Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XIX / Číslo 5

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,

zima již pomalu odchází, sníh taje a slunce se vrací do našich dní. Před pár týdny začal organizátorům nový semestr, ale ani ve shonu zapisování předmětů jsme nezapomněli na vás, naše řešitele, a přinášíme vám páté číslo našeho časopisu.

Najdete v něm opět zadání pěti úloh, první čtyři hned na začátku, poslední pak na konci časopisu za organizátorským článkem, ve kterém se můžete dozvědět spoustu zajímavých informací o kometách.

Také vám chceme připomenout, že v druhé polovině května (18.–26.) pořádáme jarní soustředění pro přibližně 20 nejlepších řešitelů. O seznamu pozvaných rozhodnou výsledky po páté sérii, tak neusněte na vavřínech.

Těšíme se na vás

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání páté série: 8. 4. 2013

Povím vám pohádku o jedné malé holčičce. Byla to asi čtyřletá holčička s blonďatými kudrnatými vlásky, která bydlela se svými rodiči v domečku se zahrádkou. Celý svět jí přišel ohromně zajímavý a ráda si ho prohlížela svýma moudrýma modrýma očima. Ráda si povídala s cizími lidmi přes plot zahrady, to proto, že vyprávěli tolik zajímavé věci, které holčička nikdy předtím neslyšela. Ráda si taky kreslila klacíkem do písku číslice a písmena.

Úloha 5.1 – Trojúhelníková tabulka (2b)

Do čtvercové sítě nakreslila holčička postupně kladná celá čísla. Do prvního sloupce prvního řádku nakreslila jedničku. Každé následující číslo nakreslila o jeden sloupec víc napravo a jeden řádek výš než předcházející. Pokud bylo předchozí číslo v prvním řádku, nakreslila následující místo toho do prvního volného políčka prvního sloupce. Část výsledné tabulky je vidět níže:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				

Určete pozici (číslo řádku a číslo sloupce), kam nakreslila číslo 2013.

Ze všeho nejradši se ale procházela po zahradě a hledala skřítky a víly. Protože byla ještě malá a hodná, nebáli se jí, a tak si s nimi chodila hrát a povídat. Třeba s vodníčkem, který bydlel ve studni. Rád sedával na vršku pumpy a prohlížel si shora svoje kulaté vodní království.

Úloha 5.2 – Kružnice a lichoběžník (3b)

Kružnici K je vepsán lichoběžník $ABCD$. Nechť úhlopříčky AC a BD v tomto lichoběžníku jsou na sebe kolmé. Rovnoběžky $AB = a$ a $CD = c$ jsou průměry kružnic K_a a K_c. Spočti v závislosti na a a c obvod a obsah plochy, která je uvnitř kruhu K, ale zároveň vně kruhů K_a a K_c.

Někdy si sedla na okraj studny, poslouchala vodníčkovo vyprávění a zamyšleně při tom pozorovala sklenici s vodou, kterou jí přinesla maminka. Když se dívala skrz stěnu, bylo všechno pokřivené a zvětšené a skrz vodní hladinu uviděla otisky svých prstíků.

Úloha 5.3 – Sklenice (4b)

Naplníme válcovou sklenici s hladkými stěnami vodou. Vezmeme-li ji do ruky a podíváme se shora ven skrz stěnu pod hladinou vody, můžeme vidět jen otisky svých prstů. Zbytek stěny se chová jako zrcadlo. Zkuste vysvětlit, čím je způsobeno, že vidíme právě jen otisky prstů a nic dalšího. Můžeme stejný jev pozorovat, i když ke sklenici přiložíme jiný předmět, než prst? Který? Proč? Co se stane, když sklenici vyprázdníme nebo naplníme jinou tekutinou?

Holčiččina maminka byla ráda, že je holčička taková zvídavá, jen jí dělalo starosti, že radši vysedává venku a cosi si mumlá, než aby si hrála s ostatními dětmi. Holčička jí říkala, že se kamarádí se skřítky, ale její maminka je neviděla, a tak doufala, že to vymýšlení a podivné chování holčičku přejde.

K pátým narozeninám dostala holčička knížku pohádek. Prohlížela si ji a uviděla v ní domeček s trojúhelníkovým štítem, ve kterém bydlel přesně takový skřítek, jakého znala ze zahrady zpod jabloně. Nadšeně ukázala ten obrázek mamince.

Úloha 5.4 – Trojúhelníkový štít (2b)

Štít je tvořen velkým trojúhelníkem, který je vyskládaný nepřekrývajícími se dlaždicemi ve tvaru tojúhelníku podobného velkému, ale zmenšeného v poměru $1 : n$. Kolika způsoby se lze dostat z horní dlaždice na nějakou dlaždici ve spodní řadě, pokud smíme každou dlaždici navštívit jen jednou a můžeme se pohybovat jen doleva, doprava a dolů mezi dlaždicemi se společnou hranou?

Ale tehdy se maminka moc rozzlobila, že už je toho vymýšlení dost, a že žádní skřítkové prostě neexistují. Holčička byla moc smutná. Ale rozhodla se, že kvůli mamince musí na skřítky zapomenout. Přestala si s nimi povídat a časem je už ani neviděla. Zapomněla.

Teď je už z holčičky dospělá žena a nejspíš si nepamatuje na skřítky, s nimiž si kdysi povídala. Přesto ráda sedává v trávě pod jabloní i na skruži studny. Neví proč, ale cítí se tam dobře. A možná něco v ní tuší, že tam ty malé hodné bytosti pořád jsou a stále si s ní povídají, i když už beze slov. Zapomněla?

Řešení úloh

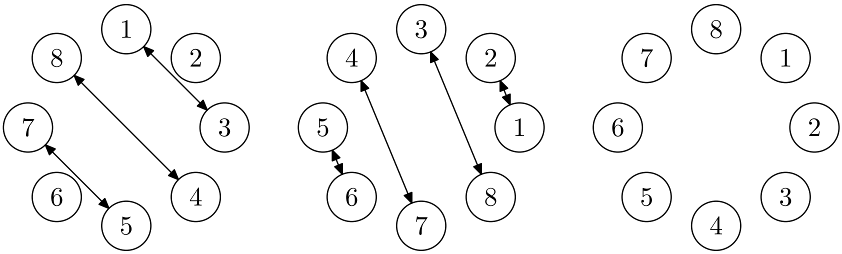
Úloha 3.1 – Stěhování (2b)

Zadání:
Osm lidí se chce přestěhovat tak, že si cyklicky vymění své byty – tj. první člověk se přestěhuje do bytu druhého člověka, druhý do bytu třetího a tak dále, až osmý člověk se přestěhuje do bytu prvního. Pro stěhování přitom platí tato pravidla:

(i) stěhování znamená, že si dva lidé vymění své byty,
(ii) každý se může stěhovat jen jednou denně.

Je možné, aby se všichni přestěhovali do svých vytoužených bytů za dva dny?

Řešení:
Největší překážkou získání dvou snadných bodů bylo nesprávné pochopení zadání. Pokud jste ji překonali, již jste většinou neměli problém ukázat, že je možné přestěhovat všech osm lidí do jejich vysněných bytů za dva dny, aniž by porušili pravidla. Nejsnáze je to asi vidět z obrázku:



Různých možností, jak to provést, je celkem osm. Jsou určeny například číslem bytu, v němž skončí jednička po prvním dni. Na obrázku je to byt číslo tři. Během druhého dne se jednička musí přestěhovat do bytu číslo dva, a v něm tedy po prvním dni musel být připraven člověk číslo dva (aby se druhý den dostal do bytu číslo tři). Podobně druhým směrem – jestliže se jednička vyměnila s trojkou, musí být v bytě číslo čtyři druhý den připravena osmička (která se chce dostat do bytu číslo jedna) a tak dále. Takovým způsobem bychom byli schopni naplánovat cyklické přestěhování pro libovolný počet lidí.

Jak správně uvedla Mgr.[MM] Aranka Hrušková, stěhovací manévry se dají stihnout za dva dny, ať už si lidé chtějí měnit byty jakkoli divoce. Každou permutaci totiž můžeme rozložit na cykly a úlohu vyřešit pro každý cyklus zvlášť.

Matěj

Úloha 3.2 – Úloha pro vzdělaný lid (3b)

Zadání:
Pro navzájem různé parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$ je dána funkce

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Zjednodušte její zápis. Pro jaké hodnoty parametrů a, b, c existuje x, pro které $f(x) > > 1$?

Řešení:
Jak zadání napovídá, klíčem k vyřešení úlohy je zjednodušit daný výraz. Většina řešitelů se pokoušela dlouze upravovat výraz, což bylo ale zbytečně pracné a občas skončilo chybou. Místo úprav si pomůžeme trikem.

Pokud si představíme, že bychom zadaný výraz roznásobili, dostaneme nějakou kvadratickou funkci. Dosazením zjistíme, že $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Máme tedy kvadratickou funkci, která má ve třech různých bodech stejnou hodnotu. Stačí si uvědomit, že grafem této funkce je parabola. Ta na první pohled může nabývat ve třech různých bodech stejné hodnoty, pouze pokud se jedná o konstantní funkci. Formálně si můžeme napsat obecnou rovnici kvadratické funkce a dosadit do ní body a, b, c.

Vidíme tedy, že $f(x) = 1$ na celém svém definičním oboru. Takže x, pro které $f(x) > 1$, neexistuje.

