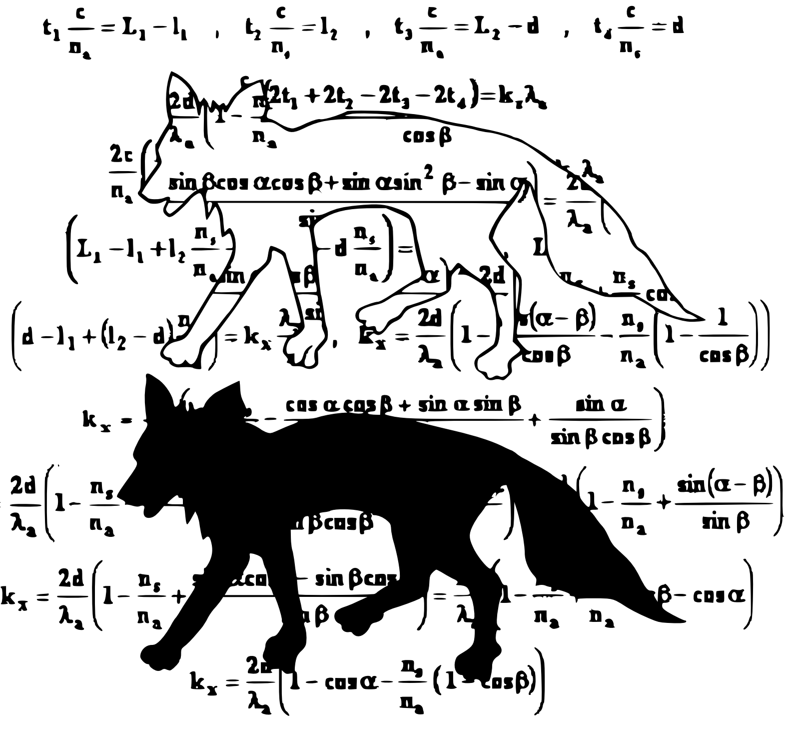
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XIX / Číslo 4



Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,

leden a únor jsou (na rozdíl od prosince, té levné náhražky) opravdu zimní měsíce. I v Praze v jejich průběhu nástává bílo a místo rozčvachtané břečky cítíme pod nohama opravdový sníh. Organizátoři zpoza skript a monitorů (je totiž zkouškové) sledují krajinu za oknem, trochu čistší než obvykle. Někdy se i učí. Ale ani zkoušky a stavění sněhuláka nás neodlákalo od vás, našich řešitelů, a přinášíme vám další číslo našeho časopisu.

Najdete v něm nová zadání úloh s hravou pohádkou, řešení úloh z druhého čísla a shrnutí vašich příspěvků k tématkům. Dál vás čeká seznámení s novým zajímavým programem Sage, které doufáme využijete nejen pro řešení úlohy k článku, ale i pro řešení jiných seminářových úloh i problémů „ze života“, které podnítily vaši zvědavost.

Připomínáme, že na konci května (18.–26.) jako obvykle připravujeme pro zhruba 20 nejlepších řešitelů soustředění. Pokud chcete jet, musíte předstihnout dostatečné množství vašich spoluřešitelů.

Příjemné a bílé zimní zážitky přejí

organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání čtvrté série: 25. 2. 2013

V Praze jsem se octla poprvé jako novopečená matfyzačka, kterou vlak vyplivl na nádraží a ponechal, jak se to tak matfyzákům stává, hladovou a takřka bez peněz, ale zato s hromadou zavazadel stojící uprostřed davu. Stála přede mnou nultá zkouška na matfyzu – dostanu se na kolej? Před nádražní budovu je to jen pár kroků, pak tři sta metrů parkem. A pak …

Úloha 4.1 – Kudy? (5b)

Stojím na křižovatce a nevím, kterou ze dvou cest mám pokračovat. Vím, že na té správné je v neznámé vzdálenosti od křižovatky stanice metra. Jak mám postupovat, abych se tam dostala? Jakou vzdálenost při tom v nejhorším případě urazím? Zkuste vymyslet (ne nutně optimální) postup, při kterém bude nachozená vzdálenost růst co nejpomaleji s rostoucí vzdáleností stanice. Ideální by bylo, kdyby mi stačilo ujít nanejvýš desetkrát víc, než kdybych šla nejkratší možnou cestou.

Odbočila jsem vlevo, a jak už to tak bývá, bylo to špatně. I když, záleží, jak se to vezme. Sice jsem si zašla asi sto metrů a pak jsem ještě v plné polní obkroužila blok domů, jehož obejití dalo snad na tisíc kroků, ale věřte či ne, ten blok domů byl jistojistě 1415-úhelníkový!

Úloha 4.2 – 1415-úhelník (5b)

Mějme konvexní mnohoúhelník o 1415 stranách, jehož obvod je 2001 cm. Dokažte, že mezi jeho vrcholy existují 3 takové, které tvoří vrcholy trojúhelníku s plochou menší než $1\,\mathrm{cm}^2$.

Když jsem se konečně vrátila a tentokrát pokračovala správně rovně, za dalších pár set metrů jsem konečně dorazila k metru. Sjela jsem dolů po jezdících schodech a nastoupila. Metro jelo docela nudně, pořád stejným směrem, jen občas se cesta, zdálo se mi, trochu zaklikatila. A výhled taky nic moc, tma. I když, ono to vlastně funguje jako zrcadlo. Pokoušela jsem se přečíst v zrcadlové verzi, co hlásá titulek v novinách té paní naproti. Když v tom mi vlezla do hlavy neodbytná otázka:

Úloha 4.3 – Zrcadlo (2b)

Proč jsou písmena v zrcadle převrácená pravo-levě a ne vzhůru-dolů?

Musí to být jednoduché! Jestli na to do večera nepřijdu, tak nebudu moct spát a navíc začnu pochybovat, jestli byl matfyz dobrý nápad... Á, tady mám vystupovat! Posbírat všechna zavazadla a po schodech nahoru. Kousek rovně a pak vyjít nahoru na most, s těmi zavazadly to působí docela strmě. A pokračovat rovně po mostě, ta budova za ním už je určitě kolej! A vida, támhle zrovna pluje kolesový parník! Párkrát jsem si za chůze poskočila, abych ho přes zábradlí lépe viděla, ale pak jsem si uvědomila tíži svých četných zavazadel a zase jsem toho nechala. Nějaký dlouhý je ten most, ale přece tady Vltava nemůže mít na šířku víc než tři sta metrů...

Úloha 4.4 – Křížení cest (4b)

Přecházím po mostě přes řeku, když v tom si všimnu, že se právě pode mnou nachází příď lodě plující přímo pod most. Jak dlouho potrvá, než spatřím příď lodě na druhé straně mostu? Jak se bude řešení lišit, pokud půjdu rovnoměrně dál, od případu, kdybych zůstal stát na místě? Řešení můžeš hledat pro konkrétní most, loď a osobu, nebo zcela obecně.

Z točitých schodů, které vedly dolů z mostu, se mi sice trochu motala hlava, ale nakonec jsem na kolej dorazila. Dokonce mi ještě se zavazadly pomohl jeden pohledný přátelský matfyzák. Zatím ta Praha vypadá docela slibně.

