Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník / Číslo
XVIII / 4

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

příroda nám v posledních dnech nadělila spoustu sněhu. Ani my jsme ale nezůstali pozadu a máme pro vás nové číslo a v něm nadílku nových úloh a námětů k přemýšlení.

Především bychom vás chtěli upozornit na tři zajímavé články. První dva se týkají určování neznámého materiálu dvou plechů, které jste dostali společně se druhým číslem. Poslední potom zkoumá sociální sítě. Všimněte si také, že bylo vyhlášeno další kolo hry Jezero, a to na 29. února.

Je možné, že podle výsledkové listiny po tomto čísle budeme zvát na jarní soustředění, kam pozveme přibližně 20 našich nejlepších řešitelů. Pokuch chcete být mezi nimi, pošlete nám z tohoto čísla co nejvíce svých řešení. Termín jarního soustředění zveřejníme v nejbližší době na našich webových stránkách.

Organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání čtvrté série: 27. 2. 2012

Úloha 4.1 – Optimalizace vzdáleností (3+3b)

Všechno začalo tím, že Riki prošel zavřenou bránou. A objevil se v jiném světě. Ve světě, kterému vůbec nerozuměl. Když sem vypadl z Kleinovy láhve, octl se poblíž jakési vesnice a za zády se mu rozprostíral les plný podivných stromů s kružnicemi. I rozhodl se Riki, že se ve vsi porozhlédne.

Bylo něco před polednem a sluneční paprsky temně ozařovaly fasády domů, jež byly povětšinou zdobeny malbami nekonvexních trojúhelníků všech barev. Byly natolik různé, že se mu začaly plést, až za chvíli netušil, kde je. Snažil se proto najít z toho bludiště nějakou cestu.

Mějme n červených a n modrých bodů v rovině. Cílem je spojit body do dvojic tak, aby ve dvojici byl vždy jeden červený a jeden modrý bod a aby součet délek úseček (spojnic) těchto dvojic byl co nejmenší. Není nutno najít nejmenší součet, ale co nejmenší, jaký zvládnete. Pošlete nám popis algoritmu a řešení nalezené pro data zveřejněná na webových stránkách semináře. Výsledky vašich programů seřadíme podle součtu délek úseček a přidělíme body. Polovinu bodů dostanete za popis algoritmu, druhou polovinu za výstupy programu, přičemž pokud budou výstupy korektní a netriviální, alespoň bod určitě dostanete.

Vstup: Pro ozkoušení vašeho programu jsme připravili celkem šest různých vstupních souborů. Najdete je na našich webových stránkách na adresách `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/18_4_1_`*⟨číslo⟩*`.txt`, kde *⟨číslo⟩* je číslice od jedné do šesti.

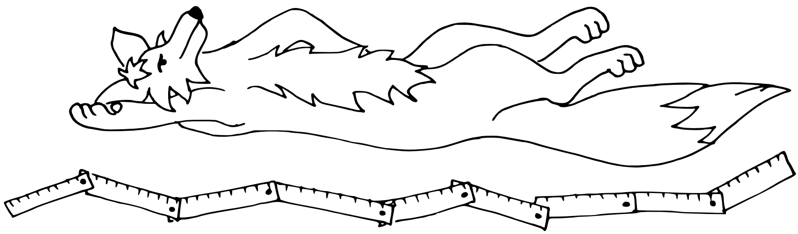
Na prvním řádku každého souboru se nachází číslo n, poté následuje n řádků s červenými body a n řádků s modrými body. V každém řádku je nejprve souřadnice x, potom y. Souřadnice jsou celá čísla od mínus milionu do milionu. Souřadnice se mohou opakovat.

Výstup: Textový soubor obsahující n řádků vždy s indexem červeného a modrého bodu (v tomto pořadí) tak, jak jsou spojeny do dvojice. Index bodu je číslo určující jako kolikátý byl bod uveden mezi červenými resp. modrými body ve vstupním souboru. Výstupní soubory pro všechny naše vstupy (tedy celkem šest souborů) nám pošlete spolu s řešením.

Příklad: `vstup.txt` `vystup.txt`

vstup.txt	vystup.txt
3	1 1
1 2	2 3
5 9	3 2
7 8	
3 4	
7 9	
5 9	

Hranatou ulicí sinusoidního tvaru došel až na Okrajové náměstí, které se nacházelo přesně uprostřed obce. Rovina, na níž se náměstí rozprostíralo, byla dokonale křivá. Dočista zmatený Riki se optal náhodného kolemjdoucího (jenž kolem něj záměrně prošel), kde že se vlastně octl. „?iděvopdo épuolh az ot ej oC“, dostalo se mu otázky.



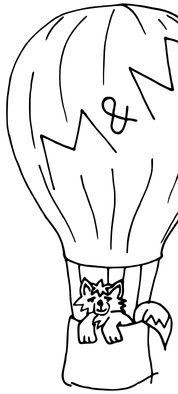
Úloha 4.2 – Číselná (4b)

Porozumění si s místními lidmi vyžadovalo nesmírné úsilí, takže za necelou minutu již Riki hovořil obrácenštinou natolik plynně, že se od kolemjdoucího dozvěděl, že je matematikem, který se právě snaží vyvrátit následující tvrzení:

Mezi libovolnými n celými čísly lze najít několik čísel (tedy alespoň jedno), jejichž součet je dělitelný n. Existuje pro toto tvrzení protipříklad? Nebo je platné vždy?

Úloha 4.3 – Balón (5b)

Také zjistil, že v místním království je prezidentem absolutisticky zvolený císař, který si libuje v alchymii. Momentálně vydržoval na svém dvoře několik negramotných učenců, kteří měli za úkol vymyslet létací stroj. Poté, co selhaly pokusy o napodobení ptačích křídel, rozhodli se tito pánové, že se na věc musí obráceně. I stalo se jejich inspirací zvíře, které má k létání stejně daleko, jako kapr ke šplhání po stromech, totiž prase. Alchymisté doufali, že když nějakou jako prase kulatou věc naplní vzduchem, podaří se jim, aby tato věc vzlétla, poháněná energií, která se uvolňuje při izochorické expanzi plynu uvnitř.



Postavme si horkovzdušný superbalón. Takový superbalón musí něco vydržet, a tak budeme chtít na jeho výrobu použít hliník o tloušťce $d = 10\,\mathrm{mm}$. Kromě zásoby hliníku už máme i tepelný zdroj o výkonu P, kterým budeme vzduch v balónu ohřívat. Aby byl superbalón užitečný, musí také unést i gondolu s námi a dalším vybavením o celkové hmotnosti naložené gondoly m. Můžeme už balit kufry na cestu superbalónem kolem světa, nebo bychom měli sednout zpět k rýsovacímu prknu a celý projekt přepracovat? Pro zjednodušení předpokládejme, že balón bude používán pouze při teplotě vnějšího vzduchu T. Získat za tuto úlohu plný počet bodů nebude nikterak jednoduché, část z nich však rádi udělíme za každý nápad vedoucí k řešení.

Úloha 4.4 – Brambory (2b)

Ubohý lišák Riki se potuloval vsí celý den. Ačkoliv se vůbec nesnažil, tak stále ničemu nerozuměl, a navíc měl čím dál větší hlad. Jelikož neměl ani kapsu, ve které by mohl mít nějakou tu vindru, nabídl mu prodavač brambor, slitovav se nad ním, že mu jednu ze svých cenných brambor daruje, vyřeší-li Riki tuto hádanku:

Mějme dvě brambory. Dokažte, že existuje netriviální[1] křivka[2], kterou můžeme nalézt na povrchu obou brambor.

Riki je však liška podšitá, takže hádanku snadno vyřešil, bramboru snědl a ve stínu přístřešku z průsvitného plátna pokojně usnul. A nevěřili byste, co se stalo pak. Riki byl zpátky doma!

