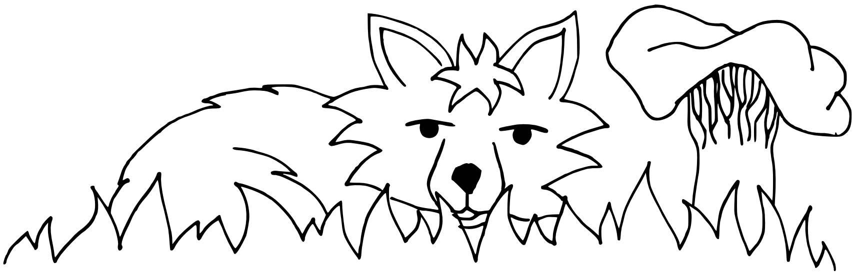
Milí řešitelé,

dostalo se Vám do rukou poslední zadání úloh M&M tohoto školního roku. Doufáme, že se Vám úlohy budou líbit.

Blíží se jarní soustředění a my už se těšíme na setkání s těmi nejpilnějšími z Vás. S ostatními se uvidíme snad na podzim, tak nás neopouštějte, řešte víc.

Abyste se přes léto nenudili, chtěli bychom Vás upozornit na akci Akademie věd Otevřená věda (http://www.otevrenaveda.cz/). Pod hlavičkou Otevřené vědy se konají různé přednášky, exkurze, ale také stáže středoškolských studentů na ústavech akademie (vloni byly jen pro mimopražské, tak letos jen pro Pražany). Mrkněte na to. A užívejte si sluníčka.

organizátoři M&M



Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 20. 5. 2013

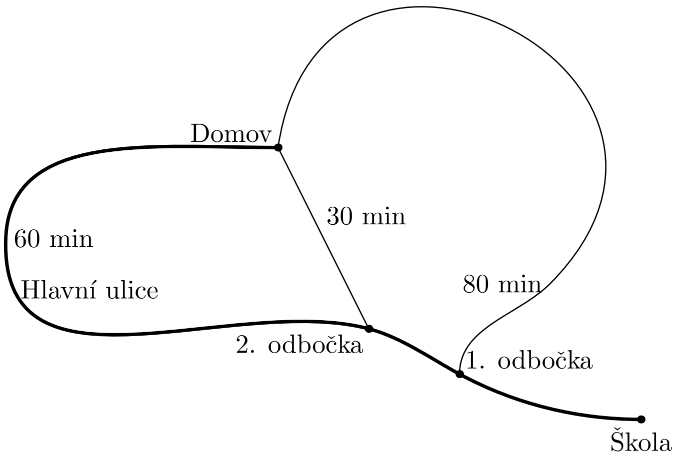
Praktická příručka: Kam po maturitě?

Také letos maturuješ a nevíš, jaká škola pro Tebe bude ta nejlepší? Nabízíme přehled několika variant s ukázkou, jakým směrem by se v tom kterém případě mohl Tvůj život ubírat. První variantou je co jiného než Matfyz.

Úloha 6.1 – Roztržitý profesor matematiky (3b)

Roztržitý profesor se vrací pozdě večer ze školy domů a cestou se zaobírá jistým zajímavým problémem, který jej dnes napadl. Jde po hlavní ulici a nedává pozor, když tu mu náhle zatrne – narazil na známou odbočku. Ví, že takové odbočky jsou tady dvě a oběma trefí domů. Tou první mu cesta od školy domů trvá 80 minut, druhou 30 minut, a pokud neodbočuje a jde stále po hlavní ulici, je na cestě celkem 60 minut. Ke své smůle ale není schopen odbočky rozlišit (bez toho, aby jimi šel tak daleko, že se mu už nevyplatí se vracet – a žádné neznámé zkratky rozhodně nemíní zkoušet, ztratit se takhle navečer, to by mu ještě scházelo). Vlivem zahloubání taky zapomněl, jestli už dnes nějakou míjel.

Navíc je mu jasné, že pokud je teď u první odbočky a půjde dál, tak než dojde ke druhé, myšlenky mu spolehlivě utečou jinam a bude zase ve stejné situaci. Jak se má profesor zachovat, aby domů dorazil co možná nejdříve?



Že to vypadá moc podivínsky? Chceš-li být nohama na zemi, a navíc obohatit svůj život o dávku fantazie, staň se spisovatelem!

Úloha 6.2 – Diamantová planetka (4b)

Byla nebyla jednou jedna kulová diamantová planetka, která se otáčela kolem své osy jednou za jednu hodinu a 45 minut. Právě tak rychle, že na jejím rovníku se odstředivá síla přesně vyrovná gravitační. Planetka byla v celém objemu homogenní až na jednu malou jeskynní dutinu o velikosti většího hangáru umístěnou kus pod povrchem přímo na rovníku. (Planetka sama je mnohem větší než tato dutina.)

Uvnitř této dutiny žil jeden zvědavý skřítek. Jednoho dne upustil malou kuličku tak, že její počáteční rychlost je zhruba 1 cm/s. Jak se bude kulička dál volně pohybovat? (Uvažujte zcela obecný směr počáteční rychlosti.)

Připadá Ti, že se i spisovatelé zabývají hloupostmi? Zkus něco praktičtějšího, třeba vojenskou školu.

Úloha 6.3 – Voják v bunkru (4b)

Voják je zavřen v bunkru, odkud nesmí vycházet. Potřebuje poslat ven z bunkru domluvený signál – právě jednou bliknout světlem nad vstupem. Světlo je na začátku zhasnuté a rozsvítí se při jedné jediné kombinaci stavu několika vypínačů v bunkru, při jakékoliv jiné je zhasnuté. Bohužel tu kombinaci voják nezná a stav žárovky venku neumí nijak zjistit. Vypínače jsou na stěnách tak daleko od sebe, že v jednu chvíli voják dosáhne jen na jeden z nich. V jakém pořadí je má přepínat, aby si byl jistý, že světlo bliklo právě jednou, a navíc aby vypínače nakonec zůstaly v původním stavu?

Nezdá se Ti to jako příliš nadějná vyhlídka? Poslední možnost, kterou dnes představíme, je udělat si místo sbírání titulů z výšek rekvalifikační kurz na cukráře. To by snad mohlo být méně divoké.

Úloha 6.4 – Dort (3b)

Cukrář dostal za úkol vyrobit trojúhelníkový dort s konkrétními délkami stran (přesně podle loga Společnosti přátel obecných trojúhelníků) a speciálně na něj i nechal vyrobit přesně pasující dortovou krabici. Jaké bylo však jeho zděšení, když zjistil, že dort vyrobil zrcadlově symetrický a nepasuje tedy do krabice! Co teď? Rozhodl se dort rozřezat co nejméně rovnými (vertikálními) řezy a naskládat jej do krabice už správně ozrcadlený. Tento dort nemá nijak rozlišené či zdobené vnější okraje, ale nesmíme ho nikdy překlopit polevou dolů! Jak tedy na to?

Jak se zdá, tak kdo se Matfyzákem narodil, najde zajímavých zapeklitých problémů všude plno. Přesto si za redakci dovoluji přát: Na viděnou na Matfyzu!

Řešení témat

Téma 1 – Stavba století

Tentokrát k nám dorazil jeden příspěvek od Mgr.[MM] Aranky Hruškové. Ve svém příspěvku se snažila o analýzu nových (uvedených ve 4. čísle XIX. ročníku) pravidel stavby. Jak již bylo uvedeno, měla by tato stavba být efektivnější. Autorka příspěvku zde uvádí, že na konci ulice lze postavit věž výšky 4 a uprostřed ulice věž výšky 6. Její důkaz zde uvádíme beze změn:

Vyšší věž než 6 nelze postavit, protože v takovém případě bychom museli v těsném sousedství šestky postavit věž výšky 5. Tu postavíme jako oblast věží 2, 3 a 4, ale abychom postavili pětku těsně vedle šestky, museli bychom jednu z věží 2, 3 a 4 postavit mezi dvě věže již stojící (mezi šestku a jednu z 2, 3 a 4), což lze jen s věží výšky 1. Z toho také plyne, že na konci ulice lze postavit nejvýš věž výšky 4.

Dále uvádí, že v rohu čtvercové sítě můžeme postavit věž o výšce nejvýše 7, „u zdi“ nejvýše výšky 10 a v dvojrozměrném prostoru o výšce 13.

