Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XVIII / Číslo 6

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

přinášíme vám už šesté číslo našeho časopisu, letos poslední, ve kterém najdete úlohy k řešení. Naleznete zde také řešení úloh ze 4. série.

Rádi bychom vás upozornili na dokonce dva účastnické články z konferencí. První projekt pochází ze soustředění ve Filipově Huti, druhý se uskutečnil na podzim v Uhelné. Doufáme, že vás inspirují k sepsání vlastního příspěvku.

Nepřehlédněte také informace o posledním turnaji k tématku Jezero, které najdete uvnitř čísla.

Přejeme vám úspěšný konec školního roku.

Organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 11. 6. 2012

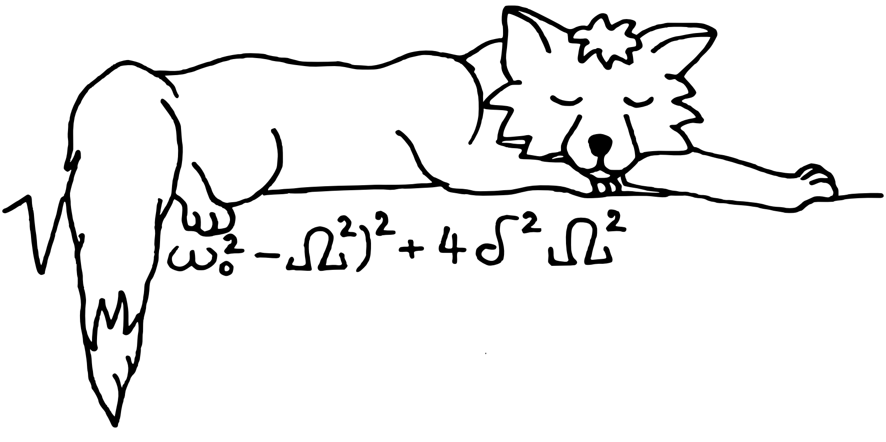
Úloha 6.1 – Princezna s hvězdou na čele (4b)

Jako malá jsem toužila poznat velké světy.

Chvíli to byl ten záhadný svět dospělých, kteří chodí kamsi do práce a dělají tam důležité věci. Kteří na rozdíl ode mne vědí, co jsou to ty zvláštní peníze, poukázky na všechno.

Chvíli zas svět dobrodružství, kde je třeba porazit draka a zachránit princeznu. Odvahou nebo rozumem překonat nástrahy zla a stát se jednou z legend, které tento svět vytvářejí.

Princezna má na čele nepravidelnou pěticípou hvězdu (pentagram). Může platit následující tvrzení? „Vzdálenost z každého vrcholu do nejbližšího průsečíku vlevo je kratší, než jeho vzdálenost od nejbližšího průsečíku vpravo.“



Úloha 6.2 – Nic (5b)

Jindy svět dálek; zprvu jen těch, jež se otvírají, když přelezeš branku zahrady a vydáš se zkoumat roztodivné v trávě žijící tvory, později dálek-rychlodálek, kam uháníš vlakem skrz pole a lesy, letíš letadlem nad moři.

Taky svět kouzel a zázraků. Kde se plní přání, aspoň ta nejupřímnější. Kde věci nejsou, jaké se na pohled zdají. Kde má moc vůle a láska, neboť podstatu věcí tu neobjevíš očima.

Přemýšleli jste někdy o tom, jak vypadá nic? Podle fyziků i tam, kde „nic není", něco je, totiž fotonový plyn. Je to záření, které vyplňuje jinak prázdný objem. Toto záření má tlak a energii a obojí závisí na teplotě podle vzorců

$$U = bVT^4 \,,$$

$$p = bT^4 \,,$$

kde $b = 7{,}56 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{JK^{-4}m^{-3}}$.

Zjistěte, jakou účinnost by měl Carnotův cyklus, pokud by pracovní látkou nebyl obvykle diskutovaný ideální plyn, ale plyn fotonový. Srovnejte obě účinnosti. (Bude se vám hodit vědět, že rovnice adiabaty je pro fotonový plyn $T^3V = \text{konstanta}$.)

Úloha 6.3 – Čtyři druhy (4b)

Vyrůstala jsem a poznala mnohé z těch světů.

Zjistila jsem, že jsou důležitější věci než honba za papírky, neboť za ně vlastně nedostaneš skoro nic, i kdyby Ti spadly do klína třeba všechny.

Poznala jsem, že princezny bývají mnohdy hloupé a namyšlené, za to draci jsou vzácní a vznešení tvorové, jichž bychom si spíš měli vážit.

Objevila jsem, že nad lákavost dálek je milejší přívětivost domova, když se z nich navrátíš.

Pochopila jsem, že zázraky se nedějí samy od sebe, že o každou maličkost včetně lásky se musíš přičinit.

Jakožto tomuto příběhu i této úloze vládne číslo čtyři. Máme 4 druhy ovoce, od každého po n kusech, které chceme naskládat do $4n$ přihrádek, které jsou rozděleny do dvou stejně velkých polic (přesně nad sebou). A to tím způsobem, aby nikde nebyly stejné druhy nad sebou ani vedle sebe. V horní přihrádce už je ovoce (správně) umístěno. Najděte postup pro zaplnění spodní police tak, aby podmínka nebyla porušena.

Úloha 6.4 – Text (1 + 1b)

Zklamala jsem se těmi velkými světy, ale poučila jsem se z nich. Vytvářím si proto vlastní, malý svět.

Svět naplněný pomalou, ale vytrvalou cestou, která má smysl sama o sobě.

Svět, kde bezhlavou honbu za dobrodružstvím nahradilo dobrodružství z poznání.

Svět, z nějž netoužím utíkat do cizích krajů, neboť je takový, jakým ho chci mít.

Malý láskyplný svět, kde vůle dokáže zázraky a který neobjevíš očima.

Tak to byl, milí čtenáři, poslední letošní příběh, snad se vám texty aspoň trochu líbily. Občas jistě potkáváte takové texty, u nichž člověk přemýšlí, zda je jejich autor vůbec placen za jejich obsah, nikoli jen za rozsah. Dotáhneme-li tuto úvahu do extrému, vynoří se představa tvorbominimalisty, který naprosto bez ohledu na smysluplnost produkuje hromady textu. Jak dlouho by musel takový autor sedět u počítače a mlátit do klávesnice, aby svým veledílem zaplnil celý svůj pevný disk? (Při řešení této úlohy se vaší kreativitě meze nekladou.)

Řešení témat

Téma 1 – Ternární logika

Vypadá to, že velmi kvalitní článek Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřeje Cífky otištěný ve třetím čísle odradil všechny další potenciální přispěvatele. Přesto se nebojte nám své příspěvky zaslat.

Zatím se třeba neobjevilo žádné alternativní zavedení ternární logiky. Je pravda, že Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Cífka definuje ternární logiku docela pěkným a přirozeným způsobem. Určitě to není ale způsob jediný.

Pokud se vám způsob zadefinování ternární logiky líbí, můžete ho dále rozvíjet. Binární operace máme již docela prozkoumané. Nehodily by se nám v ternární logice ale třeba i operace ternární? Nebo si vystačíme s binárními? Nezodpovězena zůstala i otázka ohledně užitečnosti ternární logiky. Odpovídá uvažování používanému v reálném světě?