Úloha 4.5 – Šifra (1b)

Jak vypadá Praha? Odpověď hledej v textu příběhu. Budeš potřebovat tužku.

Řešení témat

Téma 1 – Stavba století

K tomuto tématu se sešly příspěvky dva. V jednom z nich Bc.[MM] Patrik Nácovský zjistil, že v n-dimenzionálním prostoru nepůjde postavit věž větší než $2n+1$, ale jestli lze věž této velikosti opravdu postavit zde neuvádí. Je toto opravdu nejlepší možný odhad, nebo vymyslíte lepší?

Naši inženýři vynalezli nový (úspornější) způsob stavby. Na postavení věže o výšce n je potřeba souvislá oblast věží o výškách $n-1$, $n-2$ a $n-3$. Protože nejsou věže o výšce 0 ani -1, tak platí ještě následující pravidla: věž výšky 2 postavím jako oblast tří věží o výšce 1 a věž výšky 3 postavím jako oblast jedné věže o výšce 2 a dvou o výšce 1. Ostatní pravidla i otázky jsou stejné jako minule. Vymyšlení jiného předpisu se samozřejmě meze nekladou.

xlfd

Téma 2 – Měření rychlosti

Abyste se o zimních večerech nenudili a mohli je trávit s nohama u topení a notebookem na klíně a přitom se věnovat našemu semináři, naměřili jsme pro vás nějaká data k analyzování. Všechna data byla naměřena v Praze a vaším úkolem bude vždy zjistit, jak se změnila rychlost dopravního prostředku v závislosti na čase.

První soubor, `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/19_4_t2_1.mp3`, je prostou zvukovou nahrávkou jízdy určitého dopravního prostředku. Druhý soubor, `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/19_4_t2_2.csv`, obsahuje pro změnu záznam údajů akcelerometrů a gyroskopů během jízdy jiného dopravního prostředku.

Možností, jak se dostat k odpovědím na uvedené otázky je několik, zatím zatím nebudeme napovídat.

Pošlete nám popis, co jste s daty dělali, podle čeho jste určovali rychlost a jaké výsledky vám vyšly. Bonusové body neminou ty, kteří správně určí zaznamenanou trasu.

Jethro

Téma 4 – Věty o čtvercích

K tématu přišly dva články pokoušející se odpovědět na mnohé položené otázky.

Mgr.[MM] Aranka Hrušková zkoumala, která prvočísla lze zapsat jako součet dvou čtverců. Správně usoudila, že jediné sudé prvočíslo tak zapsat lze, neboť $2 = 1^2 + 1^2$. Obecně všechna lichá čísla musejí být součtem lichého a sudého čísla, tedy pro lichá prvočísla musí platit

$$p = (2k+1)^2 + (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 = 4(k^2 + k + l^2) + 1$$

pro vhodná $k, l \in \mathbb{Z}$. Tedy jako součet dvou čísel lze zapsat pouze lichá prvočísla ve tvaru $4j + 1, j \in \mathbb{N}$. Nezdůvodnila ale, že všechna prvočísla v tomto tvaru opravdu jako součet dvou prvočísel zapsat lze. To je tedy úkolem pro vás.

Mgr.[MM] Markéta Calábková se zabývala hned několika problémy. Úspěšně si poradila s otázkou, která čísla lze zapsat jako rozdíl dvou čtverců. Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Všechna lichá čísla L lze zapsat pomocí a, b splňující soustavu rovnic $a - b = 1$ a $a + b = L$, která má zřejmě vždy řešení. Podobně všechny násobky čtyř, C, lze zapsat pomocí dvojice a, b splňující opět řešitelnou soustavu rovnic $a - b = 2$, $a + b = C/2$. Zbývají čísla dávající zbytek dva po dělení čtyřmi. Ty zapsat nelze, neboť výrazy $a-b$ a $a+b$ mají pro všechna a, b stejnou paritu, jejich součin je proto buď lichý nebo dělitelný čtyřmi.

Dalším řešeným problémem byla otázka, jestli součet dvou čísel, které lze zapsat jako součet dvou čtverců, musí být též zapsatelný jako součet dvou čtverců. To zřejmě nemusí. Jako protipříklad mohou sloužit například čísla $2 = 1^2 + 1^2$ a $5 = 1^1 + 2^2$, jejichž součet 7 dle věty uvedené v článku dokonce nelze zapsat ani jako součet tří čtverců celých čísel.

Naopak pro součin dvou čísel zapsatelných jako součin dvou čtverců platí, že i výsledek je zapsatelný jako součet dvou čtverců. Mgr.[MM] Markéta Calábková uvádí správné řešení. Využívá ale obecnou charakteristiku čísel zapsatelných jako součet dvou čtverců. Můžete se zkusit zamyslet nad řešením, které vychází pouze z jednodušších vlastností čísel.

Dále se článek pokouší odpovědět i na otázku, která celá čísla m lze zapsat ve tvaru

$$m = a^2 + b^2 + c^2 + 2^k,$$

kde $a, b, c, k \in \mathbb{N}$, bohužel neúspěšně. Tato výzva tedy zůstává stále nepokořena. Stejně jako její obdoba, kde se místo k vyskytuje $2k$.

Kuba

Téma 5 – Analogie s elektrickými obvody

K tomuto tématku nám přišly tři příspěvky a to od Mgr.[MM] Jakuba Kušníra, Bc.[MM] Václava Skály a Bc.[MM] Karla Ullwera. Vzhledem k tomu, že se jednalo spíše o soupisy dílčích poznatků a nikoliv o souvislé články, zpracovali jsme je jako rešerši.

Obvody s plyny

Václav se ve svém příspěvku věnoval analogii s plyny. Zaslal nám pouze tabulku, ve které srovnával jednotlivé veličiny, my se ale pokusíme jeho poznatky okomentovat. Elektrické napětí $U = \varphi_A - \varphi_B$, které, jak víme, je dáno rozdílem potenciálů, je zde srovnáno s rozdílem tlaků $u = p_1 - p_2$, to je velmi dobrý předpoklad. Elektrický proud je zde však srovnáván s jakousi plošnou hustotou $Q = S\varrho$. To je trochu problematické, neboť elektrický proud je definován jako $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, neboli jako množství elektrického náboje $\mathrm{d}Q$, jenž prošel za jednotku času $\mathrm{d}t$, a tak bychom od definice proudu u obvodů s plyny spíše očekávali, že se bude jednat o množsví částic plynu, jež prošly potrubím za jednotku času. Původní, Václavova, definice plynového proudu $Q = S\varrho$ má možná smysl, ovšem bez komentáře, proč byla zrovna takto zvolena, je těžké odhadnout, proč autor takto postupoval.

Zajímavou myšlenkou ve Václavově příspěvku je srovnání elektrické kapacity C s objemem V u plynů. Dále je zde srovnáváno potrubí s vodičem, což bylo naznačeno již v zadání. Dobrým postřehem je, že usměrňovací dioda je to samé jako jednocestný ventil.

V článku se nicméně objevují i některá problematická srovnání, například úvaha, že nádoba, ve které vzniká plyn chemickou reakcí, je totožná s baterií. Toto je poměrně smělé tvrzení a bylo by vhodné jej patřičně okomentovat.