Pokud se vám výše uvedený důkaz nezdá býti zcela korektním, tak je jen na vás, abyste předložili svůj. Důkaz o maximální výšce věže v prostoru (ať už dvojdimenzionální) stále čeká na svého tvůrce. Také můžete ukázat, že věž o nějaké výšce určitě postavit lze.

xlfd

Téma 2 – Měření rychlosti

K tomuto tématu nám došlo pouze jedno řešení a to od Jana Kadlece. Ve svém řešení se zabýval měřením rychlosti ve vzduchu pomocí Pitotovy trubice.

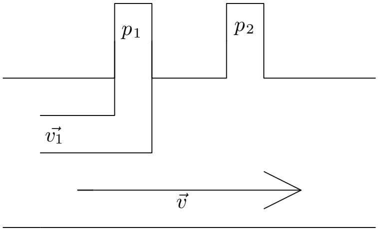
Abychom si mohli vysvětlit princip Pitotovy trubice, je potřeba si osvětlit Bernoulliho rovnici. Tato rovnice je prakticky zákon zachování energie. Proudící tekutina[1] má celkovou energii složenou ze dvou složek – kinetické energie a tlakové potenciální energie. Tlaková potenciální energie je energie, která souvisí s tlakem tekutiny. Je to přesně ta energie způsobující, že z nádoby pod tlakem voda stříká místo toho, aby vytékala. Tlaková potenciální energie odpovídá práci vykonané kapalinou, pokud by trubicí, kterou kapalina teče, tlačila před sebou píst. Vykonaná práce je $W = Fx$, kde F je tlaková síla a x je vzdálenost, o kolik se píst posunul. Tlaková síla se spočítá jako součin tlaku a plochy, na kterou působí. Tlaková potenciální energie tedy bude $E_p = pSx = pV$. Kinetická energie bude dle standardního vzorce $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Nyní již můžeme přistoupit k popisu Pitotovy trubice. Tato metoda se používá k měření rychlosti proudící tekutiny a také k měření rychlosti letadel ve vzduchu (protože rychlost je závislá na vztažné soustavě). Jak je vidět na obrázku, toto zařízení se skládá ze dvou trubic, jedné namířené proti směru pohybu tekutiny a druhé namířené kolmo k tomuto pohybu. Budeme měřit tlak v obou trubicích. Jako vztažnou soustavu zvolme objekt, na kterém je Pitotova trubice umístěna, tudíž trubice stojí a tekutina kolem je v pohybu. Také předpokládáme, že proudění tekutiny je rovnoměrné. Tekutina, která je před ústím trubice umístěné proti směru pohybu, se zastaví ($v_1 = 0$) a díky zákonu zachování energie se kinetická energie přemění na energii potenciální tlakovou, v trubici tedy stoupne tlak. Oproti tomu tekutina, která je před ústím trubice kolmé ke směru pohybu, není touto trubicí nijak ovlivňována, tudíž v trubici bude tlak odpovídající okolnímu atmosferickému tlaku. Celková energie proudící tekutiny bude v obou místech stejná, tudíž dosadíme do Bernoulliho rovnice a upravíme:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 &= \frac{1}{2}\rho v^2 + p_2 \\
p_1 &= \frac{1}{2}\rho v^2 + p_2 \\
2 \cdot (p_1 - p_2) &= \rho v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}
\end{aligned}
$$

Tímto způsobem umíme zjistit rychlost proudící tekutiny. Je důležité poznamenat, že v případě měření rychlosti letadla měříme rychlost letadla proti okolnímu vzduchu, což může být velmi odlišné od rychlosti letadla proti zemi.

[1] tekutinou se rozumí jak plyn, tak kapalina



Další technikou měření, kterou popsal, je zajímavá realizace na téma „dva pozorovatelé ve vlaku“:

Jsme dva a jedeme tunelem. Postavíme se kolmo ke směru jízdy (např., je to nejjednodušší a dobře proveditelné), a to jeden na začátek našeho prostředku a druhý na konec. Oba dva se budou dívat přesně kolmo ke směru jízdy a první vystřelí třeba barevnou kuličku, která se na zdi rozprskne, nebo jinak, předem dohodnutým způsobem, naruší strukturu tunelu. V tu samou chvíli dá znamení druhému – zvuk (zakřičí), světlo (zabliká baterkou) – druhý zmačkne stopky a zastaví je až toto narušení struktury tunelu bude přímo proti němu. Pak změří vzdálenost mezi sebou a mají dráhu i čas. Čím menší je vzdálenost mezi nimi, tím přesnější je okamžitá rychlost.

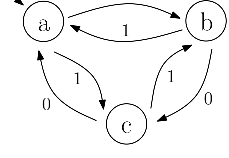
Uvažoval také nad měřením rychlosti letadla pomocí úhlů a podobností, bohužel nedodal žádnou techniku, kterou by se daly měřit úhly, pod kterými vidíme letící předměty, či jejich velikosti na obloze, která by nebyla zatížena obrovskou chybou měření.

Jethro

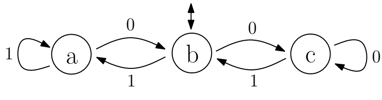
Téma 3 – Konečné automaty

K tématu přišly dva příspěvky. Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Aneta Šťastná rozebírá, co dělají zadané tři automaty, a následně se věnuje konstrukcím automatů pro některé ze zadaných problémů. Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Homza sestrojil dokonce automaty řešící všechny úkoly, které byly v úvodním textu k tématu zadány. Nikde ale pořádně nezdůvodnil, že sestrojený automat skutečně počítá to, co počítat má. Celý jeho článek a úryvek z příspěvku Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Anety Šťastné otiskujeme.

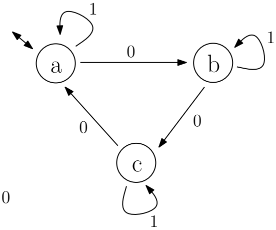
Připomeňme nejdříve tři automaty zadané v prvním čísle letošního ročníku:



automat č. 1



automat č. 2



automat č. 3

Rozbor zadaných automatů

Dr.^{MM} Aneta Šťastná

Automat č. 1

Automat přijímá všechna slova, ve kterých je rozdíl v počtu 1 a 0 dělitelný třemi.

Automat č. 2

Přijímá slova ve tvaru $1 \bullet 1^* \bullet 0$ a $0 \bullet 0^* \bullet 1$, kde znak $\bullet$ znamená zřetězení a * libovolný počet opakování. Tedy automat přijímá slova skládající se ze samých jedniček (alespoň jedné) následovaných nulou nebo ze samých nul (opět alespoň jedné) následovaných jedničkou.

Dále automat přijme libovolné slovo vzniklé zřetězením slov výše definovaných.

Automat č. 3

Tento automat přijímá slova, kde je počet nul v nich obsažených dělitelný třemi.

O konečných automatech

Dr.^{MM} Filip Homza

Nejprve rozebereme situace pro automaty č. 1 až 3:

Automat č. 1

Tento automat přijímá všechna slova, která se buď skládají z prázdné množiny, nebo ze sekvencí tří nul 000 a tří jedniček 111. Po jejich „seškrtání“ (a to včetně „seškrtání“ nově vzniklých sekvencí po třech stejných znacích, např. po „seškrtání“ tří nul 000 ve slově 100011 vzniká slovo 111, které se dá opět „seškrtat“ vzniká slovo buď v poměru počtu jedniček a nul 1:1 nebo prázdná množina.

Automat č. 2

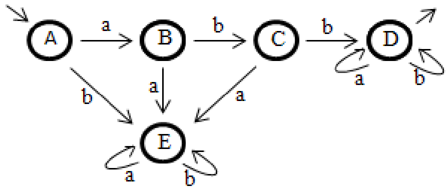
Automat č. 2 přijímá všechna slova, které obsahují buď prázdnou množinu nebo sekvence znaků $000\dots01$ a $111\dots10$, ze kterých po postupném „seškrtání“ těchto sekvencí postupně od začátku slova vzniká prázdné slovo.

Automat č. 3

Poslední (třetí) automat přijímá všechna slova, která se skládají z prázdné množiny nebo je počet nul v nich obsažených dělitelných třemi.

