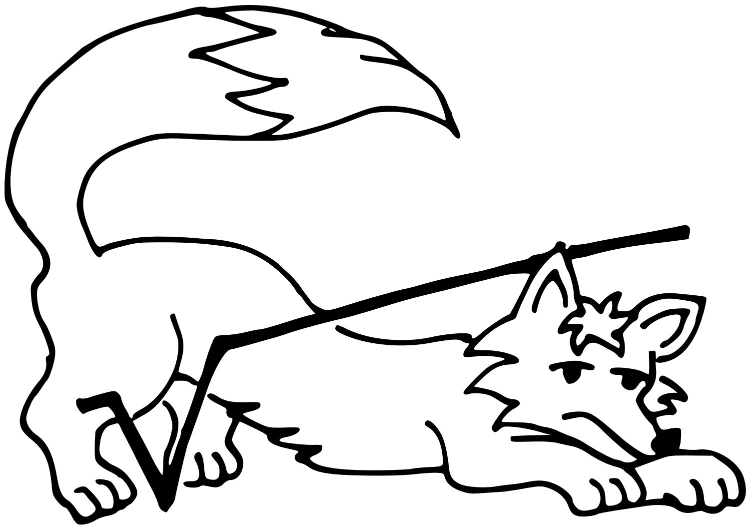
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XVII / Číslo 6



Milí kamarádi,

čas už opět utíká mílovými kroky a vám se do rukou dostává letošní předposlední číslo, ve kterém naleznete letošní poslední sérii příkladů. Doufáme, že se vám bude zadání líbit více než našemu fiktivnímu řešiteli.

Možná jsme si již na úvodní straně všimli, že v tomto čísle nenaleznete další díl populárního seriálu o Pythonu. Seriál se k vám vrátí až v posledním čísle tohoto ročníku svým závěrečným dílem. Čekání na něj si můžeme zkrátit testováním her od našich řešitelů. Více informací můžete nalézt na straně 14.

Chtěli bychom vám ještě jednou připomenout, že do konce května můžete posílat řešení témátek a zasloužit si tak vynikající dort. Jako inspirace vám může sloužit pěkný článek od Mgr.MM Josefa Svobody o Rikiho bloudění na straně 5.

Příjemné čtení a hluboký kulturní zážitek vám přejí

Organizátoři M&M

Zadání úloh

Termín odeslání šesté série: 6. 6. 2011

Úloha 6.1 – Prvočíselná posloupnost (4b)

A vida, vyšlo nové M&Mko. Obrázek na úvodní stránce vypadá celkem pěkně, tak jsem zvědavý, co zase vymysleli za příklady.

