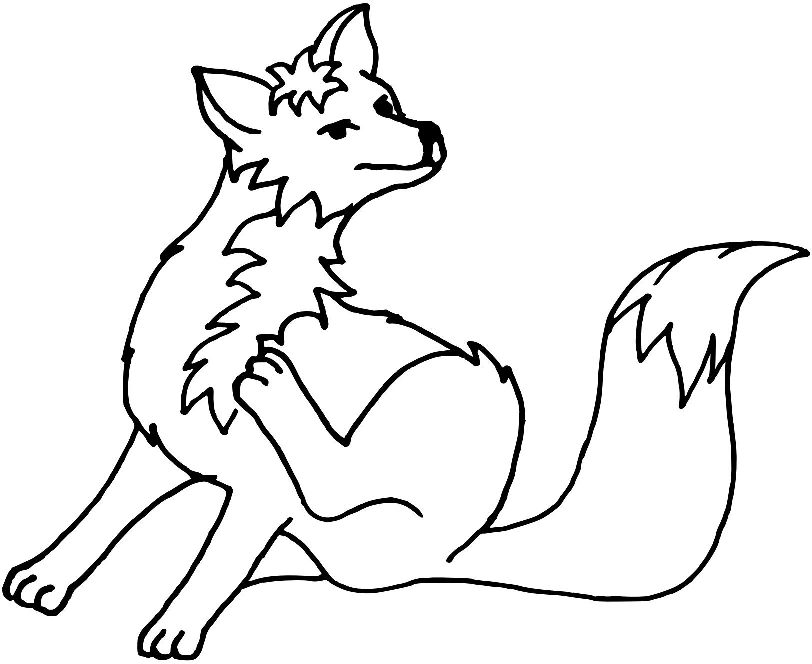
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XVIII / Číslo 7-8



Úvodník – str. 2 • Řešení témat – str. 2
Řešení úloh 5. série – str. 5 • Řešení úloh 6. série – str. 12
Závěrečná výsledková listina – str. 19

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí kamarádi,

držíte v rukou poslední číslo již osmnáctého ročníku našeho časopisu. Během roku jsme spolu vyřešili soustu úloh, prošli si seriálem o číslicových obvodech a sepsali několik příspěvků k tématkům. Rozuzlení některých problémů najdete na následujících stránkách.

Vítězem tohoto ročníku se stal Dr.$^{\text{MM}}$Jakub Šafin, kterému tímto srdečně gratulujeme.

Doufáme, že s námi zůstanete i v ročníku následujícím, kde vás čekají další zajímavá témata k zamyšlení a úlohy k řešení.

Příjemné čtení tohoto i dalších čísel vám přejí

organizátoři M&M

Řešení témat

Téma 1 – Ternární logika

Žádného dalšího příspěvku k tomuto tématu jsme se bohužel nedočkali. Pokud vás ale problém zaujal, můžete si přečíst, jak si nejen s ternární logikou poradili zkušenější matematici. Velmi doporučuji čtivě a srozumitelně psaný text o neklasických logikách od Anši Vernerové (dříve Lauschmannové) dostupný na adrese `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~ansa/neklasiky`. V jednotlivých kapitolách textu se můžete dočíst o různých přístupech ke zobecnění klasické logiky. Prvním krokem přitom často bývá nějaká podoba logiky tříhodnotové.

Kuba

Téma 2 – Jezero

Do posledního turnaje nám bohužel žádné řešitelské programy nedorazily, není tedy mnoho o čem psát. Mrzí nás, že jsme neobdrželi ani žádný teoretický rozbor problému, např. stanovení, zda se z dlouhodobého hlediska více vyplatí výroba ekologická či neekologická, kdy už se jedna z nich nevyplatí vůbec (v závislosti na čistotě jezera mohla ekologická výroba znamenat i ztrátu) apod. Abyste měli alespoň pro příště motivaci posílat programy do turnajů, zveřejňujeme zde zdrojový kód programu `smart.pl`, který ve většině zápasů zdaleka předčil všechny ostatní (organizátorské i řešitelské).

```
#!/usr/bin/perl
use warnings;
use strict;
binmode( STDOUT, ":unix" );  # zajištění flushování výstupu

my $players = <STDIN>;  # načtení počtu hráčů
print "K";  # první kolo budeme kontrolovat
```

```
my $round = 0;
while (<STDIN>) {
    my ($zisk, $cistota) = split;
    $round++;

    print "K\n" if $round < 10;  # v prvních 10-ti kolech
            # kontrolujeme, abychom vyřadili neekologickou
            # konkurenci

    print "C\n" if $cistota < 50 and $round < 20;  # Dalších
            # 10 kol jsme pak ochotni čistit zaneřáděné
            # jezero od neekologických protihráčů

    if ($cistota < 52) {  # Pokud je i nadále jezero příliš
            # špinavé, máme v revíru škodnou -- tak na ni
            # pošleme kontrolu
        print "K\n";
    } elsif ($cistota < 84) {  # Pokud je čistota nižší,
            # ale ne kritická, jezero si vyčistíme
        print "C\n";
    } else {
        print "E\n";  # A budeme udržovat ekologickou výrobu
            # (ideálně až do konce hry)
    }
}
```

Pro hru se zpoplatněnou kontrolou a s velmi malým počtem kol jsme pouze mírně snížili počet úvodních kol, kdy posíláme kontroly, jinak zůstal program po celou dobu nedotčen. I jednoduchý princip s dobře odhadnutými konstantami tedy může přinést velice dobré výsledky. Nutno ovšem zdůraznit, že smart.pl si vedl takto dobře, protože předpokládal neekologickou konkurenci. Jistě by šlo její zeliminování provést i chytřeji než prvních 10 kol slepě posílat kontroly. Pokud by všichni jeho soupeři byli čestní, také by si nevedl úplně špatně, ale měl by nejspíš nižší zisk než oni, protože by prvních 10 kol zbytečně vyplýtval na kontroly, místo aby se zabýval ekologickou výrobou.

Honza & Jeffer

Téma 3 – Neznámý materiál

Závěrem tohoto tématu vám přinášíme rozuzlení, jak to bylo s našimi neznámými plíšky. V průběhu roku nám přišlo několik velice zajímavých a podnětných článků, ve kterých jste rozebírali měření, která jste provedli. Při pročítání vašich příspěvků jsme stále očekávali, že některý z řešitelů popíše nějakou složitou metodu a vyzve organizátory, aby mu dodali naměřená data a splnili tak slib, který dali v úvodním textu k tomuto tématku. Bohužel[1] se tak nestalo.