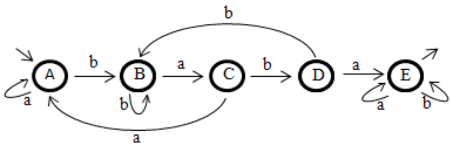
Dále předkládám návrhy automatů nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, pro které platí:

- automat přijímá pouze slova začínající *abb*



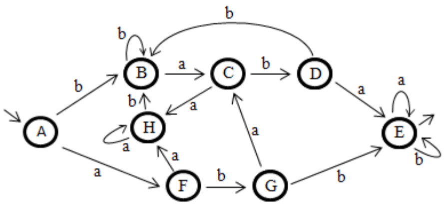
	a	b
→A	B	E
B	E	C
C	E	D
← D	D	D
E	E	E

- automat přijímá pouze slova obsahující podřetězec *baba*



	a	b
→A	A	B
B	C	B
C	A	D
D	E	B
← E	E	E

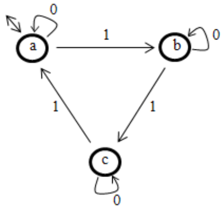
- automat přijímá pouze slova začínající *abb* nebo obsahující podřetězec *baba*



	a	b
→A	F	B
B	C	B
C	H	D
D	E	B
← E	E	E
F	H	G
G	C	E
H	H	B

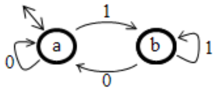
Poté jsem přemýšlel i nad konečnými automaty nad abecedou $\Sigma = \{1, 0\}$, které přijímají právě slova reprezentující čísla:

- dělitelná třemi zapsaná v desítkové soustavě
  Pro všechna čísla dělitelná třemi zapsaná v desítkové soustavě platí, že součet všech číslic v čísle je také dělitelný třemi. Pokud tedy můžeme skládat čísla jen z číslic 0 a 1, je jasné, že počet jedniček v čísle musí být také dělitelný třemi. Automat poté bude vypadat takto:



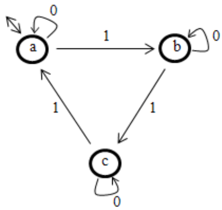
	0	1
↔a	a	b
b	b	c
c	c	a

- dělitelná pěti zapsaná v desítkové soustavě
  Čísla dělitelná pěti zapsaná v desítkové soustavě musí vždy končit číslicí 0 nebo 5. Pokud ale můžeme tato čísla skládat jen z číslic 0 a 1, musí čísla zapsaná v desítkové soustavě a zároveň dělitelná pěti končit nulou. Konečný automat pro tuto situaci pak může vypadat takto:



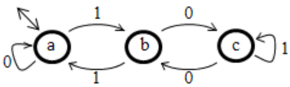
	0	1
↔a	a	b
b	a	b

- dělitelná třemi zapsaná v desítkové soustavě pozpátku
  Pokud zapíšeme číslo dělitelné třemi pozpátku, bude také opačně zapsané číslo dělitelné třemi. Proto můžeme použít pro tento případ stejný automat jako pro čísla dělitelná třemi zapsaná v normálním pořadí číslic:



	0	1
↔a	a	b
b	b	c
c	c	a

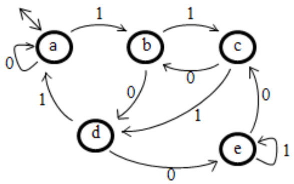
- dělitelná třemi zapsaná ve dvojkové soustavě
  Číslo tři se ve dvojkové soustavě zapíše jako číslo 11. Násobky tří se pak zapíší jako součty ve dvojkové soustavě: 11 + 11 + … + 11, např. 6 jako 110, 9 jako 1001, … Z toho vyplývá, že automat v tomto případě může být takovýto:



	0	1
↔a	a	b
b	c	a
c	b	c

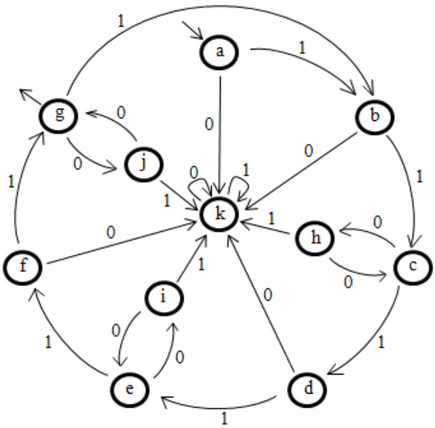
- dělitelná pěti zapsaná ve dvojkové soustavě
  Číslo pět se ve dvojkové soustavě zapíše jako číslo 101. Násobky pěti se pak zapíší jako součty ve dvojkové soustavě: 101 + 101 + … + 101, např. 10

jako 1010, 15 jako 1111, ... Z toho vyplývá, že automat v tomto případě může být takovýto:



	0	1
↔a	a	b
b	d	c
c	b	d
d	e	a
e	c	e

Posledním zmíněným úkolem je vymyslet automat nad abecedou $\Sigma = \{1, 0\}$, který přijímá slova začínající znaky 11 následovanými dvojicemi znaků 00 a 11, která mají počet jedniček dělitelný třemi. Ze zadání vyplývá, že aby byl počet jedniček dělitelný třemi, musí být dělitelný i šesti. Tento automat pak může pracovat např. takto:



	0	1
→a	k	b
b	k	c
c	h	d
d	k	e
e	i	f
f	k	g
← g	j	b
h	c	k
i	e	k
j	g	k
k	k	k

Co se týká obecných otázek o konečných automatech, lze říci, že nelze vždy sestrojit konečný automat, který přijímá požadovanou množinu slov, protože konečné automaty nemají neomezenou paměť a mají jen konečný počet stavů. Jako příklad nesestrojitelného automatu jde uvést např. automat nad abecedou $\Sigma = \{1, 0\}$, který by měl přijímat všechna slova obsahující na začátku n jedniček a následně n nul (kde $n > 0; n \in \mathbb{N}$). Sestrojitelností nebo nesestrojitelností konečných automatů se zabývá tzv. Nerodova věta. Pokud ale bude jazyk konečný (bude obsahovat konečně mnoho slov), automat bude vždy možné sestrojit. Na tomto principu pracují například různé rozpoznávače a překladače národních jazyků – jelikož víme, že každý lidský jazyk obsahuje konečně mnoho slov, je k němu vždy možné sestrojit konečný automat na rozpoznávání jazyka. Dokonce může existovat více různých konečných automatů, které přijímají stejný jazyk, ale tyto automaty se liší mírou složitosti, tj. některé stavy alespoň v jednom ze dvou různých automatů přijímajících stejný jazyk jsou zbytečné a více stavů v tomto automatu se dá nahradit alespoň jedním stavem.

Pozn. red.: Výše uvedený článek mohl být díky své kvalitě uveřejněn zcela bez redakčních úprav. Vytknout lze akorát občas nepříliš precizní zdůvodnění, že uváděné automaty dělají opravdu to, co dělat mají. Poslední tři uvedené automaty by si zasloužily pořádné zdůvodnění, proč opravdu fungují. To může být výzva pro autora i další řešitele, kteří by se chtěli zapojit.

Co zkoumat dál?

Mimo precizního zdůvodnění správnosti automatů nebyla ani v jednom ze článků zatím zcela vyřešena otázka, jak pěkně popsat, která slova přijímá automat číslo 2. Inspirací, jak by takový popis mohl vypadat, může být příspěvek Dr.MM Anety Šťastné. Podařilo by se vám popsat všechna přijímaná slova jedním výrazem?

Pokud se trochu sžijete s konceptem konečných automatů, zjistíte, že se objevují v mnoha algoritmech (postupech) používaných všude kolem nás. Můžete se pokusit zamyslet nad tím, kde všude lze na konečné automaty narazit.

Autor článku správně tvrdí, že může existovat více automatů přijímajících stejný jazyk a že tyto automaty mohou být různě velké, kde velikostí automatu rozumíme počet jeho stavů. Šlo by nějak ukázat, že automat už má nejmenší možný počet stavů?

Kuba

Téma 4 – Věty o čtvercích

Markéta Calábková přispěla k tomuto tématu důkazem, že každé číslo $m \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve tvaru $a^2+b^2+c^2+2^k, a, b, c, k \in \mathbb{N}_0$. Úspěšně se zabývá i otázkou zápisu ve tvaru $a^2+b^2+c^2+2^{2k}$.

Řešení je formálně správně až na jednu drobnost, kterou by jistě autorka dokázala snadno dořešit. Celkově je ale text poměrně obtížně čitelný, přestože metoda důkazu je velmi elegantní. Po dokázaní nějaké věty je často potřeba ještě strávit nějaký čas rozmyšlením všech detailů a doladěním důkazu, aby byl snadno pochopitelný. Tato práce v případě tohoto důkazu ještě na někoho čeká a může být výzvou nejen pro autorku.

Příspěvek otiskujeme přesně v původním znění.