Obvody s vodou

Této problematice se věnoval Jakub a Karel. Autoři se shodují, že proud představuje množství vody za čas. Napětí však chápou odlišně, Karel jej chápe jako spád vody, ale Jakub jej definuje jako rozdíl tlaků. Analogii elektrického odporu oba autoři zavádějí velice vágně a nejasně, proto tento popis stále čeká na svého autora. Jako kondenzátor uvádí Karel nádrž, což dobře koresponduje s jeho definicí napětí – pokud se bude kondenzátor nabíjet, bude uvnitř stoupat hladina, tedy se zvedat napětí. A pokud bychom jako elektrický náboj Q chápali objem vody V, tak nám dobře sedí $Q = CU$ spolu s vodním ekvivalentem $V = SU$, kde plocha kondenzátoru S je ekvivalentní kapacitě C.

Jakub ve svém článku zmiňuje také možnou konstrukci ampérmetru: „Ampérmeter meria indukčnosť, ale pohyb častíc vody nespôsobuje vznik magnetického poľa[1], ale vo vode to môže byť takto:

$$\Delta p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \mathrm{const}$$

v jednotkovom objeme a to spôsobuje pri väčšom prúde poklesne Δp v dôsledku zväčšenia rýchlosti prietoku. Keď na trubicu napojíme manometrické trubice, tak v nich do určitej výšky stupne voda v dôsledku tlaku. Pri trubici pri ktorej poznáme jej plochu v priereze môžeme presne určiť veľkosť prúdu v takomto obvode.“

A jak dál?

Výše popsané příspěvky jsou dobrým úvodem k tomuto tématku, ale mnoho toho ještě zůstává nezodpovězeno. Jak je to s odporem trubek? Umíte ukázat, že platí Ohmův či Kirchhoffovy zákony? Jak konkrétně je možné sestrojit vodní či plynové tranzistory? Nebojte se používat vzorečky či obrázky. Těšíme se na vaše další články, či reakce na výše zmíněné myšlenky.

(R)adim

[1] *Pozn. red.: U většiny ampérmetrů se neměří proud pomocí indukce, ale pomocí úbytku napětí na snímacím odporu.*

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Nad Tatrou se blýská (5b)

Zadání:

Několik kamarádů se rozhodlo, že změří rychlost zvuku ve vzduchu. Počkali na bouřku, vyběhli na kopce (každý na jeden) a čekali na blesky. Ke každému blesku si všichni zaznamenali časový odstup mezi zábleskem a zazněním hromu. Dokážou z těchto údajů spočítat rychlost zvuku (a jak), pokud

(i) jsou dva a znají svou vzdálenost,
(ii) jsou tři a znají všechny svoje vzdálenosti,
(iii) jsou tři a znají jen jednu vzdálenost,
(iv) jsou tři a neznají ani jednu vzdálenost?

Řešení:

Na začiatku riešenia si popíšme situáciu, ktorú budeme riešiť: Niekoľko kamarátov sa nachádza na kopcoch. Predpokladajme, že sú, spolu s bleskom, v jednej rovine. Pre dvoch kamarátov je to splnené automaticky, máme iba tri body (kamarátov a blesk), ktorými vždy pôjde preložiť rovina. V prípade troch kamrátov zanedbáme výškové rozdiely. Polohu kamarátov a blesku si popíšeme v bežnej kartézskej súradnicovej sústave Oxy. Rýchlosť zvuku označíme c.

Dvaja a poznajú svoju vzdialenosť

Označme vzdialenosť kamarátov a. Kamarát A zmeria odstup medzi zábleskom a hromom t_A, kamarát B zas t_B. Vzdialenosť blesku od A je tým pádom $d_A = c \cdot t_A$, od B zas $d_B = c \cdot t_B$. Tri vzdialenosti a, d_A a d_B musia spĺňať modifikovanú trojuholníkovú nerovnosť, teda súčet ľubovoľných dvoch z nich bude musieť byť väčší, alebo *rovný*[2] tretej, teda musia platiť nerovnosti $d_A + d_B \geq a$, $a + d_A \geq d_B$ a $a + d_B \geq d_A$. Dosadením za d_A a d_B a vyjadrením rýchlosti zvuku c tak dostaneme pre rýchlosť zvuku obmedzenie:

$$\frac{a}{t_A + t_B} \leq c \leq \frac{a}{|t_A - t_B|}\,. \tag{u2.1.1}$$

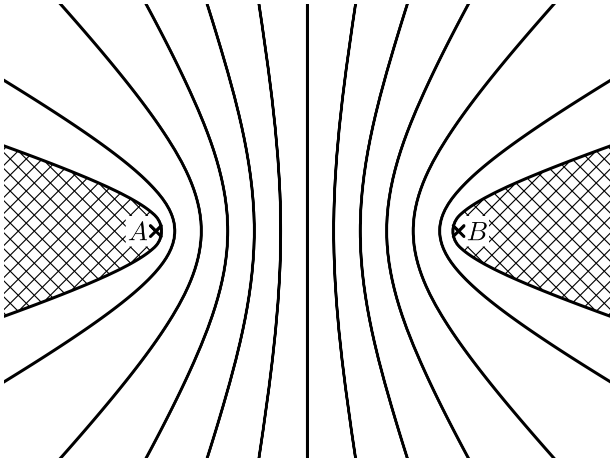
To je najlepšie, čo dokážeme zistiť. Pre prvý blesk máme totiž tri neznáme: rýchlosť zvuku c, a jeho polohu (x_1, y_1). Na určenie týchto neznámych máme iba dve rovnice pre t_{A_1} a t_{B_1}, teda nemáme dosť rovníc na to, aby sme určili presnú polohu blesku a tým aj rýchlosť zvuku. Keby sa nám ale podarilo určiť smer od jedného z kamarátov k blesku, pribudla by nám práve tá jedna chýbajúca rovnica, ktorá by nám na určenie rýchlosti zvuku z jediného blesku chýbala. Tento údaj nám ale zadanie nedáva k dispozícii, takže máme smolu. Čo sa stane, keď pribudne druhý blesk? Dostaneme ďalšie dve neznáme (x_2, y_2) a zároveň novú dvojicu rovníc pre časy t_{A_2}, t_{B_2}. Máme tak päť neznámych a štyri rovnice.

[2] to je tá modifikácia, blesk a dvaja kamaráti môžu ležať na jednej priamke

A s každým ďalším bleskom sa situácia zopakuje: pribudnú dve rovnice a dve neznáme.

Na žiaden konečný počet bleskov tak nedokážeme určiť rýchlosť zvuku presne, ale dobrá správa je, že už po pomerne malom počte (okolo 5 až 10) sa horný odhad rýchlosti zvuku priblíži správnej hodnote. Prečo je to tak a prečo sa dolný odhad blíži pomalšie? Kde ležia dva blesky, ktoré majú rovnaký rozdiel časov? No predsa na krivke, na ktorej ležia body, ktoré majú od dvoch pevných bodov (kamarátov) rovnaký rozdiel vzdialeností. Touto krivkou je hyperbola a dvaja kamaráti sedia v jej ohniskách. Ideálnym prípadom by pre nás bola degenerovaná hyperbola, teda polpriamky ležiace na spojnici kamarátov s počiatkami v nich a mieriace od nich. Blesk ktorý padne na túto degenerovanú hyperbolu má maximálnu hodnotu rozdielu $|t_A - t_B| = a/c$ a teda presne určuje rýchlosť zvuku, lenže to, že sadol práve sem, my nevieme.

