Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník / Číslo
XVIII / 3

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

přinášíme vám již třetí číslo našeho časopisu. Opět v něm najdete novou várku úloh k řešení a dozvíte se, jak se měly správně řešit úlohy z prvního čísla i jak jste obstáli se svými řešeními.

Můžete si také přečíst letošní první příspěvek o ternární logice a inspirovat se pro napsání vlastního. Ať už o logice nebo o libovolném z dalších témat. Články tvoří jednu z nejdůležitějších součástí našeho semináře a podle toho jsou i bodově hodnoceny. Chtěli bychom připomenout, že článek k tématu můžete poslat kdykoli během roku. Od letoška lze navíc přemýšlet nad tématy a psát články i ve skupinách.

Na začátku ledna nás čeká další kolo turnaje ve hře jezero. Těšíme se nejen na vaše programy, ale i na teoretické rozbory optimální strategie. Více informací o turnaji najdete uvnitř čísla.

V minulém čísle jsme pro vás připravili bonus, který ale bohužel nikdo nevyužil. Na první stránce byl obrázek obsahující QR kód, v němž byla zakódovaná webová adresa. Stačilo adresu zadat do webového prohlížeče, vyplnit jednoduchý formulář a hned jste mohli mít bez práce jeden bod navíc. Možná, že ještě někdy něco podobného zopakujeme. Pozorně čtěte další čísla.

Přejeme vám krásné prožití Vánoc.

Organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání třetí série: 23. 1. 2012

Úloha 3.1 – Hra (4b)

V dávných dobách, kdy pračlověk pocítil potřebu začít se dorozumívat jinak než neartikulovanými skřeky, byl vynalezen jazyk. Jazyk, to je nad míru zajímavá věc, protože se dá třeba stočit do ruličky nebo dát na špičku nosu, a vůbec se s ním dají dělat všelijaké psí kusy. Kusy popisu staré egyptské hry, které byly nalezeny zhruba před týdnem týmem českých archeologů v okolí řeky Nilu, byly již doplněny o potřebná pravidla, takže jejich celé znění přikládáme čtenářům níže.

Kámen začíná na pozici $(1, 1)$ a pohybuje se po čtvercové síti podle následujících pravidel:

1. Z jakéhokoli místa o souřadnicích (a, b) se může přemístit na místo o souřadnicích $(2a, b)$, nebo $(a, 2b)$.
2. Z jakéhokoli místa o souřadnicích (a, b) se může přemístit na místo $(a - b, b)$, pokud $a > b$, nebo na $(a, b - a)$, pokud $a < b$.

Na jaké pozice (n, m), kde n a m jsou přirozená čísla, je možno kámen přemístit?

Úloha 3.2 – Digitální hodiny (5b)

Toto krátké hraní si se slůvky, bude-li okruhem čtenářů pochopeno, to bude pořádná pecka! Pecka je dutá, takže padá k zemi rychleji než kamínek, tvrdil nám tvrdohlavě Karlík, ale byla to lež. Lež, vždyť není ani šest hodin, zazívala na mne sestra, když jsem se spěšně oblékala do školy, protože na mém budíku bylo už osm.

Tato úloha se bude zabývat digitálními[1] hodinami, konkrétně ve 24-hodinovém[2] formátu. Určitě jste už viděli nějaké, které měly některou ze svítících čar rozbitou (nesvítící), přičemž tento defekt často vede k situaci, že nejde poznat, kolik hodin vlastně je. Předpokládejme, že máme takové hodiny, o nichž víme, že mají právě jeden segment porouchaný, ale nevíme, který. Zkuste zjistit:

a) Jakou část dne nebudeme vědět jistě, kolik je hodin? O kolik se průměrně budeme mýlit, pokud mezi možnými časy po doplnění náhodné čárky na smysluplný čas vybereme vždy náhodně (tedy při více iteracích průměr těchto časů)?
b) Bylo by možné vymyslet nové „číslice“ „0“ až „9“ (jako úplně libovolné kombinace segmentů) tak, aby byl displej jednoznačný i při selhání jednoho segmentu? Pokud ne, jak tyto číslice vymyslet tak, aby otázky z části a) byly řešeny optimálně?
c) Jak by problém vypadal, kdybychom nevěděli, zda je nějaký segment rozbitý, nebo není? A co se dvěma nefunkčními segmenty? Nebo kdybychom vůbec nevěděli, kolik jich je rozbitých? (Nebráníme se udělování bonusových bodů.)

Úloha 3.3 – Stlačování plynů (4b)

Jestli jste se ještě neztratili, ráda bych dodala, že dvojsmyslné slovo, které bude následovat, mne nedávno zaujalo, jelikož jeho druhý význam je od prvního (dle pořadí, v jakém je uvádím) odvozen, neboť dříve měli herci své texty napsány na svitcích papíru, jimž se také říkalo role. Role, kterou dostal ve hře „Porosty českých lesů“, mu příliš nevyhovovala, neboť mu při ní stále překážela koruna. Koruna mu padla přesně na jeho vysoké čelo. Čelo rozeznělo své struny a nádherná melodie potěšila naše ucho. Ucho nádoby, jak praví staré české přísloví, se utrhne, když se s ní chodí pro vodu příliš dlouho.

Máme nádobu a v nej zmes niekoľkých rôznych plynov (nič viac, než že sú rôzne a chemicky spolu nereagujú, o nich zatiaľ vedieť nepotrebujeme). Začnime teraz nádobu veľmi pomaly izotermicky[3] zmenšovať (napríklad do nej zasúvame piest). Asi je nám všetkým jasné, že v nádobe začne rásť tlak. Môže narásť až na

[1] se sedmisegmentovým displejem

[2] tedy zobrazené časy jsou 00:00–23:59

[3] Tak pomaly, aby sa teplota plynu v nádobe nemenila.

takú hodnotu, že plyny postupne skvapalnejú. Ako sa bude meniť tlak v nádobe v závislosti na objeme a ako zastúpenie plynov v „atmosfére“? Veď keď nejaký plyn skvapalnie, tak z atmosféry skoro zmizne, alebo nie?

Z nedostatku čísel v zadaní vyplýva, že tentokrát od vás nečakáme žiadne počítanie, ale čo najpodrobnejší rozbor a popis situácie a deja. Malá nápoveda: Bude sa vám hodiť vedieť, čo je to krivka nasýtenej pary a čo parciálny tlak.

Úloha 3.4 – Provazy (1b)

Jen doufám, že tenhle bláznivý příběh nebude nakonec pořádná bota. Bota se skutálela ze schodů a ozvala se hlasitá rána. Rána jsou nejpěknější část dne, když se louka pozvolna otepluje, slunce se rodí do růžové a opodál zpívá kos. Kos celou mez, jen ne ten bez. Bez pořádného provazu není radno se slaňovat.