[1] Tedy ne pouze jednobodová.

[2] Formálně zde křivku definujeme jako spojité zobrazení z uzavřeného reálného intervalu do $\mathbb{R}^3$. Pro vyřešení úlohy ale zcela stačí intuitivní představa, že vezmeme fix a na bramboru nakreslíme libovolně klikatou čáru (čára může i různě protínat sama sebe).

Řešení témat

Téma 2 – Jezero

Tešili ste sa, že si prečítate, ako dopadli zápoliace programy v druhom kole turnaja? Čakali ste, že až uvidíte tabuľku, budete si môcť hovoriť „to by som zvládol o toľko lepšie“? Nič z toho nebude! Do druhého kola turnaja nedorazil jediný program a tak na organizátorskú párty prepadá nielen šesť bodov za prvé miesto, ale aj ďalších šesť za druhé a tretie miesto dohromady.

Ďalší turnaj sa uskutoční **29. 2. 2012**, teda v stredu, čo je dva dni po termíne odoslania riešení štvrtej série. Neobvyklé, ale keď v tento deň môže byť turnaj len raz za štyri roky… A aké sú pravidlá? Turnaj má tentokrát dve časti. V jednej z nich sa zápasí podľa pôvodných pravidiel zo zadania, akurát s tým rozdielom, že za poslanie kontroly zaplatí hráč, ktorý ju posiela, päť peňazí. Druhou časťou je potom krátky boj presne podľa pravidiel zo zadania, ale na malý počet kôl (nie viac ako desať). Víťazom sa stane program s najvyšším priemerným ziskom na jedno kolo. Prémie môžeme udeliť aj víťazom oboch podturnajov.

Tak čo, budete naozaj *lepší*, ako účastníci druhého turnaja?

Honza & Jeffer

Téma 3 – Neznámý materiál

K téme tri nám prišli dva zaujímavé príspevky. Ich autori používajú podobnú metódu na určenie hustoty materiálov a obaja s podobnými výsledkami. Okrem toho sa Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniel Gromada zaoberal aj určovaním vodivosti materiálov a jeho výsledky, ako aj použitá metóda, sú veľmi zaujímavé. Obaja riešitelia potom skúšali i chemické metódy analýzy, ale viac už v ich článkoch.

Jeffer & (R)adim

Hustota a vodivosť materiálov

Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniel Gromada

Přesné výsledky měření hustoty sem dát nemohu, protože jsem si ve škole zapomněl změřit hmotnost (a samozřejmě, že to píšu v pondělí 12. 12.). Alespoň přibližné určení hmotnosti mohu uvést po měření hmotnosti pomocí kuchyňských vah, ale ta asi nebude příliš přesná. Ve škole jsem zkoušel provést chemickou analýzu rozpustiv kus každého z kovů v kyselině, ovšem vzhledem k tomu, že jsem neměl příliš času, jsem toho příliš nezjistil. Větší kus kovu je měkčí, oba obsahují železo, což dokázala reakce roztoků vzniklých jejich rozpuštěním v kyselině chlorovodíkové s hexakyanoželeznatanem draselným, u většího z kovů nám to potvrzuje pohled na rezavá místa, která se na něm časem vytvořila. Všechny měřené údaje budu uvádět s dolním indexem 1 pro větší plech a indexem 2 pro menší plech.

Objem jsem vypočítal z rozměrů změřených posuvným měřítkem, odchylku tohoto měření jsem zanedbal vzhledem k tomu, jaká je odchylka způsobená vážením na kuchyňských vahách[3]. Objemy vyšly: $V_1 = 1{,}2354\,\mathrm{cm}^3$, $V_2 = 0{,}7331\,\mathrm{cm}^3$.[4] Hmotnosti jsem změřil: $m_1 = (13\pm1)\,\mathrm{g}$, $m_2 = (6\pm1)\,\mathrm{g}$. Výsledné přibližné hustoty jsou tedy: $\rho_1 = (7{,}3 \pm 0{,}6)\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, $\rho_2 = (7{,}4 \pm 1{,}2)\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Což se blíží hustotě železa, nicméně ještě spousty dalších kovů a slitin.

Já jsem se rozhodl, že se zaměřím na měření elektrické vodivosti, i když ani toto měření pravděpodobně nebude příliš přesné, protože k tomu nemám příliš mnoho potřebného vybavení. Teoretický plán je takový, že z každého kusu kovu se pokusím ulomit užší tenčí, abych dostal drátek s co největším odporem, a pokusím se co nejpřesněji změřit jeho průřez. Poté uštípnu několikacentimetrový kus měděného drátu, změřím průřez a vyhledám si jeho měrný elektrický odpor. Oba drátky vodivě spojím a připojím na elektrody trafopáječky[5]. Na obou kusech drátu si vyznačím známou vzdálenost, na které budu měřit napětí. Odpor neznámého drátku určím z Ohmova zákona – napětí na něm změřím a proud vypočítám z napětí na měděném drátku o známém odporu. Napětí budu měřit osciloskopem (polským, starým, socialistickým, analogovým, který jsem koupil na aukru jako nefunkční, takže od něj také asi nelze očekávat příliš velkou přesnost). Vodivost tedy lze spočítat jako:

$$\sigma = \frac{l}{RS} = \frac{lI}{US} = \frac{lI_{\mathrm{Cu}}}{US} = \frac{lU_{\mathrm{Cu}}}{USR_{\mathrm{Cu}}} = \frac{lU_{\mathrm{Cu}}S_{\mathrm{Cu}}}{USl_{\mathrm{Cu}}\rho_{\mathrm{Cu}}} = \frac{lU_{\mathrm{Cu}}\pi d_{\mathrm{Cu}}^2}{4USl_{\mathrm{Cu}}\rho_{\mathrm{Cu}}}\,, \qquad \text{(t3.2.1)}$$

kde neindexované veličiny jsou vlastnosti zkoumaného drátu a veličiny s indexem Cu jsou vlastnosti měděného drátu. ρ_{Cu} značí měrný elektrický odpor mědi, ten je možno najít na internetu např. na wikipedii, která říká, že $\rho_{\mathrm{Cu}} = 16{,}78 \cdot 10^{-9}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$

Pod tímto odstavcem budou následovat výsledky měření. Chyby měření jsou počítány kombinací chyby přístroje, směrodatné odchylky (bylo-li měření víc) a odhadů chyby odečítání (zejména odečítání z obrazovky osciloskopu a nastavování správné délky drátu, na které se má měřit napětí). U napětí nebudu uvádět jednotku, neboť si nejsem jist její přesností a ona jednotka, jak vyplývá ze vztahu (t3.2.1) není důležitá, převážně budu dosazovat naměřené hodnoty v centimetrech (v jednom případě vynásobený deseti, protože jsem měnil rozsah). Chápeme-li napětí na drátku jako efektivní napětí, pak co se týče oné jednotky se v prvním případě jedná přibližně o dvacítky milivoltů a ve druhém případě o asi 4 mV.

	Větší plech	Menší plech
d_{Cu} (mm)	$1{,}300 \pm 0{,}025$	$1{,}300 \pm 0{,}025$
l_{Cu} (mm)	$24{,}2 \pm 2{,}0$	$24{,}2 \pm 2{,}0$
S (mm^2)	$3{,}2 \pm 0{,}1$	$2{,}7 \pm 0{,}1$
l (mm)	$29{,}6 \pm 2{,}0$	$14{,}9 \pm 2{,}0$
U_{Cu}	$1{,}11 \pm 0{,}20$	$2{,}00 \pm 0{,}20$
U	$4{,}31 \pm 0{,}20$	$25{,}9 \pm 2{,}0$
σ ($10^6\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)	$7{,}8 \pm 3{,}3$	$1{,}39 \pm 0{,}63$

Tabulka t3.2.1: Změřené hodnoty a spočtené měrné vodivosti σ pro oba vzorky.[6]

Zkoušel jsem to „čo najpresnejšie“, ale chyba 45 % asi nebude ideální, takhle asi přesné složení určit nedokážu.