Nevadí, určme oblasť, do ktorej musí padnúť blesk, aby chyba neprekročila 5 %. Určenie je jednoduché, je to oblasť, kde sa hodnota $\frac{1}{|t_A - t_B|}$ nelíši od maximálnej o viac, ako o 5 %. Ako vyzerá táto oblasť vidíme ako šrafovanou plochu na obrázku u2.1.1, ktorý je zostavený pre kamarátov vo vzdialenosti 4 km, a na ktorom sú okrem týchto sivých plôch aj čiary spájajúce miesta výskytu blesku, pre ktoré je hodnota $|t_A - t_B|$ rovnaká.



Obr. u2.1.1 – Hyperboly na ktorých sa nachádzajú blesky s rovnakým rozdielom vzdialeností od dvoch kamarátov A a B a sivé oblasti, do ktorých keď udrie blesk, bude horný odhad rýchlosti zvuku do 5 % od správnej hodnoty.

Traja a poznajú všetky svoje vzdialenosti

Na obrázku u2.1.2 máme situáciu pre troch kamarátov. Uhol γ volíme ako doplnkový ku $\alpha + \beta$, pretože takto nám to bude pekne fungovať pre blesk vo vnútri trojuholníka, aj pre blesk mimo neho. Vzťahy medzi časmi, ktoré kamaráti zachytia, ich vzdialenosťami (d, e, f) a uhlami sú (z kosínovej vety):

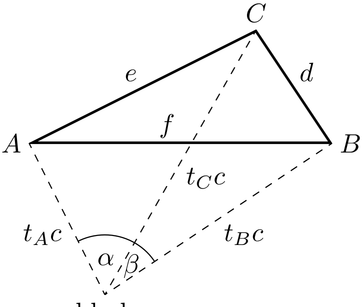
$$\begin{aligned} c^2\left(t_C^2 + t_A^2 - 2t_C t_A \cos(\alpha)\right) &= e^2\,. \\ c^2\left(t_B^2 + t_C^2 - 2t_B t_C \cos(\beta)\right) &= d^2\,, \\ c^2\left(t_A^2 + t_B^2 - 2t_A t_B \cos(\gamma)\right) &= f^2\,, \end{aligned} \tag{u2.1.2}$$

K tejto sústave troch rovníc so štyrmi neznámymi pripojíme štvrtú rovnicu

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ\,, \tag{u2.1.3}$$

čím dostávame sústavu štyroch rovníc so štyrmi neznámymi, ktorá by mala mať riešenie. Vzťah (u2.1.3) je veľmi užitočný, z neho totiž dostávame $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta$, čo sa však ako argument kosínu v treťom vzťahu z (u2.1.2) zmení na jednoduché $\alpha + \beta$. Označme si ešte $A = \cos(\alpha)$, $B = \cos(\beta)$ a pripomeňme, že platí súčtový vzorec $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ a vzťah medzi sínom a kosínom uhlu $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, takže v treťom vzťahu môžeme miesto $\cos(\gamma)$ písať $AB - \sqrt{(1 - A^2)(1 - B^2)}$. A a B môžeme vyjadriť zo zvyšných dvoch rovníc z (u2.1.2) a dosadiť do tretej z nich, čím dostaneme obludnú rovnicu s jedinou neznámou, ktorou je nami hľadaná rýchlosť zvuku.

Toto odvodenie tu neuvádzame, vo svojom riešení ho spracoval Mgr.[M&M] Filip Homza, ktorý na jeho konci dostal bikvadratickú rovnicu pre c (kvadratickú rovnicu pre c^2). Riešenie takejto rovnice je jednoduché: najprv zavedieme substitúciu $x = c^2$, potom riešime kvadratickú rovnicu pre x a nakoniec odmocnením dostaneme c. Všeobecne by nám mohli výjsť dva korene pre x, a po odmocnení štyri možné hodnoty c, ale pokiaľ sa budeme pohybovať len vo fyzikálne možných výsledkoch (kladné reálne čísla), s veľkou pravdepodobnosťou nám zostane iba jeden možný výsledok, ktorým je hľadaná rýchlosť zvuku.



Obr. u2.1.2 – Situácia pre troch kamarátov so známymi vzdialenosťami.

Traja a poznajú jednu vzdialenosť

Riešenie je možné i v tomto prípade. Po prvom blesku máme tri rovnice pre tri časy, neznámu rýchlosť zvuku, neznámu polohu blesku (dve súradnice) a neznámu polohu tretieho z kamarátov (dve súradnice, resp. jeho dve vzdialenosti od prvých dvoch kamarátov), máme teda 5 neznámych na tri rovnice. S každým ďalším bleskom nám pribudnú tri rovnice a dve neznáme súradnice, teda po troch bleskoch máme dosť rovníc na to, aby sme určili rýchlosť zvuku, aj súradnice tretieho z kamarátov. Ani toto riešenie nebudeme podrobne odvodzovať, ale bude predstavovať sústavu deviatich rovníc s deviatimi neznámymi.

Traja a nepoznajú žiadnu svoju vzdialenosť

V tomto prípade môžeme zistiť všetky uhly, ale bude nám chýbať multiplikatívna konštanta. Inak povedané, podľa toho, ako si celú situáciu zväčšíme, takú rýchlosť zvuku dostaneme a ešte inak povedané rýchlosť zvuku proste nemáme z čoho zistiť, pretože rýchlosť z času počítame ako $v = s/t$, ale žiadnu dráhu s tu k dispozícii nemáme, nepoznáme.

Jeffer

Úloha 2.2 – Kostka (4b)

Zadání:
Riki přemýšlel, jak by vypadala hra Člověče, nezlob se s kostkami-nekostkami o všelijakém počtu stěn, řekněme 2 až 20. Pro tyto kostky klasicky platí, že po hození nejvyššího čísla háže hráč znovu a hody se sčítají. Pravděpodobnost padnutí všech čísel je stejná. Otázkou je, kolikastěnná kostka je nejvýhodnější, tedy dosáhne v této hře nejvyšší střední hodnoty součtu hodů.

Řešení:
Na první pohled je jasné, že zvyšováním počtu stěn se zvyšuje střední hodnota každého jednoho hodu[3], ale zároveň se pravděpodobnost opakovaného házení snižuje. K posouzení společného vlivu budeme muset trochu počítat.

Střední hodnotu získáme tak, že vezmeme všechny možné varianty, které mohou nastat. Hodnotu (tj. celkový součet hozených ok) každé varianty vynásobíme pravděpodobností[4], že daná varianta nastane a všechny tyto součiny sečteme.

Střední hodnotu můžeme také počítat ze známých středních hodnot podmnožin všech možných jevů. Představme si akci A, která dává náhodné výsledky se střední hodnotou μ_A a úplně jinou akci B, která samotná dává výsledky se střední hodnotou μ_B. Teď se rozhodneme, že nejprv náhodně zvolíme jednu z těchto dvou akcí a bude nás zajímat střední hodnota tohoto „složeného“ pokusu. Pokud budeme například vybírat akci A s pravděpodobností 2/3 a akci B s pravděpodobností 1/3, bude výsledná střední hodnota $\mu_\mathrm{AB} = (2/3)\,\mu_\mathrm{A} + (1/3)\,\mu_\mathrm{B}$. Důkazem je jednoduché roznásobení vztahů pro dílčí střední hodnoty.