Kuba

Úloha 3.3 – Dráty na stavbě (3b)

Zadání:
Dělník natahuje ve vysokém domě elektrické vedení a z přízemí si natáhl do nejvyššího patra 27 nerozlišitelných drátů. Teď neví, který je který. Chtěl by to zjistit a přitom se co nejméně nachodit po schodech (v budově totiž ještě nefunguje výtah). Na kolik cest se mu to může podařit? Nahoře i dole může dráty libovolně spojovat (i více dohromady) a z druhého konce pomocí multimetru testovat libovolné dvojice, zda jsou spojené.

Řešení:
Nejprve se zamysleme nad tím, jaké nejlepší řešení vůbec u této úlohy můžeme chtít. Je zřejmé, že na jedno vyběhnutí schodů dělník dráty jednoznačně určit neumí, důvodem budiž třeba to, že aby na jedno přejití určil jeden drát jednoznačně, nesmí být tento spojen s žádným jiným drátem, ovšem to může najednou udělat jen pro jeden drát, ostatní musí být nějak pospojované, a tudíž jsou neurčitelné. Toto je na první pohled jasný a až zbytečný krok, ale pokud chceme tvrdit, že je naše řešení nejlepší, pak musíme dokázat, že lépe to opravdu nejde. Budeme tedy tvrdit, že na dvě cesty po schodech se mu dráty jednoznačně určit podaří. Jak?

Řekněme, že dělník začíná dole. Zde si může pospojovat dráty po dvojicích a jeden nechat volný. Vyběhne nahoru, kde určí, které dráty jsou ve dvojicích, plus jednoznačně jeden samotný. Neví ale, která dvojice je která. A aby to dole rozšifroval celé, musí navíc vědět, který drát z každé dvojice je který. Může vůbec tolik informací získat?

Může. Stačí, když si dvojice nahoře (libovolně) seřadí a pospojuje je mezi sebou tak, že první drát z první dvojice spojí s jednoznačně určeným samotným drátem (zařaďme ho jako nultý), druhý drát z téže dvojice spojí s prvním drátem z té následující a tak dále. Vytvoří tím jeden dlouhý „dvacetisedmidrátový“ drát.

Seběhne dolů a… (Zkuste to teď domyslet sami, vážně to může rozlousknout!) Nultý drát má dole už označený (pořád je to jediný, který dole není spojen), pak najde drát, který je s ním nahoře spojen. Ten je nahoře první v řadě, označí ho proto dole taky jedničkou. Ví, že ten, se kterým je tahle jednička dole spojená, je nahoře v pořadí druhý, takže máme i dvojku. Obdobně jako pro nulu teď hledáme drát, se kterým je dvojka spojena nahoře, a označíme ho jako trojku… a tak dále, až máme označené všechny dráty. Pokud to nevidíte, zkuste si to nakreslit.

Takže máme řešení nejen nejlepší, ale dokonce bez potřeby spojovat více drátů najednou a s konstantní složitostí pro libovolný počet drátů. Přišla na něj jediná Mgr.MM Linda Langerová, za což si vysloužila bod navíc k dobru. Většina z vás přišla na řešení také na dvě cesty, ale se spojováním drátů do n-tic, a nikdo z vás složitost pro n drátů nedokazoval, nicméně pro 27 to fungovalo, dostali jste proto plný počet, ač by se zobecněné zamyšlení na řešitele M&Mka slušelo ;-) Řešení, která to nedotáhla na dvě cesty, byla hodnocena bodíkem dolů a řešení asymptoticky nevyhovující ztratila další bod. Na nulu se dostal ten, kdo řešil jinou úlohu, než byla zadána, nebo kdo dráty vůbec neurčil.

Alena

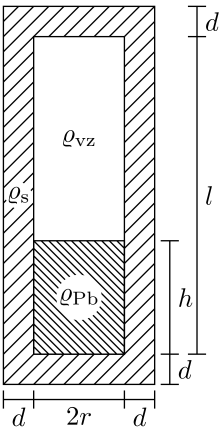
Úloha 3.4 – Hustoměr (5b)

Zadání:

K ověření, zda nějaká kapalina je vodou (lihem, olejem, …), slouží hustoměr. Je to dlouhý, úzký válec, který se do kapaliny částečně ponoří. Ze stupnice na jeho povrchu pak v místě, kde se jí dotýká hladina, odečteme hustotu kapaliny. Vyrobíme si takový z dutého skleněného válce o tloušťce stěny d, poloměru r a délce l a jako zátěž použijeme malé olověné kuličky. Jakého maximálního rozsahu měřených hodnot hustoty kapaliny dokážeme docílit v závislosti na délce hustoměru l a množství olova m na dně válce? Jaké hodnoty parametrů odpovídají danému případu? Jak zvolit parametry, aby pomocí hustoměru šlo něco rozumného naměřit? (Například rozsah 15000 $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ *v oblasti 15000–30000* $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ *nám příliš užitku nepřinese.)*

Řešení:

Na obrázku u3.4.1 máme jeden taký pekný hustomer v reze. Riedko šrafovaná je sklenená banka s vnútorným polomerom r (schválne sme v zadaní nespomínali, či polomer a dĺžka sklenenej trubice sú vonkajšie, alebo vnútorné) a vnútornou dĺžkou l. Hrúbku steny má táto banka d. Na dne banky sa do výšky h nachádza olovo, zvyšok banky vypĺňa vzduch.



Obr. u3.4.1 – Vzorový hustomer

Kde sú naše limity zmerateľnej hustoty? Dolný limit nájdeme ľahko – kvapalina musí byť tak hustá, aby náš hustomer ešte plával, inak povedané, hmotnosť kvapaliny o objeme hustomeru musí byť väčšia (rovná) hmostnosti hustomeru. Hmotnosť hustomeru sa skladá z troch častí: z hmotnosti skla, vzduchu a olova. Hneď na začiatok zanedbajme vzduch. So svojou hustotou $1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3$ je voči väčšine kvapalín zanedbateľný (a to nehovorím o skle a olove). Naviac potom by sme správne mali započítať aj vztlak, ktorý pôsobí na vynorenú časť hustomeru vo vzduchu. Takže počítajme len s hmotnosťou skla a olova:

$$m_{\mathrm{Pb}} = \pi r^2 h \varrho_{\mathrm{Pb}}\,, \tag{u3.4.1}$$

$$m_{\mathrm{s}} = \pi\left[(l+2d)(r+d)^2 - lr^2\right]\varrho_{\mathrm{s}}\,. \tag{u3.4.2}$$

Celková hmotnosť hustomeru je súčtom týchto dvoch hmotností $m = m_{\mathrm{Pb}} + m_{\mathrm{s}}$, jeho objem je $V = \pi(l+2d)\cdot(r+d)^2$, a naša minimálna hustota je preto

$$\varrho_{\min} = \frac{m}{V} = \frac{m_{\mathrm{Pb}} + m_{\mathrm{s}}}{\pi(l+2d)(r+d)^2}\,. \tag{u3.4.3}$$

A čo horný limit? Existuje nejaký? Obvykle sa hustomer ponára do kvapaliny tak, ako je to naznačené na obrázku u3.4.1 – na stojato. Aby sa v tejto polohe udržal, musí byť splnená nie úplne samozrejmá podmienka: ťažisko hustomeru musí byť pod hladinou aspoň tak hlboko, ako je vysoko nad dnom hustomeru, teda inak povedané, hustomer musí byť ponorený aspoň do dvojnásobnej hĺbky, ako je výška ťažiska nad jeho dnom[1]. Výšku ťažiska T spočítame ako vážený priemer výšok ťažísk jednotlivých častí, teda skla a olova:

$$T = \frac{m_{\mathrm{Pb}} T_{\mathrm{Pb}} + m_{\mathrm{s}} T_{\mathrm{s}}}{m_{\mathrm{Pb}} + m_{\mathrm{s}}}\,. \tag{u3.4.4}$$

Povedzme si ešte, že hodnoty výšky ťažiska jednotlivých častí sú $T_{\mathrm{Pb}} = d + h/2$ a $T_{\mathrm{s}} = d + l/2$ a keďže hodnoty hmotností už poznáme z minimálnej hustoty, môžeme spočítať, že maximálna zmerateľná hustota je

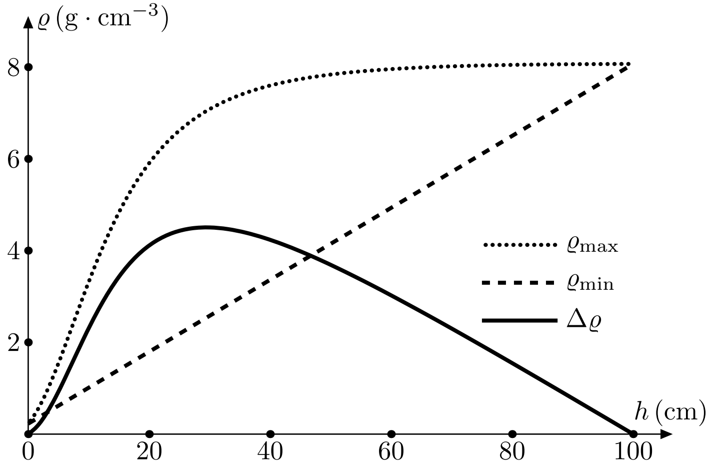
$$\varrho_{\max} = \frac{m^2}{2\cdot(m_{\mathrm{Pb}} T_{\mathrm{Pb}} + m_{\mathrm{s}} T_{\mathrm{s}})\pi(r+d)^2}\,. \tag{u3.4.5}$$