Kuba

O přechodu od tří čtverců ke čtyřem

Markéta Calábková

Vezmeme si zbytek součtu $a^2+b^2+c^2+2^k$ po dělení čtyřmi. Vím už, která čísla umím zapsat jako součet tří čtverců, tedy podle modula čtyřmi potom od toho čísla odečteme takovou mocninu dvojky, tedy zvolíme takové k, aby ten výraz bez mocniny dvojky, tedy $a^2+b^2+c^2$, opravdu šel zapsat jako součet tří čtverců.

Je-li zbytek 0, je součet větší nebo roven čtyřem (ze zadání – číslo má být větší nebo rovno 1), potom, abychom měli jistý součet tří čtverců, odečteme třeba dvojku. Vznikne nám číslo dělitelné pouze dvěma, a to jako součet tří čtverců zapsat umíme. Je-li ten zbytek 1 nebo 2, potom odečteme čtyřku a zbyde nám pořád ten samý zbytek, a výraz s tímto zbytkem umíme zapsat jako součet tří čtverců. Pokud je čtyřka větší než to číslo (tedy čísla 1 a 2), odečtu jedničky a pořád to budu schopna zapsat jako součet tří čtverců ($1 = 1^2 + 2 \cdot 0^2$ a $0 = 3 \cdot 0^2$). Když je zbytek 3, odečteme jedničku a dál postupujeme jako v případě zbytku 2, tedy ho umíme zapsat. Tímto jsem tedy dokázala slabší tvrzení.

Chceme-li dokázat silnější tvrzení s $2k$, potřebujeme nějak upravit mocninu dvojky u čísel dělitelných čtyřmi, u zbytku už sudé mocniny máme. Tedy pokud je to číslo dělitelné čtyřmi, zjistíme modulo 16. Pokud bude mít v tomto případě nenulový zbytek, zachováme se podobně jako u modula 4 – u zbytků 4 a 8 odečteme 16 (nebo eventuálně 4, za popsaných podmínek), u 12 odečteme čtyřku a bude to platit, jak už jsem ukázala a jak plyne z věty o třech čtvercích. Pokud ale bude dělitelné 16, zjistíme modulo 64 a tak dále. Zjišťujeme modulo 2^{2l}. Jakmile narazíme na nenulový zbytek, u zbytků $1 \cdot 2^{2(l-1)}$ a $2 \cdot 2^{2(l-1)}$ odečteme 2^{2l} (nebo eventuálně $2^{2(l-1)}$) a u zbytku $3 \cdot 2^{2(l-1)}$ odečteme $2^{2(l-1)}$. Pro nějaké l určitě dostaneme celočíselný zbytek. Tímto jsem ukázala, že platí i silnější tvrzení.

Kuba

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Kudy? (5b)

Zadání:
Stojím na křižovatce a nevím, kterou ze dvou cest mám pokračovat. Vím, že na té správné je v neznámé vzdálenosti od křižovatky stanice metra. Jak mám postupovat, abych se tam dostala? Jakou vzdálenost při tom v nejhorším případě urazím? Zkuste vymyslet (ne nutně optimální) postup, při kterém bude nachozená vzdálenost růst co nejpomaleji s rostoucí vzdáleností stanice. Ideální by bylo, kdyby mi stačilo ujít nanejvýš desetkrát víc, než kdybych šla nejkratší možnou cestou.

Řešení:
Představme si následující strategii: Zkusím se vydat 1 m od křižovatky doprava, a když nic nenajdu, pak půjdu 1 m od křižovatky doleva. Pokud stále nic nenajdu, vrátím se opět vpravo a půjdu 2 m od křižovatky a tak dál – vždy znásobím předchozí vzdálenost dvěma.

Protože se můj krok neustále prodlužuje, tímto způsobem určitě nakonec najdu stanici metra. Otázkou je, jak dlouho mi to bude trvat.

Všimneme si jedné důležité vlastnosti: pokud jsem našel metro v n-tém kroku a poslední vzdálenost od křižovatky tedy byla 2^n, ušel jsem ve všech předchozích krocích od křižovatky vlevo:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 \cdot (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1)$$

Výraz v závorce je přitom ostře menší než 2^n. Můžeme si to představit tak, že se snažíme dostat k hodnotě H na reálné přímce tak, že nejdříve ujdeme polovinu vzdálenosti od počátku souřadnic, poté polovinu poloviny (tedy čtvrtinu), poté osminu atd. Vždy zkrátíme zbývající vzdálenost na polovinu, ale v konečném počtu kroků nikdy nedosáhneme až hodnoty H. Tedy:

$$2 \cdot (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1) < 2 \cdot 2^n$$

Za předpokladu, že metro se od křižovatky nacházelo nalevo ve vzdálenosti 2^n, jsme tedy nalevo od křižovatky ušli méně než $3 \cdot 2^n$ m a napravo jsme ušli méně než $4 \cdot 2^n$ (protože se dříve vydáváme doprava než doleva, musíme se ze vzdálenosti 2^n vpravo vrátit zpět ke křižovatce, zatímco zleva už ne).

Celkově při naší strategii ujdeme vzdálenost menší než $7 \cdot 2^n$ m. Je-li vzdálenost metra od křižovatky k mocninou 2, pak ujdeme v nejhorším případě vzdálenost menší než $7k$ m. Co když ale vzdálenost metra od křižovatky k není mocnina 2? Pak ujdeme přinejhorším až $9 \cdot 2^{\lceil \log_2 k \rceil}$ m, neboť se metro může skrývat na pozici $2^n + \varepsilon$.

Zkusme se zamyslet nad mírným vylepšením této strategie. Poté co zjistím, že se ani napravo ani nalevo od křižovatky do vzdálenosti 1 m metro nenachází, budu pokračovat směrem vlevo až do vzdálenosti 2 m a pokud ani pak nic nenajdu, otočím se vpravo. Jakou vzdálenost ujdeme v nejhorším případě s touto strategií?

Tento postup je ekvivalentní s tím, že půjdu nejprve 2 m vpravo, poté 4 m vlevo, poté 8 m vpravo atd. Tedy vzdálenost od křižovatky vynásobím dvěma pokaždé když ji přecházím a ne jen při přechodu zleva doprava.

Tady na nás ale číhá malá zákeřnost. V případě, že se metro nachází těsně nalevo od 2^n (dejme tomu, že $k = 2^n + 1$), můžeme se na pravou stranu projít o 2^{n+1} a zpět (a pak ještě dalších $2^n + 1$ vlevo, než na metro skutečně narazíme). Chtěli bychom:

$$\begin{aligned}
10k &\geq 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}) + k \\
9 \cdot 2^n + 9 &\geq 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}) \\
9 \cdot 2^n + 9 &\geq 2 \cdot (2^{n+2} - 1) \\
2^{n+3} + 2^n + 9 &\geq 2^{n+3} - 2 \\
2^n + 11 &\geq 0
\end{aligned}$$

Toto zjevně platí pro každé $n \geq 0$. Tato strategie tedy také funguje a v nejhorším případě je stejně rychlá jako předchozí strategie (zkuste si spočítat délku uražené trasy, když se metro nachází ve vzdálenosti $2^n + \varepsilon$).

Honza

Úloha 4.2 – 1415-úhelník (5b)

Zadání:
Mějme konvexní mnohoúhelník o 1415 stranách, jehož obvod je 2001 cm. Dokažte, že mezi jeho vrcholy existují 3 takové, které tvoří vrcholy trojúhelníku s plochou menší než $1\,\mathrm{cm}^2$.

Řešení:
Jako vzorové řešení uvádím řešení Prof.™ Štěpána Šimsy. Označme si postupně strany a_1, a_2, ... , a_{1415}. Víme, že

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + ... + (a_{1415} + a_1) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{1414} + a_{1415}) =$$

$$2 \sum_{i=1}^{1415} a_i = 2 \cdot 2001 = 4002.$$

Členů na levé straně je 1415 (každou stranu začíná jeden člen) a z Dirichletova principu tedy bude aspoň jeden součet maximálně 4002/1415. BÚNO předpokládejme, že je to součet $a_1 + a_2$. Z AG nerovnosti plyne:

$$\frac{(a_1.a_2)}{2} \leq \frac{((a_1 + a_2)/2)^2}{2} \leq \frac{(2001/1415)^2}{2} < 1$$

Na levé straně máme maximální možný obsah trojúhelníku, který tvoří hrany a_1, a_2 (a má tedy vrcholy ve vrcholech našeho 1415-úhelníku), přičemž vycházíme ze vzorečku pro obsah trojúhelníku $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ a z toho, že $\sin\gamma \leq 1$. Proto je tedy obsah tohoto trojúhelníku menší než $1\,\mathrm{cm}^2$.