Vraťme se zpět k házení kostkami. Důležitým pozorováním je, že jednotlivé hody jsou z hlediska pravděpodobnosti nezávislé, kostka „nemá paměť“. To má, pro někoho možná překvapivý, důsledek, že střední hodnota součtu ok padlých v navazujících hodech po „první šestce“ (v této úloze obecně po prvním n) bude, pokud toto první n do součtu nezahrneme, úplně stejná jako střední

[3] Předpokládáme, že n-stěnná kostka má stěny číslované od 1 do n. To sice nebylo v zadání výslovně zmíněno, ale je to asi nejpřirozenější varianta a nikdo z řešitelů jiné číslování neuvažoval.

[4] Pravděpodobnost budeme označovat číslem z rozsahu $\langle 0, 1\rangle$, kde 0 znamená nemožný jev a jednička značí jistotu. Pokud toto číslo vynásobíme stem, získáme druhou obvyklou variantu, pravděpodobnost udanou v procentech.

hodnota celé řady hodů „od začátku“. Hození n v prvním hodu nijak neovlivní pravděpodobnost toho, že padne n i v druhém hodu.

Dále víme, že v každém jednom hodu je pravděpodobnost padnutí konkrétní strany právě $1/n$. Střední hodnota bude tedy součtem $1/n$ krát počet ok pro všechny stěny menší než n a nakonec $1/n$ krát n plus μ. Kde μ je jak hledaná výsledná střední hodnota, tak i střední hodnota sekvence hodů následujících po prvním n.

Zapsáno do vzorce

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{1}{n} + (n+\mu) \cdot \frac{1}{n} .$$

Vytkneme $1/n$ a získáme součet od 1 do n plus μ:

$$\mu = \frac{1}{n} \left[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + \mu\right] .$$

Po sečtení řady[5] na pravé straně dostáváme:

$$\mu = \frac{1}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \mu\right] , \qquad \mu - \frac{1}{n}\,\mu = \frac{n+1}{2} ,$$
$$\mu = \frac{n+1}{2(1-1/n)} = \frac{n}{2}\,\frac{n+1}{n-1} .$$

Střední hodnotu tedy už známe, zbývá rozhodnout, která kostka je nejlepší. K tomu si můžeme spočíst, jak moc si polepšíme nebo pohoršíme, pokud n-stěnnou kostku vyměníme za $(n+1)$-stěnnou. Tedy rozdíl příslušných středních hodnot:

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{n} - \frac{n(n+1)}{n-1}\right] = \frac{n+1}{2} \left[\frac{(n+2)}{n} - \frac{n}{n-1}\right] =$$
$$= \frac{n+1}{2n(n-1)} \left[(n+2)(n-1) - n^2\right] = \frac{n+1}{2n(n-1)}\,(n-2) .$$

[5] Pro hodnoty do 20 byste určitě zvládli sčítat i postupně v hlavě, ale pojďme si odvodit obecný postup pro získání součtu s. K hledané řadě od 1 do n si přidáme ještě jednu od n do 1. Je zřejmé, že obrácení pořadí prvků součet nezmění, takže platí

$$2s = [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] + [n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1] .$$

Prostým proházením („prolnutím“) sčítanců na pravé straně získáme

$$2s = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots + [(n-1)+2] + [n+1] .$$

Součet každé dvojice je $(n+1)$, dvojic je celkem n, takže

$$2s = n \cdot (n+1) , \qquad s = n \cdot (n+1)/2 .$$

Výsledný výraz je zřejmě nulový pro $n = 2$ a kladný pro $n > 2$.

Tedy dvoj- a třístěnná kostka budou stejně špatné (střední hodnota 3), pro vyšší počty stěn pak platí „čím více, tím lépe“. Z nabídky v zadání bychom tedy dopadli nejlépe s 20-stěnnou kostkou (střední hodnota něco málo přes 11, jak můžeme zjistit jednoduchým dosazením do vztahu výše). U skutečně velkých kostek bude střední hodnota zhruba rovna polovině počtu stran, tedy opakování hodu se stane zanedbatelným vlivem, ale poroste střední hodnota jediného hodu.

Bonusová otázka: V úloze bezstarostně operujeme se třístěnnou „kostkou“. Zkuste se nad ní chvíli zamyslet. Konkrétně chceme libovolné konečně velké těleso, které se po náhodném roztočení a hození na stůl (dokonale rovnou desku) ustálí v právě jednom ze tří možných stavů, přičemž pravděpodobnost každého stavu bude přesně 1/3. *Může takový objekt reálně existovat? Pokud ano, jak bude vypadat? Pokud ne, proč?*

Dvojstěnná kostka splňující podmínky by mohla mít podobu čočky. Tím je zajištěno, že se nemůže zastavit „na hraně“ jako mince a vždy skončí v jedné ze dvou možných poloh.

Marble

Úloha 2.3 – Kvítky (3b)

Zadání:

Riki si natrhal 9999 *kvítků – některé jsou bílé a některé žluté. Když je rovnal doma k usušení, všiml si, že jsou zajímavě seřazené: žluté jsou právě ty kvítky, jejichž pořadí lze zapsat jako* $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor$.[6] *Kolik kvítků je bílých?*

Řešení:

Označme funkci ze zadání $f(x)$, tedy $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor$, a vypišme, jak se chová na intervalu $\langle 0, 1/2)$:

$x \cdot 16$	$\langle 0,1)$	$\langle 1,2)$	$\langle 2,3)$	$\langle 3,4)$	$\langle 4,5)$	$\langle 5,6)$	$\langle 6,7)$	$\langle 7,8)$
$f(x)$	0	1	3	4	7	8	10	11

Z tabulky vidíme, že pomocí argumentu $x < 1/2$ dokážeme vytvořit hodnoty 0, 1, 3, 4, 7, 8, 10 a 11. Pro argumenty ve tvaru $n/2$, kde $n \in \mathbb{N}$, bude uvnitř každé dolní celé části celé číslo, a bude platit $f(n/2) = 15n$.

Všimněme si, že pokud je číslo a ($a \in \mathbb{Z}$) dolní celou částí čísla b, pak také pro libovolné celé číslo k platí $\lfloor b + k \rfloor = a + k$. Součet na pravé straně bude zjevně opět celé číslo, které splňuje podmínku pro dolní celou část

$$(a + k) \leq (b + k) < (a + k) + 1 \,.$$

Odečtením k dostaneme nerovnost pro $\lfloor b \rfloor = a$.

[6] Pro nějaké reálné x, $\lfloor x \rfloor$ je dolní celá část čísla x, tzn. největší celé číslo, které je menší rovno x

Shrňme výše uvedené do tvrzení: pro $x \in \mathbb{R}$ může $f(x)$ nabývat všech hodnot ve tvaru $15k$, $15k+1$, $15k+3$, $15k+4$, $15k+7$, $15k+8$, $15k+10$ a $15k+11$, kde k je celé číslo.