Máme n provazů naskládaných na hromadě, ven nám tedy trčí $2n$ konců. Náhodně vybereme dva konce a svážeme je dohromady. To opakujeme, dokud nezbudou žádné volné konce. Jaký je průměrný počet smyček (cyklů), které tímto postupem vytvoříme?

Tím se naše zvláštní, ale snad veselé povídání chýlí ke konci, protože autorce se již klíží víčka. Víčka od pivních láhví se někdy stříbrně lesknou, proto je má kamarádka nechává na zahradě pro straky doufajíc, že při jejich kradení tam někdy nějaká zanechá své vzácné pero. Pero, to je ten pravý nástroj, který byste teď měli popadnout do ruky, abyste mohli začít řešit naše nové úlohy!

Řešení témat

Téma 1 – Ternární logika

K prvnímu tématu nám přišly dva zajímvé články. Mgr.$^{\text{M}}$ Ondřej Cífka, jehož příspěvek níže v téměř nezměněné podobě otiskujeme, se zabývá otázkou, jak operace známé z booleovské logiky rozšířit i do logiky ternární. Nabízí k tomu docela přirozený, ale určitě ne jediný možný, přístup.

Dr.$^{\text{M}}$ Jakub Kubečka zašel ještě dále a vytváří nové operace pro ternární logiku. Jako příklad můžeme uvést binární operaci nejistost, která nabývá jedničky, kdykoli je jedním z operandů otazník, a nuly jinak. Podobných (a užitečných) operací by určitě bylo možno vymyslet mnohem více.

Přijaté články nabízí spoustu otázek k dalšímu bádání. Souhlasíte s tím, jak Mrg.$^{\text{M}}$ Ondřej Cífka zavedl operace pro ternární logiku? Nebo byste to udělali jinak? Můžete se také zamyslet nad dalšími smysluplnými (nejen binárními) operacemi v této logice.

Jak byste převedli ternární logiku do normálního jazyka? Lze pokládat dotazy a odpovídat podobně jako v logice booleovské? Je ternární logika něco úplně nepřirozeného, nebo ji můžeme běžně využít (a třeba i využíváme, aniž si to uvědomujeme)? Případně jak by vypadala aritmetika využívající naši logiku? Mohla by být k něčemu dobrá?

Kuba

O využití operace sloučení

Mgr.MM Ondřej Cífka

Od ternární logiky budeme chtít, aby byla zobecněním logiky Booleovy – všechny operace Booleovy logiky tedy musejí v té ternární nad pravdou a lží fungovat tak, jak to známe.

Dále si musíme rozmyslet, jaký má otazník mít vlastně význam, tedy co si slibujeme od toho, že bude vyjadřovat *nejistotu*. Chtěli bychom, aby se choval (dovolte mi použít ono oblíbené přirovnání) jako taková krabice se Schrödingerovou kočkou. Dokud je škatule dobře uzavřena, neexistuje způsob, jak zjistit, zda došlo k usmrcení jejího obsahu. Jakmile ji ale otevřeme, nalezneme v ní zvíře buď živé, nebo mrtvé a již není cesty zpět.

Otazník ve výraze vlastně zastupuje obě logické hodnoty najednou. Je to, jako bychom se za otazník snažili dosadit nulu i jedničku zároveň – kočku, která je současně mrtvá i živá. Jinak řečeno, pokud otazník ve výrazu nahradíme číslem (tj. nulou nebo jedničkou), hodnota výrazu se smí změnit z otazníku na číslo, ale nikoli z čísla na otazník nebo na jiné číslo. Nejistota se může změnit v jistotu, ale ta už je nedotknutelná. Ještě jinými slovy: Jestliže hodnota celého výrazu záleží na „hodnotě“ otazníku (tedy při dosazení jedničky na jeho místo by výraz nabyl jiné hodnoty než při dosazení nuly), pak hodnotu výrazu nelze určit a rovná se tedy otazníku. Jestliže naopak na hodnotě otazníku nesejde, můžeme za něj dosadit libovolnou hodnotu (nulu nebo jedničku) a dostaneme jednoznačný booleovský výraz.

Abychom zůstali věrni kočičí analogii, představme si například vědce, který má rovnou dvě kočky ve dvou různých krabicích a jehož úkolem je zjistit, zda jsou obě naživu. Na začátku ví, že ani o jedné, ani o druhé kočce nemůže nic říci (zapsáno logickým součinem: $?\cdot? = ?$). Jestliže po otevření první krabice konstatuje smrt, odpoví záporně: ať už se s druhou kočkou děje cokoli, zjevně neplatí, že jsou obě živé ($0\cdot? = 0$). Pokud naopak najde první kočku živou, nemůže odpovědět než otazníkem ($1\cdot? = ?$): dokud je druhá škatule zapečetěna, nelze rozhodnout. Po jejím otevření nalezne buď živou ($1 \cdot 1 = 1$), nebo mrtvou ($1 \cdot 0 = 0$) kočku a příslušně odpoví.

Uvedená úvaha už nám vlastně dává přímočarý návod, jak převádět operace z Booleovy logiky do té ternární. Než jej vysvětlím, zavedu si binární operaci *sloučení*, která pro dva stejné operandy vrátí jejich hodnotu, pro dva různé otazník.

x	0	0	0	1	1	1	?	?	?
y	0	1	?	0	1	?	0	1	?
sloučení	0	?	?	?	1	?	?	?	?

Nyní kýžený postup. Nejprve si napíšeme pravdivostní tabulku dané operace jen pro nuly a jedničky (s tím, že operandy a výsledek operace píšeme do řádku). Pro každý operand nyní budeme chtít zjistit, za jakých podmínek na něm záleží výsledek operace. Vybereme tedy vždy ty dva řádky tabulky, které se liší pouze o hodnotu vybraného operandu (a případně o výsledek operace), z nich pro každé dvě hodnoty ve stejném sloupci provedeme sloučení a výsledky zapíšeme po řadě na nový řádek tabulky. Čeho tím dosáhneme? Pokud se bude pro různé hodnoty operandu lišit výsledek operace, pak na daném operandu v dané chvíli záleží a otazník od otazníku pojde. Pokud se výsledek operace v závislosti na operandu nezmění, v daném případě na něm nesejde, takže můžeme s jistotou říci, že dosadíme-li zaň otazník, výstupem bude ona neměnná hodnota.

Uvedeným postupem prozkoumáme pouze ty kombinace vstupních hodnot, mezi nimiž se vyskytuje právě jeden otazník. To nám příliš nevadí, neboť operace budou většinou binární. Pokud bychom ale měli více operandů, nic nám nebrání provést tentýž postup znovu několikrát za sebou, vždy na nově přidané řádky tabulky, a získat tak i kombinace se dvěma, třemi otazníky atd.