Poznámky redakce:

[3] Pri meraní posuvným meradlom sú chyby hlavných rozmerov malé, ale chyba merania hrúbky (tloušťky) dosahuje asi 5 %.

[4] Podobne ako v článku Dr.M Jakuba Kubečky máme isté námietky proti počtu platných cifier vo výsledku. Ten by nemal byť vyšší, ako najmenší počet platných cifier vstupujúcich údajov.

[5] Tu vidíme najväčšie úskalie použitej metódy. Vzhľadom na pretekajúci prúd sa budú drôty rýchlo zahrievať a tým pádom sa bude meniť aj ich odpor. Pozorovanie časovej (tepelnej) závislosti odporu ale autor nespomína.

[6] V redakcii sme previedli isté zásahy do spôsobu zápisu čísel, hlavne opravu chýb na nanajvyš dve platné cifry a dodržanie súhlasu medzi počtom desatinných miest výsledku a chyby. Zápisy $2{,}3 \pm 0{,}025$ a $1{,}52 \pm 0{,}3$ z tohoto hľadiska nie sú v poriadku.

Hustota a chemická analýza

Dr.MM Jakub Kubečka

Dr.MM Jakub Kubečka zvážil (na neznámych váhach s presnosťou na desatinu gramu) a zmeral (posuvným meradlom na desatinu milimetra) obe vzorky. Z týchto hodnôt potom vypočítal hustoty vzoriek. Výsledky sú v tabuľke t3.2.2.

	Menší plech	Větší plech
Hmotnost (g)	5,0	14,6
Délka (mm)	40,6	53,9
Šířka (mm)	15,6	35,6
Tloušťka (mm)	1,0	1,1
Hustota[7] $(\mathrm{kg \cdot m^{-3}})$	7894,4	7045,15

Tabulka t3.2.2: Změřené hmotnosti a rozměry. Spočtené hustoty vzorků.

Zjistil jsem tedy, že menší plech má větší hustotu, je méně ohebný než větší plech[8] a vzhledem k tomu, že při vzájemném vrýpnutí nechává menší plech stopy ve větším, je tvrdší. Oba plechy vedou jak elektrický proud, tak teplo[9].

V kontaktu s koncentrovanou kyselinou chlórovodíkovou (HCl) se oba vzorky rozpouští, jsou tedy složené jenom z neušlechtilých kovů, tedy kupříkladu měď v nich není. První analytická třída tedy ve vzorkách není. Dále tam není ani čtvrtá a pátá třída. Ve vzorkách jsou proto obsaženy pouze látky z druhé a třetí analytické třídy. Bohužel došel sirovodík (H_2S), takže jsem je přesně určit nemohl. Důkazová reakce na hliník (Al) přítomnost hliníku nedokázala.

Když jsem zkusil dokázat přítomnost železa (Fe) pomocí kyanoželeznatanu draselného ($K_4[Fe(CN)_6]$), byl výsledek pozitivní v obou případech.

Větší plech nám po nějaké době začal pomalu rezivět.

Větší plech bych tipnul na látku podobnou šedé litině ($\varrho = 7000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $t_{\text{tán}} = 1150\,°\mathrm{C}$, složení: C 3–4 %, Si 1–2,5 %, Fe zbytek).

Menší plech bych tipnul na něco jako nerezovou ocel ($\varrho = 7700\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $t_{\text{tán}} = 1380\,°\mathrm{C}$, složení: Cr 14–17 %, C 0,3–0,5 %, Fe zbytek).

Poznámky redakce:

[7] My v redakcii si myslíme, že je hustota vzoriek určená prinajlepšom ako $7{,}9 \pm 0{,}5\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ a $6{,}9 \pm 0{,}3\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ a to ešte nepočítame ďalší znepresňujúci a ťažko kvantifikovateľný vplyv toho, že sme pri výpočte rôzne deformované vzorky pokladali za kvádre.

[8] Bohužiaľ, pre toto tvrdenie neposkytol Dr.MM Kubečka žiaden experimentálny dôkaz.

[9] Viesť teplo zvládajú všetky látky, len niektorým to ide lepšie a iným horšie.

Téma 4 – Sociální sítě

aneb jaký průměr má Česká republika?

K tématu Sociálních sítí přišly příspěvky od Dr.MM Jakuba Kubečky a Dr.MM Jakuba Šafina.

Dr.MM Kubečka zaslal krátké pozorování o počtu známých známých a doufáme, že se dočkáme i rozšířené časopisecké verze jeho článku. Dr.MM Kubečka nabízí myšlenku, že má-li člověk A p přátel a jeho známý má s A průměrně z společných známých, pak počet známých známých A bude průměrně $p(p-z)$. Stále se ale nabízí rozšíření, upřesnění a aplikace této myšlenky, například výpočet odhadu pro větší vzdálenost než 2.

Dr.MM Šafina napadlo napsat program, který po zadání sociální sítě spočte její poloměr, průměr a dalších pár charakteristik. Článek otiskujeme níže. S dotazy na program nebo při bližším zájmu o program a jeho vývoj můžete kontaktovat Dr.MM Šafina na adrese `jakub.safin@gmail.com`.

Tomáš

Program pre sociálne siete

Dr.MM Jakub Šafin

Zisťovanie rôznych parametrov sociálnych sietí má jeden dosť závažný problém: ak je v danej sieti veľa ľudí aj známostí, rátať to na papieri je hotová samovražda... ale však na to existujú počítače.

Sociálna sieť je taký typický všeobecný neorientovaný graf (čisto teoreticky by mohol byť aj orientovaný, čím by sa objavilo pár ďalších otázok, ktoré by sme mohli skúmať, ale jednosmerné známosti sú trochu... asociálne, takže tým sa zaoberať nebudeme). Na začiatok považujme tento graf za neohodnotený, t.j. pri každej známosti nás zaujíma iba, medzi ktorými dvoma ľuďmi je, a nie v akom vzťahu títo ľudia sú apod. Ďalej budeme rovno používať prezývky vrchol = člen siete, hrana = známosť, susedné vrcholy = známi.

Na riešenie väčšiny otázok o takomto grafe sa dá použiť jediný algoritmus (prípadne s nejakými úpravami), známy ako prehľadávanie do šírky, skrátene BFS (breadth first search). Jeho princíp sa dá predstaviť tak, že do jedného vrcholu nalejeme vedro vody, ktorá sa smie rozliať iba po hranách, a môžeme pre ostatné vrcholy sledovať, za ako dlho sa tam vlna tejto vody dostane, či sa tam dostane, koľko vody tam bude atď. Viac sa o ňom dočítate napr. vo vzorákoch slovenskej OI (`oi.sk/rocenky/oi23.pdf`, úloha B-I-2), alebo na Wikipédii.

Načo nám celé toto čudo bude? Praktické využitie to má hlavne pri hľadaní najkratšej cesty medzi dvojicou vrcholov v grafe, čo je vlastne soc. vzdialenosť, alebo pri zisťovaní, kde všade sa informácia vie dostať. Pre každú otázku má algoritmus istú variantu, okrem spomenutej soc. vzdialenosti napr.:

- Počet vrcholov s danou soc. vzdialenosťou (nazvime to počet k-známych; klasickí známi sú tu 1-známi) – skoro to isté, ale na začiatku máme iba jeden vrchol, z ktorého zbehneme BFS na celý graf; potom všetky vrcholy, do ktorých sa voda dostala, prejdeme a zrátame tie, ktoré sú od počiatočného vzdialené k.