Na každých 15 pozic v řadě je tedy právě 8 kvítků žlutých. Ovšem prvních 15 pozic obsahuje i neobsazené „nulté" místo. Počítejme tedy celkem 10000 pozic, což je 666 celých sekvencí po patnácti a 10 zbylých míst ($666 \cdot 15 + 10 = 10000$).

Na prvních 9990 pozicích leží $666 \cdot 8 - 1$ žlutých kvítků (odečítáme jeden neexistující kvítek na nulté pozici). Ve zbytku řady je šest pozic, které lze vyjádřit jako $f(x)$, jak jsme ukázali výše. Jsou to 9990, 9991, 9993, 9994, 9997 a 9998.

Konečně, počet bílých kvítků získáme odečtením počtu žlutých od všech:

$$9999 - (666 \cdot 8 - 1) - 6 = 4666\,.$$

Případně nabízím elegantní alternativní postup, vycházející z řešení Jaroslava Cermana:

Víme, že hodnota funkce se změní pokaždé, když přičteme $1/16$ k x. Zároveň víme, že pro $x < 1/16$ je $f(x) \le 0$, což nás nezajímá. Pak stačí „uhodnout", že 9999 není hodnotou této funkce a

$$f(x) = 9998 \qquad \text{pro} \qquad x = 333 + \frac{5}{16} = \frac{5333}{16}\,.$$

Otázka zní, kolikrát jsme přičetli $1/16$, než jsme dostali $5333/16$. Právě tolikrát se změnila hodnota $f(x)$ a tolik pozic v řadě obsahuje žlutý kvítek. Počet žlutých je

$$\frac{5333/16}{1/16} = 5333\,,$$

počet bílých $9999 - 5333 = 4666$.

Lukáš

Úloha 2.4 – Kruhová chodba (2b)

Zadání:

Kosmonaut je v dlouhé kruhové chodbě, která vede po obvodu neznámé kosmické lodi. V celé chodbě jsou na stěnách v pravidelných intervalech rozmístěny žárovky. Ty jsou bez zjevného řádu rozsvícené, nebo zhasnuté a u každé je příslušný vypínač. Kosmonaut by chtěl obejít celou chodbu a poznat, že ji už obešel. Může si pro svou potřebu přepínat žárovky, jinak je ale chodba všude stejná. Jak to má provést, aby se co nejmíň nachodil a nemusel si toho moc pamatovat?

Řešení:

Velká část z vás navrhovala rozbít jednu žárovku a následně jít chodbou tak dlouho, dokud na ni opět nenarazí. To je sice neotřelé řešení, ale co když si jím rozhněváme tajemné mimozemské majitele lodi? Co když žárovky rozbít nejdou? A chceme vůbec, aby rozbít šly? Pak se nám přece může stát, že místo na svou žárovku narazíme na takovou, kterou rozbil nějaký vandal před námi a skončíme s procházením předčasně. Dokonce by mohly být rozbité všechny – a co by si pak chudák kosmonaut počal? Raději snad budeme uvažovat nerozbitné žárovky.

Další skupina navrhovala vytvořit si z rozsvícených a zhasnutých žárovek nějakou startovní sekvenci a procházet chodbou, dokud na ni opět nenarazíme. Podobně jako u rozbitých žárovek si ale nikdy nemůžeme být jistí, že se taková sekvence v chodbě nevyskytuje. Správné řešení tedy musí ověřovat, že nalezená sekvence je skutečně ta startovní. Například je možné jednu žárovku zhasnout, dvě rozsvítit a následně vždy jít dopředu dokud nenarazíme na rozsvícenou, zhasnout ji a vrátit se zpět k poslední svítící. Je-li žárovka za ní zhasnutá, obešli jsme celou chodbu. V opačném případě znovu vyrazíme směrem dopředu a postup opakujeme. V nejhorším případě (pokud jsou všechny žárovky na začátku rozsvícené) ujdeme $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)$ úseků mezi žárovkami – to je $O(n^2)$, kde n je počet žárovek. Paměť nám stačí konstantní.

Nejrychlejší řešení přišlo od Mgr.[MM] Matěje Lieskovského. Ten doporučil neprodlužovat zhasnutý úsek po jednotlivých žárovkách, nýbrž jeho délku vždy zdvojnásobit, vrátit se na začátek a podívat se, jestli už jsme zhasli počáteční značku (kterou může tvořit jediná rozsvícená žárovka). Pak si sice musíme pamatovat délku zhasnutého úseku (abychom věděli, jak daleko příště jít a o kolik se vracet), takže paměťová složitost nám vzroste na $O(\log n)$ (k bitů umožňuje si zapamatovat nejvýš 2^k čísel), ale časová složitost se nám výrazně sníží. V posledním kroku, kdy si zhasneme startovní žárovku, ujdeme při cestě dopředu nejvýše $2n$ úseků mezi žárovkami (ujdeme v něm dvojnásobek toho, co v předchozím, a v tom jsme ještě celou chodbu neobešli). Ve všech předchozích krocích dohromady jsme přitom směrem dopředu ušli méně ($2^k = \sum_{i=0}^{k-1}(2^i) + 1$). Celkem tedy i s cestami zpět nejvýše $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot n$, což je $O(n)$.

Matěj

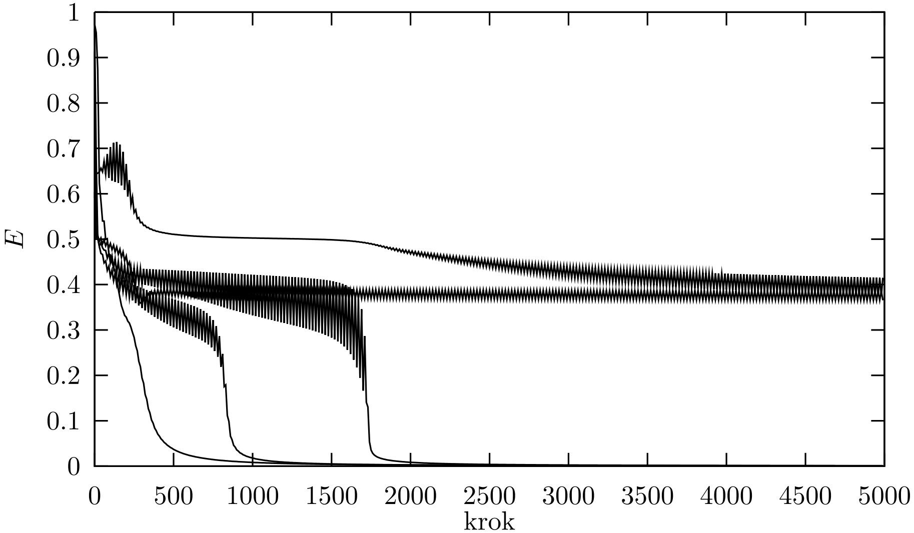
Úloha 2.5 – Neuronová síť (4b)

Zadání:

Vytvořte program s neuronovou sítí, která bude mít dva vstupní neurony v_1 a v_2, skrytou vrstvu se třemi neurony a jeden výstupní neuron Y. Program v sobě bude mít učící smyčku, během které se síť naučí chovat podle funkce XOR, tedy pro $v_1 = v_2 = 0$ nebo $v_1 = v_2 = 1$ je $Y = 0$, pro $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ nebo $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ je $Y = 1$. Pro počáteční ladění programu můžete použít konstanty $\lambda = 10$, $\mu = 0{,}05$.