Lukáš

Úloha 4.3 – Zrcadlo (2b)

Zadání:
Proč jsou písmena v zrcadle převrácená pravo-levě a ne vzhůru-dolů?

Řešení:
Tato úloha v zadání úmyslně naváděla k předpokladu, který máme v obecném povědomí, ale není úplně správný. Pravo-levé převrácení v zrcadle nenastává vždy, ale jen za určitých okolností. Pojďme to rozebrat podrobněji.

Někteří tvrdili, že zrcadlo samo o sobě nepřevrací vůbec. S tímhle tvrzením nejde souhlasit, zrcadlo obraz opravdu převrací. Vezměme si třeba obyčejnou rukavici. Pravá a levá rukavice budou vždy vypadat rozdílně, bez ohledu na to, jak je natočíme. Pokud nám někdo ukáže fotografii, umíme jednoznačně říct, jestli je to levá, nebo pravá. Když ale vyfotíme odraz rukavice v zrcadle, rázem se pravá změní na levou a naopak.

Podstatné je, že zrcadlo neobrací ani pravo-levě, ani vzhůru-dolů (bez újmy na obecnosti uvažujme nadále svislé zrcadlo, třeba na zdi). Obraz v zrcadle je převrácený předo-zadně, neboli symetrický podle roviny zrcadla. Pokud držíme v ruce před sebou nějaký předmět a díváme se na jeho přední stranu, obraz v zrcadle nám ukáže stranu zadní.

Kde se tedy bere pravo-levé otočení písmen? To vznikne složením předo-zadního zrcadlení s rotací dotyčného předmětu. Člověk, co sedí proti nám v metru, má noviny otočené kolem svislé osy (vůči poloze, ve které bychom si je četli my). Rotací se převrátí dvojice směrů, zároveň pravo-levý i předo-zadní.[2] Když toto složíme se zrcadlením, které převrací předo-zadní směr, zbude nám hledané pravo-levé převrácení.

Pokud by hypotetický čtenář novin nejprve seděl vedle nás a poté by, místo přesednutí si na protější sedačku, skočil půlsalto a pokračoval ve čtení novin zavěšen hlavou dolů od stropu, uvidíme v zrcadle písmena převrácená vzhůru-dolů a zároveň bude pravo-levý směr správně. Je to, analogicky k předchozímu odstavci, důsledkem složení rotace kolem vodorovné osy a zrcadlení.

Nakonec si můžeme představit i situaci, kdy žádnou rotaci navíc nepřidáme. Pokud bychom text vytiskli na průhlednou fólii, kterou budeme držet před sebou, uvidíme písmena v zrcadlovém odrazu zcela stejná jako napřímo. Obraz je převrácený jen předo-zadně, což u průhledné fólie nepoznáme. (Pokud by text byl na obyčejném papíře, uvidíme místo písmen jen zadní stranu papíru.)

Můžeme tedy říci, že zrcadlo převrací jen předo-zadně, ale protože v běžném životě se většinou potkáváme s neprůhlednými předměty, přidáváme k transformaci v zrcadle ještě fyzickou rotaci předmětu. A tu jsme v naprosté většině případů zvyklí provádět kolem svislé osy. Snaha zachovávat právě „dolů“ a „nahoru“ je pak dána gravitačním působením, které tento směr dělá významným oproti ostatním směrům.

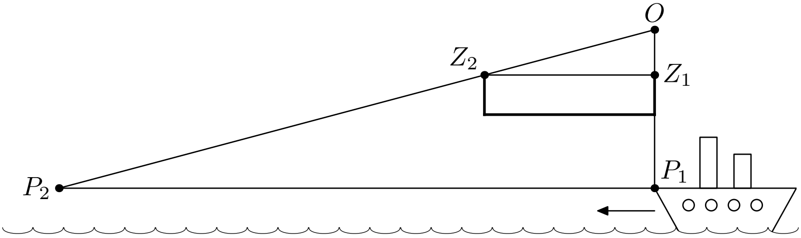
Marble

Úloha 4.4 – Křížení cest (4b)

Zadání:
Přecházím po mostě přes řeku, když v tom si všimnu, že se právě pode mnou nachází příď lodě plující přímo pod most. Jak dlouho potrvá, než spatřím příď lodě na druhé straně mostu? Jak se bude řešení lišit, pokud půjdu rovnoměrně dál, od případu, kdybych zůstal stát na místě? Řešení můžeš hledat pro konkrétní most, loď a osobu, nebo zcela obecně.

Řešení:
Nejprve vyhmátneme to podstatné. Označme O bod, ve kterém se nachází naše oko, zanedbejme druhé, jako P_1 a P_2 označme pozici špičky přídě lodi pod námi a tehdy, kdy ji znovu uvidíme na druhé straně mostu. Konečně body Z_1, Z_2 rozumějme ty body na vrchu (neprůhledného) zábradlí, pod kterými příď lodi propluje.

[2] Všimněte si, že zrcadlení převrací vždy jen jeden ze tří kolmých směrů v prostoru, zbylé dva zachovává. Naopak fyzická rotace předmětu vždy změní dvojici směrů a zachová jen třetí směr, ten co míří podél osy otočení.



Potřebujeme zjistit vzdálenost $|P_1P_2|$. Trojúhelníky OZ_1Z_2 a OP_1P_2 mají stejné úhly u vrcholu O a pravý úhel u P_1 resp. Z_1, jsou tedy podobné a platí

$$\frac{|OZ_1|}{|Z_1Z_2|} = \frac{|OP_1|}{|P_1P_2|}$$
$$|P_1P_2| = \frac{|OP_1| \cdot |Z_1Z_2|}{|OZ_1|}$$

Loď se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v, takže se její příď za zábradlím na druhé straně mostu vynoří za čas

$$t = \frac{|P_1P_2|}{v}$$

Co když nemáme čas kochat se pohledem na holešovické komíny či stavbu tunelu Blanka a pokračujeme po mostě dál rovnoběžně se zábradlím? Uvědomme si, kdy vlastně příď znovu uvidíme. Bude to tehdy, když se tato ocitne v rovině ρ určené bodem O a přímkou z procházející vrchem zábradlí na druhé straně mostu. Bod O se bude při chůzi pohybovat po nějaké přímce rovnoběžné se z, ta bude jistě patřit do ρ (je rovnoběžná s přímkou $z \subseteq \rho$ a prochází bodem $O \in \rho$), a tak bude oko a zábradlí určovat stále stejnou rovinu. Na čas opětovného spatření parníku tedy nemá chůze po (dostatečně dlouhém) mostě vliv.

Matěj

Úloha 4.5 – Šifra (1b)

Zadání:
Jak vypadá Praha? Odpověď hledej v textu příběhu. Budeš potřebovat tužku.

Řešení:
Praha byla zašifrovaná v popisu cesty novopečené matfyzačky na kolej. Když jste si to zkusili nakreslit, vyšly různým z vás různé obrázky, což vzhledem k přibližnosti popisu nevadí (byť v textu bylo pro většinu úseků dáno i měřítko). Některé vaše obrázky byly velmi nápadité (klíč, elektrický obvod, reliéf města). Mně třeba vyšel s trochou představivosti strom u rybníka a porostlý kopec, viz postup.