A tak, aby se organizátoři neflákali, provedla Bětka identifikaci prvků materiálu na základě charakteristického rentgenového záření[2]. Touto metodou se podařilo prokázat, že plechy obsahují železo. Ovšem nevýhodou této metody je, že není citlivá na prvky s podobným protonovým číslem a železo možná skrylo chrom, nikl či jiné materiály.

Jaké materiály jsme vám tedy zaslali? Jednalo se o odpadní materiál ze strojírenské výroby a ani organizátoři neznali přesné složení. Byli jsme si jisti, že se jedná o slitiny materiálů. Větší, tmavší plíšek je složen převážně ze železa, což mohlo být patrné už z toho, že rezivěl. Světlejší, menší plíšek by měla být nerez, neboli korozivzdorná ocel. To znamená, že bychom zde měli najít jisté množství chromu, niklu či dalších prvků. V tomto případě je určení přesného složení poměrně složité. Dvojici železo, nerez určilo, nebo spíše na základě dosti nepřesných údajů tiplo, vícero z vás správně.

Všem, kteří toto tématko bedlivě sledovali a četli a obzvláště těm, kteří nám zaslali své příspěvky, děkujeme.

(R)adim & Jeffer & Bětka

[1] Z pohledu organizátorů možná naštěstí...

[2] Víc se dočtete na `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_403.pdf`

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Zkřížené polarizátory (3b)

Zadání:
Pokud máme dva polarizátory, jejichž osy svírají úhel α, tak intenzita světla, které jimi prochází, je úměrná $\cos^2 \alpha$. Jaká část intenzity světla projde, pokud máme dva polarizátory, jejichž osy jsou navzájem kolmé, a třetí polarizátor umístěný mezi nimi, kterým můžeme libovolně otáčet? Jak bude intenzita procházejícího světla záviset na úhlu otočení prostředního polarizátoru?

Řešení:
Označme si pre začiatok intenzitu svetla za prvým polarizátorom I_0, intenzitu svetla za druhým polarizátorom I_1 a intenzitu svetla za tretím polarizátorom I_2. Zo zadania vieme, že

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha \,, \tag{u5.1.1}$$

kde α je uhol, ktorý zvierajú osi polarizátorov. Podľa zadania je os tretieho polarizátoru kolmá na os prvého, preto platí, že osi druhého a tretieho zvierajú uhol $90° - \alpha$. Neexistuje žiaden dôvod, prečo by sme vzťah (u5.1.1) nemohli použiť aj pre druhý a tretí polarizátor. Platí teda

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \cos^2 (90° - \alpha) \,, \\ I_2 &= I_0 \cos^2 (\alpha) \cos^2 (90° - \alpha) \,, \\ I_2 &= I_0 \cos^2 (\alpha) \sin^2 (\alpha) \,, \end{aligned} \tag{u5.1.2}$$

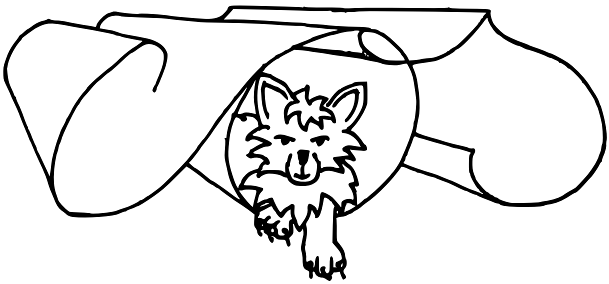
čo môžeme použitím vzťahu pre dvojnásobný argument sínu[3] prepísať na

$$I_2 = \frac{1}{4} I_0 \sin^2 (2\alpha) \,, \tag{u5.1.3}$$

čo už je nami hľadaný vzťah.

Vidíme, že oproti dvojici polarizátorov, prechádza trojicou iba štvrtina svetla. Na druhú stranu nám z plného svetla na úplné zhasnutie stačí otočenie o 45°, kdežto pri dvojici polarizátorov sme potrebovali 90°.

Jeffer



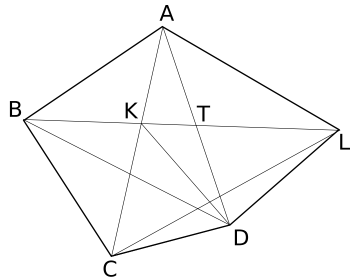
[3] $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Úloha 5.2 – Trojúhelníky (5b)

Zadání:

Na podlaze je nakresleno pět bodů tak, že každé tři z nich tvoří trojúhelník o obsahu alespoň $2\,\mathrm{m}^2$*. Dokažte, že některé tři z těchto bodů tvoří trojúhelník o obsahu alespoň* $3\,\mathrm{m}^2$*.*

Řešení:



Zadání bohužel většina lidí správně nepochopila, proto bych ráda upřesnila, že se jednalo o obecné řešení, nebyl to konkrétní případ ani konstrukční úloha. Je lepší si zadání raději přečíst dvakrát.

Pojmenujme si body A, B, C, D, L. Jestliže pětiúhelník $ABCDL$ není konvexní, můžeme předpokládat, že D je umístěn uvnitř trojúhelníku ABC nebo ve čtyřúhelníku $ABCL$.

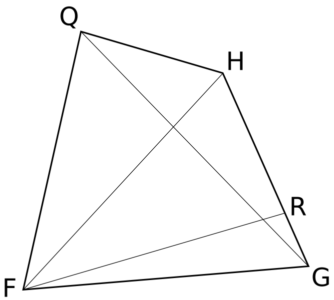
V prvním případě $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BDC} > 6 > 3$, protože obsah každého trojúhelníku je větší nebo roven 2.

Ve druhém případě je bod D uvnitř jednoho trojúhelníku ABC, ABL, ACL nebo BCL. Bez újmy na obecnosti bod D leží uvnitř trojúhelníku BCL. Pak: $S_{BCL} > S_{CDL} + S_{DCB} > 4 > 3$.

Uvažujme nyní případ, že $ABCDL$ je konvexní pětiúhelník. Označme bod K jako průsečík přímky BL s AC a bod T jako průsečík BL s AD.