Teraz, keď už vieme, akú maximálnu a minimálnu hustotu dokážeme zmerať, prichádza na rad posledný krok: spočítať veľkosť rozsahu hustôt. Takže použijeme vzťahy (u3.4.3) a (u3.4.5), zistíme ich rozdiel a budeme skúmať

[1] V skutočnosti takto platí len pre dlhý, úzky valec. Prečo to tak je? Možno i s touto otázkou sa objaví nikedy v M&M úloha…

výsledný vzťah. Vzťahy (u3.4.3) a (u3.4.5) nám ale svojou zložitosťou nepomáhajú. Mohli by sme rozpísať všetky zátvorky vo vzťahoch, a potom vyškrtnúť všetky členy, ktoré obsahujú d vo vyššej, ako prvej mocnine.[2]

Nebudeme tieto úpravy robiť. Máme počítače, pozrieme sa teda priamo na hodnoty funkcie dvoch premenných (podľa zadania budú našimi premennými dĺžka valca l a výška olova h). Za modelový hustomer vezmime valec o dĺžke $l = 1\,\mathrm{m}$, hrúbke steny $d = 2\,\mathrm{mm}$ a polomere $r = 1\,\mathrm{cm}$. Výška olova tak môže byť v rozsahu 0 cm až 100 cm. Na grafe u3.4.2 vidíme, ako sa mení minimálna hustota, maximálna hustota a veľkosť meracieho rozsahu.



Obr. u3.4.2 – Závislosť na množstve olova

Z grafu môžeme odčítať maximálny rozsah pri výške olova tesne pod 30 %, teda pri výške olova necelých 30 cm. Dostupný rozsah zhruba 2500–7000 $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je síce úctyhodný, ale pre praktické použitie celkom zbytočný. To pri výške olova 7 cm sa bavíme o rozsahu 700–1900 $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, ktorý nám stačí na všetky kvapaliny uvedené v Slovenských MFCHT s výnimkou ortuti. Všimnime si ešte, že minimálna hodnota hustoty rastie pekne lineárne, zatiaľ čo maximálna hodnota najprv rastie veľmi rýchlo, aby sa postupne tento rast zastavil a hodnota maximálnej hustoty sa dostala na hustotu skleneného valca plného olova. Keďže na túto hodnotu sa vyšplhá aj minimálna hustota, prázdny valec a valec plný olova sú rovnako nepraktické hustomery s nulovým rozsahom – nevydržia stáť na hladine, majú privysoko ťažisko.

Tu náš článok ukončíme. Ďalšie grafy by v časopise zabrali priveľa miesta a preto ich nájdete na adrese `http://mam.mff.cuni.cz/hustomer`. Povedzme si len, že pokiaľ sa s vnútornými rozmermi valca pohybujeme v rádovo vyšších hodnotách, ako je hrúbka skla, nič zaujímavé sa s rozsahom diať nebude. Preto je zaujímavé skúmať aj závislosť rozsahu na množstve skla (napríklad ak by sme sklo vôbec nemali, bude maximálna meraná hustota dvojnásobkom hustoty

---

[2] *Pozn. red.: Predpokladáme totiž, že $d \ll r$, čím sa členy s d^2 a vyššími mocninami d stanú zanedbateľnými.*

olova, ak by sme naopak nemali žiaden priestor pre olovo, budeme mať rozsah od hustoty skla do jej dvojnásobku).

Úloha 3.5 – Podepisujeme prakticky (až 4b)

Zadání:

Cílem této úlohy je vyzkoušet si prakticky práci s elektronicky podepsanými dokumenty a certifikáty. Za každou položku je jeden bod, úkoly lze plnit postupně.

- *Z adresy* `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/19_3_podepsane.pdf` *si stáhněte podepsaný PDF dokument. Kdo dokument podepsal? Jaké k tomu použil algoritmy? Čí jsou další certifikáty v certifikační cestě? Pošlete nám sériová čísla všech certifikátů z certifikační cesty.*
- *Nechte si vygenerovat (případně vygenerujte) certifikát použitelný pro podpis a pošlete ho s řešením. Jaký veřejný klíč používá?*
- *Pošlete mi na* `jakub.topfer@matfyz.cz` *vámi elektronicky podepsaný mail.*
- *Pošlete mi na výše uvedený mail váš veřejný PGP klíč, dostanete zpět zašifrované heslo. Stačí když ho rozšifrujete a pošlete zpět.*

Řešení:

Cílem úlohy bylo si vyzkoušet prakticky práci s elektronickými podpisy. Postup jejího řešení byl v mnohém nastíněn už v článku.

Odkazovaný PDF dokument podepsal Jakub Töpfer z Univerzity Karlovy v Praze za použití algoritmů SHA1 a RSA. Certifikační cesta obsahuje celkem tři certifikáty. Certifikát pro Jakuba Töpfera vydala společnost TERENA z Nizozemí, která využila služeb kořenové certifikační autority The USERTRUST Network sídlící v USA. Sériová čísla certifikátů jsou postupně:

`00 8B 51 94 0D F7 90 66 C0 0F D1 30 D5 3F BA 37 DE,`
`73 FE 57 FA DF B8 C5 08 81 7B 66 B9 6B F0 2D EF,`
`44 BE 0C 8B 50 00 24 B4 11 D3 36 25 25 67 C9 89.`

Kuba

Konference Olešná 2012

Zkřížené polarizátory

Dr.ᴹᴹ Aneta Šťastná

Úvod

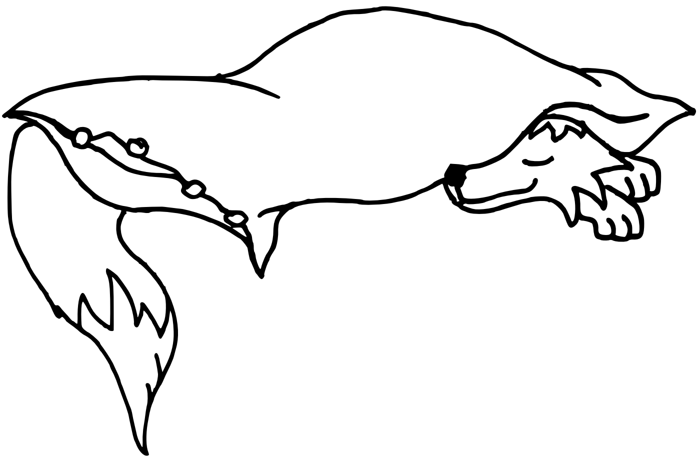
V tomto článku bych vám ráda představila obsah svého konferenčního příspěvku, který jsem vypracovávala a prezentovala na jarním soustředění M&M, které se konalo 10.–18. 3. 2012 v Olešné. Dozvíte se něco o fyzikálním popisu světla, polarizaci, mnou prováděných pokusech a aparatuře, na které jsem pokusy prováděla. Poté porovnám výsledky svých experimentů s teorií.

Světlo

Světlo je elektromagnetické vlnění, které popisujeme třemi na sebe kolmými vektory:

- vektorem elektrické intenzity E
- vektorem intenzity magnetického pole H
- vlnovým vektorem[3] k

Většina interakcí světla s hmotou je způsobena interakcí elektrického pole světelné elektromagnetické vlny s elektrony v látce. Silové působení vektoru intenzity magnetického pole je zanedbatelné, protože je úměrné poměru v_e/c, kde v_e je rychlost elektronů v látce a c je rychlost světla. Jelikož je rychlost elektronů zanebatelná v porovnání s rychlostí světla, je toto působení nevýznamné.



[3] Popisuje amplitudu a směr světelné vlny.

Polarizace

Při interakci světla s hmotou nás tedy kromě směru šíření světelné vlny zajímá i kmitání vektoru elektrické intenzity E. Právě způsob kmitání tohoto vektoru nazýváme polarizací světelné vlny. V nejobecnějším případě opisuje konec vektoru E v průmětu do roviny kolmé ke směru šíření elipsu, jedná se tedy o *polarizaci eliptickou.* Vektor v tomto případě mění svou velikost i směr. Ve speciálním případě vektor zachovává konstantní velikost a mění jen směr, pak se jedná o *polarizaci kruhovou* (při průmětu do roviny kolmé ke směru šíření totiž tvoří kruh). Pokud vektor E kmitá v jedné rovině, dostáváme *polarizaci lineární.* Zmíněnou rovinu nazýváme *rovinou polarizace.*

Polarizované světlo získáme buď odrazem od předmětů pod Brewsterovým úhlem nebo pomocí dvojlomu.

Odraz pod Brewsterovým úhlem nastává, když odražený paprsek svírá pravý úhel se zalomeným paprskem v druhém prostředí. Velikost Brewsterova úhlu závisí na indexech lomu prostředí a látky. Vektor E po odrazu kmitá v rovině kolmé k rovině dopadu, tedy rovnoběžně s rozhraním prostředí a látky, nastává takzvaná *s-polarizace.* Světlo procházející látkou je naopak polarizováno v rovině dopadu, nastává *p-polarizace.*

Dalším způsobem získávání polarizovaného světla je využití dvojlomu, který můžeme pozorovat ve většině optických materiálů v krystalickém stavu (nižší než kubická symetrie). Při dvojlomu se nepolarizovaný světelný paprsek štěpí na dva, které se obecně šíří různými směry s různou fázovou rychlostí a každý z nich je lineárně polarizován. Roviny polarizace těchto paprsků jsou na sebe navzájem kolmé. Paprsky jsou navzájem prostorově oddělené. Můžeme tedy jeden z nich odklonit a z přirozeného světla tak získat světlo lineárně polarizované. Na tomto principu pracují polarizátory.