Představte si, že chcete navrhnout počítač, který bude pracovat s ternární logikou. Kolik operací do něj musíte zabudovat? Aneb kolik nejméně binárních operací potřebujeme, abychom pomocí nich dokázali vyjádřit všechny ostatní binární operace? A jak to bude s unárními operacemi?

Kuba

Téma 2 – Jezero

Posledný turnaj bude 6. 6. 2012
Podrobné informácie nájdete na konci článku

Opäť sa „aktuálny“ turnaj koná v dobe, kedy by ste už mali toto číslo dostávať do schránok, takže vám prinášame aspoň výsledky predchádzajúceho turnaja, ktorý sa uskutočnil na priestupný deň, 29. 2. 2012. Dorazili nám celkovo tri programy, čo by nebolo tak málo, keby neboli všetky od jediného riešiteľa – Dr.MM Jakuba Šafina. Do boja proti nim sme tak zmobilizovali naše organizátorské programy.

V prvej časti sa programy stretli proti sebe v súboji na malý počet kôl. Aby sme upresnili, celkovo šlo o šesť kôl hry. Ako programy dopadli, vidíte v nasledujúcej tabuľke.[1]

Program	Skóre
org bio.py	49,5
Šafin trololo2.py	36,1
org smart.pl	32,5
Šafin trololo1.py	32,2
org revizor	31,8
Šafin trololo3.py	29,6
org economic30-70.pl	24,2
org EKOnom.py	23,5
org economic20-60.pl	20,1

Tabuľka t2.6.1: Výsledky, ak by sa do turnaja zapojili aj organizátorské programy

Ha, prečo tak malé čísla? Veľká časť šesťkolových súbojov končila ekologickou katastrofou. Ale že by si ani chudák revizor svoju večnú štyridsaťdvojku neubránil? Ako je to možné? No, programy trololo sú skutočne trololo a tak sa nie príliš zriedkavo stalo, že náš auditorský program pri vyhodnocovaní akcií prišiel do fabriky trololo a zistil, že stroje sú predané, peniaze v bankách na Panenských ostrovoch a menežment nezvestný. Proste tunelárska prax podľa najlepšej tradície podnikania v Čechách a na Slovensku. (V preklade: Programy trololo občas spadnú, s čím náš vyhodnocovací software zatiaľ nepočíta. A keď spadne jeden z programov v súboji, súboj sa ukončí s nulovým kontom pre všetky zúčastnené programy. Nebojte sa, do ďalšieho turnaja program upravíme tak, aby skončil len vytunelovaný program a ostatné si ďalej spokojne vyrábali až do naplánovaného konca.) A jedine naivný bio.py je v zisku. Spravme si trochu náladu podobnou tabuľkou, ale len pre tri programy od Šafina:

[1] Skóre je priemerný zisk na jednu hru.

Program	Skóre
Šafin trololo2.py	50
Šafin trololo1.py	49
Šafin trololo3.py	35

Tabuľka t2.6.2: Výsledky, ak by sa do turnaja zapojili len riešiteľské programy

Tentokrát sú ziskové dva z troch programov. Síce málo, ale stále ziskové. Aby sme sa zas nerozveselili príliš, pozrime sa teraz na druhú časť turnaja: dlhé súboje s kontrolou za 5 peňazí. Dlhý súboj znamenal v tomto prípade 85 kôl.

Program	Skóre
org smart.pl	158,6
org bio.py	63,4
org economic20-60.pl	13,2
org EKOnom.py	8
org economic30-70.pl	7,1
Šafin trololo3.py	4
Šafin trololo2.py	0
Šafin trololo1.py	0
org revizor	0

Tabuľka t2.6.3: Výsledky, ak by sa do turnaja zapojili aj organizátorské programy

Smart sa vracia v plnej sile! Na druhom mieste mu sekunduje bio.py, stále ešte v zisku. Ostatným programom úradné poplatky poriadne zavarili a tak tri programy zkrachovali, nech už hrali s akýmikoľvek súpermi. Aby sme boli spravodliví, pozrime sa, ako sa trojici programov darilo bez svorky lačných organizátorských. . .

Program	Skóre
Šafin trololo1.py	3
Šafin trololo2.py	2
Šafin trololo3.py	0

Tabuľka t2.6.4: Výsledky, ak by sa do turnaja zapojili len riešiteľské programy

Stručne povedané: biedne. Ani jeden v zisku, trololo3 dokonca permanentným krachom.

Čo povedať na záver? Smart ostal neporazený. Dr.$^{\text{MM}}$ Šafin získal šesť bodov za víťazstvo veľmi, veľmi lacno – ostatne ako vždy, keď sa nezúčastní dostatok súperov. Predposledný turnaj by mal prebiehať práve v dobe vydania tohoto čísla, ale to nevadí, pretože sa chystá ešte jeden, záverečný.

Posledný turnaj

Ten sa uskutoční v stredu 6. 6. 2012, teda dva dni po termíne odoslania riešení z tohoto čísla. Pravidlá z 1. 5. zostávajú v platnosti, ale radšej si ich pripomeňme:

Turnaj bude obsahovať krátke súboje na nanajvyš desať kôl, ale tiež dlhé súboje (desiatky až stovky kôl), pri ktorých kontrola bude stáť 5 peňazí. Pripomíname tiež nové bodovanie, keď **počet bodov, ktoré riešiteľ získa, je rovný počtu cudzích programov, ktoré najlepší jeho program dokáže poraziť**. To znamená, že ak by do súboja poslal program len jeden riešiteľ, nezískal by zaň žiadne body. To by asi nebolo úplne správne, a tak **v prípade nedostatku hráčov nasadíme do bodovaného turnaja aj organizátorské programy** (a tých je dosť). Vopred si vyhradzujeme právo bodovanie zmeniť, pokiaľ by sa nám zdalo, že sa jeho formu snaží niekto zneužívať.

Honza & Jeffer

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Optimalizace (3+3b)

Zadání:

Mějme n červených a n modrých bodů v rovině. Cílem je spojit body do dvojic tak, aby ve dvojici byl vždy jeden červený a jeden modrý bod a aby součet délek úseček (spojnic) těchto dvojic byl co nejmenší. Není nutno najít nejmenší součet, ale co nejmenší, jaký zvládnete. Pošlete nám popis algoritmu a řešení nalezené pro data zveřejněná na webových stránkách semináře. Výsledky vašich programů seřadíme podle součtu délek úseček a přidělíme body. Polovinu bodů dostanete za popis algoritmu, druhou polovinu za výstupy programu, přičemž pokud budou výstupy korektní a netriviální, alespoň bod určitě dostanete.

Vstup: Pro ozkoušení vašeho programu jsme připravili celkem šest různých vstupních souborů. Tyto vstupy můžete najít na našich webových stránkách na adresách `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/18_4_1_`*(číslo)*`.txt`*, kde (číslo) je číslice od jedné do šesti.*

Na prvním řádku každého souboru se nachází číslo n, poté následuje n řádků s červenými body a n řádků s modrými body. V každém řádku je nejprve souřadnice x, potom y. Souřadnice jsou celá čísla od mínus milionu do milionu. Souřadnice se mohou opakovat.

Výstup: Textový soubor obsahující n řádků vždy s indexem červeného a modrého bodu (v tomto pořadí) tak, jak jsou spojeny do dvojice. Index bodu je číslo určující jako kolikátý byl bod uveden mezi červenými resp. modrými body ve vstupním souboru. Výstupní soubory pro všechny naše vstupy (tedy celkem šest souborů) nám pošlete spolu s řešením.