Tři sta metrů:

```


---
```

Odbočka vlevo dlouhá sto metrů + obkroužit blok domů na cca tisíc kroků, tj. 750 m, odbočka byla špatně ⇒ vrátila se:

```
 ,---.
 \___/
---|
```

Dále pokračuje rovně, místo aby odbočila vlevo, za dalších pár set merů je u metra:

```
 ,---.
 \___/
---|---
```

Dolů po schodech a dlouhá trochu klikatá cesta metrem:

```
 ,---.
 \___/
---|---
       '~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

Po schodech nahoru, kousek rovně a nahoru na most:

```
 ,---.
 \___/
---|---                                ---/
       '~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

Chůze po mostě, poskakování a po ne o moc víc než 300 metrech dolů po točitých schodech… a dojít na kolej:

```
 ,---.
 \___/                                      _,,,_
---|---                                ---/     ---
       '~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

Jelikož ze zadání bylo dobře patrné, že úloha je šifrou, jejíž řešení se nějak skrývá v textu příběhu a bude se nejspíš kreslit, tak řešení, která nebrala v úvahu text příběhu (mapa Prahy, popis tvaru katastrálního území), i ta, která ho v úvahu brala, ale jen vyňala část textu (je tam 1415-úhelníkový blok domů, vypadá slibně), se žádnou šifru ani nepokoušela řešit, tudíž jsem za ně bodík nedávala. Ten dostali jen ti, co si trochu pohráli.

Alena

Úloha 4.6 – Sage (3b)

Zadání:
Pro řešení úloh zkuste použít jen Sage a Python. Krom výsledku pošlete i váš kód s komentářem.

(i) Kolik existuje neisomorfních Eulerovských grafů (nakreslitelné jedním uzavřeným tahem; totéž jako že mají všechny stupně sudé) na sedmi vrcholech?

(ii) Kolik je prvočíselných dvojčat (dvou prvočísel lišících se o 2) mezi 1 a 1000000?

Řešení:
Část (i) Poměrně přímočaré řešení je projít všechny grafy v `graphs(7)` (ty už jsou navzájem neizomorfní) a o každém zjistit, zda má všechny stupně sudé. Nejpohodlnější možnost (snad až moc), kterou nikdo nevyužil, je funkce `g.is_eulerian()`. Ze stupňů grafu to zjistí například následující program (výsledek bude vždy v proměnné `c`):

```
c = 0
for g in graphs(7):
  eul = True
  for v~in g.vertices():
    if g.degree(v) % 2 != 0:
      eul = False
  if eul: c += 1
```

Zápis tohoto programu lze ale (po Pythonovsku) různě zkracovat. Například pomocí seznamových výrazů:

```
c = 0
for g in graphs(7):
  if all([(g.degree(v) % 2 == 0) for v in g.vertices()]):
    c += 1
```

Výraz `(g.degree(v) % 2 == 0)` vytvoří `True` či `False` za každý vrchol grafu díky `for v in g.vertices()`. Seznamový výraz je na tom řádku to vše v hranatých závorkách. Funkce `all` dostane už jen seznam `True` a `False` a vrátí jejich logickou konjunkci. Jde jít ještě dále – proměnná `c` na sčítání jedniček je taky taková nanicovatá:

```
sum([all([(g.degree(v) % 2 == 0) for v in g.vertices()])
  for g in graphs(7)])
```

Zde známý výraz v `all(... )` obalíme do dalšího seznamového výrazu přes všechny grafy v `graphs(7)`. Funkce `sum` pak dostane seznam `True` a `False` za každý graf z `graphs(7)` podle toho, zda byl Eulerovský. Využíváme též toho, že pro sčítání (a násobení) se `True` chová jako 1 a `False` jako 0. A vyjde 54.

Část (ii): Přímočaré řešení je projít seznam prvočísel a v pomocné proměnné si pamatovat to předchozí:

```
c = 0
prev = -42 for p in primes(1000000):
  if p - prev == 2: c += 1
  prev = p
```

Toto se špatně zkracuje seznamovým výrazem, protože potřebujeme vždy dva po sobě jdoucí prvky seznamu, ale existuje i jiné řešení používající opakované `is_prime(p-2)`. Toto je sice o něco méně efektivní, ale lépe se to zapíše (i ve standardní for-smyčce).

```
sum([is_prime(p-2) for p in primes(1000000)])
```

Vyjde 8169. A pozor na to, že pokud bychom použili `is_prime(p+2)`, pak bychom vlastně počítali dvojčata do 100002.

Tomáš

TEX

V dnešním článku se budeme zabývat programem a typografickým systémem TEX. Jeho použití je široké – od publikování článků ve vědeckých časopisech přes psaní bakalářských, diplomových a jiných odborných prací až po vytváření skript a učebnic (především těch vysokoškolských). Dokonce i tento článek, stejně jako celé číslo M&M je vytvořeno v TEXu.

Co to tedy ten TEX vlastně je? Jedná se o program pro počítačovou sazbu dokumentů, především matematických a jiných odborných textů. V dobách, kdy se ještě každá strana sestavovala ručně z jednotlivých kovových liter se utvořila ustálená pravidla pro sazbu dokumentů, která dnes nazýváme typografickými pravidly. Jednou z velkých předností TEXu je, že velkou část těchto typografických zásad dodržuje a text, který z něho vychází, je potom na pohled pěkný a dobře se čte (mimochodem, všimněte si někdy houfného porušování typografických zásad např. v denním tisku).

Na rozdíl od programů jako je LibreOffice Writer nebo MS Word není TEX textovým editorem. Spíše se řadí do množiny programovacích jazyků, přesněji řečeno makro jazyků. Vytvoření dokumentu v TEXu pak sestává ze dvou částí. Z vytvoření kódu v makro jazyce (v libovolném textovém editoru, jako je `vim`, `gedit`, `PSPad`, `Texmaker` nebo `TeXnicCenter`) a ze samotného překladu tohoto kódu programem TEX, např. do formátu PDF.

Distribuce TEXu

Zdrojové kódy TEXu, spolu s předpřipravenými soubory maker a dokumentací se šíří v tzv. distribucích. V současnosti nejrozšířenější a doporučovanou distribucí je TEX Live. Jste-li uživateli Linuxu, naleznete TEX Live takřka jistě ve svém balíčkovacím systému. Českou příručku pro instalaci a použití

TEX Live (pro všechny oblíbené operační systémy) lze nalézt na webové adrese `http://www.tug.org/texlive/doc/texlive-cz/texlive-cz.pdf`

Příklady použité v našem textu budou v naprosté většině přeložitelné příkazem `latex` (zařídí vytvoření DVI, které pak můžeme převést na PostScript pomocí příkazu `dvips`), případně `pdflatex` (vytvoří rovnou PDF dokument). Pokud TEXskončí na chybě a na začátku řádku píše otazník, přečtěte si chybové hlášení a pak TeXu odpovězte „X“ a enter.

Další materiály jsou na webu TEX Users Group `http://www.tug.org/` a Czechoslovak TEX Users Group `http://www.cstug.cz/`. Pokud budete shánět nějakou netradiční součást TEXu (např. klingonské písmo ze StarTreku), hodí se podívat na `http://www.ctan.otg/`.[3]

První dokument

Podívejme se nyní na velmi jednoduchý dokument v TEXu:

```
\TeX je \uv{typografický systém} používaný s~výhodou pro sazbu
{\it matematických vzorců}, jako např. $x^n + y^n = z^n$.

Další odstavec začneme jednoduše vynecháním
prázdného řádku.
V~případě, že řádek nevynecháme, jedná se pořád
o~součást stejného odstavce, přestože je tato věta
ve zdrojovém kódu vizuálně oddělena od věty první.