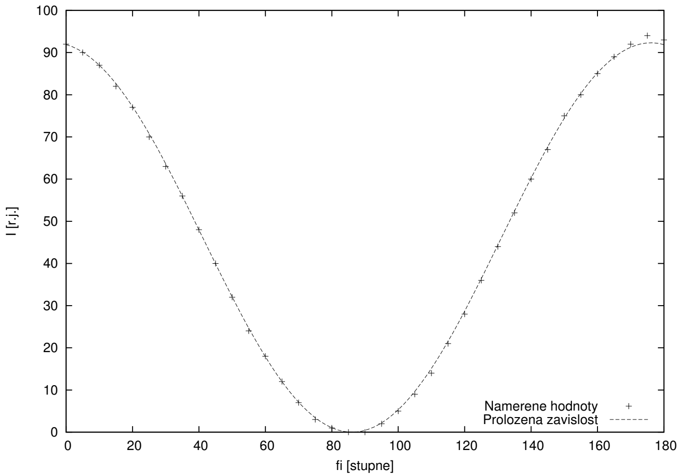
Snadno dostupnou dvojlomnou látkou je například izolepa. Vezmeme-li kus skla (nevykazujícího dvojlom) a polepíme ho v různě tlustých vrstvách izolepou, dostaneme fázovou destičku.[4] Vložíme-li preparát mezi dva polarizátory (zdroj polarizovaného světla a analyzátor), můžeme pozorovat různé zbarvení polí o různé tloušťce a orientaci vrstev izolepy. Jakou barvu pozorujeme, závisí na rozdílu indexů lomu řádného a mimořádného paprsku a na tloušťce izolepy. Nalepíme-li dva pruhy izolepy rovnoběžně tak, aby se částečně překrývaly, dojde v místě zdvojnásobení tloušťky ke zdvojnásobení dráhového rozdílu paprsků, a tak k zesílení souboru jiných vlnových délek, jimž odpovídá jiná barva. Dvě navzájem kolmé vrstvy izolepy slouží jako fázový kompenzátor, kde se fázové rozdíly paprsků vyruší a dané pole je bílé.

[4] Fázová destička je optický prvek pro transformaci polarizačního stavu (způsobí fázové zpoždění určité části světla, mění polarizaci dopadající vlny). Například čtvrtvlnná fázová destička transformuje lineární polarizaci na kruhovou a půlvlnná fázová destička způsobí fázový rozdíl π

Pokusy a aparatura

Pokusná souprava se skládala ze světelného zdroje, tří otočných lineárních polarizátorů s možností měřit úhel pootočení a fotodiody převádějící dopadající světlo na elektrický proud. K dispozici jsem měla ještě ampérmetr na měření velikosti elektrického proudu generováného fotodiodou. Výsledky jsem zpracovávala v programu Gnuplot.

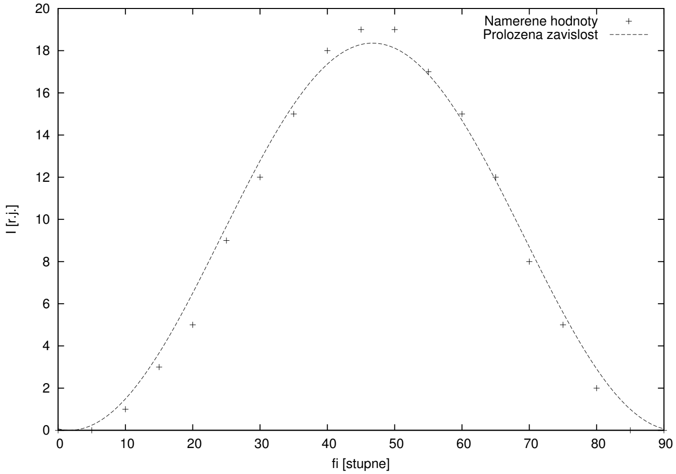
V prvním pokusu jsem zkoumala intenzitu světla procházejícího dvěma polarizátory v závislosti na úhlu, který svírají. Nejdříve jsem našla směr snadného průchodu, čili úhel, při kterém procházelo nejvíce světla. V takovém nastavení byla polarizace světla u obou polarizátorů stejná. Poté jsem začala otáčet jedním z polarizátorů vždy o pět stupňů a zaznamenávala výsledky. Po zanesení do grafu závislosti intenzity světla, respektive velikosti proudu, na úhlu vyšel vztah $I = I_0 \cos^2 \varphi$, kde I je výsledná intenzita světla, I_0 je původní intenzita světla a φ je úhel svíraný polarizátory.



Obr. k1.1 – Graf závislosti intenzity světla na úhlu svíraném dvěma polarizátory

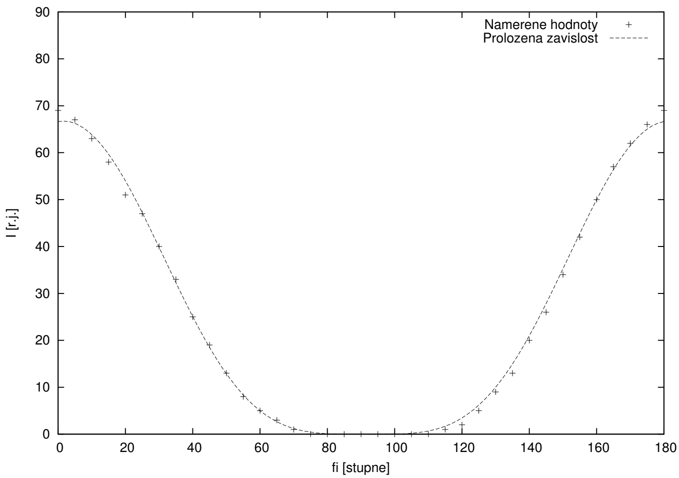
Dále jsem prováděla pokusy se třemi polarizátory. První a třetí jsem nastavila tak, aby svíraly pravý úhel.[5] Poté jsem přidala prostřední polarizátor, našla nastavení s nejmenší intenzitou a měřila proud vycházející z fotodiody v závislosti na otáčení polarizátoru. Celkově byla tato intenzita mnohem menší než při průchodu dvěma polarizátory a odpovídala vztahu $I = (I_0 \sin^2 2\varphi)/4$.

[5] Při dosazení do vztahu dostáváme, že v tu dobu neprocházelo žádné světlo.



Obr. k1.2 – Graf závislosti intenzity světla na natočení prostředního polarizátoru, když jsou krajní polarizátory zkřížené

Poslední pokus byl analogický ke druhému, avšak místo zkřížených polarizátorů jsem použila dva shodně nastavené polarizátory a mezi ně dala další. Začínala jsem tedy se třemi stejně nastavenými polarizátory a postupně otáčela prostředním. Graf odpovídal vztahu $I = I_0 \cos^4 \varphi$.



Obr. k1.3 – Graf závislosti intenzity světla na natočení prostředního polarizátoru, když jsou krajní polarizátory natočené shodně

Teoretické odvození

Výslednou intenzitu světla procházejícího dvěma polarizátory svírající úhel φ určuje *Malusův zákon*. Má tvar $I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi$, kde I_0 je vstupní intenzita světla. Tento zákon vyplynul z mého prvního pokusu. Étienne-Louis Malus, po němž je tento zákon pojmenován, ho také odvodil experimentálně.

Ve druhém pokusu určíme intenzitu dvojí aplikací Malusova zákona, jelikož světlo vycházející ze dvou polarizátorů vchází do třetího. Za I_0 dosadíme I. Jaký bude úhel svíraný druhým a třetím polarizátorem? Jeho velikost určíme jednoduše. Víme, že celkový úhel bude pravý,[6] a známe úhel svíraný prvním a druhým polarizátorem. Do vzorce tedy dosadíme úhel $90° - \varphi$, čili $\pi/2 - \varphi$. Zkusme tedy dosadit:

$$I = (I_0 \cdot \cos^2 \varphi) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Zjevně $\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi$, když to použijeme, dostáváme:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi$$

Tento vztah připomíná goniometrický vztah $2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$, stačí si převést do umocněného vztahu a přenásobit patřičnou konstantou:

$$I = I_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi = I_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\varphi$$

Odvození intenzity ve třetím pokusu je ještě jednodušší, nemusíme totiž dopočítávat úhel mezi druhým a třetím polarizátorem. Aplikací Malusova zákona dostáváme:

$$I = (I_0 \cdot \cos^2 \varphi) \cdot \cos^2 \varphi = I_0 \cdot \cos^4 \varphi$$

Kvantové vysvětlení

Polarizaci světla popisuje i kvantová fyzika. Světlo totiž můžeme popsat jako proud fotonů, které jsou dostatečně malé, abychom je mohli označit jako kvantové objekty. Kvantové objekty mají velmi malé rozměry a vykazují z pohledu klasické fyziky velmi zvláštní vlastnosti. Jednou z těchto vlastností je takzvaná *superpozice*. Když je kvantový objekt v superpozici, znamená to, že se nachází ve více stavech zároveň, neboli jedna fyzikální veličina u něj nabývá více hodnot. Například elektron může tímto způsobem zaujímat různá místa v elektronové slupce atomu. V superpozici mohou být i takové fyzikální veličiny jako rychlost, spin a polarizace.