A už je to tady zase. Prý mějme posloupnost

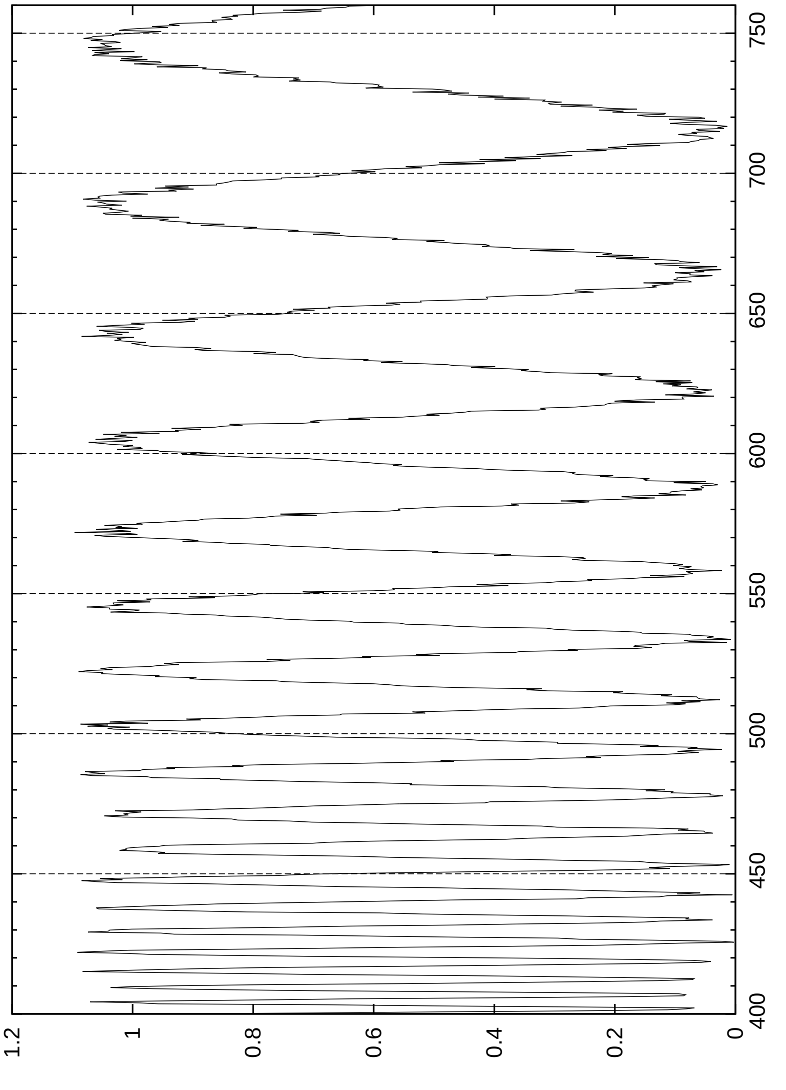
$$a_n = \sqrt{24n+1},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

To snad nemyslí vážně. Je sice pravda, že tato posloupnost na první pohled obsahuje všechna prvočísla mimo 2 a 3, ale to je neomlouvá. I když dokázat to tvrzení tak jednoduché není. Jak bych měl postupovat?

Úloha 6.2 – Interference (5b)

A vida, fyzikální příklad opět za pět bodů. To určitě zase neodhadli obtížnost jako u toho divného kyvadla, které nikdo nedopočítal do konce. Asi ani nebudu číst zadání, stačí se podívat na obrázek a je mi úplně jasné, že to bude zase něco šíleného.

Počkat! Ten obrázek mi ale něco připomíná. Je stejný jako ta závislost intenzity prošlého záření na vlnové délce, co jsme naměřili při laborkách. Měli jsme sklo a na tom jednomikrometrouvou vrstvičku čehosi tmavého. Posvítili jsme na to a pak zanalyzovali. Co to jen bylo za vrstvičku? A jaký měla index lomu? To už si asi nevzpomenu, ale mělo by to jít vyčíst z obrázku, ne?



Obr. u6.2.1

Úloha 6.3 – Anagramy (4b)

Celkem se těším na informatickou úlohu. Minule to byla pohoda, tak jsem zvědavý, co po mně budou chtít tentokrát. VELKÉ LOSINY? NOVÉ MĚSTO NA MORAVĚ? To mě určitě čeká problém obchodního cestujícího. Jako bychom si toho na soustředění neužili dost.

A ne, ono to jsou anagramy. Tedy česky řečeno přesmyčky. U daného slova nebo sousloví můžu přeskládat písmenka tak, že dostanu jiné smysluplné slovo nebo sousloví. Třeba VELKÉ LOSINY můžu převést na VLONI KYSELÉ a NOVÉ MĚSTO NA MORAVĚ převedu zase na SAMETOVĚ NORMOVANÉ.

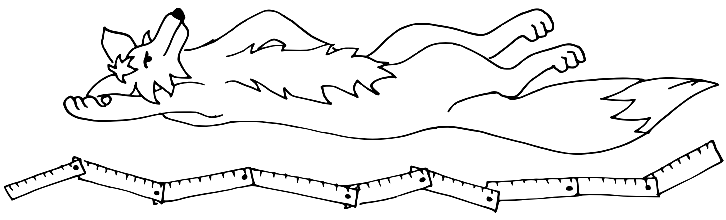
Jak tady píšou, tak nám dali slovník českých slov. Vypadá to na fakt velký soubor, musí mít několik stovek megabytů. Na každém řádku je jedno slovo. A naším úkolem je vymyslet a popsat, jak pro dané slovo či sousloví generovat anagramy.