Aplikujeme-li postup na tabulku c1.2 z prvního dílu seriálu, získáme následující (uvedeny jsou pouze přidané řádky).

x	y	0	$x \cdot y$	$x > y$	x	$x < y$	y	XOR	$x + y$
0	?	0	0	0	0	?	?	?	?
1	?	0	?	?	1	0	?	?	1
?	0	0	0	?	?	0	0	?	?
?	1	0	?	0	?	?	1	?	1
?	?	0	?	?	?	?	?	?	?
x	y	$x \mathbin{\bar{+}} y$	$x = y$	$\bar{y}$	$y \Rightarrow x$	$\bar{x}$	$x \Rightarrow y$	$x \mathbin{\bar{\cdot}} y$	1
0	?	?	?	?	?	1	1	1	1
1	?	0	?	?	1	0	?	?	1
?	0	?	?	1	1	?	?	1	1
?	1	0	?	0	?	?	1	?	1
?	?	?	?	?	?	?	?	?	1

Dodejme, že negací otazníku je otazník.

De Morganovy zákony

Ternární logiku a její základní operace jsme postavili tak, aby byly jen rozšířením logiky nám dobře známé. Převedení něčeho takového jako De Morganových zákonů do ternární logiky by tedy mělo být relativně přímočaré.

Nejprve si zákony napíšeme v jejich nejjednodušší formě, která jistě musí v ternární logice platit (plyne to např. z logických tabulek použitých operací):

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \tag{1}$$

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b} \tag{2}$$

Pro (1): Pokud $b = p + q$, pak platí $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{p+q} = \overline{a} \cdot \overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{a+p+q}$. Jednoduchou indukcí pak dostaneme

$$\overline{a_1 + a_2 + \ldots + a_i} = \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} \cdots \overline{a_i}.$$

Analogicky tomu bude pro (2). De Morganovy zákony jsou tedy v ternární logice stejné, jako v logice Booleově.

Inverzní operace

Některé zběsile vypadající nápady z oblasti Booleovy logiky začnou po přenesení do logiky ternární dávat výrazně větší smysl. Jedním z nich jsou inverze standardních (binárních) operací. Například k logickému součtu můžeme mít logický rozdíl, k součinu podíl atd.

Logický rozdíl definujeme tak, že $a - b = c$, právě když $a = b + c$. Podobně pro *logický podíl*: $a/b = c$ právě tehdy, když $a = b \cdot c$. Obecně budeme u inverzních operací znát výsledek výchozí operace a jeden z jejích operandů a budeme chtít zjistit ten druhý. Ternární logika se nám tu tolik hodí proto, že výsledek inverzí často nebude jednoznačný, což vyjádříme právě otazníkem. Ani tak se ovšem nevyhneme případům, kdy operace nebude pro určité hodnoty definována.

x	y	$x - y$	x/y
0	0	0	—
0	1	—	0
0	?	—	?
1	0	1	—
1	1	?	1
1	?	?	1

Téma 2 – Jezero

K tématu přišly a do prvního turnaje byly nasazeny celkem čtyři soutěžní programy, tři od Prof.$^{\text{MM}}$ Štěpána Šimsy a jeden od Bc.$^{\text{MM}}$ Daniela Gromady. Vítězem se stal program `stepan`, který dokázal vydělat za jednu hru v průměru 7 peněz, a tak si odnáší 6 bodů. Ostatní programy byly v průměru ztrátové. Druhé místo a čtyři body tak víceméně automaticky připadly programu od Bc.$^{\text{MM}}$ Daniela Gromady a třetí místo zůstalo neuděleno. Ani jeden z řešitelů však neposlal žádný teoretický rozbor problému, ani článek o tom, jakou strategii jeho program provádí a proč tomu tak je. Pokud by byly do turnaje nasazeny i organizátorské programy, bezkonkurenčním vítězem by se stal program `smart.pl` od Honzy, který na jednu hru dosáhl průměrný zisk 160 peněz. Zdrojový text tohoto programu jsme vám zatím k dispozici nedali, takže můžete zkusit odhadovat na jakém principu funguje. Honza o něm říká, že je, co do délky a složitosti, srovnatelný s veřejným `economic30-70.pl`.

Pravidla turnaje, který se bude konat 8. 1. 2012, jsou následující: Vyzkoušené a funkční programy přijímáme nejpozději v pátek 6. 1. 2012. Turnaj se bude skládat ze dvou menších částí. Jedna z nich budou zápasy na menší počet kol (ne více než 20) za stejných podmínek, jako je uvedeno v zadání, druhá bude turnaj za stejných podmínek jako dosud s jednou výjimkou: kontrola bude zpoplatněna částkou 5 peněz. V případě poslání kontroly tedy platí pro posílajícího hráče $z = z - 5$ bez ohledu na to, jestli kontrola někoho chytí, nebo ne. Vítězem se stane program, který v součtu přes obě kategorie dosáhne nejvyššího průměrného zisku za jeden tah. Prémie vítězům jednotlivých kategorií předběžně nevyhlašujeme, ale udělit je můžeme.

Těšíme se na vaše programy i na rozbory strategií a další příspěvky do tématka. Aktuální informace hledejte na našich stránkách, konkrétně hlavně na stránce tématka (`http://mam.mff.cuni.cz/?s=tematka&roc=18&cis=2`).

Honza & Jeffer

Řešení úloh

Úloha 1.1 – Závorkový hlavolam (3b)

Zadání:
Soutěžící dostali proužek papíru, na němž bylo v náhodném pořadí napsáno n levých a n pravých závorek. Měli dokázat, že není-li uzávorkování správné[4]*, lze proužek rozstřihnout na jednom místě tak, že po vyměnění kusů dostanou správné uzávorkování. Zvládnete to vy?*

Řešení:
Pro jednoduchost budeme v následujícím textu označovat počet levých závorek $\#_($ a počet pravých závorek $\#_)$.

Všimněme si nejdříve vlastnosti V správného uzávorkování. Procházíme-li správně uzávorkovanou posloupnost zleva doprava, musí v každém místě posloupnosti platit $\#_(\geq \#_)$.

Naopak, nesprávně uzávorkovaná posloupnost tuto vlastnost nemá, a tedy v ní existuje alespoň jedno takové místo, kde počet pravých závorek je ostře větší než počet levých závorek. Takových míst může být v posloupnosti i více. Rozřízneme tedy posloupnost v místě, kde $\#_) - \#_($ dosahuje maxima a jednotlivé části si označíme popořadě A a B.

Protože posloupnost je vyvážená (tj. obsahuje stejný počet levých a pravých závorek), musí být $\#_(- \#_)$ v podposloupnosti B rovno $\#_) - \#_($ v podposloupnosti A.