Každou hodnotu dané veličiny může kvantový objekt mít v různé míře, což se projevuje třeba tak, že se elektron nachází v různých místech atomového obalu s různou pravděpodobností. Superpozice totiž většinou vzniká ve chvíli,

[6] takový úhel svírají první a třetí polarizátor

kdy daný kvantový objekt interaguje s okolním světem, přičemž se hodnoty jistých fyzikálních veličin mohou, ale nemusí změnit. Dokud zůstává kvantový objekt neměřený, nachází se v superpozici dvou či více různých variant výsledných stavů. Až měření přinutí daný objekt k tomu, aby zaujal konkrétní stav, což učiní s určitou pravděpodobností podle míry superpozice daného stavu. Tomuto zaujetí konkrétního stavu se říká *kolaps vlnové funkce*. Pokusy potvrzují, že chování objektů v superpozici a již zkolabovaných je odlišné.

Vraťme se nyní k polarizaci. V kvantové mechanice se fotony nacházejí v superpozici polarizace horizontální a vertikální. Například foton polarizovaný diagonálně je vlastně v superpozici obou těchto stavů stejnou měrou. Míra, jakou zaujímá foton vertikální a horizontální stav, neboli pravděpodobnost toho, že bude mít po změření vertikální či horizontální polarizaci, je dána úhlem, který svírají dva polarizátory, kterými foton prochází. Tyto pravděpodobnosti mají takové hodnoty, že výsledek experimentu v konečném důsledku popisují stejně, jako Malusův zákon.

Kvantově dokážeme interpretovat i ostatní pokusy s polarizací, ukažme si to na pokusu se dvěma zkříženými polarizátory, mezi které následně přidáme třetí. Maximální intenzity docílíme tehdy, když prostřední polarizátor bude svírat se zbylými polarizátory úhel 45°. Co se tedy děje? Když se za sebou nachází dva kolmé polarizátory, pravděpodobnost průchodu fotonu je nulová. Pokud však přidáme mezi dva kolmé polarizátory další, situace se změní. Fotony prochází prvním polarizátorem a vyjdou z něj s danou polarizací. Další polarizátor svírá s prvním úhel 45 stupňů, takže tyto fotony projdou s pravděpodobností 50 %. Polovina fotonů, která projde prostředním polarizátorem projde se stejnou pravděpodobností i třetím polarizátorem. Výsldkem je, že projde čtvrtina fotonů.

Toto pravděpodobnostní chování fotonů je možné jen díky tomu, že jsme je nechali celou dobu v superpozici různých stavů polarizace. Kdybychom mezi jednotlivé polarizátory umístili detektor, přinutili bychom je zaujmout konkrétní stav a výsledek pokusu by byl odlišný. To, že měření samotné ovlivňuje výsledek pokusu, je další ze zajímavých důsledků kvantové fyziky.

Použití v praxi

Polarizace se hojně uplatňuje například v polarizačních filtrech na brýlích a fotoaparátech, které filtrují polarizované světlo vznikající třeba odrazem od vodní hladiny a tím nám šetří zrak a fotografům nervy.

Další užití je v displejích kalkulátorů. Skládají se z mnoha malých krystalů, které mění rovinu polarizace v závislosti na elektrickém napětí. Do nich vchází světlo polarizované a podle jejich nastavení se mění jeho intenzita. Na podobném principu fungují LCD monitory.

Závěr

Polarizace je zajímavý jev, se kterým se dennodenně setkáváme. Můžeme se z něj dozvědět mnoho o vlastnotech a charakteru světla. Některé výsledky působí paradoxně a kromě klasické teorie elektromagnetismu ji z jiného úhlu popisuje například i kvantová fyzika.

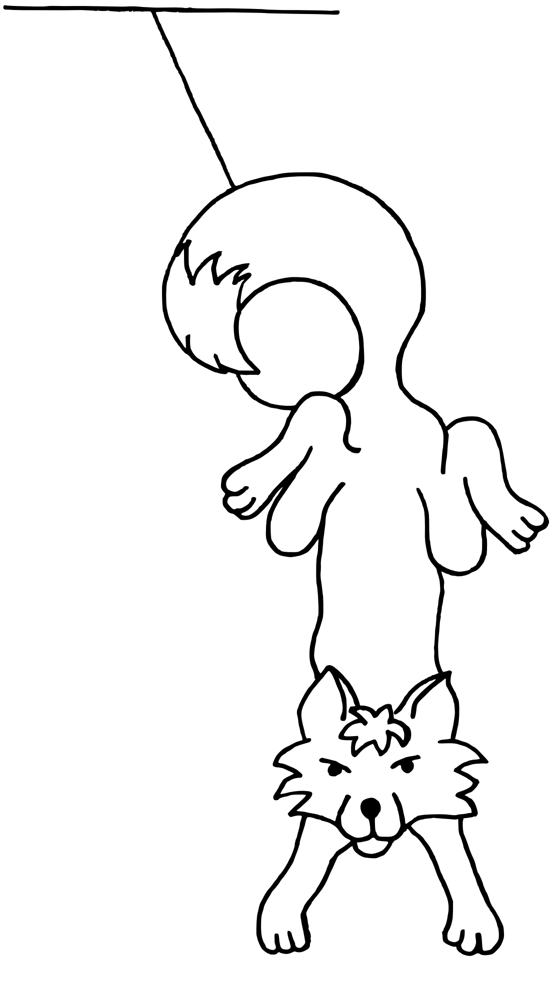
Ráda bych poděkovala Petře Vahalové za pomoc při vypracovávání příspěvku a trpělivost při spolupráci a Jefferovi za výrobu a poskytnutí aparatury.

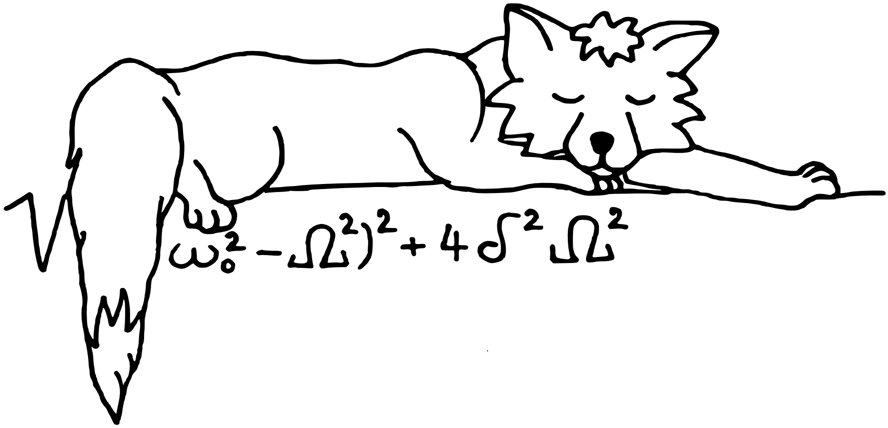
Použitá literatura

GRIBBIN, John. *Schrödingerova koťata: Pátrání po skutečnosti.* Přeložil Zdeněk Urban. Praha: Columbus, 2011. 333 s. 1. vyd. ISBN 80-7249-045-1. (čerpáno ze 3. kapitoly)

Pelant, I., a kol. *Fyzikální praktikum III – Optika.* 3. vyd. Praha: Matfyzpress, 2005.

Strumienský, Jiří. *Polarizace světla – výuka na střední škole (Bakalářská práce)* [online]. Brno, 2006. http://is.muni.cz/th/106831/prif_b/prace_orig.pdf





Kométy kam sa len pozrieš

Tak už je to tu. Prednedávnom sme oslávili 540. výročie narodenia Mikuláša Koperníka, v máji to bude 470 rokov od jeho smrti. Okrem toho sa na nás tento rok chystajú dve jasné kométy. Najprv v marci kométa C/2011 L4 (PANSTARRS), ktorá sa bude pohybovať zo súhvezdia Rýb cez Pegasa až do Andromédy a snaď bude viditeľná voľným okom. To o kométe C/2012 S1 (ISON) sa šíria zvesti, že by svojou jasnosťou mohla prežiariť aj Mesiac, ale na skutočný vývoj udalostí si budeme musieť počkať na posledné dva mesiace tohoto roka, keď sa bude rýchlo presúvať pozdĺž ekliptiky z Leva cez Pannu až do Váh.

Obe sú to kométy, ktoré k nám prilietajú z Oortovho oblaku, ktorý je akousi zásobárňou odpadu po vzniku Slnečnej sústavy kdesi ďaleko za dráhou Neptúnu. Obe kométy sa tak blízko k Slnku dostávajú možno po prvý krát v živote a to je veľmi ošemetná záležitosť. Obvzlášť druhá z nich nemusí tesný prelet okolo Slnka vôbec prežiť. Naviac po dlhom pôsobení kozmického mrazu a tvrdého žiarenia býva povrch týchto komét pri prvom prelete okolo Slnka „zapečený“ a ony tak uvoľňujú menej prachu a plynu, ako by sa na slušnú vlasaticu – parádnicu patrilo. Odhadovať tak vývoj jasnosti kométy, ktorú vidíme po prvý krát, je veľmi, veľmi ošemetné a kométa môže ľahko prekvapiť oboma smermi.