Pomocné lemma: Nechť $GHQF$ je čtyřúhelník a bod R leží na úsečce GH. Pak

$$S_{FRQ} \geq \min(S_{GFQ}, S_{HFQ}).$$



Důkaz spočívá v jednoduchém pozorování, že vzdálenost od R k FQ je omezená shora i zdola vzdálenostmi od G a H k FQ (tedy výška trojúhelníku RFQ).

V našem případě počítáme s předpokladem $|BK| \geq 1/3|BL|$, z toho plyne $|BK| \geq 1/2|KL|$. Pak $S_{BDL} = S_{BDK} + S_{KDL} \geq S_{KDL}/2 + S_{LDK} = 3/2 S_{KDL} \geq \min(S_{CDL}, S_{ADL}) > 3/2 \cdot 2 = 3$. Případ, že $|TL| \geq |BL|/3$ je podobný. Zbývá uvážit případ, kdy $|KT| \geq |BL|/3$. Dostáváme

$$S_{AKT} = \frac{1}{3} S_{ABL} > \frac{2}{3} S_{KTD} \geq \frac{1}{3} S_{BLD} > \frac{2}{3} S_{KCD} \geq \min(S_{BCD}, S_{LCD}) > 2.$$

Shrneme-li to, došli jsme k závěru, že $S_{ACD} > 2 + 2/3 + 2/3 > 3$ a důkaz je hotov.

Míša

Úloha 5.3 – Změť písmen (4b)

Zadání:

Nepřítel vám předhodil dlouhý řetězec znaků bez mezer a slovník výrazů z jeho (vám doposud neznámé) mateřštiny. Pokuste se nalézt algoritmus, který

a) určí, zda existuje způsob, jak řetězec doplnit o libovolný počet mezer tak, aby souvislé úseky znaků tvořily smysluplná slova

b) najde všechna možná rozřezání a případně zjistí, kolik jich (různých) existuje.

Řešení:

Text bez mezer označme t a i-té jeho písmenko t_i.

Nejdřív si všimněme, že pokud máme nějaké řešení, tedy umístění mezer do textu, toto nám pro každé písmeno textu (jednoznačně) určí, kterému písmenu kterého slova ze slovníku přísluší. A naopak, pokud pro každé písmeno textu určíme, kterému písmenku z kterého slova ve slovníku odpovídá tak, aby t_i a t_{i+1} odpovídaly buď po sobě jdoucím písmenům jednoho slova, nebo poslednímu a prvnímu písmenu (možná různých) slov, dokážeme už správně text nasekat na slova mezerami.

Důležité pozorování je, že pokud bychom předpokládali, že t_i odpovídá j-tému písmenku slova s, pak t_{i+1} musí odpovídat buď $j+1$-nímu písmenu slova s, nebo pokud má s jen j písmen, pak prvnímu písmenku slova s' (různého od s nebo zase s). To, čemu může odpovídat t_{i+1}, pak už nezáleží na ničem před t_i.

Zkusíme tedy pro každé písmeno t_i postupně zleva doprava určit, kterým slovům ze slovníku by mohlo odpovídat, když budeme ignorovat písmena napravo od t_i. Z toho pak pomocí kritéria výše určíme, kterým slovům by mohlo odpovídat t_{i+1}, pak z t_{i+1} určíme t_{i+2} a tak dál.

Například mějme slovník $v =$ „a“, $w =$ „ax“, $x =$ „ba“, $y =$ „byk“, $z =$ = „$babeta$“ a text $t =$ „$babyka$“. Pak t_1 může odpovídat prvnímu písmenu kteréhokoliv slova, tedy x_1, y_1 a z_1. Zkusíme ty tři možnosti rozšířit pro t_2: z první může t_2 odpovídat x_2, ze druhé ničemu (kolize „a“ a „y“) a ze třetí z_2, tedy dvě možnosti. Podobně t_3 může odpovídat x_1, y_1 i z_1 (x už skončilo, další slovo může být libovolné), nebo z_3. t_4 pak už jen y_2 (u ostatních nesedí písmenka) a t_5 jen y_3. Poslední t_6 může odpovídat v_1 i w_1, ale text nám končí a tak musíme zahodit možnosti, které neodpovídají konci nějakého slova, a zbyde jen možnost v_1.

Jak to naprogramovat? Buď t text délky t_len a $s[i]$ pole s_len slov slovníku (řetězců) délek $s\_delky[i]$. Text budeme postupně procházet a informace o možnostech budeme mít v poli m, které indikuje, kterým slovům slovníku může t_i (aktuální písmeno) odpovídat. Z něj spočteme m_dalsi a přesuneme se na další písmeno t_{i+1}. Kousek kódu v C (pole teď indexujeme od 0):

```
/* vstup */
char t[t_len];
char s[max_delka_slova][s_len];
int s_delky[s_len];
/* stav a pocitadla */
int m[max_delka_slova][s_len];
int m_dalsi[max_delka_slova][s_len];
int i,j,k;

/* vynuluje pole m */
memset(m, 0, sizeof(m))
/* nastavit pocatecni stav m */
for (j = 0; j < s_len; j++)
  if (s[j][0] == t[0]) m[j][0] = 1;
/* projit vsechna t_i krom posledniho */
for (i = 0; i < t_len - 1; i++) {
  /* dalsi pismeno muze byt prvni libovolneho slova */
  int dalsi_muze_byt_prvni = 0;
  memset(m_dalsi, 0, sizeof(m_dalsi))
  for (j = 0; j < s_len; j++) {
    /* nejdriv vsechna pismena s[j] krom posledniho */
    for (k = 0; k < s_delky[j] - 1; k++)
      if (m[j][k] > 0 && t[i + 1] == s[j][k + 1])
        m_dalsi[j][k + 1] = 1;
    /* a ted posledni pismeno */
    if (m[j][s_delky[j]] > 0)
      dalsi_muze_byt_prvni = 1;
  }

  /* nastav prvni pismena jako mozna pokracovani */
    if (dalsi_muze_byt_prvni)
      for (j = 0; j < s_len; j++)
        if (s[j][0] == t[i+1]) m[j][0] = 1;
  /* a nakonec zkopiruj m_dalsi do m */
  memcpy(m, m_dalsi, sizeof(m));
}
/* uz zbyva jen overit, jetli je mozne ted byt
v poslednim pismenu nejakeho slova */
for (j = 0 ; j < s_len; j++)
  if (m[j][s_delky[j]] > 0)
    return 1; /* ano! */
return 0; /* ne! */
```

Tento algoritmus běží v čase $O(t\_len \cdot delka\_slovniku)$, jak je vidět třeba z programu. Všimněte si, že např. m má velikost stejnou jako s. Zde jsme program zjednodušili trochu hrubým použitím max_delka_slova, a tak by mohly $memset()$ a $memcpy()$ být pomalejší, ale to nám snad, milý řešiteli, odpustíš.