Přitom posloupnost B splňuje vlastnost V, jinak by se v ní muselo nacházet maximum $\#_) - \#_($ a naše předchozí rozdělení by neplatilo. V A je jenom

[4] Správné uzávorkování je takové, že každé pravé závorce předchází levá, kterou uzavírá.

o tolik více), o kolik je v B více (, a proto je i celá posloupnost BA správně uzávorkovaná.

Zbývá dokázat, že vždycky najdeme maximum $\#_{)} - \#_{(}$. To je ale snadné, protože posunem o jedno místo v posloupnosti se změní $\#_{)} - \#_{(}$ právě o jedna a zároveň $\#_{)} - \#_{(}$ je na začátku i na konci posloupnosti 0, tedy musí existovat alespoň jedno maximum. Existuje-li jich více, zvolíme jedno libovolně.

Honza

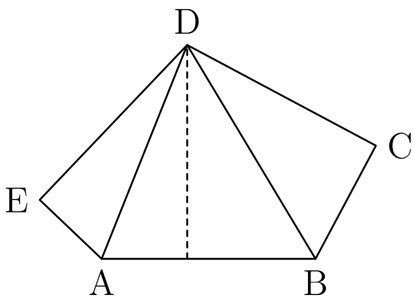
Úloha 1.2 – Pětiúhelník (3b)

Zadání:

Vězení pro geniální jedince je velmi zvláštně utvářená budova. Kupříkladu místnost, v níž nyní dlí Riki, je pětiúhelníkového tvaru. Pro tento pětiúhelník navíc platí, že tři z jeho stran (dvě sousední a jedna protější) mají stejnou délku, která také odpovídá součtu délek zbylých dvou stran. Dále je známo, že úhel, který svírá každá z kratších stran s přilehlou z dvojice sousedících dlouhých stran, je pravý. Určete obsah tohoto pětiúhelníku, je-li délka každé ze tří stejně dlouhých stran 2 m.

Je dodržena minimální plocha na jednoho vězně?

Řešení:



Pětiúhelník označíme stejně jako na obrázku $ABCDE$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = |DE| = 2\,\mathrm{m}$. K řešení můžeme přistupovat více způsoby. Někteří se snažili obsah nějak přímo spočítat. To dá trochu práce, ale občas to k cíli vede. My si ukážeme pěknější a trochu geometrické řešení.

Pětiúhelník si rozdělíme na trojúhelníky EAD, ABD a BCD. Dále označme $|EA| = k$, odtud platí $|BC| = 2-k$. Trojúhelníky EAD a BCD jsou pravoúhlé, jejich obsah tedy vyjádříme snadno.

$$S_{EAD} + S_{BCD} = \frac{2 \cdot k}{2} + \frac{2 \cdot (2-k)}{2} = 2\,\mathrm{m}^2.$$

Nyní si všimneme, že pokud trojúhelníky EAD a BCD „slepíme“ tak, aby se dotýkaly jejich strany ED a CD, dostaneme trojúhelník se stranami délek $|AD|$, $|BD|$ a 2. Místo slepení si můžeme také představit otočení kolem bodu D o úhel $\angle CDE$. Tedy nově vzniklý trojúhelník je shodný s trojúhelníkem ABD. Proto jsou jsou si rovny i jejich obsahy a platí

$$S_{ABD} = S_{EAD} + S_{BCD} = 2\,\mathrm{m}^2.$$

Obsah celého pětiúhelníku potom je

$$S_{ABCDE} = S_{EAD} + S_{ABD} + S_{BCD} = 4\,\mathrm{m}^2.$$

Nyní máme úlohu vyřešenou a můžeme se zamyslet nad doplňující otázkou. Podle doporučení evropské Rady pro předcházení mučení (CPT) by minimální plocha pro ubytování jednoho vězně neměla být v žádném případě menší než námi dopočítané $4\,\mathrm{m}^2$. Doporučená velikost cely na vězně je $6\,\mathrm{m}^2$.[5] V Česku jsou za standardní plochu považovány $4\,\mathrm{m}^2$ na osobu. Vzhledem k přeplněnosti věznic není ale vždy dosahováno ani této hodnoty.[6] V každém případě minimální plocha pro Rikiho celu dodržena byla.

Kuba

Úloha 1.3 – Metahlavolam (4b)

Zadání:

U soudu je přítomen soudce, obhájce a žalobce. Žalobce i obhájce může být buď pravdomluvný, nebo lhář.[7] Když se žalobce a obhájce vyjadřovali o vině či nevině Rikiho, pronesli následující tvrzení:

Žalobce: „Riki je vinen a v minulosti spáchal i jiné zločiny.“

Obhájce: „Riki je nevinný a žalobce je lhář.“

Soudce nyní položil otázku, na kterou předem znal správnou odpověď, a jeden ze dvou právníků (žalobce nebo obhájce) odpověděl. Soudce tak zjistil, zda je dotyčný pravdomluvný či lhář, a tedy je-li Riki vinen či nikoli.

Zjistit, zda je Riki vinen, dáváme za úkol i vám, milí čtenáři. Jistě jste si však všimli, že zatím nemáte dostatek informací, abyste úlohu vyřešili, protože nevíte, kdo odpovídal a jak. To však vědět nepotřebujete, protože vám prozradíme ještě jednu věc: „Neexistuje způsob, jak určit, zda by mohl soudce o vině či nevině Rikiho rozhodnout, kdyby na soudcovu otázku odpověděl druhý právník, než ten, který odpovídal.“

Nyní už můžete určit, zda je Riki vinen, či nikoli. Jak to tedy je? A víte, který ze dvou právníků na otázku odpověděl? A zda byl pravdomluvný či lhář?

Řešení:

Podívejme se na situaci, kdy soudce položil otázku a jeden z právníků odpověděl. Máme 4 možnosti, jak situace vypadala:

1. Odpověděl žalobce a lhal.
2. Odpověděl žalobce a mluvil pravdu.
3. Odpověděl obhájce a lhal.
4. Odpověděl obhájce a mluvil prav.

Co to znamená z hlediska předchozích výroků právníků?

1. Riki být vinen může i nemusí (záleží na tom, v které části výpovědi žalobce lhal).
2. Riki je vinen.
3. Pokud obhájce lhal pouze v první části výroku, je Riki vinen, přičemž druhá část výroku skutečně může být pravdivá, protože žalobce mohl lhát jen ve druhé části svého výroku. Pokud obhájce lhal pouze ve druhé části, je žalobce pravdomluvný, tudíž je Riki vinen, jak tvrdí

[5] http://www.cpt.coe.int/documents/pol/1998-13-inf-eng.htm

[6] http://www.komora.cz/download.aspx?dontparse=true&FileID=5647

[7] Každý výrok pravdomluvného je pravdivý, každý výrok lháře je nepravdivý.

žalobce, ale potom nutně musela být nepravdivá i první část obhájcova výroku. V obou případech ovšem dostáváme, že Riki je vinen.