- Pri priemere použijeme priamočiary prístup – z každého vrcholu zbehneme BFS a zrátame maximálnu soc. vzdialenosť od daného vrcholu; priemer je maximum z nich.
- Priemerná vzdialenosť je súčet všetkých konečných vzdialeností delená počtom týchto vzdialeností, takže stačí robiť to isté ako pre priemer, ale namiesto maxima robiť súčet a oddelene si pamätať, koľko sčítancov to je.
- Počet dvojíc susedov daného vrcholu V, ktorí spolu tiež susedia, zrátame tak, že si zistíme, ktorí ľudia sú 1-známi toho vrcholu, a pozrieme sa na všetkých ich susedov; keď je nejaký aj sused vrcholu V, tak si počet týchto dvojíc zvýšime o 1; pozor ale na to, že každú dvojicu zarátame dvakrát!
- Počet spoločných známych dvoch ľudí: zazanačíme si, ktoré vrcholy susedia s jedným vrcholom, teraz prejdeme susedov druhého a už o každom vieme rovno povedať, či je sused aj prvého.
- Počet a velkosť súvislých komponentov, čo sú skupiny ľudí, medzi ktorými sa nejaká informácia vie šíriť: na začiatku si nastavíme, že pre žiaden vrchol nevieme, v ktorom komponente je, a spracúvame vrcholy v nejakom poradí; vždy, keď o spracovávanom vrchole nevieme, v ktorom komponente je, tak ešte nebol v žiadnom zatiaľ spracovanom komponente, takže mu priradíme číslo rovné počtu zatiaľ nájdených komponentov (takto budú všetky očíslované 0, 1, 2, ...), a zbehneme z neho BFS; každému vrcholu, do ktorého sa teraz voda dostane, priradíme toto isté číslo – takýmto postupom bude prvé číslo, ktoré nemá žiaden súvislý komponent na konci, práve hľadaným počtom.

Ešte môžeme zisťovať tzv. mosty – sprostredkovateľov medzi dvema skupinami v soc. sieti; túto otázku nechávam otvorenú, ale prezradím, že existuje na ňu tiež dobrý algoritmus.

Pri ohodnotených grafoch vieme hľadať soc. vzdialenosti Dijkstrovým algoritmom.

Ďalšou zaujímavou otázkou, aj keď trochu mimo tému, je aj načítanie vstupu. Neuvažujme izolované vrcholy. Graf môžeme teda zadávať ako zoznam známostí. Normálny človek ale chce známosti zadávať ako mená (pre jednoduchosť považujme mená za jednoslovné). BFS ale pracuje o triedu rýchlejšie, ak sú vrcholy očíslované (najlepšie 0, 1, 2, ...), take potrebujeme previesť reťazec znakov (string) na najmenšie ešte nepoužité číslo. Na to existuje veľa spôsobov; najkrajší je tzv. písmenkový strom, trie. O ňom sa tiež veľa dočítate napr. vo vzorákoch iného ročníka slovenskej OI (`oi.sk/rocenky/oi24.pdf`, úloha A-1-2).

Môj program, ktorý rieši niektoré z popísaných otázok, nájdete na adrese `http://ideone.com/yXr33`.

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Větrná smršť (3b)

Zadání:
Jan K. se odhadnout, jaká musí být rychlost vodorovně vanoucího větru, aby utrhl taškovou sedlovou střechu o sklonu $30°$. *Předpokládal, že vliv hřebů a podobných spojek je zanedbatelný oproti tíhové síle na střechu působící (jelikož jejich primárním účelem je, aby střecha držela tvar a nezhroutila se dolů, nikoli aby ji nevzal vítr). Zvládnete to vy?*

Řešení:
Tato úloha narazila na drobný problém v tom, že sice byla popsána střecha (sedlová se sklonem $\alpha = 30°$), ale již nebylo specifikováno, jak vypadá dům pod ní. To vedlo k otestování vaší schopnosti dávat předpoklady. A bohužel to nedopadlo dobře. Ze tří došlých řešení vůbec nějaké předpoklady uvedl jen Mgr.$^{\mathrm{M}}$ Lubomír Grund, ale nedokázal se jich držet.

Jako první je tedy třeba specifikovat dům. Lubomír Grund předpokládal, že střecha je položena na kůlech, ostatní radši nepředpokládali nic. Já budu předpokládat, že střecha leží na kvádru, a je pevně spojená se štítovou částí. Kdybych předpokládala, že štít patří k domu, byl by problém správně určit třecí sílu, protože by se vyskytly tři neparalelní roviny, pro něž by bylo třeba hledat normálové síly. Možná byste mi vyčetli, že bych to mohla zvládnout spočíst, ale později budu muset přijmou některá další zjednodušení a odhady, jejichž projev na výsledek bude podstatně vetší.

Dalším krokem je hledání sil, které v dané situaci působí. Vyskytuje se tu tíhová síla

$$F_\mathrm{g} = mg = 2S\sigma g\,,$$

kde S je plocha jednoho křídla střechy, σ její plošná hustota, m její hmotnost a g tíhové zrychlení. Tíha působí na obě křídla, proto je tam ta dvojka.

Dále se objevuje Bernoulliho síla, dle Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = konst\,,$$

kde p je tlak, ϱ hustota vzduchu a v rychlost větru. Bernoulliho rovnice bohužel platí jenom pro laminární proudění, což rozhodně není náš případ, přijmeme to jako další aproximaci. Síla působí kolmo na plochu střechy směrem ven z domu. Jestliže nyní uvážíme, že vítr fouká vodorovně rovnoběžně se štítem, což bylo obsahem došlých řešení, musíme uvážit, že rychlost větru není stejná nad oběma křídly střechy – je podstatně vetší na té straně, na kterou vítr naráží. Proto budeme uvažovat, že Bernoulliho síla působí jen na jedno křídlo střechy.

$$F_\mathrm{B} = \Delta p S = \frac{1}{2}\varrho v^2 S$$

Poslední silou je odporová síla větru. Ze školy znáte vzorec pro odporovou sílu
$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}\varrho v^2 C S'\,,$$
kde S' je plocha kolmá na vítr a C koeficient odporu. Tato síla z definice působí ve směru větru.

Poslední silou je síla třecí mezi střechou a domem.
$$F_\mathrm{t} = \xi F_\mathrm{n}\,,$$
kde ξ je koeficient tření a F_n je síla normálová na plochu, ve které k tření dochází.

Jako další krok nastupuje rozkládání sil do vhodných směrů. To, co považujeme za vhodný směr, nesmírně závisí na zvoleném tvaru domu. Mgr.$^{\mathrm{M}}$ Grund si zvolil dům na kůlech a následně rozkládal síly na složku kolmou a tečnou vzhledem k povrchu střechy, což mi připadá poněkud zvláštní, obzvlášť vzhledem k tomu, že pak sílu normálovou na plochu střechy považoval za F_n pro třecí sílu, která evidentně působí mezi střechou a kůlem, tedy ve vodorovné rovině. Stejně rozkládali síly i ostatní řešitelé. My budeme síly rozkládat na složku vodorovnou a svislou a budeme počítat jednak rychlost nutnou k nadzvednutí střechy $v_\uparrow$ a sílu nutnou k jejímu odsunutí $v_\leftarrow$.

Tíhovou a odporovou sílu už ve správných směrech máme, takže zbývá rozložit sílu Bernoulliho.
$$F_{\mathrm{B}\leftarrow} = \frac{1}{2}\varrho v^2 S\sin\alpha \quad F_{\mathrm{B}\uparrow} = \frac{1}{2}\varrho v^2 S\cos\alpha$$
U síly odporové je třeba jen určit plochu kolmou na vítr.
$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}\varrho v^2 C S\sin\alpha$$

Nyní sečteme všechny síly ve svislém směru
$$F_\downarrow = F_\mathrm{g} - F_{\mathrm{B}\uparrow} = 2S\sigma g - \frac{1}{2}\varrho v^2 S\cos\alpha\,.$$
Pro kritickou rychlost platí, že $F_\downarrow = 0$, tedy
$$v = 2\sqrt{\frac{\sigma g}{\varrho\cos\alpha}}\,.$$
Dosadíme hodnoty $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha = 30^\circ$, $\varrho = 1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Plošná hmotnost taškových střech se pohybuje mezi 40 a $100\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$, upozorňuji, že střecha není jenom krytina, ale i trámoví. Já jsem se rozhodla uvažovat $\sigma = 60\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$. Pak dostaneme
$$v_\uparrow = 53\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

což je hodně, takové hodnoty může vítr dosáhnou jen v nárazech, což je ale náš případ.