Pozor na to, že možností, jak text nakouskovat, může být velmi mnoho, např. se slovy „a“, „aa“ a textem „a“^{n} (n-krát znak a) je možností rozdělení n-té Fibonacciho číslo, tedy více než $2^{n/2-1}$. Zkoušení všech možností rozdělení tedy může být velmi neefektivní.

Jak tedy počet všech možností spočítat? Pro konkrétní t_i a každé písmeno slovníku počítáme, jestli si mohou odpovídat. Můžeme program upravit tak, aby počítal *kolika způsoby* jsme mohli dojít k tomu, že si t_i a konkrétní písmeno slovníku odpovídají a tyto možnosti v m_dalsi i jinde prostě sečíst. Úpravu programu už ale necháme jako cvičení.

Tomáš

Úloha 5.4 – Součet 62 (2b)

Zadání:
Součet deseti různých nezáporných celých čísel je roven 62*. Dokažte, že jejich součin je dělitelný* 60*.*

Řešení:
K úloze se dalo přistupovat různými způsoby, z nichž většina vedla k cíli. Ukážeme si jeden z nich. Pro spor předpokládejme, že máme deset různých celých čísel, jejichž součet je 62, ale součin není dělitelný $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

To znamená, že alespoň jedním z čísel 3, 4, 5 není dělitelný ani jeden ze sčítanců. V opačném případě by totiž součet dělitelný 60 jistě byl. Pokud si ale vezmeme deset nejmenších čísel, která nejsou dělitelná 3, 4, resp. 5, vždy dostaneme součet vyšší než 62. Tím dostáváme spor s nedělitelností 60 a úloha je dokázána.

Kuba

Úloha 5.5 – To (1b)

Zadání:
Napište krátké povídání o tom, co je To a proč je raději uvězněno.

Řešení:
Do redakce přišly dva pěkné příběhy o Tom. První, od Mgr. Jana Kadlece, je vyprávěním o tom, kterak To přišlo o svého opatrovatele a bylo vychováno temnými Bratry, kteří ho poslali na Zemi, aby ovládalo lidi a šířilo v nich zlo. Nicméně díky soudržnosti lidí a díky Ničemu a Všemu bylo nakonec To poraženo a uvězněno v galaxii za hranicemi vesmíru. Jednou se však To má vrátit. Příběh čtenářům nepřikládáme, neboť bohužel nepřišel v elektronické podobě.

Ten druhý, od Bc. Markéty Calábkové, přikládáme našim čtenářům pro trochu kulturního obohacení níže. Za oba příběhy moc děkujeme!

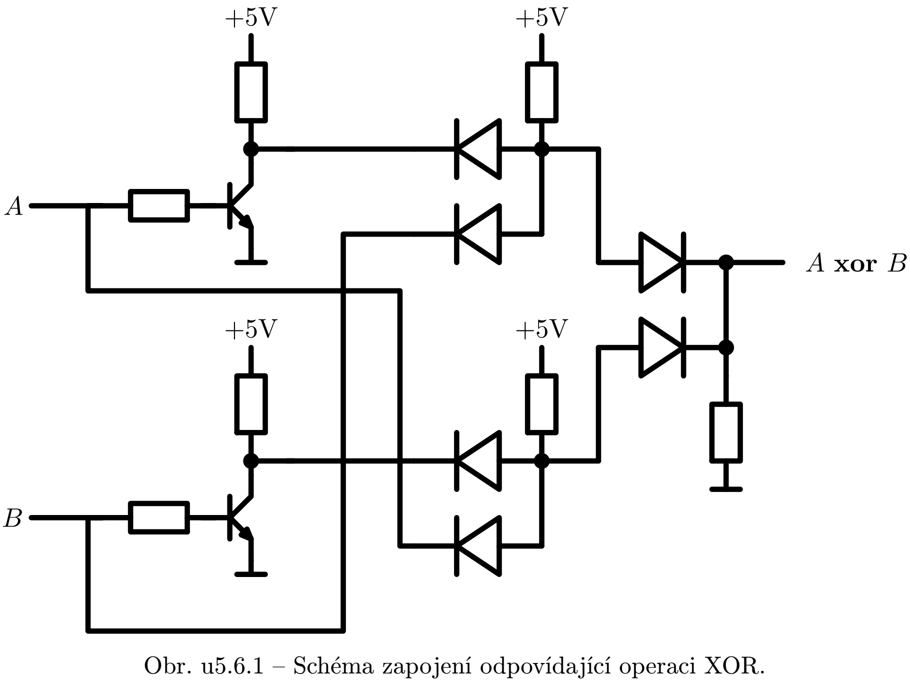
To – Bc. Markéta Calábková

Kdysi dávno, když byl svět ještě mladý, lidé i zvířata se potulovali po naší planetě bok po boku, bez rozdílu. Na Zemi chyběla inteligentní rasa, která by to vše řídila, abstraktními pojmy se nikdo nezatěžoval. V ovzduší byl akutní nedostatek myšlenek, svět byl hloupý. Jednoho dne se na naší planetě objevilo To. Neví se, odkud se sem dostalo ani proč přišlo právě na Zemi. Co se ale ví jistě, je, že s Tím přišla i Myšlenka. A ta chtěla někam proniknout. Vybrala si k tomu hlavu druhu, dnes známého jako Homo sapiens sapiens, a ten náhle začal o věcech přemýšlet. Myšlenka se roztříštila na milióny menších myšlenek, aby mohl myslet celý druh. A celé to hejno myšlenek, které nebyly pohlceny hlavami lidského druhu, se zdržovalo kolem Toho. Tam chodili raní filozofové, aby do jejich hlav pronikaly nové myšlenky a ty potom plodily další a další. Ale jádro Myšlenky pořád někde existovalo a tu začínal jen jeden druh nudit. Tak začala experimentovat s primáty, pracovala na delfínech a zkrátka a dobře, každému druhu dala něco. Nebyla ale sama schopna pohybu, k němu potřebovala To. A lidé si zakrátko všimli, že se To nějak moc pohybuje a došlo jim, že za nějaký čas možná nebudou nejinteligentnějším druhem na Zemi. A tak To zavřeli do nejizolovanějšího vězení, jaké byli schopni v těch dobách (bez jeho pomoci, samozřejmě :)) vymyslet, aby Myšlenka nemohla ovlivňovat jiné druhy a prvenství zůstalo jim. Za ten dlouhý čas Tomu zakrněly končetiny a Myšlenka se definitivně rozpadla na spoustu menších myšlenek. Občas některé z nich pronikly ven z vězení, ale většina se pořád zdržuje kolem Toho. Dnes už To není nakažlivé myšlením, ale protože se na To zapomnělo, tak je pořád zavřené a lidé jsou hloupí, protože jim To nemůže dávat nové myšlenky. Dnes se ani nemůže vrátit tam, odkud přišlo, a proto ho můžeme v jeho kobce pořád zastihnout. Jen kdybychom věděli, kde je…