4. Riki je nevinný. (A žalobce je lhář, což je za těchto okolností pravda, protože ohledně viny Rikiho lhal.)

Kterého právníka se soudce ptal?

Když se podíváme na analýzu případů výše, vidíme, že pokud se soudce zeptal obhájce, tak mohl jednoznačně rozhodnout o vině Rikiho, ať tázaný lhal či nikoli. Zeptal-li se žalobce, tak nemůžeme určit, zda je Riki vinen, či nikoli. Ze zadání však víme, že to (díky poslední informaci) určit umíme. Proto se soudce ptal obhájce.

Jak mu odpověděl?

V případě, že je obhájce pravdomluvný, tak žalobce (dle 2. části obhájcova výroku) je lhář, tudíž bychom uměli určit, zda je Riki vinen, či není, i kdyby se soudce zeptal žalobce-lháře. Pokud obhájce lže, tak nevíme, zda je žalobce pravdommluvný, nebo lže také (stačí, že lže ve 2. části výroku), tudíž kdyby se soudce zeptal žalobce v tomto případě, tak o vině či nevině Rikiho rozhodnout nemůže. A takováto situace dle zadání přesně nastala, tudíž objájce lhal.

Navíc víme, že ať už obhájce lhal či nikoli, vyplynulo z toho, že Riki je vinen. Tudíž správné řešení je, že Riki je vinen, soudce se ptal obhájce a ten lhal.

Alča

Úloha 1.4 – Útěk po Bondovsku (4b)

Zadání:

Jakou zbraň by asi 10 kg *vážící Riki potřeboval, aby mu tento plán (skok z okna) vyšel? Stačila by mu běžná policejní zbraň a nebo samopal na to, aby se vznášel ve vzduchu? A co kulomet? A kanón? (Nezapomeňte, že takový kanón už vzhledem k Rikimu také něco váží a musí udržet oba.) A co laserové dělo z Hvězdných válek? A co kdyby stráž připravil jen o luk a šípy? Nápadům na zbraně ani bonusovým bodům se meze (skoro) nekladou. Úplně nejlepší je ale zbraň Z s kadencí K, náboji N a střelcem S, tedy řešení obecné.*

Řešení:

Celkom šikovne sa do úlohy pustila Markéta Vohníková, keď využila *zákon zachovania hybnosti*, ktorý hovorí, že hybnosť uzavretej sústavy (na ktorú nepôsobia vonkajšie sily) je nemenná. Takouto uzavretou sústavou je aj sústava Riki so zbraňou-náboj, pretože sila vystreľujúca náboj je sila vnútorná a teda hybnosť sústavy nemení. Správne namietnete, že na túto sústavu ale vonkajšia sila pôsobí. Touto silou je sila tiažová $F_G = mg$. Zmena hybnosti sústavy je potom

$$\Delta p = mg\Delta t\,, \tag{u1.4.1}$$

kde g predstavuje miestne tiažové zrýchlenie a Δt časový úsek – zmena rýchlosti za čas Δt je $\Delta v = g\Delta t$. A čo sa inak deje s hybnosťou v našej „uzavretej“ sústave? Celková hybnosť tesne pred výstrelom je v tejto sústave nulová, preto aj hybnosť tesne po výstrele bude nulová:

$$0 = (m_\mathrm{R} + m_\mathrm{z})v_\mathrm{n} = (m_\mathrm{n})v_\mathrm{u}\,, \tag{u1.4.2}$$

kde m_R je hmotnosť Rikiho, m_z je hmotnosť zbrane, m_n je hmotnosť náboja, v_n je rýchlosť spätného nárazu a v_u je ústťová rýchlosť zbrane (rýchlosť, ktorou vylieta náboj z hlavne). Ak zo vzťahu (u1.4.2) vyjadríme v_n

$$v_\mathrm{n} = \frac{m_\mathrm{n} v_\mathrm{u}}{m_\mathrm{R} + m_\mathrm{z}}\,, \tag{u1.4.3}$$

a túto rýchlosť, ktorú Rikimu dodá jeden vystrelený náboj, vydelíme dobou medzi dvomi nábojmi T, čo je prevrátená hodnota kadencie k, takže vlastne vynásobíme kadenciou, dostaneme priemerné zrýchlenie Rikiho smerom nahor

$$a = \frac{m_\mathrm{n} v_\mathrm{u}}{m_\mathrm{R} + m_\mathrm{z}} k\,. \tag{u1.4.4}$$

Takže teraz vôbec nemusíme počítať s vonkajšou silou pôsobiacou na sústavu, ale stačí, aby toto zrýchlenie bolo prinajmenšom rovnaké, ako tiažové zrýchlenie $a \geq g$. V takomto prípade vie Riki prinajmenšom udržiavať rýchlosť, ktorú nabral pred prvým výstrelom, v prípade $a > g$ sa môže dokonca zahrať na raketu… Lenže, kto vysoko lieta, hlboko padá, keď mu dôjdu náboje.

Opäť zaujímavé to začne byť v momente, keď zistíme, že Riki ukradol zbraň predsa len slabšiu a platí $a < g$. Musí sa bezpodmienečne zabiť? To záleží na rýchlosti dopadu v_d a na tom, z akej výšky h Riki skáče. Pre rýchlosť dopadu z výšky h si môžeme ľahko odovodiť[8]

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{2hg}\,. \tag{u1.4.5}$$

V našom prípade dodatočné zrýchlenie znižuje „pozorované“ tiažové zrýchlenie a tým aj rýchlosť dopadu. Takže môžeme písať

$$\begin{aligned} v_\mathrm{d} &= \sqrt{2h(g-a)}\,,\\ v_\mathrm{d} &= \sqrt{2h\left(g - \frac{m_\mathrm{n} v_\mathrm{u}}{m_\mathrm{R} + m_\mathrm{z}} k\right)}\,. \end{aligned} \tag{u1.4.6}$$

Čo si po dosadení rýchlosti v_n podľa (u1.4.3) môžeme prepísať na

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{2h(g - k v_\mathrm{n})}\,. \tag{u1.4.7}$$

Markéta Vohníková ďalej navrhuje stanoviť maximálnu prípustnú v_d ako $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, čo zodpovedá pádu z výšky asi desať metrov, alebo teda z výšky

[8] Zo vzťahov pre dráhu a rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu v závislosti na čase, alebo zo zákona zachovania (mechanickej) energie.

tretieho poschodia a s týmto limitom počítať maximálnu možnú hĺbku skoku pre danú zbraň.