Pro vodorovnou sílu pak platí

$$F_{\leftarrow} = F_{\mathrm{o}} - F_{\mathrm{B}\leftarrow} - \xi F_{\downarrow} = \frac{1}{2}\varrho v^2 SC \sin\alpha - \frac{1}{2}\varrho v^2 S \sin\alpha - \xi(2S\sigma g - \frac{1}{2}\varrho v^2 S\cos\alpha)\,,$$

a z toho kritická rychlost je

$$v = 2\sqrt{\frac{\xi\sigma g}{\varrho(C\sin\alpha - \sin\alpha + \xi\cos\alpha)}}\,.$$

Nutnou podmínkou pro existenci takové rychlosti je, aby byl výraz ve jmenovateli pod odmocninou kladný. Pokud dosadíme $\xi = 0{,}6$, což je tabulková hodnota pro dvojici materiálů dřevo-beton, dostaneme $C > -0{,}02$, což je pravda, protože odporový koeficient je kladné číslo. Odhadnout C je velice obtížné, existují tabelované hodnoty pro pár těles, a ještě navíc nezávisí jen na tvaru, ale i na drsnosti povrchu. Pravděpodobně se nachází někde mezi hodnotami 0.5 a 2. Pro hodnotu 2 je

$$v_{\leftarrow} = 37\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,,$$

a pro hodnotu 0.5

$$v_{\leftarrow} = 75\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Uvedené řešení bylo v silách středoškoláka, a já za něj byla ochotna dát plný počet bodů, ale má jednu chybu. Asi tušíte, že odporová síla vítr také tlačí střechu dolů. Složku odporové síly směrem dolů ale z uvedeného vzorce získat nelze, protože z definice působí vodorovně. Tady si pomůžeme úvahou, která bude tak plná aproximací, až by se z toho nefyzikovi udělalo mdlo.

Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti. Předpokládáme, že rychlost větru je stejná ve všech výškách nad střechou, což je sice v blízkosti střechy nesmysl, ale nějak se začít musí. Dále předpokládáme, že vítr opustí střechu ve směru k ní tečném, tj, odchýlí se o úhel α. Uvažujeme kvádřík vzduchu o výšce a šířce střechy, tj. o objemu $V = S\sin\alpha\cdot v\Delta t$, kde Δt je libovolný časový úsek. Hybnost tohoto kvádříku pak je

$$p_1 = mv = \varrho k S\sin\alpha\cdot v\Delta t\cdot v = \varrho v^2 S\sin\alpha\Delta t\,.$$

Zavádíme koeficient k, který popisuje, jak vysoká vrstva vzduchu v porovnání s výškou střechy se takto odkloní. Výsledná hybnost je pak ve složkách

$$p_2 = (k\varrho v^2 S\sin\alpha\cos\alpha\Delta t, k\varrho v^2 S\sin^2\alpha\Delta t)\,.$$

Rozdíl hybností je

$$\Delta p = (k\varrho v^2 S\sin\alpha(1-\cos\alpha)\Delta t, -k\varrho v^2 S\sin^2\alpha\Delta t)\,.$$

a z něho síla působící na střechu

$$F_\mathrm{o} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \left(k\varrho v^2 S \sin\alpha(1-\cos\alpha), -k\varrho v^2 S \sin^2\alpha\right),$$

čímž jsme se zbavili času. Síla směřuje ke střeše dolů.

Pokračujeme řešením jako v předešlém případě. Provedeme součet všech svislých sil

$$F_\downarrow = F_\mathrm{g} + F_{\mathrm{o}\downarrow} - F_{\mathrm{B}\uparrow} = 2S\sigma g + kS\varrho v^2 \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\varrho v^2 S\cos\alpha =$$

$$= 2S\sigma g + S\varrho v^2 (k\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha)\,.$$

Z toho kritická rychlost pro nadzvednutí střechy je

$$v_\uparrow = \sqrt{\frac{2\sigma g}{\varrho(\frac{1}{2}\cos\alpha - k\sin^2\alpha)}}\,.$$

Z podmínky kladnosti výrazu pod odmocninou plyne, že $k < \sqrt{3}$. Pokud dosadíme $k = 1$, získáme

$$v_\uparrow = 82\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Součet vodorovných sil je

$$F_\leftarrow = F_\mathrm{o} - F\mathrm{B}\leftarrow - \xi F_\downarrow = k\varrho v^2 S\sin\alpha(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\varrho v^2 S\sin\alpha -$$

$$-\xi(2S\sigma g + k\varrho v62S\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\varrho v^2 S\cos\alpha)\,,$$

a odtud kritická rychlost

$$v_\leftarrow = \sqrt{\frac{2\sigma g}{\varrho(k\sin\alpha - k\sin\alpha\cos\alpha - k\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha + \xi\frac{1}{2}\cos\alpha)}}\,,$$

z podmínky kladnosti výrazu pod odmocninou vyjde, že $k > 0{,}001$. Pro $k = 1$ je kritická rychlost pro odsunutí střechy

$$v = 60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Opět připomínám, že jsem se během řešení dopustila mnoha velmi hrubých odhadů, nicméně výsledky řádově souhlasí se skutečnými rychlosti nebezpečných větrů. Reálná fyzika bohužel o hrubých odhadech často je. Mimochodem ve skutečnosti se střecha většinou utrhne proto, že se nějakou skulinou dostane vítr pod ni, případně si onu skulinu vyrobí, typicky vytrhne nějakou konkrétní tašku, která už předtím byla uvolněná.

Zuzka

Úloha 2.2 – Strany trojúhelníka (3b)

Zadání:

Trojúhelník ABC má strany s délkami a, b, c. Najděte nutnou a postačující podmínku pro jeho úhly, aby také a^2, b^2 a c^2 byly délkami stran nějakého trojúhelníka.

Řešení:

Označme úhly v trojúhelníku standardním způsobem. Úsečky délek a^2, b^2 a c^2 jsou stranami trojúhelníka právě tehdy, když pro ně platí trojúhelníková nerovnost. Musí tedy platit

$$a^2 + b^2 > c^2 .$$

V původním trojúhelníku platí kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

Pokud ji zkombinujeme s předešlou nerovností, dostaneme

$$a^2 + b^2 > a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma ,$$

$$0 > -2ab\cos\gamma .$$

Protože a a b jsou kladná, můžeme nerovnost vydělit $-2ab$

$$\cos\gamma > 0 ,$$

$$\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) .$$

Cyklickou záměnou dostaneme stejnou podmínku i pro úhly α a β. Dostali jsme tak nutnou podmínku a sice, že trojúhelník musí být ostroúhlý. Ukážeme, že je i postačující.

Pro původní trojúhelník platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

Pokud vezmeme $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, tak $0 < \cos\gamma < 1$. Vidíme, že trojúhelníková nerovnost v novém trojúhelníku platí. Cyklickou záměnou dostaneme i další dvě požadované nerovnosti.

xlfd

Úloha 2.3 – Z laboratoře (5b)

Zadání:

Vědci z biochemické laboratoře chtějí zkoumat dělení buněk. Začínají s jednou buňkou, která se rozdělí na blíže neurčený počet buněk dalších (náhodný, který ale už v okamžiku dělení zná) a při tom sama zanikne. Tento životní cyklus se následně opakuje i u dalších buněk, ty se však nemusí dělit najednou. Buňka se vždy dělí sama a s ostatními neinteraguje (ani na úrovni předávání informací). Jediná informace, kterou má, je ta, kterou jí předala rodičovská buňka, přičemž tato buňka může předat každému potomku informaci jinou.