Příklad:

vstup.txt	vystup.txt
`3`	`1 1`
`1 2`	`2 3`
`5 9`	`3 2`
`7 8`	
`3 4`	
`7 9`	
`5 9`	

Řešení:

Tato úloha byla zadána jako otevřená, protože jde o úlohu, která se pravděpodobně nedá zvládnout v polynomiálním čase. Čekal jsem, že přijde více různě zdařilých řešení, ale přišla bohužel jenom dvě.

Pěkné řešení přišlo od Matěje Lieskovského, který šel na párování dvoufázově. Nejprve ke každému bodu našel nejbližší ještě nespárovaný a následně zkoumal, zda nezmenší celkovou vzdálenost, když prohodí nějaké spárované dvojice (tzn. pokud byly dvojice A – B a C – D, tak po prohození budou spárovány A – D a C – B). Tímto postupem dospěl k cíli ve kvadratickém čase a jeho program si můžete stáhnout z našich stránek.

Ještě krátce k tomu, proč nefunguje přímočaré řešení vyzkoušet všechny dvojice. Pokud máme $2n$ bodů, tak pro první můžeme vybrat $n-1$ protějšků, pro druhý $n-2$, až pro poslední nám zůstane jednoznačně určený protějšek. Jednotlivé výběry jsou nezávislé, tudíž máme celkem $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$ možných párování. Buďme optimisté a předpokládejme, že otestování jednoho párování trvá 1 takt procesoru a ten má taktovací frekvenci 2 GHz, tzn. 2 milardy taktů za sekundu. Pro $n = 15$ není problém $(10!/10^9 < 1)$, ale už pro $n = 20$ bude program běžet 1300 sekund a pro $n = 50$ bude program běžet řádově 10^{50} let, tudíž se výsledek nikdy nedozvím a je to jako by program žádný výsledek nevydal. Proto v programech pozor na testování všech uspořádání a párování, může to trvat opravdu velmi dlouho.

Jethro

Úloha 4.2 – Číselná (4b)

Zadání:

Mezi libovolnými n celými čísly lze najít několik čísel (tedy alespoň jedno), jejichž součet je dělitelný n. Existuje pro toto tvrzení protipříklad? Nebo je platné vždy?

Řešení:

Ukážeme, že tvrzení je platné vždy. Mějme zadaná libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uvažujme následující součty

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Pokud některé z čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ je dělitelné n, jsme hotovi. Jinak si u každého z čísel spočítáme zbytek po dělení n. Ten bude z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Máme tedy $n-1$ možných zbytků po dělení pro n čísel. Z toho plyne, že nějaká dvě čísla dávají po dělení n stejný zbytek. Označme je s_i a s_j tak, aby $i < j$.

Potom ale $s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ je dělitelné n. A tedy $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ jsou naše hledaná čísla.

Kuba

Úloha 4.3 – Balón (5b)

Zadání:

Postavme si horkovzdušný superbalón. Takový superbalón musí něco vydržet, a tak budeme chtít na jeho výrobu použít hliník o tloušťce $d = 10\,\mathrm{mm}$. Kromě zásoby hliníku už máme i tepelný zdroj o výkonu P, kterým budeme vzduch v balónu ohřívat. Aby byl superbalón užitečný, musí také unést i gondolu s námi a dalším vybavením o celkové hmotnosti naložené gondoly m. Můžeme už balit kufry na cestu superbalónem kolem světa, nebo bychom měli sednout zpět k rýsovacímu prknu a celý projekt přepracovat? Pro zjednodušení předpokládejme, že balón bude používán pouze při teplotě vnějšího vzduchu T. Získat za tuto úlohu plný počet bodů nebude nikterak jednoduché, část z nich však rádi udělíme za každý nápad vedoucí k řešení.

Řešení:

Pokladajme balón za peknú guľu. Označme si teraz V celkový objem balónu vrátane steny ($V = 4/3\pi(r+d)^3$), V' objem vnútorného priestoru balónu ($V' = 4/3\pi r^3$) a $V'' = V - V'$ objem hliníkového plášťa. Predpokladajme ďalej, že vzduch v balóne bude mať rovnaký tlak a zloženie, ako vzduch vonku a že sa teda budú líšiť iba teplotou a teda aj hustotou. Ak budeme vzduch pokladať za ideálny plyn, môžeme pre vzduch vnútri písať

$$pV' = nRT_\mathrm{i}\,, \tag{u4.3.1}$$

a pre vzduch vonku veľmi podobne, ale s teplotou T_o. Ak teraz za látkové množstvo dosadíme $n = m/M$, vieme už vypočítať hmotnosť vzduchu v balóne

$$m_\mathrm{v} = \frac{pM}{R}\frac{V'}{T_\mathrm{i}}\,, \tag{u4.3.2}$$

a veľmi podobne pre hmotnosť vonkajšieho vzduchu o objeme balónu

$$m_\mathrm{o} = \frac{pM}{R}\frac{V}{T_\mathrm{o}}\,. \tag{u4.3.3}$$

Aby balón lietal, musí vonkajší vzduch o objeme balónu vážiť toľko, čo vzduch v balóne spolu s vlastnou hmotnosťou balónu a užitočnou záťažou, teda musí platiť

$$\begin{aligned} m_\mathrm{o} &= m_\mathrm{v} + m_\mathrm{b} + m\,,\\ \frac{pM}{R}\frac{V}{T_\mathrm{o}} &= \frac{pM}{R}\frac{V'}{T_\mathrm{i}} + V''\varrho_\mathrm{Al} + m\,, \end{aligned} \tag{u4.3.4}$$

kde sme za vlastnú hmotnosť balóna jednoducho dosadili objem hliníkového plášťa vynásobený jeho hustotou.

No vida, máme vyhraté. Stačí dosadiť známe hodnoty, stanoviť si teplotu vonkajšieho vzduchu napríklad na $T_\mathrm{o} = 300\,\mathrm{K}$ a hravo určíme požadovaný priemer balónu a teplotu. Limitom pre slobodné lietanie je stav, keď máme balón daného polomeru naplnený vákuom, teda $m_v = 0\,\mathrm{kg}$. Pre túto podmienku vieme pre danú teplotu a tlak vonkajšieho vzduchu spočítať limitný polomer. Pre zjednodušenie počítajme s tým, že nesená záťaž je nulová ($m = 0$). Potom platí

$$\begin{aligned} m_\mathrm{o} &= m_\mathrm{b}\,,\\ \frac{pM}{RT_\mathrm{o}}\frac{V}{T_\mathrm{o}} &= (V - V')\varrho_\mathrm{Al}\,,\\ \frac{pM}{RT_\mathrm{o}\varrho_\mathrm{Al}} &= \frac{V - V'}{V}\,,\\ \frac{pM}{RT_\mathrm{o}\varrho_\mathrm{Al}} &= 1 - \frac{V'}{V}\,. \end{aligned} \tag{u4.3.5}$$

Ak chceme limitný polomer vyjadriť zo zlomku V'/V, pomôže nám napríklad rozvoj do Taylorovho radu podľa d okolo nuly, z čoho dostaneme

$$\frac{V'}{V} = 1 - 3\frac{d}{r} + \dots\,, \tag{u4.3.6}$$

z čoho po dosadení už hravo určíme

$$r_\mathrm{min} = \frac{3RT_\mathrm{o}d\varrho_\mathrm{Al}}{pM} \tag{u4.3.7}$$

To znamená, že je dobré, aby vonkajší vzduch mal čo najnižšiu teplotu a čo najvyšší tlak. Aké to prekvapenie! Že by náš „balón“ najlepšie fungoval vo veľmi hustej atmosfére, napríklad pod vodou? Je vždy dobré, keď poctivo vypočítaný výsledok podporuje to, na čo prišiel náš „prostý rozum“.