\bye
```

Pokud si chcete tento zdrojový kód přeložit, výjimečně nepoužijeme příkaz `pdflatex`, ale `csplain`.

Všechna slova začínající znakem zpětného lomítka \ jsou tzv. makra. To značí, že na jejich místě se ve výsledném textu objeví něco jiného, v závislosti na tom, co je napsáno za \, tedy na jménu makra.

V případě, že makro přijímá parametry, zapíšeme tyto bezprostředně za jméno makra do složených závorek. Např. `\TeX` je makro, které vysází značku TEX (a nepřijímá žádné parametry). Naproti tomu, `\uv{}` je makro, které uzavře text uvnitř do českých uvozovek (přijímá tedy jeden parametr). Makro `\it` přepne používaný font na italiku (zvanou též kurzíva) a `\bye` dá vědět TEXu, že jsme skončili se sazbou a že má program korektně ukončit. Text uzavřený mezi dolary je v matematickém prostředí a jeho interpretaci se budeme věnovat za chvíli.

[3] Pokud byste si chtěli LATEX pouze vyzkoušet, bez instalace na vlastní počítač, mohl by se vám hodit některý z on-line kompilátorů, doporučuji např. `https://www.writelatex.com/`. Jeho použití je velmi intuitivní, stačí kliknout na „Create a new paper“ a psát.

Prostý text

Co se týče normálního textu ve zdrojovém kódu, TEX nedělá rozdíl mezi jednou a více mezerami. Stejně tak nebere ohled na zalomení řádků – zalámání ve výsledném dokumentu si sám (poměrně složitým algoritmem) spočítá. Za oddělovač odstavců je pak považován prázdný řádek.

Nezlomitelná mezera je pružná mezera mezi dvěma slovy, kde je zakázáno zalomit řádek. K jejímu zápisu použijeme znak vlnky `~`. Např. výše zmíněné LibreOffice či MS Word podporují (narozdíl od TEXu) pouze nepružnou nezlomitelnou mezeru. V češtině patří nezlomitelná mezera za jednopísmenné předložky, dále mezi jednotlivé položky dat (např. `19.~6.~1954`) apod. Na většinu potřebných míst umí vlnku automaticky doplnit program `vlna`, který je součástí distribuce TEX Live.

Pomlčky se vyskytují ve třech délkách, z nichž každá se hodí na něco jiného. První, zapisovanou `-`, je *spojovník*, použitý k oddělení dvou částí téhož slova, např. *chcete-li*. Druhou, zapisovanou `--` je standardní pomlčka, tak jak ji známe. Existuje ještě třetí, dlouhá pomlčka `---` používaná někdy pro oddělování letopočtů, v češtině se však příliš neužívá.

Elipsa neboli výpustka či hezky českým výrazem „trojtečka“ se používá pro vyznačení pokračování textu či výčtu. Píšeme ji `\dots` a je použitelná i v matematickém prostředí. Všimněte si rozdílu mezi *elipsou* (. . . , jeden znak) a třemi tečkami (..., tři znaky).

Komentář. Vše od uvedení znaku `%` až do konce řádku je považováno za komentář. Tento text (včetně samotného znaku nového řádku) je TEXem ignorován a ve výsledném dokumentu se vůbec neobjeví. Chceme-li zapsat do textu znak procenta, musíme před něj zařadit zpětné lomítko `\%`.

Předpřipravené balíky maker

Kód, který jsme doposud napsali, byl interpretován v původním, čistém TEXu, tzv. plainTEXu. V průběhu let bylo vytvořeno několik balíků maker, které písařům v TEXu značně usnadňují život – umí např. automatické číslování rovnic a kapitol, generování obsahu, vícesloupcovou sazbu (jako v novinových článcích) apod. Nejznámějším z těchto balíků je LATEX. Ačkoliv v plainTEXu lze dělat skutečná sazečská kouzla, pro rutinní použití se jeví vhodnějším LATEX, a proto se budeme ve zbytku textu zabývat především jím (i když spousta detailů, především ohledně sazby matematických vzorců, bude platit i pro plainTEX).

Struktura dokumentu

Každý dokument v LaTeXu má strukturu podobnou té následující:

```
\documentclass[10pt,a4paper]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[czech]{babel}
\usepackage{graphicx}
... import dalších balíků ...
\begin{document}

... obsah dokumentu ...

\end{document}
```

První řádek, `\documentclass`, určuje, o jaký typ dokumentu se jedná. Možné volby jsou `article`, `report`, `book`, `letter` a další. Kromě hlavního parametru ve složených závorkách může dostat ještě nepovinné parametry v hranatých závorkách (to je rozdíl oproti plainTeXu). V tomto případě říkáme, že má být text sázen fontem velikosti 10pt (typografických bodů) na stránku formátu A4.

Další dva řádky nám určují, že kódování našeho dokumentu je UTF-8 a zpřístupňují písma a makra pro českou sazbu (např. makro `\uv{}` pro sazbu českých uvozovek).

Následující řádek nám zpřístupňuje makra z balíku `graphicx`, umožňující propracované vkládání obrázků do textu. Podobně můžeme nahrát i další balíky maker podle toho, které zrovna potřebujeme.

Makro `\begin{document}` začíná prostředí dokumentu, do nějž vložíme veškerý obsah, který se má zobrazit. Prostředí ukončíme makrem `\end{document}`. S různými prostředími se při práci v LaTeXu budeme setkávat poměrně často. Např. nečíslovaný seznam vytvoříme pomocí prostředí `itemize`, tabulku pomocí `tabular` apod.

Písma

Základním písmem, které TeX používá, je Computer Modern (jeho autorem, stejně jako autorem samotného TeXu, je Donald Knuth). Toto písmo se běžně používá v pěti řezech. Jsou to: normální řez (výchozí písmo, `\textrm{}`), **tučný řez (`\textbf{}`)**, *italika (`\textit{}`)*, *skloněné písmo (`\textsl{}`)* a `strojopis (\texttt{})`.

Velikosti písma můžeme přepínat pomocí maker (od nejmenšího po největší) `\tiny`, `\scriptsize`, `\footnotesize`, `\small`, `\normalsize` (velikost písma nastavená v `\documentclass`), `\large`, `\Large`, `\LARGE`, `\huge`, `\Huge`. Pokud tedy chceme vyrobit velký tučný nadpis umístěný uprostřed řádku, můžeme napsat `\centerline{\textbf{\LARGE Nadpis}}`.

V LaTeXu bychom pro tvorbu nadpisů spíše použili makra `\section{}`, `\subsection{}`, `\subsubsection{}`, příp. `\chapter{}` (poslední jmenované pouze pro `\documentstyle book` a `report`), které podporují automatickou tvorbu obsahu, číslování apod.

Skupiny

Jakýkoliv text uzavřený mezi složenými závorkami nazýváme skupina. Pokud jsme uvnitř skupiny zapnuli či nadefinovali nějaká makra (např. změnili velikost písma), tato změna potrvá jen do konce současné skupiny. Pokud chceme část textu napsat velkým písmem, můžeme tedy napsat buď:

```
Tady je \Large velký kus \normalsize textu.
```

nebo

```
Tady je {\Large velký kus} textu.
```

Druhý zápis využívá skupiny, je kratší a také univerzálnější, protože se může nacházet i uvnitř nápisu napsaného jinou velikostí písma, než `\normalsize` a pořád bude fungovat stejně.

Pamatujete si, jak jsme říkali, že parametry se makru předávají ve složených závorkách? Není to tak úplně pravda. Ve skutečnosti makro s parametrem vezme jako svůj parametr první neprázdný znak (tedy ignoruje mezery) a pokud je jím levá složená závorka, pak vezme celou skupinu.

To, že makra ignorují bezprostředně následující mezery má jeden nepříjemný efekt. Napíšeme-li makro bez parametrů, např. `\LaTeX`, všechny mezery až do dalšího slova či skupiny budou ignorovány a `\LaTeX je systém` vyjde ven jako „LaTeXje systém“. Abychom tomuto zabránili, můžeme za makro napsat prázdnou skupinu `{}`. Pro správné vysázení výše zmíněného příkladu bychom tedy napsali `\LaTeX{} je systém`.

Matematické vzorce

Veškeré matematické výrazy budeme v LaTeXu psát mezi znaky dolaru `$`. V případě, že chceme napsat výraz přímo do textu, např. $\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{2^i} = 2$, napíšeme výraz do jednoduchých dolarů (`$\sum_{i=0}^\infty {1 \over 2^i} = 2$`). Druhá možnost je napsat výraz do dvojitých dolarů `$$`, což způsobí vysázení vzorce větším písmem a na samostatný řádek:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Matematické operátory jako `+`, `-`, `/` můžeme normálně zapsat do textu. Všechny mezery jsou v matematickém módu ignorovány. Podtržítko `_` vysadí následující znak nebo skupinu jako dolní index, stříška `^` jako horní index.

Zlomky můžeme sázet buď pomocí makra `\over` jako `{čitatel \over jmenovatel}` nebo pomocí makra `\frac{čitatel}{jmenovatel}`. Tyto definice můžeme vnořovat, takže pro vysázení řetězového zlomku můžeme napsat `$$1 + {2 \over 3 + {4 \over 5 + {6 \over 7 + \dots}}}$$`:

$$1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \dots}}}$$

Velké závorky můžeme vysázet pomocí maker `\left` a `\right`. Např.