A čo tie názvy? PANSTARRS, ISON, to vyzerá, ako keby sa pomenovávanie komét nedržalo obvyklej tradície pomenovať ich po objaviteľovi. I keď občas to bol nielen objaviteľ, ale aj znovuobjaviteľ – to v prípade, keď sa pri jednom prelete nepodarilo dostatočne presne stanoviť dráhu a tak nebolo úplne jasné kedy a z ktorej časti oblohy sa kométa zas vráti. A ako to teda je s tým pomenovávaním? Jednoducho. Kométy sa aj naďalej pomenúvavajú podľa objaviteľov, akurát objaviteľmi už nie sú astronómovia krčiaci sa za svetelnými ďalekohľadmi (s veľkým priemerom a malou ohniskovou vzdialenosťou) a vytrvalo fotografujúci, či dokonca zakresľujúci to isté zorné pole noc čo noc, ale plne automatizované systémy, kde všetku prácu (mierenie ďalekohľadu, častejšie však celej batérie ďalekohľadov, fotenie a porovnávanie snímkov a hľadanie objektov, ktoré by medzi nepohyblivými hviezdami zmenili polohu) obstarajú počítače v automatizovaných projektoch.

Väčšinou majú tieto projekty za úlohu niečo iné, než hľadať kométy. Napríklad hľadajú premenné hviezdy (ASAS), asteroidy potenciálne ohrozujúce Zem (LINEAR, NEAT), sledujú Slnko (družica SOHO) a mnoho ďalších činností. Projekt PANSTARRS je univerzálny – až na to sledovanie Slnka sa venuje všetkým spomenutým činnostiam, projekt ISON je vlastne sieťou automatizovaných ďalekohľadov na sledovanie oblohy, ktorá si opäť nevyberá a čo spozoruje, to zaznamená. Veď ani najslávnejšia kométa – 1P/Halley – nemá meno po svojom objaviteľovi, keďže najstarší hodnoverný záznam o jej pozorovaní pochádza z roku 240 pred naším letopočtom. Moderné pomenovanie tak dostala po Edmondovi Halleymu, ktorý ako prvý spočítal jej dráhu a správne predpovedal jej ďalší návrat v roku 1758, ktorého sa však sám nedožil.

Ako je ale možné nevedieť presnú dráhu kométy? Že planéty obiehajú okolo Slnka a nie okolo Zeme, s tým prišiel už spomínaný Koperník (a určite nebol prvý, ale v tmárskej Európe prelomu 15. a 16. storočia narobil veľký rozruch). Že tento obeh nefunguje po ideálnych kružniciach, s tým prišiel o pár desaťročí Johannes Kepler. Pripomeňme si jeho tri zákony:

1. Planéty obiehajú po elipsách a Slnko je v ich spoločnom ohnisku,
2. sprievodič planéty (jej spojnica so Slnkom) opíše za rovnaký čas vždy rovnakú plochu,
3. pomer druhých mocnín obežných dôb je rovnaký, ako pomer tretích mocnín veľkých poloosí.

Ak by vás zaujímalo ich odvodenie, nájdete ho asi v každej vysokoškolskej učebnici teoretickej, či klasickej mechaniky. Zaujímavú alternatívu predstavuje knižôčka [1], keďže pre jej pochopenie nepotrebujete nič tušiť o Lagrangeových rovniciach, Hamiltoniáne a integráloch pohybu.

Poďme si tie zákony trochu rozobrať. Na prvý pohľad prvý z nich komentár nepotrebuje, na druhý pohľad je to trochu inak. Nejako nám doň nesedia kométy, keďže niektoré z nich okolo Slnka preletia len jedenkrát a opäť zmiznú. Aby teda platil všeobecne, poupravme ho. Bude to jednoduché, bude stačiť slovo „elipsách“ vymeniť za slovo „kužeľosečkách“, keďže dráhou telesa môže byť aj kružnica, parabola, alebo hyperbola.

Druhý zákon je nemenej zaujímavý. Predstavuje totiž zachovanie plošnej rýchlosti, čo je vlastne len zakuklený zákon zachovania energie, respektíve momentu hybnosti. Inak povedané, pokiaľ sa teleso dostane na svojej dráhe bližšie k Slnku (do *perihélia*; jeho potenciálna energia klesne), jeho rýchlosť bude vyššia, ako vo väčšej vzdialenosti od Slnka, napríklad v „odslní“ (*apohéliu*). Rozdiel týchto rýchlostí je tým väčší, čím väčšia je excentricita dráhy telesa, teda čím väčší je rozdiel týchto vzdialeností. Ale nepredbiehajme.

Tretí zákon je asi nejmenej intuitívny a v tvare

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\,, \tag{c5.1}$$

kde P je perioda obehu a a veľká poloos obežnej dráhy, ani nie je príliš elegantný. Pokiaľ ale budeme pre telesá v Slnečnej sústave dosadzovať veľkú poloos v astronomických jednotkách (veľká poloos dráhy Zeme, asi 150 miliónov kilometrov) a dobu obehu v rokoch, dostaneme sa pre Zem k dvom jednotkám a pre iné teleso k elegantnejšej forme

$$\{P\}^2 = \{a\}^3\,. \tag{c5.2}$$

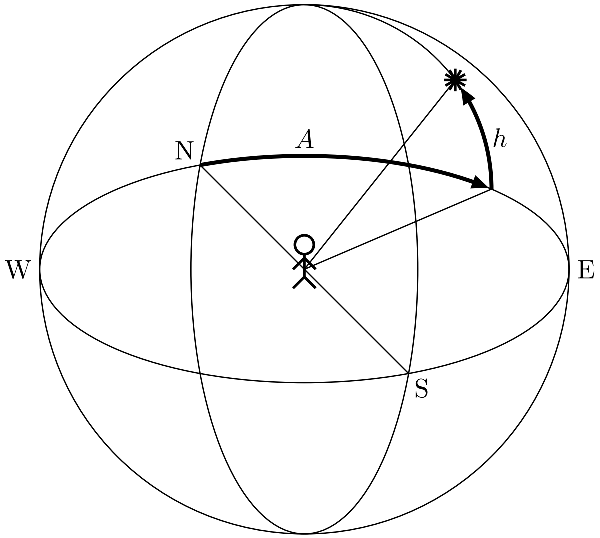
Jediný problém je, že toto „iné teleso“ musí obiehať okolo Slnka. Prečo? Neprezradili sme všetko. Kepler zákon formuloval tak, ako sme si povedali, a pre telesá obiehajúce Slnko, kde je aj najhmotnejšia planéta zanedbateľne hmotná oproti Slnku, platí celkom dobre, ale jeho presnejšia podoba musela počkať na Newtonov zákon gravitácie:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{P_1^2}{P_2^2} \cdot \frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2}\,. \tag{c5.3}$$

Oproti predchádzajúcemu tvaru pribudli hmotnosti telies M_1 a m_1 v prvej sústave a M_2 a m_2 v druhej sústave. Veľké em pre hmotnosť používame obvykle pre centrálne teleso (Slnko), malé em pre teleso obiehajúce. Opäť to s tým obiehaním jedného telesa okolo druhého nie je tak úplne pravda, obiehajú totiž obe okolo spoločného ťažiska sústavy. Na druhú stranu, aj v prípade sústavy Zem-Mesiac je ťažisko ešte stále asi 1500 km pod povrchom Zeme, lenže pre dvojhviezdu, kde sú obe zložky rovnako hmotné, je tento tvar presne to, čo hľadáme.

Prvý Keplerov zákon nám mimo iné dal odpoveď na otázku, ako je možné nevedieť dráhu kométy presne. Odpoveď je skrytá práve v tom, že kométa sa môže pohybovať po ľubovoľnej kužeľosečke a aby sme jednoznačne určili kužeľosečku, potrebujeme tri body, teda tri presné pozorovania polohy kométy. Pokiaľ nám nevýjde počasie, kométa sa príliš rýchlo stratí, alebo ju nájdeme až dodatočne na fotografiách po vyvolaní (to sa dnes pri používaní CCD kamier už tak často nestáva), môže sa stať, že požadované tri body proste mať nebudeme. Naviac sa častokrát stane, že nebudeme mať k dispozícii presné súradnice – typicky nebudeme poznať vzdialenosť od Zeme, takže takýchto neúplných pozorovaní budeme potrebovať ešte viac.

A opäť odbočme: čo to pre astronóma znamená zamerať objekt? Bolo by to krásne, keby si každý pozorovaný objekt niesol ceduľku a na nej súradnice x, y a z. Keďže to tak nie je, na tento formát súradníc narazíme naozaj zriedkavo. Každý astronóm tak siahne po nejakej podobe sférických súradníc. Čo to sú sférické súradnice? Pozrime sa na obrázok c5.1. Môžeme povedať, že panáčik uprostred gule (sféry) dokáže popísať polohu hviezdy podľa toho, o koľko stupňov sa musí otočiť doľava alebo doprava a ako vysoko musí zdvihnúť hlavu. Tretia súradnica, ktorá pomôže s presným určením polohy, je jednoduchá: polomer gule, alebo inak, vzdialenosť objektu od pozorovateľa.