Vědci potřebují jednotlivé buňky rozlišit. Jako vhodná metoda se jim z hlediska jejich pokusu jeví to, aby každá buňka měla jinak dlouhou DNA než jakákoli jiná (která může vzniknout v jakékoli generaci z kterékoli další buňky), ale nevědí, jak toho docílit. Pomůžete jim? Tedy otázka zní: Jakou informaci mají rodičovské buňky předávat, aby se vyloučila možnost, že se v populaci vyskytnou dvě stejně označené buňky (se stejně dlouhou DNA)?

Řešení:

Úloha se dala řešit mnoha způsoby. V principu šlo o to, zakódovat celý rodokmen dané buňky do délky její DNA. Jelikož začínáme s jedinou buňkou, pokud každá buňka při svém dělení vždy očísluje své potomky od 1 do k (každého jiným číslem), každou buňku lze jednoznačně popsat posloupností čísel, která při dělení dostali všichni její předkové a ona sama. Například posloupnost $(2, 3, 4)$ by jednoznačně popisovala buňku, která je čtvrtým potomkem třetího potomka druhého potomka prvotní buňky. Teď jde o to, jak takovou posloupnost zakódovat do jednoho přirozeného čísla – do délky DNA. Délka DNA se totiž obvykle neudává v metrech, ale v počtu nukleotidových párů. V řešeních se objevily dva různé způsoby jak to udělat: „prvočíselný“ a „řetězící“.

Při řetězícím postupu čísla v posloupnosti jednoduše zřetězíme. Tedy, úplně jednoduše to nepůjde – musíme mít nějaký jednoznačný způsob jak řetězec zase rozdělit. Například můžeme čísla posloupnosti zapsat v devítkové místo desítkové soustavě a devítku použít jako oddělovač. Algoritmus pro dělení buňky je tedy jasný: při dělení buňka vezme délku svého DNA a délku svého potomka z ní spočítá tak, že na konec připíše devítku a číslo tohoto potomka v devítkové soustavě.

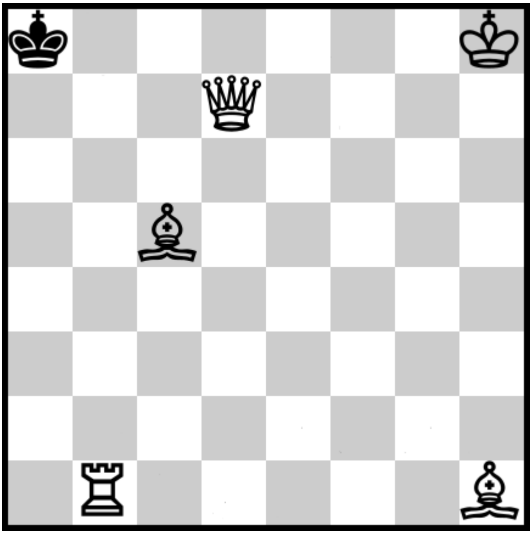
Při prvočíselném přístupu zakódujeme posloupnost $(a_1, a_2, \dots a_n)$ do čísla $k = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_i^{a_i} \dots p_n^{a_n}$, kde p_i je i-té nejmenší prvočíslo, a buňka s rodokmenem $(a_1, a_2, \dots a_n)$ bude mít délku DNA mk, kde m je délka DNA prvotní buňky. Algoritmus jak zajistit takovou délku DNA je snadný – stačí aby i-tý potomek každé buňky z j-té generace měl p_j^i-krát delší DNA než jeho mateřská buňka. Jediné, co tedy buňka musí vědět, aby se mohla dělit, je, do které generace patří (a které prvočíslo má tudíž použít). Tuto informaci jí může předat její mateřská buňka – každá dělící se buňka tedy musí svým potomkům předat číslo o jedna větší, než sama dostala. Prvotní buňka předává číslo 2.

Tereza

Úloha 2.4 – Šachová (2b)

Zadání:

Po konci šachové partie zůstaly rozloženy figurky tak, jak je nakresleno na obrázku. Poznáte, jak je šachovnice orientována (na které straně začínal bílý), pokud víte, že s věží na šachovnici bylo taženo pouze jednou?



Řešení:

Nejprve si šachovnici označíme běžným způsobem. Pak máme figurky na souřadnicích: věž – B1, střelci – C5 a H1, dáma – D7, bílý král – H8 a černý král – A8.

Ze zadání víme, že partie skončila. Černý dostává mat od bílého střelce na H1. Hledejme, jaké bylo rozestavění figurek, než táhl bílý (a dal mat). Střelcem (na H1) hrát nemohl, protože by v předchozím tahu musel ohrožovat krále, což nemůže. Mohlo tedy dojít k odtaženému matu. Jediná figura, která by mohla krýt střelce a zároveň neohrožovala krále, je věž. O ní ale víme, že se s ní táhlo jenom jednou, proto to být nemohla. Tím jsme vyloučili všechny možnosti až na jednu. A tou je, že střelec vznikl proměnou pěšce. Z toho plyne, že bílý musel začínat buď na straně vlevo nebo nahoře. Věží bylo sice pohnuto jenom jednou, ale mohla také vzniknout proměnou. Proto použijeme pravidlo: Pole nejvíc vpravo v první řadě je vždy bílé. Možnost „vlevo“ tedy můžeme vyloučit.

Bílý začínal na horní straně.

xlfd

Úloha 2.5 – Porovnávání čísel (2b)

Zadání:

Napište výraz, který v závislosti na bitech čísel X a Y nabývá hodnoty logické jedničky, pokud $X > Y$. X je tříbitové číslo abc a Y je dvoubitové číslo de, čísla X a Y jsou zapsána ve dvojkové soustavě ($a, \ldots, e \in \{0, 1\}$).

Řešení:

Nejdříve si všimneme, že pokud $a = 1$, tak výraz $f(X, Y) = 1$, pokud $a = 0$, tak výraz závisí na b, c, d, e. Můžeme tedy zapsat $f = a + g(b, c, d, e)$.

Nyní vyřešíme výraz $g(b, c, d, e)$. Sestavíme si pro něj pravdivostní tabulku u2.5.1, kterou si vyjádříme jako Karnaughovu mapu na obrázku u2.5.1.

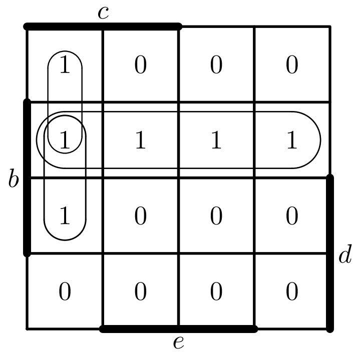
b	c	d	e	$g(b, c, d, e)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Tabulka u2.5.1: Pravdivostní tabulky pro funkci $g(b, c, d, e)$.

Z Karnaughovy mapy snadno určíme, že $g(b, c, d, e) = b \cdot \overline{d} + b \cdot c \cdot \overline{e} + c \cdot \overline{d} \cdot \overline{e}$ a tedy

$$f(a, b, c, d) = a + b \cdot \overline{d} + b \cdot c \cdot \overline{e} + c \cdot \overline{d} \cdot \overline{e}\,.$$

(R)adim



Obr. u2.5.1 – Karnaughova mapa výrazu $g(b, c, d, e)$.