Úloha 5.6 – XOR (2b)

Zadání:
Nakreslete elektrické schéma zapojení, které bude odpovídat hradlu XOR.

Řešení:
Pokud si uvědomíme, že funkci A **xor** B můžeme zapsat jako $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$ a vzpomeneme si na obrázek c5.4 z čísla XVIII/5, tak snadno popropojujeme jednotlivé části schématu a dostaneme finální zapojení, které je uvedeno na obrázku u5.6.1.



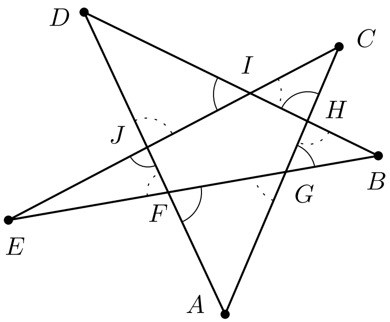
Obr. u5.6.1 – Schéma zapojení odpovídající operaci XOR.

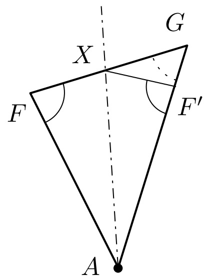
Řešení úloh 6. série

Úloha 6.1 – Princezna s hvězdou na čele (4b)

Zadání:
Princezna má na čele nepravidelnou pěticípou hvězdu (pentagram). Může platit následující tvrzení? „Vzdálenost z každého vrcholu do nejbližšího průsečíku vlevo je kratší, než jeho vzdálenost od nejbližšího průsečíku vpravo."

Řešení:
Zadání bohužel nepochopili všichni řešitelé stejně, upřesníme tedy, že pentagram je nakreslen pěti úsečkami (bez dalších zalomení) a že „levou" a „pravou" úsečku u vrcholu určujeme při pohledu z vnějšku pentagramu dovnitř (poznamenejme, že zevnitř ven by to bylo symetrické). Na obrázku by levé úsečky byly AF, BG, CH, DI a EJ. Naznačeným tečkovaným úhlům budeme říkat pravé a plným levé.





Pokud předpokládáme, že levé úsečky jsou ostře kratší než pravé, dostaneme následující fakt o úhlech: Buď AX osa úhlu GAF a F' obraz F zrcadleného okolo AX. Pokud je $|AG| > |AF| = |AF'|$, pak je určitě úhel AGX menší než $AF'X$ (a tedy i než AFX). Dostaneme tedy nerovnost $|\angle AFG| > |\angle AGF|$. Symetrickou úvahou pro ostatní cípy dostaneme celkem pět nerovností, a jejich sečtením pak, že součet levých (plných) úhlů je *ostře* větší než součet pravých (tečkovaných) úhlů.

Zároveň ale v každém pentagramu platí, že součet levých úhlů je stejný jako součet těch pravých, a to $360°$. To je vidět například z toho, že protilehlé levé a pravé úhly jsou po dvou stejné. Součet $360°$ plyne třeba z toho, že posunutím středů všech levých úhlů do jednoho bodu vytvoří úhly plný kruh (a pravé taktéž).

Tím ale dostáváme spor, a předpoklad o délkách úseček tedy nemůže platit.

Tereza a Tomáš

Úloha 6.2 – Nic (5b)

Zadání:

Přemýšleli jste někdy o tom, jak vypadá nic? Podle fyziků i tam, kde „nic není", něco je, totiž fotonový plyn. Je to záření, které vyplňuje jinak prázdný objem. Toto záření má tlak a energii a obojí závisí na teplotě podle vzorců

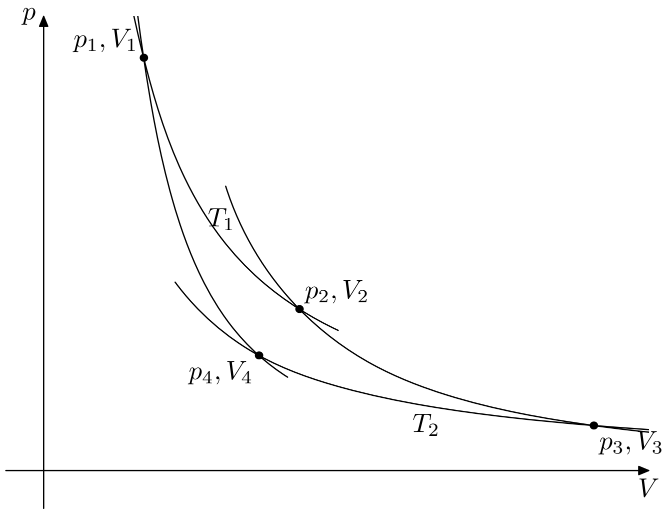
$$U = bVT^4 \,,$$
$$p = bT^4 \,,$$

kde $b = 7{,}56 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{JK^{-4}m^{-3}}$.

Zjistěte, jakou účinnost by měl Carnotův cyklus, pokud by pracovní látkou nebyl obvykle diskutovaný ideální plyn, ale plyn fotonový. Srovnejte obě účinnosti. (Bude se vám hodit vědět, že rovnice adiabaty je pro fotonový plyn $T^3V = \text{konstanta}$.*)*

Řešení:

Účinnosť Carnotovho cyklu pre ideálny plyn je $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, kde T_1 je teplota „ohrievača" a T_2 je teplota „chladiča". Ukážeme si, že úplne rovnako je to pre fotónový plyn, aj pre ľubovoľnú inú látku. Účinnosť Carnotovho cyklu totiž na voľbe pracovnej látky vôbec nezávisí.