Obr. c5.1 – Azimutálne súradnice

Tak teda, astronóm – egoista si vyberie presne tento formát súradníc, ktorým hovoríme obzorníkové, alebo azimutálne. Prvou z nich je azimut A (uhlová odchylka od severného smeru, sever $0°$, východ $90°$, atď.), druhou výška nad obzorom h (na obzore $0°$, v nadhlavníku – zenite $90°$, použiť sa dá aj jej doplnok – zenitová vzdialenosť). Výhodou týchto súradníc je ich prirodzenosť pre pozorovateľa, nevýhodou je to, že ich počiatkom je pozorovateľ sám. Ak sa posunie na iné miesto, zmenia sa aj súradnice sledovaných objektov. A čo viac, nemusí sa vôbec hýbať – stačí, že chvíľu počká. Preto každé zameranie objektu v azimutálnych súradniciach musí byť doplnené súradnicami stanovišťa, z ktorého sa pozoruje, a presným časom.

Aby sme sa zbavili závislosti na čase a mieste, premiestníme počiatok súradníc do stredu Zeme a súradnicovú sústavu pevne spojíme s „nepohyblivou sférou hviezd“, za akú bola dlho pokladaná.[7] No a teraz všetko závisí na tom, akú rovinu zvolíme za základnú (pri azimutálnych súradniciach to bol ideálny horizont). Pokiaľ vezmeme za základ rovinu galaktického disku, máme galaktické súradnice, v ktorých sa dobre popisuje rozloženie hmoty v galaxii. Pokiaľ za základnú rovinu vezmeme ekliptiku (zdanlivú dráhu Slnka na oblohe), dostaneme súradnice ekliptikálne, ktoré sú obvzlášť vhodné na popis pohybu objektov obiehajúcich Slnko (tak napríklad planéty sa pohybujú len v úzkom páse

[7] Teraz už vieme, že všetky hviezdy sa pohybujú a obloha sa pomaly mení, ale to nie je nič, čo by pozorovateľa pri priemernej dĺžke ľudského života muselo trápiť.

okolo ekliptiky a nevzdiaľujú sa od nej viac, než o pár stupňov). No a napokon môžeme za základnú rovinu zobrať priemet rovníku Zeme na oblohu, čím si zavediem rovníkové, alebo ekvatoriálne súradnice.[8]

Aby bol súradnicový guláš úplný, aj tu si môžeme vybrať z dvoch možností. Buď zvolíme za význačný bod priesečník rovníku s miestnym poludníkom, potom po rovníku meriame *hodinový uhol* (a opäť máme v čase premenlivé súradnice; rovníkové súradnice prvého druhu), alebo za počiatok zvolíme nejaký význačný bod na hviezdnej oblohe. V praxi sa používa jarný bod, teda tzv. „vzostupný uzol“, inak povedané bod, v ktorom sa Slnko nachádza počas jarnej rovnodennosti na konci marca (leží v súhvezdí Ryby). Je to teda jeden z dvoch priesečníkov ekliptiky a rovníku (na oblohe; ten druhý je v Panne). V tomto prípade meráme po rovníku *rektascenziu* α, a to od jarného bodu smerom na západ (rovníkové súradnice druhého druhu). Udávame ju buď v hodinách, alebo v stupňoch. Tak súhvezdie Orion sa nachádza na šiestich hodinách resp. deväťdesiatich stupňoch, Panna je na dvanástich hodinách a letné súhvezdia, napríklad Strelec sú na hodinách osemnástich. Ešte sme nespomenuli druhú súradnicu, tou je *deklinácia* δ, inak povedané výška nad rovníkom. Hviezdy na rovníku (napríklad pás Oriona) majú deklináciu $0°$, Polárka má deklináciu približne $+89°$.

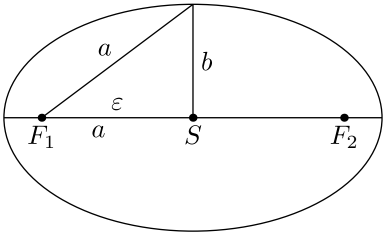
Vida, dostali sme súradnicový systém pevne spojený s hviezdnym pozadím a v čase nemenný.[9] Prevodmi medzi jednotlivými súradnicovými systémami vás zaťažovať nebudem, nájdete ich v skvelej knihe [2], spolu s hromadou ďalších astronomických výpočtov. Ostatne podľa tejto knihy je veľká časť dnešného článku napísaná. Keby ste túto knižku nevedeli zohnať, mám dobré správy, v čase vydania čísla je k dispozícii naskenovaná na serveri `uloz.to`.

Ešte stále ale nemáme spôsob, ako popísať dráhu kométy. Vrhnime sa na to. Nepoužijeme žiadne z doteraz spomenutých súradníc, ale zavedieme si nové pojmy, súhrne označované ako *dráhové elementy*. Tieto rozdelíme do niekoľkých skupín. Prvá skupina popíše tvar dráhy nášho objektu, druhá skupina túto dráhu zorientuje v priestore a tretia skupina udá polohu objektu na dráhe v závislosti na čase.

---

[8] Správne budú namietať tí, ktorí budú tvrdiť, že sme si zvolením stredu Zeme ako počiatku súradníc príliš nepomohli, keďže aj Zem sa pohybuje (dokonca dosť zložito) a naviac pozorovateľa do jej stredu nedostaneme. Nevadí, vďaka pohybu Zeme máme paralaxu (dennú alebo ročnú), ktorá nám významne uľahčuje zisťovanie vzdialeností telies. Ale o tom niekedy inokedy.

[9] To nie je tak úplne pravda, jednak sa všetky objekty pohybujú („vlastný pohyb hviezd“), ale hlavne, Zemská os nie je v priestore pevne nasmerovaná, ale vykonáva tzv. *precesiu* (a ďalšie menšie pohyby), čím sa jarný bod po ekliptike posúva (jeden obeh za 25725 rokov). Preto sa vždy súradnice udávajú k nejakému dátumu *ekvinokciu*, obvykle v Juliánskom kalendári. V súčasnosti sa používa ekvinokcium, alebo epocha J2000.0.



Obr. c5.2 – Elipsa a jej parametre

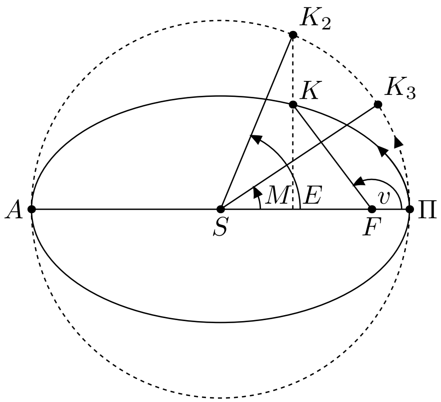
V prvej skupine nám na popis kužeľosečky stačia dva parametre: jej veľká poloos a a jej numerická excentricita e. Na obrázku c5.2 máme znázornenú veľkú (hlavnú) poloos (vzdialenosť vzdialenejšieho vrcholu elipsy od jej stredu) a, malú (vedľajšiu) poloos b a excentricitu (vzdialenosť ohniska od stredu) ε. Nami spomínaná numerická excentricita sa spočíta ako podiel excentricity a veľkej poloosi, teda $e = \varepsilon/a$. Pre kružnicu má hodnotu 0, pre elipsu je v intervale $(0, 1)$ a pre parabolu má hodnotu 1.

V druhej skupine zorientujeme našu dráhu v priestore. Najprv si vyberieme jej sklon (inklináciu) i k rovine ekliptiky. Potom zvolíme otočenie okolo zvislej osi, ktoré udáme pomocou dĺžky vzostupného uzlu Ω, ktorú meráme podobne ako rektascenziu od jarného bodu.[10] Týmito dvoma parametrami sme jednoznačne popísali rovinu obehu, teraz v nej ešte dráhu správne otočiť. Na to slúži posledný parameter tejto skupiny: argument šírky perihélia ω, čo je uhol, ktorý zviera priamka apsíd (hlavných vrcholov elipsy) s uzlovou priamkou.

Poznáme dráhu aj jej orientáciu v priestore. Zostáva nám teraz určiť polohu telesa na dráhe. Na to použijeme obežnú dobu P a okamžik priechodu perihéliom T. No a tým máme popis dráhy hotový. S batériou týchto parametrov dokážeme vypočítať polohu telesa na oblohe v ľubovoľnom čase. Popíšme si, ako na to.

Na spočítanie polohy objektu si ale ešte zavedieme pojem anomálie. Na obrázku c5.3 vidíme znázornené tri rôzne. Pravá anomália v je uhol, ktorý zviera sprievodič telesa K s priamkou apsíd. Ak dráhu telesa nahradíme kružnicou, jeho polohu kolmým priemetom jeho polohy na elipse na túto kružnicu (na obrázku bod K_2), potom môžeme merať excentrickú anomáliu E, čo je uhol, ktorý zviera sprievodič tohoto priemetu telesa s priamkou apsíd. Napokon, pokiaľ pohyb telesa nahradíme rovnomerným pohybom telesa K_3 po kružnici, dostávame strednú anomáliu M. Toto nahradenie sa deje tak, aby telesá mali rovnakú obežnú dobu a rovnaký čas prechodu perihéliom.

[10] Dráha telesa pretína ekliptiku v dvoch bodoch: v zostupnom uzle, kde sa teleso zanára na južnú pologuľu a v uzle vzostupnom, kde teleso opäť vystupuje na severnú pologuľu.