Tak, toto by sme už mali vypočítané, teraz sa pozrieme na to, ako bude súvisieť výkon tepelného zdroja P s teplotou v balóne T_i. Predpokladajme, že všetok vzduch v balóne bude mať rovnakú teplotu. Pokiaľ vnútorná strana plášťa bude trvalo ohrievaná vzduchom s teplotou T_i a vonkajšia ochladzovaná vzduchom s teplotou T_o, tak ak pokladáme plášť balónu za bariéru s tepelnou vodivosťou k (koľko Joulov prejde cez meter štvorcový plášťa na rozdiel teplôt 1 K za sekundu), tak množstvo tepla, ktoré prejde povrchom balónu za sekundu bude $Q = -kS\Delta T$ (záporná hodnota pretože nám teplo uniká; S je plocha plášťa). V rovnováhe, teda v stave s ustálenou teplotou, musí platiť, že celková tepelná bilancia je nulová, teda že rovnaké množstvo tepla, ako zdroj za sekundu dodá, unikne za sekundu povrchom. Platí teda $P - kS\Delta T = 0$ a tým pádom ustálená teplota vzduchu vnútri je

$$T_\mathrm{i} = \frac{P}{kS} + T_\mathrm{o}\,. \tag{u4.3.8}$$

To je na jednu stranu pekné, na stranu druhú by sme určite nechceli, aby teplota vzduchu vo vnútri balónu dosiahla teplotu topenia hliníku, čo je okolo 930 K. To je druhý limit (prvým bol minimálny polomer daný vákuom v balóne).

Tretím limitom potom ostáva celkový priemer balónu. Ten plášť z centimeter hrubého hliníku bude vážiť nemálo a kým nebude naplnený teplým vzduchom, bude musieť uniesť celú svoju hmotnosť sám. Ale vyhnime sa tomuto, bezpochyby náročnému, výpočtu a predpokladajme, že sme akési „lešenie“, ktoré plášť udrží pohromade počas výstavby, vyriešili.

Spočítajme teraz, aspoň približne, potrebný polomer balónu pre nulovú užitočnú záťaž, teplotu plynu vnútri rovnú teplote topenia hliníku a vonkajšiu teplotu $T_\mathrm{o} = 0\,°\mathrm{C}$. Z tohoto výsledku potom vypočítame potrebný výkon tepelného zdroja.

Musíme výjsť z rovnice (u4.3.4), do ktorej ešte dosadíme rozumný atmosférický tlak (100 kPa), molekulovú hmotnosť napríklad pre plynný dusík $\mathrm{N_2}$ ($M = 28\,\mathrm{g/mol}$) a hustotu hliníku $\varrho_\mathrm{Al} = 2700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Minimálny polomer pre vákuový balón vychádza potom približne 70 m, pre balón s teplým vzduchom vo vnútri potom okolo 110 m.

Aký výkonný by mal byť pre tento druhý, limitný prípad tepelný zdroj v balóne? Udávaná tepelná vodivosť hliníku je $a = 237\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ a aby sme z nej dostali konštantu k zo vzťahu (u4.3.8), musíme ju vydeliť hrúbkou steny. Pre polomer balónu $r = 110\,\mathrm{m}$ potom dostávame dosť desivý výsledok $P = 2\,\mathrm{TW}$, čo zodpovedá napríklad výkonu tisícovky Temelínů. Toto je ale horný odhad, keďže predpokladá, že vnútorná strana plášťa má neustále teplotu 930 K a vonkajšia 300 K, čo nie je práve obvyklý prípad. Veľmi dobrá tepelná vodivosť hliníka je nám teraz ale na prekážku.

Na druhú stranu, keď už sa dostaneme k tomu, že balón unesie sám seba, stačí nám pridať pár metrov na polomere a balón unesie skoro akýkoľvek rozumný náklad. A prečo by aj nie, veď vlastná hmotnosť balónu s polomerom 110 m dosahuje až 4000 t – v tom sa pár ton nákladu schová hravo.

Jeffer

Úloha 4.4 – Brambory (2b)

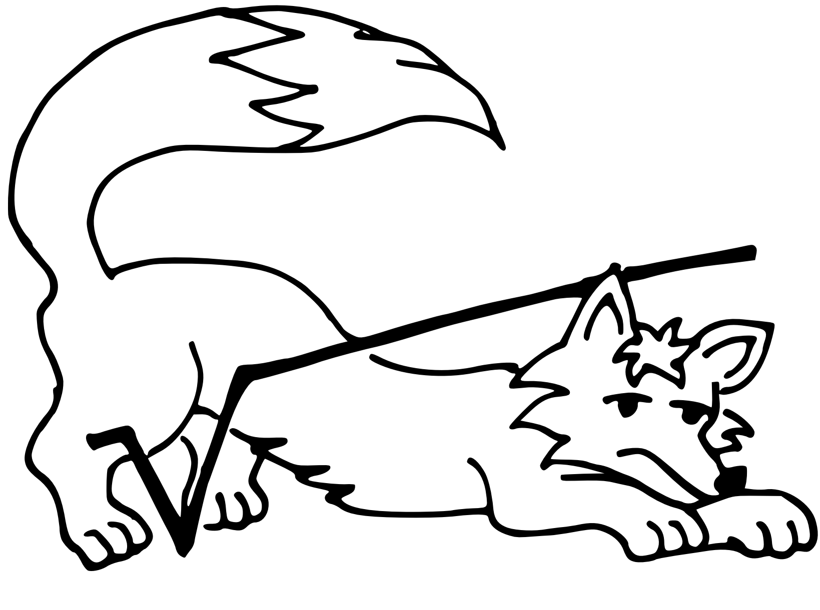
Zadání:
Mějme dvě brambory. Dokažte, že existuje netriviální[2] křivka[3], kterou můžeme nalézt na povrchu obou brambor.

Řešení:
Na této úloze bylo asi nejobtížnější se zorientovat ve spoustě pro středoškoláka typicky neznámých pojmů. Právě to je v matematice velmi užitečná schopnost.

Úlohu můžeme vyřešit trikem. Vezmeme si brambory a pronikneme je (tj. umístíme tak, aby se jejich povrchy protínaly v alespoň dvou bodech). V jejich průniku nám pak vznikne křivka, která se nalézá na povrchu obou brambor.

Dokonce jsme našli křivku, která je uzavřená (tedy začíná a končí ve stejném bodě). Mohlo by se nám stát, že všechny body průniku budou tvořit více netriviálních uzavřených křivek. Pak si vybereme libovolnou z nich.

Kuba



[2] Tedy ne pouze jednobodová.

[3] Formálně zde křivku definujeme jako spojité zobrazení z uzavřeného reálného intervalu do $\mathbb{R}^3$. Pro vyřešení úlohy ale zcela stačí intuitivní představa, že vezmeme fix a na bramboru nakreslíme libovolně klikatou čáru (čára může i různě protínat sama sebe).

Úloha 4.5 – Oscilátor (3b)

Zadání:
Představte si, že máte oscilátor, kterému se na výstupu mění logický signál s frekvencí $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$. Uměli byste vytvořit obvod, který by měl na vstupu tento oscilátor a na výstupu frekvenci $f_2 = 1/3\,\mathrm{Hz}$? Předpokládejte, že si můžete zvolit počáteční podmínky tj. signály na jednotlivých vodičích po zapnutí přístroje.