Obr. u6.2.1 – Carnotov cyklus v p-V diagrame

Ale pekne poporiadku. Ukážme si, ako by sme to spočítali. Carnotov cyklus s ideálnym plynom máme nakreslený na obrázku u6.2.1. Pozostáva zo štyroch častí: v úseku $1 \to 2$ je to izotermická ($\Delta T = 0$) expanzia pri teplote T_1. Ďalej nasleduje adiabatická ($\Delta Q = 0$) expanzia až do stavu 3. V tento moment sme prakticky vykonali užitočnú prácu a potrebujeme ešte systém vrátiť do počiatočného stavu. Postúpime teda izotermicky pri teplote T_2 do bodu 4 a napokon opäť adiabaticky do bodu 1.

Obvykle píšeme prvú vetu termodynamiky (inak tiež zakuklený zákon zachovania energie) ako

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q &= \mathrm{d}U + \mathrm{d}W\,, \\ \Delta Q &= \Delta U + \Delta W\,, \end{aligned} \tag{u6.2.1}$$

kde $\mathrm{d}Q$, resp. ΔQ je teplo prijaté systémom, ΔU je zmena vnútornej energie a ΔW je práca vykonaná systémom. V prípade cyklického deja, akým Carnotov cyklus je, však musí platiť, že stav systému na konci musí byť presne ten istý, ako na začiatku a teda aj hodnota vnútornej energie systému musí byť rovnaká. Preto pre náš cyklus platí $\Delta U = 0$ a teda

$$\Delta Q = \Delta W\,. \tag{u6.2.2}$$

V tento moment stačí spočítať teplo, ktoré systém prijme od ohrievača v úseku $1 \to 2$ a teplo ktoré systém odovzdá chladiču v úseku $3 \to 4$. Vo zvyšných dvoch úsekoch pracujeme s adiabatickým dejom a teda systém teplo ani nepríjma, ani nevydáva. Píšeme teda

$$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + (p\Delta V)_{12}\,, \tag{u6.2.3}$$

a po dosadení zo zadania

$$\Delta Q_{12} = b(V_2 - V_1)T_1^4 + bT_1^4(V_2 - V_1) = 2bT_1^4(V_2 - V_1)\,. \tag{u6.2.4}$$

Podobne pre úsek $3 \to 4$ môžeme písať

$$\Delta Q_{34} = 2bT_2^4(V_4 - V_3)\,. \tag{u6.2.5}$$

A keďže účinnosť je množstvo vykonanej práce ($\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34}$) ku prijatému teplu ($\Delta Q_{12}$), píšeme

$$\eta = 1 + \frac{\Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}}\,. \tag{u6.2.6}$$

Zatiaľ tento výraz nevieme vyhodnotiť, vystupujú v ňom štyri neznáme objemy. Využijeme však to, že poznáme aj rovnicu adiabaty. Pre deje $2 \to 3$ a $4 \to 1$ teda môžeme napísať

$$T_1^3 V_2 = T_2^3 V_3\,, \quad T_2^3 V_4 = T_1^3 V_1\,, \tag{u6.2.7}$$

čo po úprave dáva vzťahy

$$V_3 = V_2 \frac{T_1^3}{T_2^3}\,, \quad V_4 = V_1 \frac{T_1^3}{T_2^3}\,. \tag{u6.2.8}$$

Teraz takto vyjadrené objemy dosadíme do (u6.2.5) a spoločne s (u6.2.4) do (u6.2.6):

$$\eta = 1 + \frac{2bT_2^4\left(V_1 \frac{T_1^3}{T_2^3} - V_2 \frac{T_1^3}{T_2^3}\right)}{2bT_1^4(V_2 - V_1)}\,, \tag{u6.2.9}$$

odkiaľ postupne úpravou dostávame

$$\eta = 1 + \frac{T_1^3 T_2 \left(V_1 - V_2\right)}{T_1^4 (V_2 - V_1)}\,, \tag{u6.2.10}$$

$$\eta = 1 + \frac{-T_2 \left(V_2 - V_1\right)}{T_1^4 (V_2 - V_1)}\,, \tag{u6.2.11}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}\,, \tag{u6.2.12}$$

čo už je nami hľadaný vzťah, ktorý presne zodpovedá tomu, čo sme na začiatku o účinnosti Carnotovho cyklu povedali. Naviac si môžeme všimnúť, že ΔQ_{34} nám vyšlo menšie ako 0 ($V_4 - V_3 < 0$), a teda je to skutočne podľa termodynamických konvencí teplo, ktoré systém odovzdá okoliu.

Jednoduchší prístup vyžaduje trochu znalostí z termodynamiky. Najdôležitejšie je zavedenie entropie S vzťahom

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}\,. \tag{u6.2.13}$$

Vratný adiabatický dej je teda izentropický (nemení sa pri ňom entropia). Keď s využitím tohoto vzťahu zakreslíme Carnotov cyklus do T-S diagramu (na ose x je entropia, na ose y teplota), dostaneme obdĺžnik. Skutočne, náš dej sa predsa skladá z dvoch izoterm (v T-S diagrame vodorovné priamky) a dvoch adiabat (v T-S diagrame zvislé priamky). Spočítať zo vzťahu (u6.2.13) množstvo prijatého tepla je potom jednoduché: pri adiabatických dejoch to bude 0, pri izotermických to bude $T_2(S_2 - S_1)$ a $T_1(S_4 - S_3)$. Naviac platí, že $S_4 = S_1$ a $S_3 = S_2$, z čoho už priamo dostávame vzťah (u6.2.12) a to sme vôbec nemuseli uvažovať o konkrétnej pracovnej látke.

Jeffer

Úloha 6.3 – Čtyři druhy (4b)

Zadání:

Jakožto tomuto příběhu i této úloze vládne číslo čtyři. Máme 4 druhy ovoce, od každého po n kusech, které chceme naskládat do $4n$ přihrádek, které jsou rozděleny do dvou stejně velkých polic (přesně nad sebou). A to tím způsobem, aby nikde nebyly stejné druhy nad sebou ani vedle sebe. V horní přihrádce už je ovoce (správně) umístěno. Najděte postup pro zaplnění spodní police tak, aby podmínka nebyla porušena.