Obr. c5.3 – Pravá v, excentrická E a stredná M anomália

Vzťahy medzi doteraz uvedenými elementmi, vzdialenosťou telesa od Slnka r a anomáliami sú nasledovné: Medzi pravou anomáliou a vzdialenosťou od Slnka platí vzťah

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\,, \tag{c5.4}$$

medzi pravou s excentrickou anomáliou potom

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\,, \tag{c5.5}$$

a medzi excentrickou anomáliou a vzdialenosťou

$$r = a(1-e\cos E)\,. \tag{c5.6}$$

Aby sme mohli pracovať so strednou anomáliou, zavedieme ešte stredný denný pohyb $n = 360°/P$. Potom stredná anomália závisí len na čase $t-T$ od prechodu perihéliom a platí

$$M = n(t-T)\,. \tag{c5.7}$$

Medzi strednou a excentrickou anomáliou platí tzv. Keplerova rovnica:

$$M = E - e\sin E\,. \tag{c5.8}$$

Pre malé hodnoty excentricity sa dá excentrická anomália spočítať iteračne práve pomocou tohoto vzťahu, v ktorom si stredná a excentrická anomália vymenia úlohu, teda $E_{n+1} = M + e\sin E_n$, kde za prvý odhad E_0 zvolíme práve hodnotu strednej anomálie. Tento vzťah budeme potrebovať pri určovaní polohy telesa.

Takže ako na to? Vieme o našom telese elementy jeho dráhy, teda a, e, i, Ω, ω, P a T a chceme v čase t spočítať jeho polohu na oblohe. Začneme výpočtom strednej anomálie

$$M = \frac{360°}{P}(t-T)\,. \tag{c5.9}$$

Z tejto strednej anomálie spočítame riešením Keplerovej rovnice (c5.8) excentrickú anomáliu E. Teraz už dokážeme spočítať heliocentrické pravoúhle rovníkové súradnice x, y a z:

$$x = aP_x(\cos E - e) + Q_x a\sqrt{1-e^2}\sin E\,, \tag{c5.10}$$

a rovnako pre y a z, kde

$$\begin{aligned} P_x &= A_1\cos\omega + A_2\sin\omega\,,\\ Q_x &= A_2\cos\omega - A_1\sin\omega\,, \end{aligned} \tag{c5.11}$$

kde sa pre y vymenia koeficienty A za B a pre z za C. Hodnoty koeficientov A, B a C spočítame nasledovne:

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos\Omega\,, & A_2 &= -\cos i\sin\Omega\,,\\ B_1 &= \sin\Omega\cos\epsilon\,, & B_2 &= \cos i\cos\Omega\cos\epsilon - \sin i\sin\epsilon\,,\\ C_1 &= \sin\Omega\sin\epsilon\,, & C_2 &= \cos i\sin\Omega\sin\epsilon + \sin i\cos\epsilon\,, \end{aligned} \tag{c5.12}$$

kde ϵ je sklon ekliptiky k rovníku, teda asi $23^\circ\,26'\,21{,}45''$.

Jednotlivé P a Q závisia len na tvare dráhy a jej orientácii v priestore, sú preto časovo nezávislé. Keďže sú to smerové kosíny dráhy, pri správnom spočítaní by sme mali dostať

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= 1\,,\\ Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1\,,\\ P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z &= 0\,. \end{aligned} \tag{c5.13}$$

Pravoúhle súradnice s počiatkom v Slnku zmeníme na pravoúhle súradnice s počiatkom v Zemi jednoduchým posunutím

$$X, Y, Z = x, y, z + X_\odot, Y_\odot, Z_\odot\,, \tag{c5.14}$$

o aktuálne geocentrické pravoúhle súradnice Slnka $X_\odot$, $Y_\odot$, $Z_\odot$. V tento moment zostáva spočítať rektascenziu a deklináciu zo vzťahov

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{Y}{X}\,,\\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\,. \end{aligned} \tag{c5.15}$$

Opačný prevod (z pravoúhlych do sférických súradníc), ktorý potrebujeme napríklad na zistenie súradníc Slnka pre rovnicu (c5.14) by vyzeral (ϱ je geocentrická vzdialenosť) takto:

$$\begin{aligned} X &= \varrho\cos\delta\cos\alpha\,,\\ Y &= \varrho\cos\delta\sin\alpha\,,\\ Z &= \varrho\sin\delta\,. \end{aligned} \tag{c5.16}$$

No a tým máme výpočet hotový. Zistili sme, kde sa teleso nachádza na oblohe v čase t. Takto vypočítané polohy telesa nazývame efemerida. Pri objavení nového telesa musíme postupovať opačne a spojením niekoľkých pozorovaní zistiť postupne všetky elementy jeho dráhy. Tak napríklad, pomenované môžu byť len tie asteroidy, ktorých dráhové elementy máme dostatočne presne určené.

Na záver si povedzme, že nie je všetko tak jednoduché, ako sme si to popísali. Keplerove zákony a nemenné dráhové elementy fungujú len v probléme dvoch telies, čiže keď máme len kométu (planétu, asteroid, družicu, ...), Slnko a nikde ďaleko nič iné. Slnečná sústava ale nie je prázdna. Zo všetkej hmoty, ktorá okolo Slnka krúži, jej je ďaleko najviac schovanej v Jupiteri a tak sa nemôžeme diviť, že Jupiter chytá prilietajúce kométy a robí si z nich domácich miláčikov. Kométy sa na obežnej dráhe dostávajú do *rezonancie* s Jupiterom, takže ich obežná doba je v pomere malých prirodzených čísel s obežnou dobou Jupitera. Keď ale kométa priletí nevhod, môže sa stať, že ju Jupiter katapultuje na parabolickú dráhu a teda na veky zo Slnečnej sústavy. Tento princíp *gravitačného praku* sme sa už naučili používať a využívame ho vždy, keď potrebujeme dostať naše sondy na dráhy, ktoré vyžadujú veľké množstvo dodanej energie (napríklad na únik zo Slnečnej sústavy).

[1] Goodstein D., Goodstein J.: Feynmanova stratená prednáška, Pohyb planét okolo Slnka. ENIGMA Nitra, 2001.
[2] Široký J., Široká M.: Základy astronomie v příkladech. SPN Praha, 1977.

Úloha 5.5 – Pozorujeme teleso (4b)

Spočítajte efemeridu na polnoc SELČ 31. 3. 2013/1. 4. 2013 pre teleso, ktorého dráhové elementy sú v tabuľke. Aké by to tak mohlo byť teleso a kde na oblohe sa bude nachádzať? Bude pozorovateľné?

e	0,22267
a	1,45784 AU
i	10,82873°
Ω	304,33802°
ω	178,79123°
P	642,9275 dní
T	21. 10. 2013, 18.08:18,6 LSEČ

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	r5	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy									
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ F. Homza	3.	56	2	3	1	4		2		15	27	56
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Kufová	1.	33	2	3	0	3					8	33
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	2.	79	2	0	1	2	2		5		12	31
4–6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	2.	46	2	3	3						8	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kušnír	2.	27	0	3	2	2					7	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Poljak	1.	27	2	3		2					7	27
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Hrušková	3.	25	2	2	1						5	25
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Buráň	4.	24									0	24
9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	4.	51	2	3	2		4				11	23
10–12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Lieskovský	3.	49	2		3						5	22
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Nácovský	2.	22	0	3	3						6	22
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skoupý	3.	22		3		3					6	22
13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	4.	58									0	20
14–15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Cerman	1.	19	2	3		2					7	19
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	2.	31	2	3	4						9	19
16–17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skála	2.	18									0	18
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Šťastná	3.	59	2	3	3	2					10	18
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Štábl	2.	15	2	3							5	15
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ullwer	4.	13	0	0	0	2					2	13
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ S. Fraňová	4.	12									0	12
21–24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ E. Bušáková	4.	14									0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ilievová	2.	11	2								2	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Souček	1.	11									0	11
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	2.	38	2	3							5	11
25–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Macháčová	3.	10	0		0						0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Svobodová	3.	10									0	10
27–28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bidlák	3.	12									0	9
	J. Dittrich	1.	9	2								2	9
29.	Z. Garčic	2.	8									0	8
30–31.	M. Biroš	2.	7		0		2					2	7
	V. Krchňák	1.	7									0	7
32–34.	V. Straková	3.	6									0	6
	Š. Titlová	1.	6									0	6
	R. Zlatník	1.	6									0	6

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**	**t1**	**t2**	**t3**	$\sum_0$	$\sum_1$
35–39.	J. Alfery	1.	5	2	3							5	5
	J. Kolář	2.	5									0	5
	Mgr.^{MM} J. Svoboda	4.	29									0	5
	M. Šafek	2.	5									0	5
	K. Škorvánková	1.	5	2								2	5
40–44.	M. Daniel	3.	4									0	4
	P. Kroft	2.	4									0	4
	Mgr.^{MM} J. Mikel	4.	25									0	4
	M. Reška	1.	4	2								2	4
	M. Vanko	4.	4									0	4
45–55.	Mgr.^{MM} J. Dolejší	2.	21									0	3
	L. Draslarová	1.	3									0	3
	J. Erhart	2.	7									0	3
	K. Kolář	1.	3	2								2	3
	J. Kučera	1.	3									0	3
	J. Kulička	1.	3									0	3
	J. Novák	1.	3									0	3
	D. Sekáč	2.	3	0								0	3
	D. Stěhule	2.	3									0	3
	J. Škvára	3.	3									0	3
	V. Václavík	3.	3			3						3	3
56–59.	D. Barbora	2.	2									0	2
	J. Fürbacherová	4.	2									0	2
	J. Knížek	2.	2									0	2
	O. Leskovjanová	2.	2	0	0							0	2
60–62.	Z. Kuchařová	1.	1									0	1
	T. Mareš	1.	1									0	1
	D. Princík	4.	1									0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.