Řešení:
Základem našeho zapojení budou tři klopné obvody typu D řízené vzestupnou hranou. Zapojíme je tak, aby neinvertovaný výstup prvního šel do vstupu druhého, neinvertovaný výstup druhého šel do vstupu třetího a neinvertovaný výstup třetího šel do vstupu prvního. Máme tak sestaven cyklický posuvný registr (viz. obrázek c4.6 M&M číslo 4, ročník XVIII). Počáteční podmínky zvolíme tak, že na jednom výstupu bude na počátku logická jednička a na ostatních logická nula. Po přivedení signálu na CLK dostaneme na výstupu třetího klopného obvodu puls, který je 1 s ve stavu logické jedničky a 2 s ve stavu logické nuly.

My ovšem potřebujeme signál, který je 1,5 s ve stavu logické jedničky a stejnou dobu ve stavu logické nuly. Myšlenkově nejsnazší (ale rozhodně ne konstrukčně) je si vytvořit obdobný cyklický posuvný registr, tentokrát ovšem sestavený z klopných obvodů typu D řízených *sestupnou* hranou. Při stejné počáteční konfiguraci dostaneme na výstupu opět puls, který je 1 s ve stavu logické jedničky a 2 s ve stavu logické nuly, ovšem tento puls je o 0,5 s zpožděn oproti našemu pulsu z klopných obvodů typu D řízených vzestupnou hranou.

Vezmeme-li logický součet těchto signálů, dostaneme signál, který je 1,5 s ve stavu logické jedničky a stejnou dobu ve stavu logické nuly. Tedy signál s frekvencí 1/3 Hz.

(R)adim

Konference Filipova Huť 2010

Vaření vody

Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Sopoušek

V naší konfeře jsme se zabývali tím, jaký má vliv poklička při ohřevu vody. Především jsme zkoumali, jak moc proces ohřívání ovlivní. Používali jsme opravdový kuchyňský hrnec a pokličku odpovídající velikosti.

Hypotéza

Předpokládáme, že použití pokličky zabrání, aby unikala pára, která má největší energii[4]. Tím nebude docházet k takovým tepelným ztrátám, protože toto

[4] Tvoria ju „najteplejšie“, teda najrýchlejšie molekuly.

teplo nebude „odcházet" spolu s párou. Dále předpokládáme, že tepelné ztráty vedením budou přibližně stejné v obou případech, a proto je zanedbáváme.

Měření

- **Pomůcky**
  - kuchyňský hrnec
  - poklička odpovídající velikosti
  - sporák
  - multimetr s teplotní sondou
- **Chemikálie**
  - voda z městského vodovodu[5] (nepoužívali jsme destilovanou vodu, protože při vaření se používá voda z vodovodu)
- **Postup**
  - Do hrnce jsme napustili 2 l vody o teplotě asi 20 °C.
  - Vložili jsme teplotní čidlo a případně zakryli pokličkou.
  - Vodu jsme ohřáli na asi 40 °C a pak jsme přepli výkon sporáku na měřený stupeň (1–6).
  - Voda dosáhla teploty 50 °C v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$.
  - Dále jsme v pravidelném intervalu zaznamenali měřenou teplotu.
  - Měření jsme zakončili, jakmile už teplota dále nestoupala (většinou nastal var).

První měření jsme prováděli od 20 °C. Protože pára vzniká[6] až kolem 55 °C (zjištěno experimentálně), tak do této teploty nebyl žádný rozdíl mezi ohřevem s a bez pokličky (tepelné ztráty průchodem materiálu jsme zanedbali). Proto jsme další měření prováděli až od 50 °C.

Naměřené hodnoty

Změřené hodnoty jsme vynesli do následujících grafů. Naměřenými hodnotami jsme se snažili pomocí programu Gnuplot proložit křivku (exponenciálu) ve tvaru:

$$t(x) = ce^{bx} + a\,, \tag{k1.1}$$

kde t je teplota závislá na čase x. Protože se nám to příliš nedařilo, využili jsme malého triku. Všimli jsme si, že prvních pár hodnot tvoří téměř přímku[7]. Tyto body jsme proložili funkcí (přímkou):

$$f(x) = dx + e\,. \tag{k1.2}$$

[5] Z kohútiku. Objekt má buď vlastnú studňu, alebo sa jeden prameň používa pre viacero domov v obci.

[6] Para vzniká za ľubovoľnej teploty. Až okolo spomínaných 55 °C je vplyv ňou odnášaného tepla významný.

[7] Teplota je doposiaľ nízka, prijatý výkon je významne väčší, ako výkon odovzdaný, teplota je zhruba lineárne závislá na čase

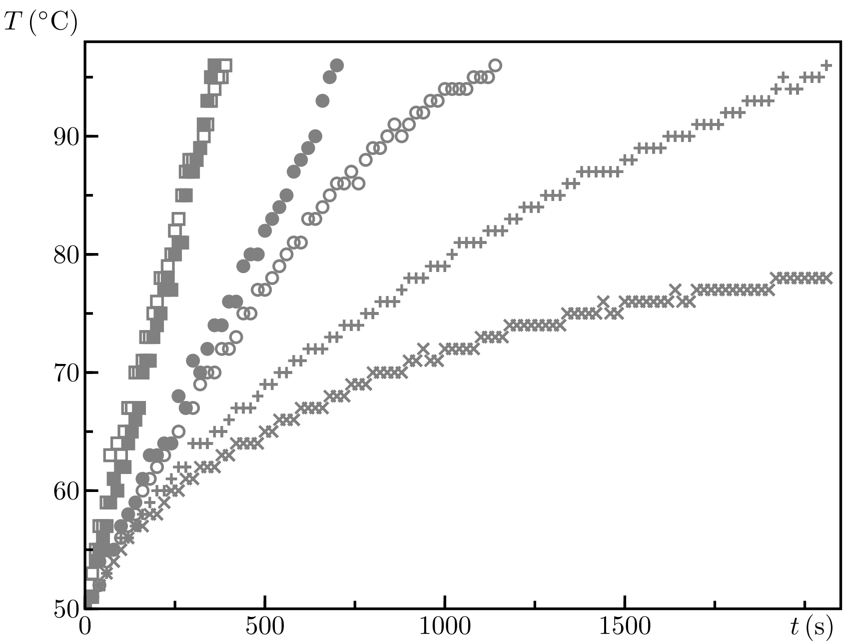
Nyní budeme chtít, aby v čase $x = 0$ byla derivace obou funkcí stejná:

$$\begin{aligned}
t'(0) &= f'(0)\,,\\
t'(x) &= (ce^{bx} + a)' = bce^{bx}\,,\\
t'(0) &= bc\,,\\
f'(x) &= (dx + e)' = d\,,\\
f'(0) &= d\,,\\
t'(0) &= f'(0)\,,\\
bc &= d\,,\\
c &= \frac{d}{b}\,.
\end{aligned}$$