Řešení:

Když uvážíme, že první řada je vyplněna správně a od každého ze čtyř druhů máme stejný počet kusů, napadne nás vymyslet nějaký způsob komplementarity, například spárování ovoce takovým způsobem, aby oproti druhu nahoře stál vždy jiný daný druh dole. Tato myšlenka však naráží na to, že by bylo potřeba, aby se druhy daly rozdělit na dvě dvojice tak, že každá z nich se v horní polici vyskytuje v počtu n kusů. To ovšem platit nemusí, například pokud druhy označíme jako A, B, C a D, může nás v horní polici potkat následující rozložení: $DABABDCDCDCD$, kdy $n = 6$, ale počty kusů $2, 2, 3$ a 5 spárovat nelze.

Potřebujeme nějaký lepší invariant. Zadání nám sice nezaručí, že ke každému prvku můžeme najít jiný komplementární prvek, ale když vezmeme dvojici sousedního ovoce v horní řadě a do dolní řady se k ní pokusíme přiřadit také dvojici, pak ze zadání vyplývá, že pokud bude každé ovoce v této čtveřici různé, budeme mít přesně n takovýchto čtveřic. Stačí jen přiřazenou dvojici v dolní řadě umístit ve správném pořadí, přičemž s horní řadou díky volbě dvojice ke konfliktu dojít nemůže a v dolní řadě, pokud doplňujeme ovoce například zleva doprava, ovlivní umístění vždy jen jeden kus ovoce, takže této podmínce není problém vyhovět.

Alča

Úloha 6.4 – Text (1 + 1b)

Zadání:

Tak to byl, milí čtenáři, poslední letošní příběh, snad se vám texty aspoň trochu líbily. Občas jistě potkáváte takové texty, u nichž člověk přemýšlí, zda je jejich autor vůbec placen za jejich obsah, nikoli jen za rozsah. Dotáhneme-li tuto úvahu do extrému, vynoří se představa tvorbominimalisty, který naprosto bez ohledu na smysluplnost produkuje hromady textu. Jak dlouho by musel takový autor sedět u počítače a mlátit do klávesnice, aby svým veledílem zaplnil celý svůj pevný disk? (Při řešení této úlohy se vaší kreativitě meze nekladou.)

Řešení:

Celkem čtyři řešitelé poslali kreativní návrhy na způsob, jak co nejrychleji zaplnit svůj pevný disk. Řešení byla v zásadě dvojího typu.

Prvním z nich bylo odhadnout průměrnou dobu, za jakou člověk napíše jednu stranu A4, změření její velikosti a poté následující výpočet toho, jak dlouho bychom museli psát, abychom celý svůj pevný disk zaplnili.

Druhý způsob využíval schránky operačního systému. Začneme s nějakou malou skupinou písmen (dejme tomu 10-ti), zkopírujeme celý text do schránky a pak ho několikrát vložíme (Hana Turčinová vyčíslila, že pro její velikost pevného disku dává nejlepší výsledky 1 zkopírování a 4 vložení). Tento způsob v praxi naráží na velikost RAM, do které se zkopírovaný text standardně ukládá.

Jako poměrně originální musíme označit metodu navrženou Matějem Konečným – předpokládáme-li, že disk je už na začátku zaplněn nějakými (klidně i náhodnými) daty, mohlo by nám stačit vytvořit hlavičku, která všechno zbylé místo na disku označí jako soubor.

Honza

Výsledková listina po 5. sérii

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r4	r5	t3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ J. Šafin	3.	73						0	0	60
2.	Doc.$^{\text{MM}}$ J. Kubečka	4.	100						0	0	50
3.	Dr.$^{\text{MM}}$ D. Gromada	4.	43						0	0	43
4.	Mgr.$^{\text{MM}}$ A. Šťastná	2.	41	3		2			0	5	41
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Kadlec	1.	44	3	2	2	1	4	2	14	40
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Lieskovský	2.	27						0	0	27
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Mikel	3.	21						0	0	21
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Poppr	1.	26						0	0	20
9–10.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Calábková	1.	18	3	0	2	1		2	8	18
	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Kratochvíl	4.	35						0	0	18
11.	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Dolejší	1.	17			2			0	2	17
12.	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Cífka	3.	37						0	0	16
13–15.	Mgr.$^{\text{MM}}$ T. Bárta	4.	20						0	0	14
	Bc.$^{\text{MM}}$ O. Benedikt	3.	14						0	0	14
	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Mička	3.	28						0	0	14
16.	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Vincena	1.	27	2		2			1	5	12
17.	Mgr.$^{\text{MM}}$ L. Grund	3.	40						0	0	10
18.	J. Greššák	3.	9						0	0	9
19–21.	Mgr.$^{\text{MM}}$ E. Gocníková	4.	37						0	0	8
	E. Pilátová	4.	8						0	0	8
	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Töpfer	4.	33						0	0	8
22–23.	Mgr.$^{\text{MM}}$ R. Kubíček	3.	20						0	0	7
	M. Zmeškal	1.	7						0	0	7
24–25.	Bc.$^{\text{MM}}$ R. Navrátil	4.	15						0	0	6
	Prof.$^{\text{MM}}$ Š. Šimsa	3.	273						0	0	6
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ B. Said	4.	12						0	0	5
27–28.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Kopf	4.	10						0	0	4
	M. Vohníková	2.	4						0	0	4
29–31.	M. Bidlák	2.	3		1	2			0	3	3
	Mgr.$^{\text{MM}}$ B. Böhmová	4.	45						0	0	3
	Ľ. Šimková	2.	3						0	0	3
32.	E. Harlenderová	1.	2						0	0	2
33–35.	D. Fecková	4.	1						0	0	1
	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Langerová	1.	12						0	0	1
	P. Turnovec	1.	1						0	0	1
36.	T. Vysušil	1.	0						0	0	0