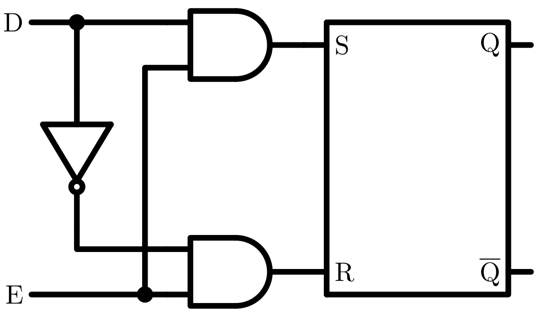
Seriál o číslicových obvodech

IV. díl – Složitější sekvenční obvody

V minulém dílu jsme si povídali o sekvenčních obvodech a ukázali jsem si příklad R-S klopného obvodu. Nyní si představíme klopný obvod D, který ze zmíněného R-S klopného obvodu vychází, ale umožňuje nám využít ho při zajímavých aplikacích jako je dělička signálu či čítačka.

Klopný obvod D

Klopný obvod D má dva vstupní piny, a to D jako data, E jako enable, a výstupy Q a $\overline{\mathrm{Q}}$. Jedná se v podstatě o R-S klopný obvod doplněný o několik hradel, která povolují přivedení signálu na vstup R-S klopného obvodu. Zapojení pracuje tak, že se data na výstup zapíší pouze tehdy, pokud je E ve stavu logické jedničky. Realizace klopného obvodu D je na obrázku c4.1 a pravdivostní tabulka je uvedena v tabulce c4.1. Tomuto zapojení klopného obvodu D se říká obvod řízený úrovní.

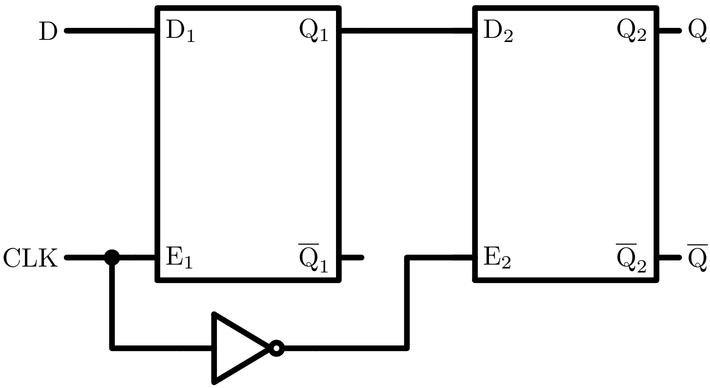


Obr. c4.1 – Realizace klopného obvodu D.

E	D	$\mathrm{Q_n}$	$\overline{\mathrm{Q_n}}$
0	0	$\mathrm{Q_{n-1}}$	$\overline{\mathrm{Q_{n-1}}}$
0	1	$\mathrm{Q_{n-1}}$	$\overline{\mathrm{Q_{n-1}}}$
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabulka c4.1.

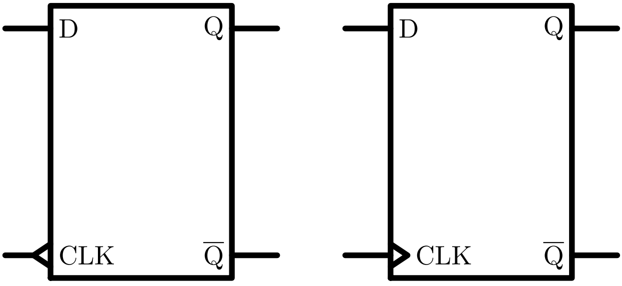
Klopný obvod D můžeme dále vylepšovat, a to například tak, jak je uvedeno na obrázku c4.2. Vhodnou kombinací dvou klopných obvodů D dostaneme klopný obvod D řízený sestupnou hranou. Pojďme se na toto zapojení podívat podrobněji.



Obr. c4.2 – Klopný obvod řízený sestupnou hranou.

Na vstup D přivedeme data. CLK mějme nastaveno na hodnotu logické nuly. Jakmile se hodnota CLK změní na jedničku, zapíší se data na výstup Q_1. Na výstup Q_2 se data ovšem zapíší až tehdy, když se hodnota CLK vrátí zpět na logickou nulu a na E_2 se tak objeví hodnota logické jedničky. Data ze vstupu tak dostaneme na výstupu až se sestupnou hranou.

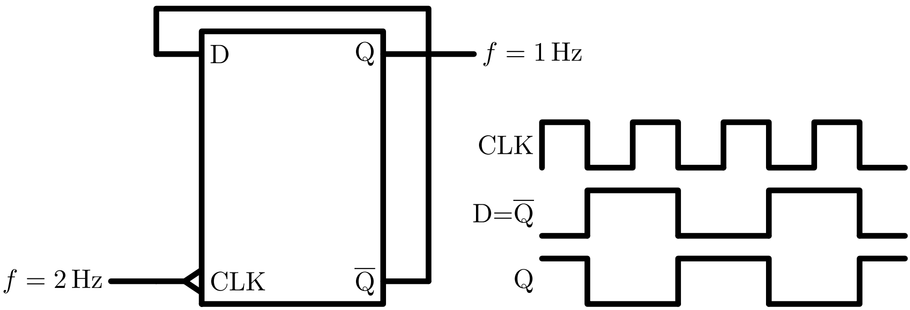
Obdobně můžeme také vytvořit obvod řízený vzestupnou hranou, pokud na E_1 přivedeme invertovaný signál CLK a na E_2 přivedeme signál CLK neinvertovaný. Schematické značky klopného obvodu D řízeného sestupnou a vzestupnou hranou jsou uvedeny na obrázku c4.3.



Obr. c4.3 – Schématická značka klopného obvodu D řízeného sestupnou (vlevo) a vzestupnou (vpravo) hranou.

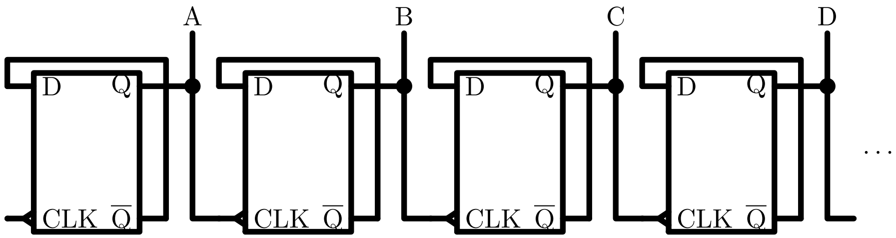
Použití klopného obvodu D

Klopný obvod D můžeme využít také pro různá zajímavá zapojení. Jedním z nich je dělička frekvence. Představme si, že máme signál, který se mění s frekvencí $f = 2\,\mathrm{Hz}$. Tento signál přivedeme na CLK daného D klopného obvodu řízeného sestupnou hranou, přičemž výstup $\overline{\mathrm{Q}}$ přivedeme na vstup D. Protože je obvod řízen sestupnou hranou, tak se signál D přepíše na výstup s frekvencí 1 Hz, stejnou frekvenci také nalezneme na výstupu. Schématické zapojení a časový průběh nalezneme na obrázku c4.4.



Obr. c4.4 – Dělička signálu.

Zapojíme-li za sebe několik klopných obvodů D řízených sestupnou hranou, tak jak je znázorněno na obrázku c4.5 dostaneme čtyřbitovou čítačku. Na výstupech A, B, C a D dostaneme zakódovaný počet impulsů, které nám přišly na vstup CLK, ve formě binárního čísla tak, že D je nejvyšší bit. Což ovšem není až tak překvapivé, neboť druhý, třetí, … n-tý D klopný obvod slouží vždy jako dělička dvěma.