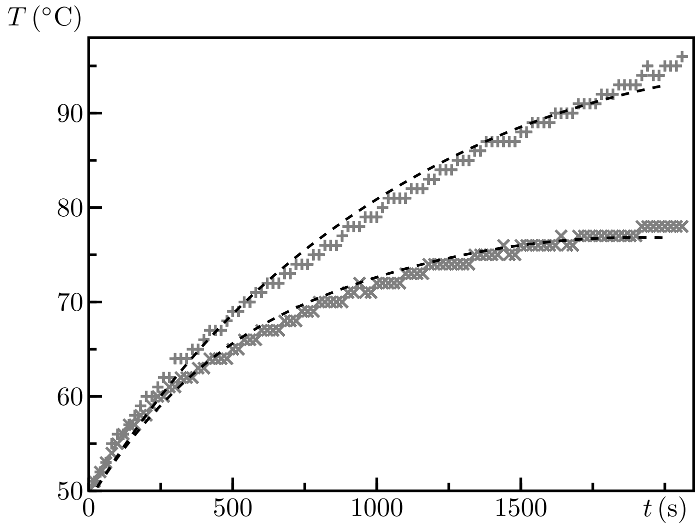
Nyní dosadíme c do $t(x)$:

$$t(x) = \frac{d}{b}e^{bx} + a\,. \tag{k1.3}$$

Nyní velmi dobře proložíme prvních pár bodů přímkou a zjistíme d. Následně fitujeme všechny body funkčním předpisem, kde hledáme jenom dva parametry – a a b. V následujících grafech jsou tyto nalezené křivky zakresleny.



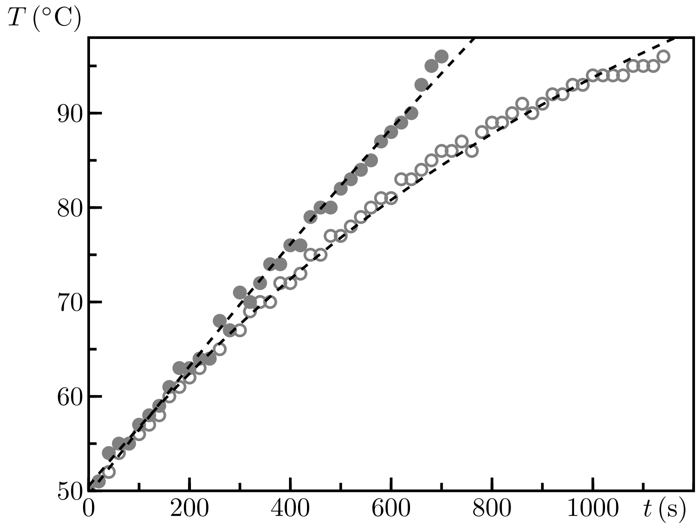
Obr. k1.1 – Porovnání rychlostí ohřevu vody na různých stupních výkonu sporáku s pokličkou a bez pokličky



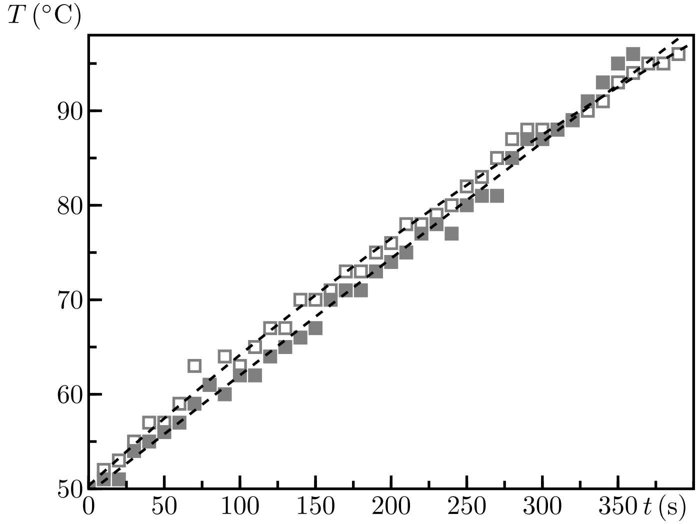
Obr. k1.2 – Ohřev na stupeň 2. Křížky je značeno ohřívání bez pokličky, plusy s pokličkou

Také jsme vynesli do grafu jednotlivé stupně ohřevu zvlášť. Pokud jsme vodu ohřívali na druhý stupeň, tak bez pokličky se teplota ustálila na 78 °C, aniž došlo k varu. Tepelné ztráty již byly stejně velké jako dodávaná energie a pokus jsme ukončili. S pokličkou k varu došlo.

Při ohřevu na stupni 4 k varu došlo v obou situacích (s pokličkou i bez pokličky). S pokličkou je ohřev asi o 40 % rychlejší.



Obr. k1.3 – Ohřev na stupeň 4. Prázdná kolečka značí ohřívání bez pokličky, plná s pokličkou



Obr. k1.4 – Ohřev na stupeň 6. Prázdné čtverečky značí ohřívání bez pokličky, plné s pokličkou

Ohříváním vody na stupeň 6 jsme zjistili, že se dodává tolik tepla, že rozdíl mezi ohřevem s pokličkou a bez pokličky je naší metodou neměřitelný.[8]

Závěr

Experimentálně jsme ověřili, že vaření s pokličkou je většinou ekonomičtější. Pokud budeme mít dostatečný výkon, tak ztráty navíc jsou našimi prostředky neměřitelné a budou zanedbatelné i ve spotřebě elektrické energie.

Konference Uhelná 2011

Kanón na vrabce

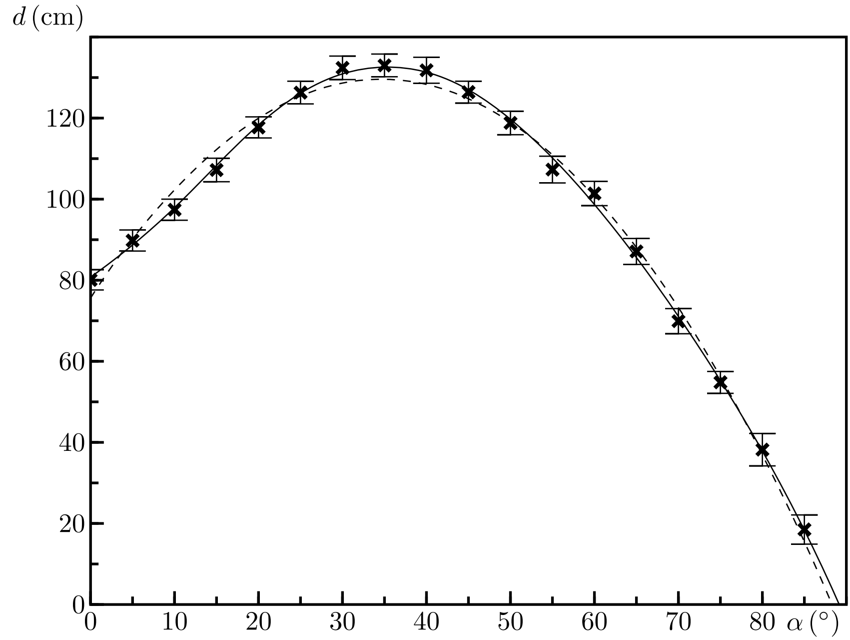
Bc.[MM] Ondřej Benedikt, Bc.[MM] Robert Navrátil

Měli jsme se zabývat spíše praktickým problémem, a to měřením maximálního dostřelu daného přístroje – kanónu. K dispozici jsme již od začátku měli kartonový model z Jefferovy dílny, který se skládal z podpůrné konstrukce nesoucí vlastní mechanismus sestávající z pístu a gumy (kvůli konstrukci byl píst 30 cm nad podložkou). Jako munici jsme použili ping-pongové míčky o hmotnosti 2,7 g.