Hurá na konkrétne prípady: Pištoľ CZ 75 veru príliš nepomôže, pridá nejakých 30 cm k bezpečnej výške. Naproti tomu samopal AK-47 zvýši bezpečnú výšku z necelých desiatich metrov na šestnásť. S československým samopalom Vz. 58 sa dostaneme už cez dvadsať metrov, ale lietať stále nemôžeme. Poobhliadneme sa teda po guľometoch a skočme rovno na tie ťažké. Tak napríklad americký Browning AN/M2 už na lietanie tesne stačí, aj keď váži cez 40 kg. A poďme ešte ďalej, známy minigun GAU-17/A tiež s Rikim nemá problémy, ťažký M61 Vulcan Rikiho spokojne odpáli snaď aj do vesmíru, aj keď sám váži cez 100 kg a napokon najťažšia váha, GAU-8 Avenger z protitankového lietadla A-10 Thunderbolt II už stráca kvôli svojej hmotnosti 1,3 t, ale stále na lietanie spoľahlivo stačí.

Navrhovanému laserovému delu sa venoval len Mgr.[MM] Jakub Šafin a celkom správne spočítal, že na lietanie by Riki potreboval laser s výkonom 30 GW. Ako na to prišiel? Jednoducho si spočítal, že každý fotón s frekvenciou ν nesie hybnosť $p = h\nu/c$, že táto hybnosť je tiež rovná $\Delta p = \Delta E/c$ a teda, že potrebný výkon je $P \geq cgm_{\mathrm{R}}$ (celkom správne predpokladal, že až taký laser bude, bude ako každá správna futuristická zbraň veľmi ľahký).

No a teraz špeciálne pre tých z vás, ktorí sa chcú niečo naučiť. Viacerí ste mimovoľne používali tvrdenie $F = \Delta p/\Delta t$, čo je ale skoro *prvá veta impulzová*[9]

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{u1.4.8}$$

ktorá sa dá slovne vyjadriť tak, že časová zmena hybnosti je rovná pôsobiacej sile. Vektory si nevšímajme, budeme sa hýbať len po priamke („voľným pádom“). Hybnosť je celkom všeobecne $p = mv$ a pôsobiaca sila je jednak sila tiažová $F_G = mg$, pokiaľ sa pohybujeme tak blízko povrchu Zeme, že ju môžeme považovať za konštantnú, spolu so silou spätného rázu $F_{\mathrm{r}} = \mu v_{\mathrm{r}}$, kde μ je časový úbytok hmotnosti (v prípade s nábojmi $\mu = m_{\mathrm{n}} \cdot k$). Dosaďme teraz tieto hodnoty do prvej vety impulzovej (u1.4.8):

$$\mu v_{\mathrm{r}} - gm(t) = \frac{\mathrm{d}m(t)v(t)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{u1.4.9}$$

no a teraz derivujme. Celkom všeobecne sa s časom mení aj rýchlosť Rikiho, aj jeho hmotnosť – ubúdajú mu náboje. Bodkou značíme, ako obvykle, časovú deriváciu.

$$\mu v_{\mathrm{r}} - gm(t) = -\mu v(t) + m(t)\dot{v}\,. \tag{u1.4.10}$$

Zaoberajme sa najprv zjednodušeným prípadom, čiže pohybom ďaleko od akéhokoľvek telesa ($g = 0$). Zároveň predpokladajme, že hmotnosť sa Rikimu mení

[9] Druhá veta impulzová je podobná. Hovorí, že časová zmena momentu hybnosti je rovná momentu pôsobiacej sily, čiže $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$. Na praktické použitie sa pozrite do čísla XIV/5 na stranu 5.

pomaly, $\mu \approx 0$, takže vynecháme prvý člen na pravej strane. Dostávame

$$\mu v_{\mathrm{r}} = m(t)\dot{v}\,. \qquad \text{(u1.4.11)}$$

Po predelení hmotnosťou m môžeme rovno integrovať podľa času, čo nie je nič desivé, na ľavej strane integrujeme $1/m$ na $\ln m$ a na pravej $\dot{v}$ na v. Dostávame tak po dosadení hornej a dolnej medze v určitom integrále (teda koncovej a počiatočnej hmotnosti):

$$\Delta v = \mu v_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_{\text{zač.}}}{m_{\text{konc.}}}\,, \qquad \text{(u1.4.12)}$$

čo je slávna Ciolkovského raketová rovnica, ktorá udáva, akú rýchlosť získa raketa tým, že sa postupne rýchlosťou μ zbaví hmotnosti $m_{\text{zač.}} - m_{\text{konc.}}$, ktorú odvrhne rýchlosťou v_{r}.

Pokiaľ teraz započítame aj konštantné gravitačné pole, skoro nič sa nezmení, len na pravú stranu riešenia pribudne člen $-g\Delta t$. Riešenie ešte zložitejších verzií (nezanedbateľné μ) už nebudeme rozoberať.

Jeffer

Úloha 1.5 – Booleovský výraz (2b)

Zadání:
Zjednodušte výraz $F = (X + \overline{Y} \cdot Z) + \overline{(X + \overline{Y} \cdot Z)} \cdot (X \cdot T + Z)\,.$

Řešení:
Při zjednodušování výrazu můžeme postupovat různými způsoby. Nejjednodušší je si všimnout, že výraz můžeme přepsat do tvaru $F = A + \overline{A} \cdot B$, kde $A = X + \overline{Y} \cdot Z$ a $B = X \cdot T + Z$. Tento výraz můžeme přepsat na jednoduchý tvar $F = A + B$, neboť pokud $A = 1$, tak $F = 1 + \overline{1} \cdot B = 1$ a pokud $A = 0$, tak $F = 0 + \overline{0} \cdot B = B$, což odpovídá tomu, že $F = A + B$.

Výraz můžeme zjednodušit $F = X + \overline{Y} \cdot Z + X \cdot T + Z$ a pak jej dále upravit $F = X \cdot (1 + T) + Z \cdot (\overline{Y} + 1)\,.$ Rozborem případů můžeme nahlédnout, že pro libovolné C platí $C + 1 = 1$. Pak $X \cdot (1 + T) = X$ a $Z \cdot (\overline{Y} + 1) = Z$. Výraz tedy můžeme upravit do finální podoby $F = X + Z\,.$

(R)adim

Seriál o číslicových obvodech

III. díl – Co to jsou číslicové obvody?

V předcházejících částech našeho seriálu jsme si položili jisté matematické základy pro práci s číslicovými obvody. Část z nich nyní využijeme při našem dalším putování. V tomto díle si ukážeme, co vlastně chápeme číslicovými obvody.

Co to jsou číslicové obvody?

Číslicovými obvody obvykle chápeme elektronické součástky, jejichž výstupy a vstupy nabývají hodnot logické nuly či logické jedničky. Tyto signály jsou realizovány jistou hodnotou elektrického napětí.