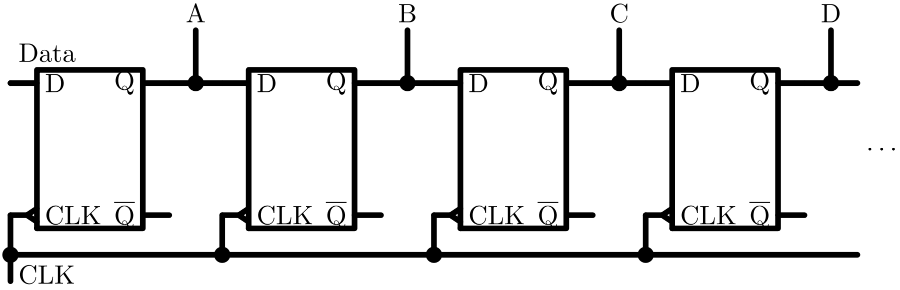


Obr. c4.5 – Čítačka impulsů.

Při malinko odlišném zapojení zase dostaneme posuvný registr. Jedná se o zapojení, které nám převádí sériový vstup na paralelní signál a mnohdy je velmi užitečné. Schéma nalezneme na obrázku c4.6.

V tomto místě nyní náš seriál přerušíme. Příště se zkusíme podívat na to, jak je možné číslicové obvody sestavit pomocí diskrétních součástek. Pokud by vám něco v tomto seriálu nebylo jasné, tak se nebojte zeptat e-mailem na `radim@matfyz.cz`.

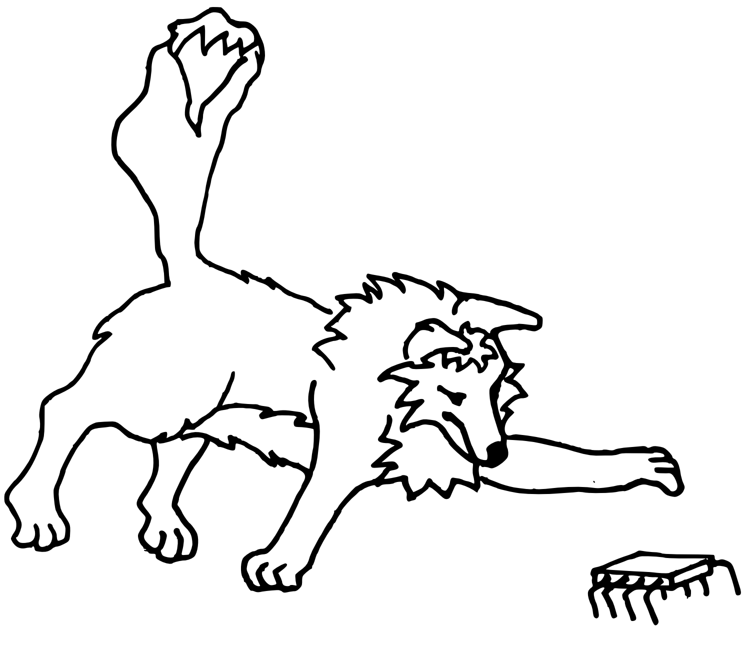
(R)adim



Obr. c4.6 – Posuvný registr.

Úloha 3.5 – Oscilátor (3b)

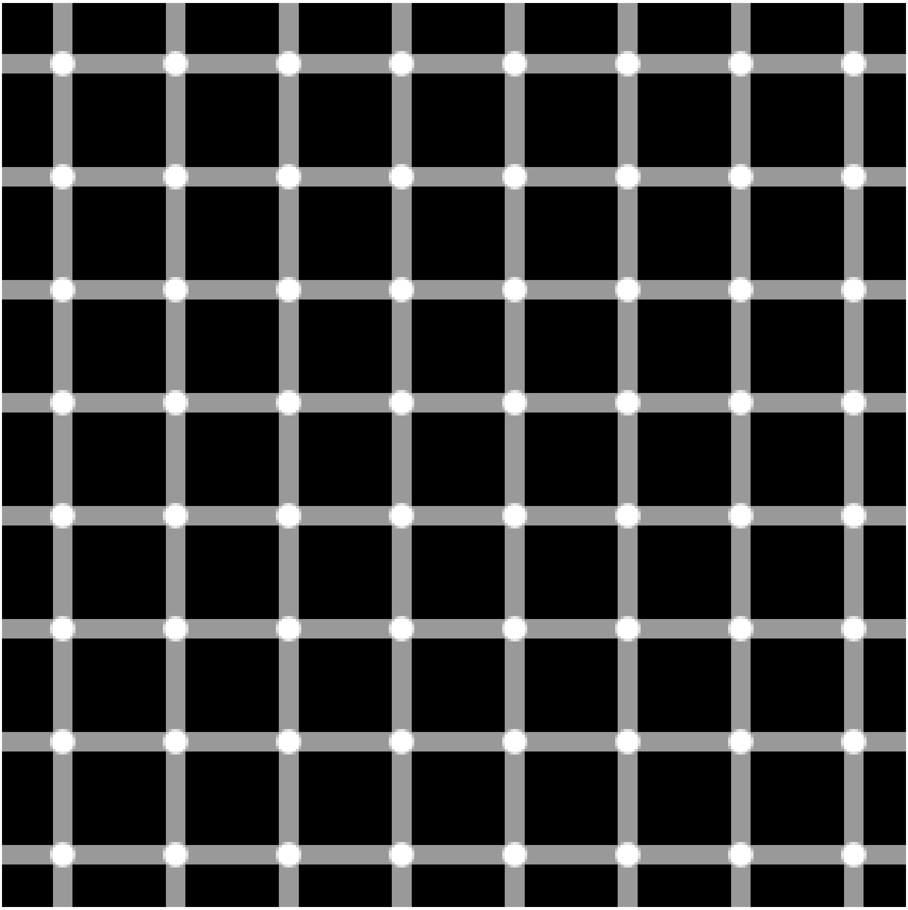
Představte si, že máte oscilátor, kterému se na výstupu mění logický signál s frekvencí $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$. Uměli byste vytvořit obvod, který by měl na vstupu tento oscilátor a na výstupu frekvenci $f_2 = 1/3\,\mathrm{Hz}$? Předpokládejte, že si můžete zvolit počáteční podmínky tj. signály na jednotlivých vodičích po zapnutí přístroje.



Výsledková listina

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t3**	**t4**	**s2**	**+**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Šafin	3.	52	3	3	5	1		11	2	2	27	39
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Gromada	4.	37		3	5	1	10		2	0	21	37
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kubečka	4.	83	1	1	0	2	7	3	2	0	16	33
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Mikel	3.	21		3		1				0	4	21
5–6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Poppr	1.	26		2	4	1				2	9	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Šťastná	2.	20		2	4	1			2	1	10	20
7.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Lieskovský	2.	19		3	5	1			2	2	13	19
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Cífka	3.	37								0	0	16
9–11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Bárta	4.	20		3		2				0	5	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	1.	18		3	5	1				3	12	14
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	3.	28		3					2	0	5	14
12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Dolejší	1.	13	1	3		1			1	1	7	13
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	1.	42	2	1	4	1			1	3	12	12
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Kratochvíl	4.	27				1				0	1	10
15.	J. Greššák	3.	9								0	0	9
16–17.	O. Benedikt	3.	8				2				0	2	8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Töpfer	4.	33								0	0	8
18–20.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ R. Kubíček	3.	20								0	0	7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Vincena	1.	22				1				0	1	7
	M. Zmeškal	1.	7		3		1				1	5	7
21–23.	M. Calábková	1.	6		2	1		1		0	1	5	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ E. Gocníková	4.	35								0	0	6
	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Š. Šimsa	3.	273								0	0	6
24.	M. Vohníková	2.	4								0	0	4
25–26.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ B. Böhmová	4.	45								0	0	3
	Ľ. Šimková	2.	3		3						0	3	3
27–28.	E. Harlenderová	1.	2								0	0	2
	M. Kopf	4.	8				2				0	2	2
29–31.	D. Fecková	4.	1				1				0	1	1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Langerová	1.	12								0	0	1
	P. Turnovec	1.	1								0	0	1
32.	T. Vysušil	1.	0								0	0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



S obsahem časopisu M&M je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.