[8] Udávaná presnosť multimetra je ±2 °C, ale zmeraná teplota závisí aj na teplote prostredia (na ktorej sa nachádza referenčný koniec termočlánku). K varu obvykle dochádzalo niekde v rozmedzí 96–98 °C. Vzhľadom na to, že pokus prebiehal v nadmorskej výške 1100 m.n.m., je teoreticky správna teplota varu okolo 96,5 °C.

Celkově jsme provedli 10 měření pro úhel náměru každých 5° (od 0° do 85°). Z výsledků experimentu jsme počítali směrodatné odchylky a průměrné hodnoty. Z toho jsme zjistili maximální dostřel (133,0 ± 2,8) cm, kterého jsme dosáhli při úhlu 35°.

Nakonec nám Jeffer celou naši snahu shrnul do grafu k2.1. Naměřeným hodnotám nejlépe odpovídal fit polynomem 5. stupně, součet čtverců odchylek u něj byl natolik nízký, že s vyšším stupněm se snižoval již minimálně.



Obr. k2.1 – Změřené hodnoty s chybou a fit kubickým polynómem (čárkovaně) a polynómem pátého stupně (plně)

V druhé části naší práce jsme hledali teoretický maximální dostřel. Nejdříve jsme pomocí balistického kyvadla změřili úsťovou rychlost střely.

Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ (m_1, v_1 je hmotnost případně rychlost ping-pongového míčku před nárazem, m_2, v_2 je hmotnost příp. rychlost závaží před nárazem, kde navíc předpokládáme $v_2 = 0$) si můžeme vyjádřit rychlost závaží, tedy

$$v_2' = v_1 m_1 / m_2 \,. \tag{k2.1}$$

Závaží získalo kinetickou energii rovnou

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 v_1}{m_2} \right)^2 , \tag{k2.2}$$

která se (jak těleso postupně vystoupalo vzhůru) měnila na energii potenciální

$$E_\mathrm{p} = m_2 g l \left(1 - \cos\alpha\right) , \tag{k2.3}$$

kde l značí délku provázku, na kterém bylo závaží zavěšeno a α je úhel, o který se závaží vychýlilo. Rychlost ping-pongového míčku při výstřelu můžeme tedy vyjádřit jako

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha)}\,. \tag{k2.4}$$

Z toho jsme byli následně schopni vypočítat, že maximální dostřel bez odporu vzduchu by byl přibližně 2,5 m při úhlu náměru 42° (rozdíl 3° oproti „ideálnímu úhlu“ 45° je způsoben 30cm rozdílem mezi zemí a pístem).

Pro jednoduchost jsme předpokládali, že závaží bylo ze začátku v klidu a že pingpongový míček předal veškerou svou hybnost závaží[9]. Dále jsme také zanedbali tření v mechanismu.

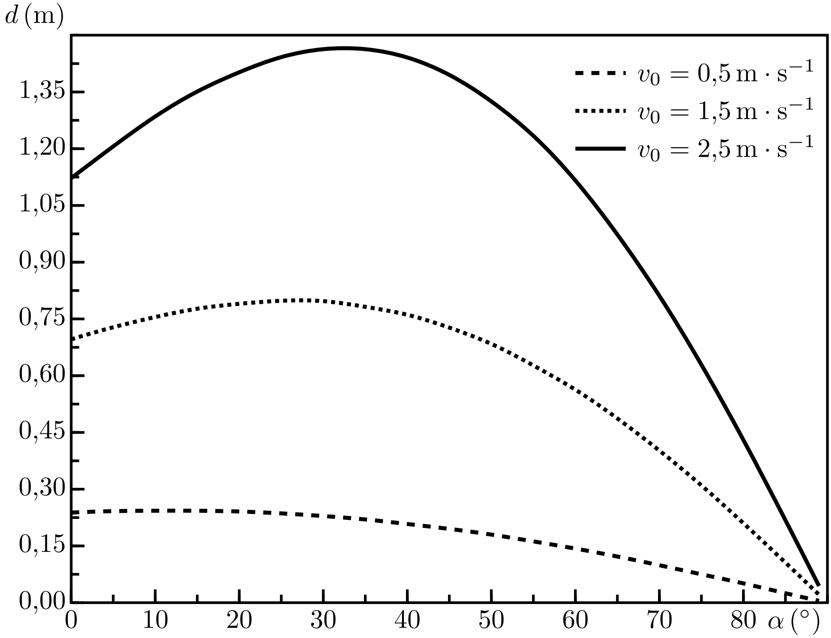
Tímto bychom ještě rádi dodatečně poděkovali Jefferovi za zajímavou konferu a příjemnou spolupráci.

Poznámky redakcie

S ohľadom na časovú náročnosť merania, nestihol sa na sústredení pokus modelovať let loptičky vo vzduchu numericky. Vo voľnom čase som sa na tento problém pozrel. Použil som metódu numerického riešenia diferenciálnych rovníc s premenlivou dĺžkou kroku Runge-Kutta (pod týmto názvom nájdete na internete podrobný popis metódy). V závislosti na počiatočnej výške vrhu a počiatočnej rýchlosti vychádzali krivky dosť podobné experimentálnemu výsledku zo sústredenia. Naviac, pre rôzne rýchlosti sa najlepší polynomiálny fit pohyboval medzi štvrtým a desiatym stupňom. Pripájam tak ešte numericky získaný graf pre tri rôzne počiatočné rýchlosti.

A napokon sa pozrime na problém „najlepšieho“ fitu. Pre ľubovoľných rôznych n bodov existuje polynóm nanajvýš $n-1$ stupňa (ten má práve n parametrov), taký, že všetkými bodmi prechádza. Inak povedané, dva body vždy ležia na priamke (polynóme prvého stupňa), tri body vždy ležia nanajvýš na parabole (polynóme druhého stupňa) a tak ďalej. V prípade našich fitov je obvykle počet bodov oveľa väčší, ako počet parametrov prekladaného polynómu. Jedným z kritérií kvality fitu je preto súčet štvorcov (druhých mocnín) odchyliek polynómu od bodov. Z predchádzajúceho ale vieme, že toto kritérium vždy najlepšie splní polynóm $n-1$ stupňa a to obvykle nie je to, čo by sme chceli. Preto sa pracuje ešte s jedným číslom, a tým je počet stupňov voľnosti. Pre n bodov a polynóm k stupňa máme $n-k-1$ stupňov voľnosti. Najjednoduchšie kritérium potom hovorí: vezmeme súčet odchyliek vydelený počtom stupňov voľnosti a stupeň polynómu, pre ktorý toto číslo dosiahne minimum (alebo aspoň výrazne prestane klesať), je nami hľadaný najlepší fit.

[9] Pokiaľ by sa loptička od závažia odrazila, alebo by sa s ním „zlepila“, ponechala by si časť pôvodnej kinetickej energie. Tým by spočítaná rýchlosť loptičky bola nižšia, než skutočná. Spočítaný dostrel je preto horným odhadom možného dostrelu v prostredí bez odporu vzduchu.



Obr. k2.2 – Modelované hodnoty pre počiatočnú výšku 30 cm a tri rôzne počiatočné rýchlosti strely

Seriál o číslicových obvodech

VI. díl – Procesory

Dopracovali jsme se k poslednímu dílu našeho seriálu. Závěrem si ve zkratce povíme něco o procesorech. Nebudeme rozebírat procesory, které jsou v osobních počítačích, ale podíváme se na jejich jednodušší příbuzné, které můžeme obvykle nalézt ve spotřební elektronice, jakou jsou hodinky, pračky a další. Nazveme je mikrokontroléry. V terminologii nepanuje úplná shoda, a tak se používají také názvy mikropočítač, mikrořadič či zjednodušené označení procesor.