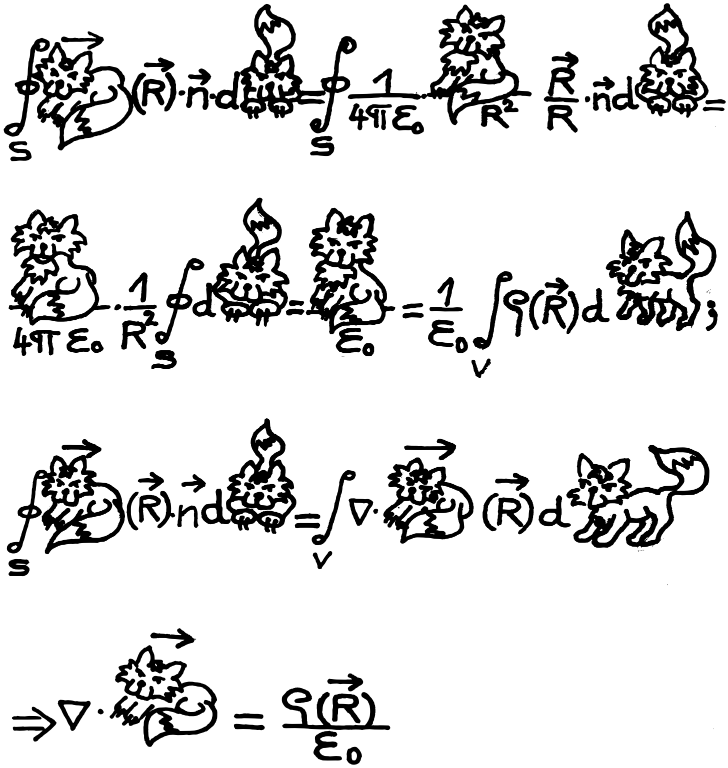
Výsledková listina po 6. sérii

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Šafin	3.	73					0	0	60
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Gromada	4.	51	4	4			0	8	51
3.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kubečka	4.	100					0	0	50
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	1.	48	1		1	1	1	4	44
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Šťastná	2.	41					0	0	41
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Lieskovský	2.	27					0	0	27
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Mikel	3.	21					0	0	21
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Poppr	1.	26					0	0	20
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Calábková	1.	19	1				0	1	19
10–11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Dolejší	1.	18				1	0	1	18
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Kratochvíl	4.	35					0	0	18
12–13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Cífka	3.	37					0	0	16
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Konečný	1.	16	2	5	3	2	4	16	16
14–16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Bárta	4.	20					0	0	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Benedikt	3.	14					0	0	14
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	3.	28					0	0	14
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	1.	27					0	0	12
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	3.	40					0	0	10
19.	J. Greššák	3.	9					0	0	9
20–22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ E. Gocníková	4.	37					0	0	8
	E. Pilátová	4.	8					0	0	8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Töpfer	4.	33					0	0	8
23–25.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ R. Kubíček	3.	20					0	0	7
	H. Turčinová	2.	7	4			2	1	7	7
	M. Zmeškal	1.	7					0	0	7
26–27.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ R. Navrátil	4.	15					0	0	6
	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Š. Šimsa	3.	273					0	0	6
28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ B. Said	4.	12					0	0	5
29–30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Kopf	4.	10					0	0	4
	M. Vohníková	2.	4					0	0	4
31–33.	M. Bidlák	2.	3					0	0	3
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ B. Böhmová	4.	45					0	0	3
	Ľ. Šimková	2.	3					0	0	3
34.	E. Harlenderová	1.	2					0	0	2
35–37.	D. Fecková	4.	1					0	0	1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	1.	12					0	0	1
	P. Turnovec	1.	1					0	0	1
38.	T. Vysušil	1.	0					0	0	0

Výsledková listina XVIII. ročníku

				Číslo						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_{1}$
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Šafin	3.	73	12	27	15	6	0	0	60
2.	Dr.$^{\text{MM}}$ Daniel Gromada	4.	51	16	21	6	0	0	8	51
3.	Doc.$^{\text{MM}}$ Jakub Kubečka	4.	100	17	16	11	6	0	0	50
4.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Kadlec	1.	48	2	12	12	0	14	4	44
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Aneta Šťastná	2.	41	10	10	16	0	5	0	41
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Matej Lieskovský	2.	27	6	13	0	8	0	0	27
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Mikel	3.	21	17	4	0	0	0	0	21
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marián Poppr	1.	26	11	9	0	0	0	0	20
9.	Bc.$^{\text{MM}}$ Markéta Calábková	1.	19	1	5	4	0	8	1	19
10–11.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jakub Dolejší	1.	18	6	7	0	2	2	1	18
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Pavel Kratochvíl	4.	35	9	1	8	0	0	0	18
12–13.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Cífka	3.	37	16	0	0	0	0	0	16
	Bc.$^{\text{MM}}$ Matěj Konečný	1.	16	0	0	0	0	0	16	16
14–16.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Bárta	4.	20	9	5	0	0	0	0	14
	Bc.$^{\text{MM}}$ Ondřej Benedikt	3.	14	6	2	0	6	0	0	14
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Mička	3.	28	9	5	0	0	0	0	14
17.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Petr Vincena	1.	27	6	1	0	0	5	0	12
18.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lubomír Grund	3.	40	0	10	0	0	0	0	10
19.	Jerguš Greššák	3.	9	9	0	0	0	0	0	9
20–22.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Eva Gocníková	4.	37	6	0	2	0	0	0	8
	Eliška Pilátová	4.	8	0	0	8	0	0	0	8
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Martin Töpfer	4.	33	8	0	0	0	0	0	8
23–25.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radek Kubíček	3.	20	7	0	0	0	0	0	7
	Hana Turčinová	2.	7	0	0	0	0	0	7	7
	Marek Zmeškal	1.	7	2	5	0	0	0	0	7
26–27.	Bc.$^{\text{MM}}$ Robert Navrátil	4.	15	0	0	0	6	0	0	6
	Prof.$^{\text{MM}}$ Štěpán Šimsa	3.	273	6	0	0	0	0	0	6
28.	Bc.$^{\text{MM}}$ Bedřich Said	4.	12	0	0	5	0	0	0	5
29–30.	Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Kopf	4.	10	0	2	2	0	0	0	4
	Markéta Vohníková	2.	4	4	0	0	0	0	0	4
31–33.	Matěj Bidlák	2.	3	0	0	0	0	3	0	3
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Barbora Böhmová	4.	45	3	0	0	0	0	0	3
	Ľudmila Šimková	2.	3	0	3	0	0	0	0	3
34.	Eva Harlenderová	1.	2	2	0	0	0	0	0	2
35–37.	Daniela Fecková	4.	1	0	1	0	0	0	0	1
	Bc.$^{\text{MM}}$ Linda Langerová	1.	12	1	0	0	0	0	0	1
	Petr Turnovec	1.	1	1	0	0	0	0	0	1
38.	Tomáš Vysušil	1.	0	0	0	0	0	0	0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.