Podle jednoho ze standardů můžeme mít logickou nulu definovánu jako napětí od 0 do 0,8 V a logickou jedničku jako napětí od 2 do 5 V. Napětí v intervalu od 0,8 do 2 V představuje tzv. zakázaný pás. Pokud takové napětí přivedeme na vstup číslicového obvodu, nemůžeme říct, co se bude dít a co dostaneme na výstupu. Proto se tomu raději vždy vyhneme.

V katalogu s elektronickými součástkami můžeme zjistit, že se vyrábí celé řady integrovaných obvodů[10] realizující logické funkce. V jednom takovém integrovaném obvodu nalezneme obvykle několik tzv. hradel, které představují různé logické operace typu logického součtu, součinu… V případě, že sestavujeme elektrický obvod, tak jej nejdříve znázorníme pomocí tzv. schématu. Jednotlivá hradla znázorníme pomocí symbolů. Základní schematické značky pro hradla jsou znázorněna na obrázku c3.1. Použití kolečka na výstupu (resp. vstupu) znamená, že je daný výstup (resp. vstup) invertován.

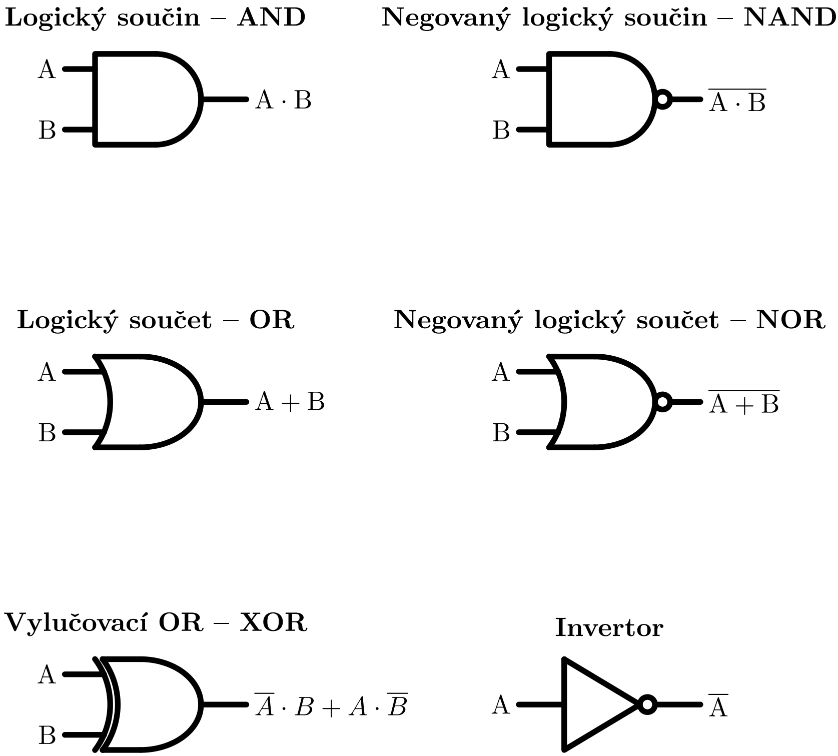
Z hradel můžeme skládat obvody, které rozdělíme do dvou skupin. První z nich jsou kombinační obvody. Jedná se o obvody, jejichž výstup (výstupy) závisí pouze na aktuální hodnotě vstupů. Naproti tomu máme sekvenční obvody, jejichž výstup (výstupy) závisí také na předchozím stavu obvodu. Příkladem kombinačního obvodu je například obvod, který aritmeticky sečte čísla na vstupu. Sekvenční obvody si můžeme představit například jako jednoduchou paměťovou buňku. O sekvenčních obvodech si více povíme dále.

Při konstrukci zapojení s číslicovými obvody nesmíme zapomínat na několik pravidel. První je, že žádný ze vstupů nesmíme nechat nezapojený. Pokud by se tak stalo, neměli bychom na vstupu definovánu hodnotu, a tak by také výstup nebyl definován. Dále nesmíme zapomínat na napájení obvodů. To je však již spíše technický problém, který budeme řešit později.

Nyní si ukážeme příklad zapojení s číslicovými obvody. Na obrázku c3.2 je znázorněno zapojení, které představuje operaci

$$g = b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot d\,,$$

[10] Integrované obvody obvykle vypadají jako černé pouzdro ze kterého trčí ve dvou řadách vývody.



Obr. c3.1 – Schématické značky základních typů hradel dle normy ASA.

na kterém jsme si v minulém díle ukazovali použití Karnaughových map.

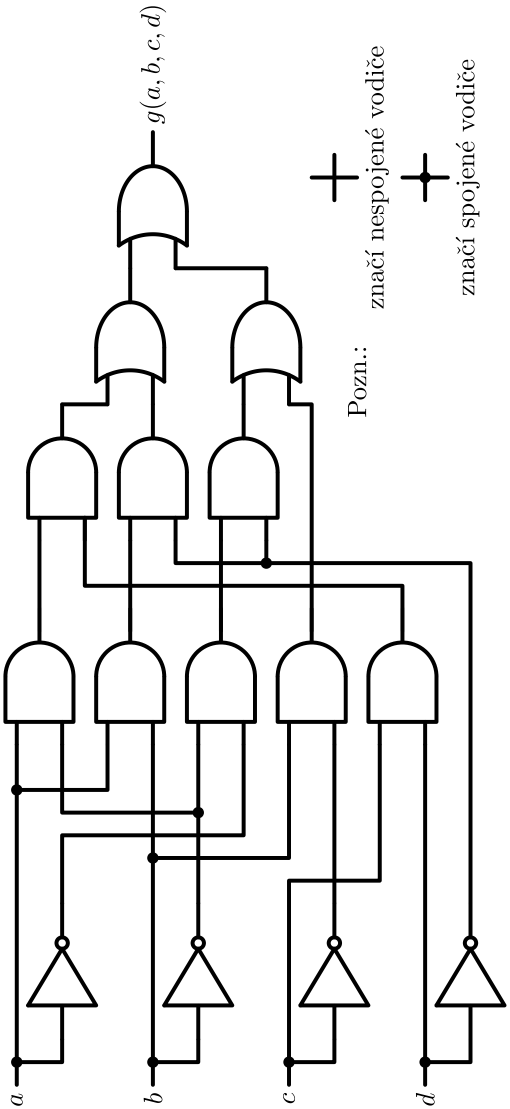
Sekvenční obvody

Jak jsme nastínili výše, tak sekvenčními obvody chápeme zapojení, kde výstup číslicového obvodu nezávisí pouze na vstupu, ale také na předchozím stavu obvodu. Příkladem nám bude tzv. R–S klopný obvod. Jedná se o dvojici hradel NOR, přičemž výstup každého z nich je přiveden na vstup toho druhého.[11] R–S klopný obvod má dva vstupy – R (reset) a S (set). Dále má dva výstupy, výstup Q a $\overline{\mathrm{Q}}$, kde druhý z výstupů je pouze negací toho prvního. Obvod je znázorněn na obrázku c3.3.