Řešení:

Jako řešení této úlohy se očekával program. Přetiskávat zdrojový kód programu do čísla nemá valný smysl, ale funkční kód je ke stažení na našich stránkách `http://mam.mff.cuni.cz/zr`. Program nejdříve náhodně nastaví váhy jednotlivým neuronům a následně provádí učení pomocí postupu popsaného v článku v II. čísle M&M XIX. ročníku. Pro některé počáteční konfigurace program skončí v lokálním minimu a jeho chybová funkce není nulová, proto se výpočet provádí pro pět různých počátečních konfigurací. Výsledný graf závislostí chybové funkce programu na daném počtu učicích cyklů pro různé počáteční konfigurace je uveden na obrázku.



Vývoj velikosti chybové funkce během učících kroků pro pět různých počátečních konfigurací neuronové sítě. Pro tři konfigurace sítě zkonvergovaly ke správnému výsledku, dvě počáteční konfigurace skončily v lokálních minimech.

(R)adim

Matematika v Sage

Sage je nástroj pro zjednodušení matematikovy práce – hodí se pro řešení rovnic, zjednodušování výrazů, integrování, kreslení grafů funkcí, statistiku, teorii grafů, algebru i spoustu dalších úkolů. Dá se použít jako chytřejší kalkulačka s funkcí řešení rovnic, ale jeho síla je i v tom, jak umí zacházet s velkými a složitými matematickými objekty, velkými daty, počítat paralelně, používat libovolné další Pythoní knihovny, a že ho i můžete používat jako knihovnu ve vlastním složitějším programu.

Sage je vlastně několik nástrojů a knihoven z různých oblastí matematiky spojených dohromady skrze Pythoní rozhraní. Syntaxe je skoro stejná jako v jazyce Python, který jsme popsali v seriálu minulého ročníku, ale pro základní použití postačí, co si o něm řekneme dále. Hodit se může syntaxe pro seznam/pole `[1,2,3]`, n-tice `("a","b")` a volání operací na objektu `x`: `x.operace(parametry)`.

Zajímavou vlastností Sage a jeho komponent je to, že jde o open-source software, takže je zdarma, jsou k dispozici jeho zdrojáky a můžete si s ním dělat skoro co chcete.

Toto je jen krátký přehled, více o Sage zjistíte na `http://sagemath.org`, v tamních tutoriálech k jednotlivým částem Sage a podrobné dokumentaci, vše bohužel jen anglicky.

Kde sehnat Sage

Nejjednodušší způsob, jak používat Sage, je přes webové rozhraní, například na `http://sagenb.org`, kde ale budete potřebovat mít Google, OpenId nebo jiný login.

Nainstalovat si Sage v Linuxu nebo Mac OS X je snadné, stačí si jej stáhnout z `http://www.sagemath.org`, v Linuxu rozbalit kamkoliv a spustit soubor `sage`, v MacOSX spustit jako jinou aplikaci.

Ve Windows bohužel není možné Sage spustit přímo, ale na stránkách Sage je k dispozici obraz virtuálního Linuxového stroje se Sage, který můžete spustit například pod VirtualBoxem či VMWare.

Po spuštění Sage se otevře jeho textové rozhraní. Dáváte-li přednost webovému, pak napište `notebook()` a v browseru otevřete `http://localhost:8080`.

Základní použití

Sage lze používat jako symbolickou kalkulačku. Výrazy jako `(1+3/4)*2`, `sin(e^0-1)` a `sqrt(1/2)` Sage trochu zjednoduší, ale zachová přesnou hodnotu. V tomto se Sage liší od Pythonu, který by při zadání výrazu jako `a=sqrt(2)` operaci okamžitě provedl numericky a dostal nepřesný výsledek, zatímco Sage správně spočte, že `a*a` je přesně 2.

Pro numerickou hodnotu výrazu použijte funkci `n(... )`, např. `n(pi)` nebo `n(e^2, digits=1000)` pro větší přesnost.

Sage nabízí běžné matematické symboly a operace, jako například `sin, cos, tan, asin, acos, atan, sinh, pi, e, sqrt, sign` a `log`, který má základ jako volitelný druhý parametr. Mocniny se v Sage dělají pomocí `e**2` (jako v Pythonu) nebo `e^2` (jako v TEXu). Symbol `=` je vždy přiřazení a `==` porovnávání (např. pro podmínky a rovnice). Komplexní čísla se zapisují pomocí `I`, např. `e^(I*pi/2)`. Numerický zápis z Pythonu je též `1+2j` pro $1 + 2i$.

Mezivýsledky můžete přiřazovat do proměnných, jako například `a=2+3; b=sin(pi*a)`. Nejedná se o rovnice, jen o přiřazení! Středník odděluje více příkazů na jednom řádku. Vlastní funkce definujete jednoduše pomocí `f(x)=x^2` nebo též Pythoního `def f(x): return x^2`. První způsob dá Sage o funkci trochu více informací.

Pro nápovědu k jakékoliv funkci v Sage napište `funkce?`, např. `sin?`. K uložení libovolného objektu do souboru použijte `save(f, "soubor.sobj")`, načíst ho pak můžete i později pomocí `f=load("soubor.sobj")`. Kus vlastního kódu (např. definice vlastních funkcí) načtete pomocí `load("mojefce.sage")`.

Pozor na to, že pokud číslo zapíšete jako reálné (např. `0.4`), nebo jako komplexní pomocí `j` (např. `1+2j`), Sage s ním bude zacházet numericky místo přesně.

Teorie grafů

Práce s velkými grafy a jejich vlastnostmi je podporovaná velmi dobře, jde o objekty typu `Graph` a `DiGraph` (pro orientované grafy). Prázdný graf vytvoříte `g=Graph()`, vrcholy mu přidáte `g.add_vertices([1, 2, "v3"])`, hrany pak `g.add_edge(1,"v3",0.5)`. Vrcholy mohou být skoro jakékoliv objekty (čísla, řetězce, dvojice čísel, ...), volitelný třetí parametr `add_edge` je váha nebo délka hrany.

V modulech `graphs` a `digraphs` najdete generátory mnoha běžných grafů, např. `graphs.CycleGraph(n)` vytvoří cyklus, `graphs.CompleteGraph(n)` úplný graf a `digraphs.Circuit(n)` orientovaný cyklus. Všechny neisomorfní grafy na n vrcholech pak získáte pomocí `graphs(n)` (pozor – pro $n > 8$ je jich velmi hodně).

Grafy samy o sobě mají hodně vlastností – můžete graf zobrazit (`g.show()`), zjistit jeho komponenty souvislosti (`g.connected_components()`), zjistit jeho barevnost (`g.chromatic_number()`, může být velmi pomalé), získat jeho matici sousednosti (`g.adjacency_matrix()`), sjednotit dva grafy (`g1.union(g2)`) a mnoho dalšího.