Pohled do střev mikrokontroléru aneb jak to funguje

Abychom porozuměli tomu, jak rámcově funguje mikrokontrolér, musíme si nejdříve něco povědět o assembleru, což v překladu znamená jazyk symbolických adres. Každý program pro mikrokontrolér, který napíšeme v nějakém vyšším programovacím jazyce, se překompiluje do assembleru. Assembler si můžeme představit jako soubor příkazů, které daný procesor zná. Klasické mikroprocesory neznají příkaz `if`, ten je pro ně příliš složitý. Ale znají různé podmíněné skoky. Například příkaz

```
SBRC Rr, b
```

znamená *Skip if Bit in Register Cleared*, neboli pokud je bit `b` registru (proměnné) `Rr` nulový, tak se následující instrukce přeskočí. V assembleru nenajdeme klasické výrazy, které se mohou vyhodnotit. Pouze příkazy, které nějak pracují s registry či s bity registrů. Psát v takovém jazyku kód programu je velmi velmi náročné. A kompilátor mnohdy vytvoří překladem vašeho programu z vyššího programovacího jazyka lepší assemblerový kód, než byste napsali vy. Každý procesor, či rodina procesorů mají svůj vlastní assembler.

Při chodu programu v mikrokontroléru se postupně načítají instrukce programu z paměti. Následně se dekódují a provedou. Části mikroprocesoru, které to zajišťují, se nazývají řadič a aritmeticko-logická jednotka (ALU). Pro svůj chod potřebuje řadič některé speciální registry, jako je například *program counter*. Jedná se o registr, ve kterém je uložena aktuální adresa příkazu, který se vykonává. Výše zmíněný příkaz tak udělá to, že pokud je daný bit nulový, přičte ALU k program counteru navíc jedničku. ALU si tak můžeme představit jako velmi složitý sekvenční obvod, který má na vstupu příkazy a ukazatele na registry a na výstupu zapisuje upravené hodnoty do registrů.

Abychom mohli s mikrokontrolérem komunikovat, musí mít také vstupní a výstupní obvody (tzv. porty). Ty mohou sloužit buď jako vstupní (v závislosti na přivedeném napětí se program rozhodne co vykoná), nebo jako výstupní (podle výsledku programu se nastaví).

Čím se liší mikrokontrolér od PC

Základní rozdíl je v práci s pamětí. Osobní počítače jsou postaveny podle tzv. von Neumannovy architektury, kdy paměť, ve které je uložen program, je to-

tožná s pamětí, ve které jsou uložena data. Na disku vašeho počítače tak máte vedle sebe uloženy soubory s daty i spustitelné programy, které můžete libovolně měnit.

Naproti tomu Harvardská architektura odděluje paměť, ve které je uložen program, od uložených dat. Projevuje se to obvykle tak, že program v mikrokontroléru je uložen v ROM paměti a nejde tak snadno měnit, kdežto data jsou uložena například v externí RAM paměti.

Jak asi tušíte, tak Harvardská architektura převládla a procesory postavené na její bázi dominují současnému vývoji. Ale také von Neumannovské procesory nejsou nezajímavé. Můžeme je použít tam, kdy od procesoru očekáváme jasně danou činnost.

Jak si naprogramovat mikrokontrolér

K naprogramování vlastního mikrokontroléru potřebujete několik věcí. Předně mikrokontrolér. Pro první pokusy je možné použít poměrně přívětivé procesory řady ATmega. O tom, jak je tento mikrokontrolér stavěný, jak má organizovanou paměť a periferie, se můžete dočíst v datasheetu[10]. Datasheety jsou zpravidla v angličtině, ale při troše snahy je možné nalézt i dostatek české literatury.

Dále budete potřebovat programátor mikroprocesorů. Jedná se o zařízení, které umožní přenést vámi napsaný kód do procesoru. Na internetu je možné nalézt mnoho různých zapojení[11].

Zbývá už jen na svůj počítač nainstalovat vhodný software a můžete se pustit do pokusů s mikrokontroléry.

Co říci závěrem…

Tímto článkem jsme uzavřeli letošní seriálový maraton. V šesti dílech jsem se vám pokusil přiblížit základy boolovy algebry, dále některá zapojení logických hradel. Spolu s úvodem do polovodičové elektroniky a zmínkou o mikrokontrolérech jsem se vám snažil ukázat, že počítače, se kterými se každý den setkáváte, nemusí být pouze černými krabičkami.

K tomuto dílu už neuveřejňuji žádnou úlohu, neboť praktická realizace obvodu s mikrokontrolérem je technicky složitější. Přesto budu rád, pokud se najde někdo, kdo se podělí o některé své zapojení.

(R)adim

[10] Např. pro mikrokontrolér ATmega8: `www.atmel.com/Images/doc2486.pdf`.

[11] Například tu: `http://www.hw.cz/teorie-a-praxe/konstrukce/ponyprog-programator-atmel-pic-eeprom.html`

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t2	k	+	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy								
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ J. Šafin	3.	73					6		0	6	60
2.	Doc.$^{\text{MM}}$ J. Kubečka	4.	100		2	3	1			0	6	50
3.	Mgr.$^{\text{MM}}$ D. Gromada	4.	43							0	0	43
4.	Mgr.$^{\text{MM}}$ A. Šťastná	2.	36							0	0	36
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Lieskovský	2.	27	5		2				1	8	27
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Kadlec	1.	30							0	0	26
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Mikel	3.	21							0	0	21
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Poppr	1.	26		0					0	0	20
9.	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Kratochvíl	4.	35							0	0	18
10.	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Cífka	3.	37							0	0	16
11.	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Dolejší	1.	15		2					0	2	15
12–14.	Mgr.$^{\text{MM}}$ T. Bárta	4.	20							0	0	14
	Bc.$^{\text{MM}}$ O. Benedikt	3.	14						6	0	6	14
	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Mička	3.	28							0	0	14
15–16.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Calábková	1.	10	0						0	0	10
	Mgr.$^{\text{MM}}$ L. Grund	3.	40							0	0	10
17.	J. Greššák	3.	9							0	0	9
18–20.	Mgr.$^{\text{MM}}$ E. Gocníková	4.	37							0	0	8
	E. Pilátová	4.	8							0	0	8
	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Töpfer	4.	33							0	0	8
21–23.	Mgr.$^{\text{MM}}$ R. Kubíček	3.	20							0	0	7
	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Vincena	1.	22							0	0	7
	M. Zmeškal	1.	7							0	0	7
24–25.	Bc.$^{\text{MM}}$ R. Navrátil	4.	15						6	0	6	6
	Prof.$^{\text{MM}}$ Š. Šimsa	3.	273							0	0	6
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ B. Said	4.	12							0	0	5
27–28.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Kopf	4.	10							0	0	4
	M. Vohníková	2.	4							0	0	4
29–30.	Mgr.$^{\text{MM}}$ B. Böhmová	4.	45							0	0	3
	Ľ. Šimková	2.	3							0	0	3
31.	E. Harlenderová	1.	2							0	0	2
32–34.	D. Fecková	4.	1							0	0	1
	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Langerová	1.	12							0	0	1
	P. Turnovec	1.	1							0	0	1
35.	T. Vysušil	1.	0							0	0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.