Pro obvod můžeme napsat jednoduché vztahy

$$\mathrm{Q} = \overline{\mathrm{R} + \overline{\mathrm{Q}}}\,, \quad \overline{\mathrm{Q}} = \overline{\mathrm{S} + \mathrm{Q}}\,.$$

[11] V některé literatuře můžeme nalézt konstrukci R–S klopného obvodu pomocí dvojice hradel NAND, které mají vstupy $\overline{\mathrm{R}}$ a $\overline{\mathrm{S}}$; jedná se o ekvivalentní zapojení, což snadno uvidíme, pokud si vzpomeneme na De Morganova pravidla.

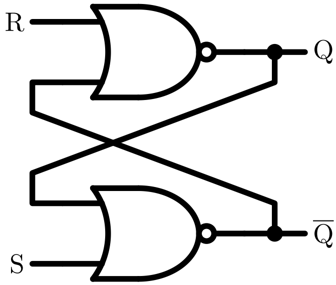


Obr. c3.2 – Schéma zapojení realizující operaci
$g = b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot d$.

Pokud je S a R ve stavu logické nuly, tak se v obvodu nic neděje, neboť se nulové signály S a R neprojeví. Dostaneme tak vztahy $\mathrm{Q} = \overline{\overline{\mathrm{Q}}}$ a $\overline{\mathrm{Q}} = \overline{\mathrm{Q}}$. Zachová se nám předchozí stav na výstupu.

Pokud však jeden ze signálů, řekněme že S, změníme na logickou jedničku, pak $\overline{\mathrm{Q}} = \overline{1 + \mathrm{Q}} = 0$ a $\mathrm{Q} = \overline{0 \cdot 0} = 1$. Změníme stav obvodu tak, že $Q = 1$ a $\overline{Q} = 0$. Pokud pak opět přivedeme na S logickou nulu, tak se nám výstup nezmění. V případě, že na R přivedeme logickou jedničku, pak $\mathrm{Q} = \overline{1 + \overline{\mathrm{Q}}} = 0$

a $\overline{\mathrm{Q}} = \overline{0 \cdot 0} = 0$, dostaneme opačný stav. Pokud bychom jak na R, tak na S přivedli logickou jedničku, tak by se nám obvod rozkmital, neboť bychom jej „stále zapínali a vypínali“.



Obr. c3.3 – Schéma R–S klopného obvodu.

Tímto ukončíme tento díl seriálu. Příště se můžete těšit na složitější, nejen sekvenční obvody. Pokud by vám něco v tomto seriálu nebylo jasné, tak se nebojte zeptat e–mailem na `radim@matfyz.cz`.

(R)adim

Úloha 3.5 – Černá krabička (3b)

Představte si černou krabičku, která má dva vstupní bity A_0 a A_1, dva výstupní bity Y_0 a Y_1 a reset R. Na vstup můžeme přivádět signál, který představuje čísla od 0 do 3 zapsané v dvojkové soustavě. Na výstupu pak nalezneme největší číslo, které se doposud objevilo na vstupu.

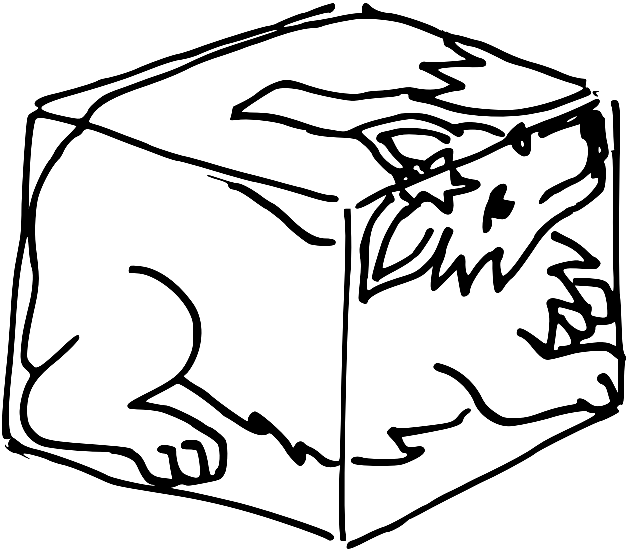
Resetovací signál je v klidu ve stavu logické nuly. Logická jednička na resetovacím signálu nastaví výstupní bity Y_0 a Y_1 na hodnotu logických nul.

Nakreslete schéma zapojení, které by mělo stejné vlastnosti jako výše popsaná černá krabička.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	s1	+	$\sum_0$
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ J. Kubečka	4.	67	3	1	1	4	6	0	2	0	17
2–4.	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Cífka	3.	37	3	1	2		9		1	0	16
	Bc.$^{\text{MM}}$ D. Gromada	4.	16	3	3		4		4	2	0	16
	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Mikel	3.	16	3	2	4	3			2	2	16
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ J. Šafin	3.	25	3	3		5				1	12
6.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Poppr	1.	17	3	3	2				1	2	11
7.	Bc.$^{\text{MM}}$ A. Šťastná	2.	10	3	3		2			1	1	10
8–11.	Bc.$^{\text{MM}}$ T. Bárta	4.	15	3		4				2	0	9
	J. Greššák	3.	9	3	2	1	1			2	0	9
	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Kratochvíl	4.	26	3	3	3					0	9
	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Mička	3.	23	3	3	1				2	0	9
12.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Töpfer	4.	33	3	3					2	0	8
13.	Mgr.$^{\text{MM}}$ R. Kubíček	3.	20	3	1	1	2				0	7
14–19.	O. Benedikt	3.	6	3	1	2					0	6
	J. Dolejší	1.	6	2	3						1	6
	Mgr.$^{\text{MM}}$ E. Gocníková	4.	35		2	4					0	6
	M. Lieskovský	2.	6	3	1		1			1	0	6
	Prof.$^{\text{MM}}$ Š. Šimsa	3.	273						6		0	6
	Mgr.$^{\text{MM}}$ P. Vincena	1.	21		3	2					1	6
20.	M. Vohníková	2.	4		1		3				0	4
21.	Mgr.$^{\text{MM}}$ B. Böhmová	4.	45			3					0	3
22–24.	E. Harlenderová	1.	2		2						0	2
	J. Kadlec	1.	6	0			2			0	0	2
	M. Zmeškal	1.	2	0	1	1					0	2
25–27.	M. Calábková	1.	1		1						0	1
	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Langerová	1.	12		1						0	1
	P. Turnovec	1.	1		1						0	1
28.	T. Vysušil	1.	0	0							0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF	*Telefon:*	+420 221 911 235
Ke Karlovu 3	*E-mail:*	`MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
121 16 Praha 2	*WWW:*	`http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.