Grafy, rovnice, integrály a další

Sage má celou škálu funkcí pro řešení různých tvarů soustav rovnic a nerovnic, symbolicky i numericky, včetně diferenciálních a celočíselných kongruencí. Zvládá i poměrně velké soustavy, ale není až tak vhodné v situaci, kdy dostanete obecnou soustavu a chtěli byste rychle a snadno vidět, co vše má za vlastnosti. Na to se více hodí například Wolfram Alpha[7]. Pokud ale potřebujete více velkých a třeba programově zadaných např. lineárních soustav, je Sage pro vás.

Graf funkce vykreslíte pomocí příkazu `f(x)=x^2; plot(f)` nebo rovnou `plot(x^2)`. Rozsah osy x se zadává jako trojice `plot(real(x^x, (x,-5,2)))`, mnoho dalších nastavení viz `plot?`. Funkci dvou parametrů vykreslíte například pomocí `plot3d(real(x^y), (x,-3,3), (y,1,3))`.

U proměnných, které chcete používat v (ne)rovnicích, je potřeba to nejprve deklarovat pomocí `var('x y z')`. Potom je soustava rovnic prostě pole rovností: `soustava=[x==2*y-z, x+y+z==3, z==x**2-y+1]`. Vyřešit je lze pomocí `solve(soustava,(x,y,z)`, nebo přímo např. `solve([x**2+x*y==y],(x,y))`. Sage najde všechna řešení, ale ve složitých případech nebudou možná v použitelném tvaru. Bohužel to není nejsilnější stránka Sage. Zajímavá je též třeba funkce `taylor(f, promenna_x, x0, stupen)`.

Derivování zajišťuje funkce `derivative(x*y, x)`, druhý parametr určuje podle čeho derivujete. Integruje se podobně funkcí `integral(sin(x)*x, x)`, pro určitý integrál dosadíme meze, např. `integral(e^(-x^2), x, -infinity, +infinity)`, vícerozměrný integrál pak `integral(x*y, (x,y))`. Pokud neumí Sage integrál spočítat, stále vyjde funkce, se kterou můžete dále operovat – vyčíslovat numericky, derivovat a tak dále.

[7] `http://wolframalpha.com/`

Algebra a další

Nakousněme pár dalších oblastí, kterými je Sage zajímavé:

Sage má velmi košatou rodinu objektů z algebry a i teorie kategorií, jako jsou grupy, podgrupy, okruhy a tělesa – každé celé číslo je třeba prvkem okruhu `sage.rings.integer.Integer`, též zkuste `type(1/2)` nebo `type(1+1j)`. Sage samozřejmě umí např. podgrupy a produkty grup.

Související oblastí je teorie čísel a polynomů. Například těleso celých čísel modulo 97 vytvoříte `A=IntegerModRing(97)`, pak dostanete, že `A(2)/A(3)` je 33, že je 97 prvočíslo ověříte `is_prime(97)`, prvočísla do n získáte `primes(n)`[8] a největší společný dělitel získáte `gcd(a,b)`.

Můžete poměrně snadno počítat i v okruhu polynomů, například deklarovat t jako proměnnou (`var("t")`), vytvořit nad racionálními čísly okruh polynomů `R=PolynomialRing(QQ, t)`, a pak spočíst i takové věci, jako je například `GCD(R(t^2-1),R(1+2*t+t^2))`.

Sage toho umí ještě mnohem více, ale funkcí je opravdu mnoho na přehled v tak omezeném prostoru. Rád vám ale, milí řešitelé, poradím s použitím Sage na váš problém. S dotazy ale i připomínkami se ozvěte na `gavento@ucw.cz`.

Tomáš

Úloha 4.6 – Sage (3b)

Pro řešení úloh zkuste použít jen Sage a Python. Krom výsledku pošlete i váš kód s komentářem.

(i) Kolik existuje neisomorfních Eulerovských grafů (nakreslitelné jedním uzavřeným tahem; totéž jako že mají všechny stupně sudé) na sedmi vrcholech?

(ii) Kolik je prvočíselných dvojčat (dvou prvočísel lišících se o 2) mezi 1 a 1000000?

[8] toto je ve skutečnosti tzv. generátor, pokud ho chcete převést na seznam, použijte `list(... )`

Výsledková listina

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**	**t1**	**t4**	**t5**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ F. Homza	3.	29	5	3	3	0					11	29
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Kufová	1.	25	2	3	1	2					8	25
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Buráň	4.	24	2	4	3	2					11	24
4–7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	4.	58	3	4	3						10	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Hrušková	3.	20		0	3	2			3		8	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kušnír	2.	20	2	1	0	0	2			4	9	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Poljak	1.	20	3	2	3	1					9	20
8–9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	2.	38	1	3	3				5		12	19
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	2.	67	3	0	1	0		2			6	19
10.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skála	2.	18	0	0	3	1				3	7	18
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Lieskovský	3.	44		2	3	3					8	17
12–13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Nácovský	2.	16		2	2	0		2			6	16
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Skoupý	3.	16		3	3		4				10	16
14–16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Cerman	1.	12	0	2	3	1					6	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ S. Fraňová	4.	12		1	1	1					3	12
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	4.	40			3	2					5	12
17–19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ E. Bušáková	4.	14		2	3	2					7	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Souček	1.	11									0	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Ullwer	4.	11	0	0	0	0				2	2	11
20–23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	2.	22			3	1					4	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Macháčová	3.	10	2	3	2	0					7	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Svobodová	3.	10									0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Štábl	2.	10	2			2					4	10
24–25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bidlák	3.	12									0	9
	K. Ilievová	2.	9	3								3	9
26–27.	Z. Garčic	2.	8									0	8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Šťastná	3.	49									0	8
28.	J. Dittrich	1.	7	1	0	1	1					3	7
29–32.	V. Straková	3.	6									0	6
	Š. Titlová	1.	6									0	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	2.	33				1					1	6
	R. Zlatník	1.	6	1	1		0					2	6
33–36.	M. Biroš	2.	5									0	5
	J. Kolář	2.	5	0	1		0					1	5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Svoboda	4.	29									0	5
	M. Šafek	2.	5			3	1					4	5

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**	**t1**	**t4**	**t5**	$\sum_0$	$\sum_1$
37–41.	M. Daniel	3.	4									0	4
	V. Krchňák	1.	4									0	4
	P. Kroft	2.	4									0	4
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Mikel	4.	25									0	4
	M. Vanko	4.	4									0	4
42–51.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Dolejší	2.	21									0	3
	L. Draslarová	1.	3									0	3
	J. Erhart	2.	7									0	3
	J. Kučera	1.	3									0	3
	J. Kulička	1.	3									0	3
	J. Novák	1.	3									0	3
	D. Sekáč	2.	3	1			0					1	3
	D. Stěhule	2.	3									0	3
	K. Škorvánková	1.	3									0	3
	J. Škvára	3.	3									0	3
52–56.	D. Barbora	2.	2									0	2
	J. Fürbacherová	4.	2									0	2
	J. Knížek	2.	2									0	2
	O. Leskovjanová	2.	2									0	2
	M. Reška	1.	2									0	2
57–60.	K. Kolář	1.	1				1					1	1
	Z. Kuchařová	1.	1									0	1
	T. Mareš	1.	1									0	1
	D. Princík	4.	1									0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.