```
$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 -
\left( \sum_{i=0}^n x_i \right)^2$$
```

se vysází jako:

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2$$

Makra `\left` a `\right` se musí vyskytovat vždy v páru! Chceme-li zapsat jenom jednu ze závorek, zapíšeme do kódu i druhé makro a bezprostředně za něj napíšeme tečku (to se zvlášť hodí pro svorky v podobě složených závorek).

Goniometrické funkce můžeme sázet pomocí `\sin`, `\cos`, `\tan` a podobně. Chceme-li sázet hezky po česku $\mathrm{tg}\ \alpha$, můžeme použít `$\mathrm{tg}\ \alpha$`, případně si nadefinovat vlastní makro `\tg` (k tomu se dostaneme v druhé části našeho seriálu).

Řecká písmena se zapisují vesměs svým anglickým přepisem do latinky, tedy `$\alpha, \beta, \gamma, \delta$` atd. Chceme-li velká řecká písmena, stačí zvětšit první písmeno v názvu makra, tedy `$\Gamma, \Delta$`. Toto nefunguje u písmen, u kterých je velké písmeno stejné jako v latince (jako u α či β). Některá řecká písmena mají dvě podoby zápisu, např. ϕ i φ značí oboje řecké písmeno fí. Zapisují se `\phi` a `\varphi`. Dalšími řeckými písmeny s dvěma variantami jsou ε, θ, π, ϱ a σ.

Některé další značky můžete najít v tabulce níže. LaTeX jich samozřejmě poskytuje mnohem víc, tohle je pouze výběr těch nejpoužívanějších:

$\rightarrow$	`\rightarrow`	$\cap$	`\cap`
$\Rightarrow$	`\Rightarrow`	$\cup$	`\cup`
$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`	$\vee$	`\vee`
$\leq$	`\leq`	$\wedge$	`\wedge`
$\geq$	`\geq`	$\neg$	`\neg`
$\equiv$	`\equiv`	$\forall$	`\forall`
$\sim$	`\sim`	$\exists$	`\exists`
$\approx$	`\approx`	∞	`\infty`
$\in$	`\in`	$\emptyset$	`\emptyset`
$\subset$	`\subset`	$\aleph$	`\aleph`
$\subseteq$	`\subseteq`	$\sum$	`\sum`
$\pm$	`\pm`	$\prod$	`\prod`
$\mp$	`\mp`	$\int$	`\int`
$\sqrt{x}$	`\sqrt{x}`	$\sqrt[n]{x}$	`\sqrt[n]{x}`

Pro přeškrtnutí libovolného symbolu v matematickém režimu můžeme použít makro `\not`, které zapíšeme bezprostředně před přeškrtávaný symbol.

Seznamy

Nečíslovaný seznam uvozuje jednotlivé řádky znakem •. Vytvoříme jej uzavřením do prostředí `itemize`, přičemž jednotlivé položky musí začínat makrem `\item`. Seznamy do sebe můžeme libovolně vnořovat:

```
\begin{itemize}
    \item První položka
    \item Druhá položka
    \begin{itemize}
        \item Položka vnořeného seznamu
        \item Další položka vnořeného seznamu
    \end{itemize}
    \item Třetí položka
\end{itemize}
```

Číslovaný seznam vytvoříme stejně jako nečíslovaný, pouze místo prostředí `itemize` použijeme `enumerate`.
Třetím typem seznamů jsou **seznamy s popiskem**. Uzavírají se do prostředí `description` a makro `\item` navíc přijímá nepovinný parametr, který je vytištěn na začátku řádku tučně:

```
\begin{description}
    \item[První] položka
    \item[Druhá] položka
\end{description}
```

Standardní seznamy v LaTeXu mají velké vertikální mezery mezi jednotlivými položkami, což (zvláště u seznamů s krátkými řádky) nemusí být žádoucí. Chceme-li mezery mezi řádky zmenšit, můžeme nahrát balík maker `mdwlist`, který nám poskytne prostředí `itemize*`, `enumerate*` a `description*`. Používají se stejně jako jejich bezhvězdičkové protějšky, pouze poskytují výstup s menšími vertikálními mezerami.

Závěr

V příštím čísle našeho časopisu se k TeXu opět vrátíme. Tentokrát se budeme zabývat pokročilejšími partiemi, především definicí vlastních maker a tím, jak TeX funguje uvnitř.

Honza

Úloha 6.5 – TeX (2b)

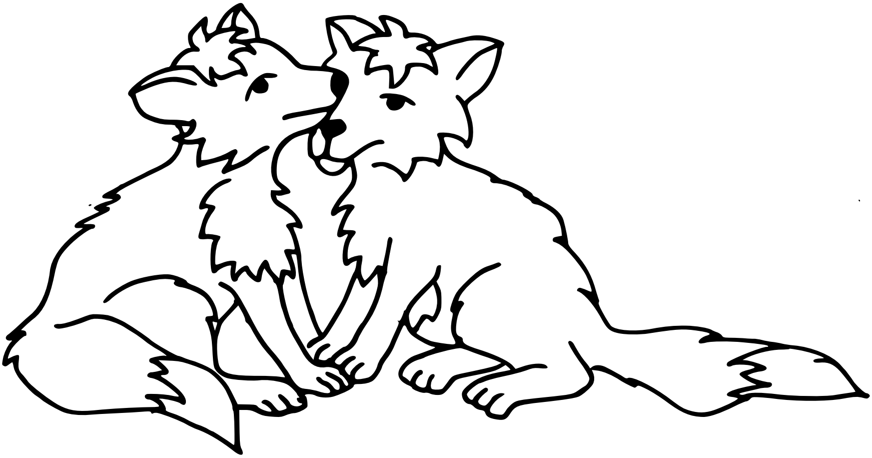
Body za úlohu můžete získat tak, že pošlete řešení libovolné jiné úlohy z tohoto čísla nebo článek k tématu napsaný v LaTeXu. V případě, že řešení zahrnuje obrázky, tyto nemusíte vkládat do LaTeXu, stačí když je pošlete jako samostatný soubor (protože jsme si ještě neřekli, jak se to dělá). Pošlete nám jak zdrojový kód v LaTeXu, tak i výsledný výstup ve formátu PDF.

Výsledková listina

				Úlohy											
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**	**r6**	**t1**	**t3**	**t4**	**t5**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ F. Homza	3.	70	4	5	2	3							14	70
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	2.	67	5	5	1	4					6		21	48
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Hrušková	3.	44	5	3	2	4	1		4				19	44
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	2.	89	3	3	1	2	0	1					10	41
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Kufová	1.	39	1	1	2	2	0						6	39
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kušnír	2.	36	3	3	0	3	0						9	36
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Nácovský	2.	35	2	5	2	4							13	35
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Šťastná	3.	74	5		0	2		2		6			15	33
9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Lieskovský	3.	59	4		2	4	0						10	32
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	4.	58				4		3					7	30
11.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	2.	55	5	5	2	4	1						17	28
12–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Cerman	1.	27		5	1	1	1						8	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Poljak	1.	27											0	27
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skála	2.	27	1									8	9	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skoupý	3.	27			1	4							5	27
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Buráň	4.	24											0	24
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	2.	36		5	0	0	0						5	24
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ullwer	4.	21	0	5	1	2	0						8	21
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	4.	58											0	20
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Štábl	2.	17			2								2	17
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Macháčová	3.	14	2	2	0		0						4	14
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ S. Fraňová	4.	12											0	12
23–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ E. Bušáková	4.	14											0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ilievová	2.	11			0		0						0	11
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Mikel	4.	32	5		2								7	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Souček	1.	11											0	11
27–30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Stěhule	2.	10	3	2	2	0							7	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Svobodová	3.	10											0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Šafek	2.	10	0	5			0						5	10
	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Š. Šimsa	4.	283	5	5									10	10
31–34.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bidlák	3.	12											0	9
	J. Dittrich	1.	9			0								0	9
	V. Krchňák	1.	9			2								2	9
	Z. Magyarová	3.	9		5	0	4							9	9
35.	Z. Garčic	2.	8											0	8

				Úlohy											
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**	**r6**	**t1**	**t3**	**t4**	**t5**	$\sum_0$	$\sum_1$
36–37.	M. Biroš	2.	7											0	7
	J. Kolář	2.	7			0	1	1						2	7
38–41.	J. Knížek	2.	6			2			2					4	6
	V. Straková	3.	6											0	6
	Š. Titlová	1.	6											0	6
	R. Zlatník	1.	6			0	0							0	6
42–44.	J. Alfery	1.	5											0	5
	Mgr.[MM] J. Svoboda	4.	29											0	5
	K. Škorvánková	1.	5											0	5
45–49.	M. Daniel	3.	4											0	4
	P. Kroft	2.	4											0	4
	M. Reška	1.	4											0	4
	D. Sekáč	2.	4			1	0							1	4
	M. Vanko	4.	4											0	4
50–58.	Mgr.[MM] J. Dolejší	2.	21											0	3
	L. Draslarová	1.	3											0	3
	J. Erhart	2.	7											0	3
	K. Kolář	1.	3											0	3
	J. Kučera	1.	3											0	3
	J. Kulička	1.	3											0	3
	J. Novák	1.	3											0	3
	J. Škvára	3.	3											0	3
	V. Václavík	3.	3											0	3
59–61.	D. Barbora	2.	2											0	2
	J. Fürbacherová	4.	2											0	2
	O. Leskovjanová	2.	2											0	2
62–64.	Z. Kuchařová	1.	1											0	1
	T. Mareš	1.	1											0	1
	D. Princík	4.	1											0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.