Vzhledem k velikosti slovníku na to rozhodně nepůjdu hrubou silou. Tedy tak, že bych generoval všechny možnosti a testoval bych je proti slovníku. Chtělo by to vymyslet nějaký chytrý algoritmus a nějaké šikovné datové struktury, které mi umožní hledat anagramy co nejrychleji. No jo, a aby toho nebylo málo, tak po mně chtějí časovou a paměťovou složitost mého řešení. Ještě že to nemusím programovat, ale stačí jen popsat algoritmus a použité datové struktury.

Úloha 6.4 – Nefibonacciho posloupnost (2b)

Tak to si snad fakt dělají srandu. Další posloupnost. A hned rekurentní. Prý mějme posloupnost přirozených čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující rekurentní vztah $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Jako by jim nestačilo, že o těch posloupnostech mají tématko. A co chtějí vědět? Prý jestli je možné zvolit a_0 a a_1 tak, aby posloupnost neměla ani jeden člen společný s Fibonacciho posloupností[1].

No, mohli být při tom vymýšlení úloh trochu originálnější. Ale co, snad to bude příští rok lepší… :-)



[1] Fibonacciho posloupnost je definována počátečními hodnotami $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a rekurentním předpisem $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Řešení témat

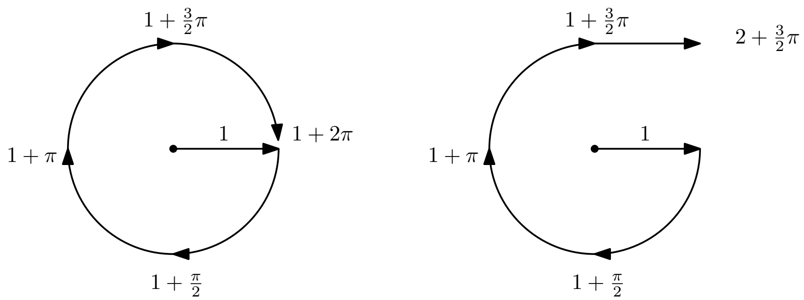
Téma 3 – Ztracen v lese

Bloudění

Mgr.[MM] Josef Svoboda

Nejprve se budu zabývat tím, jak se Riki dostane na cestu vzdálenou 1 km. Nejjednodušší strategie je jít 1 km nějakým směrem a pak po kružnici se středem v počátečním bodě a poloměrem 1 km.

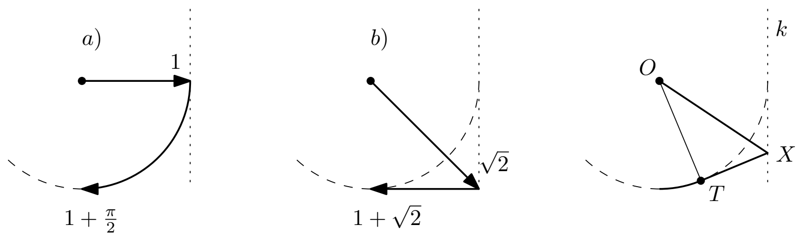
Délka trasy je pak $1 + 2\pi$ kilometrů. Nyní se pokusím tuto jeho strategii vylepšit. Původní strategii pozměním tak, aby se délka trasy snížila.



Obr. t3.3.1

Co kdyby například šel Riki stejně až do místa, kde už ušel $1 + 3/2\pi$ km a pak pokračoval kilometr přímočaře rovnoběžně se směrem prvního kilometru? Cesta se zřejmě zkrátí na $2 + 3/2\pi$ a lišák jistě narazí na cestu, ať je kdekoli.

Konec cesty jsem vylepšil a nyní ještě začátek. Ten zřejmě není optimální, protože místo *a)* lze použít např. *b)* a zjevně $1 + \pi/2 > 1 + \sqrt{2}$.



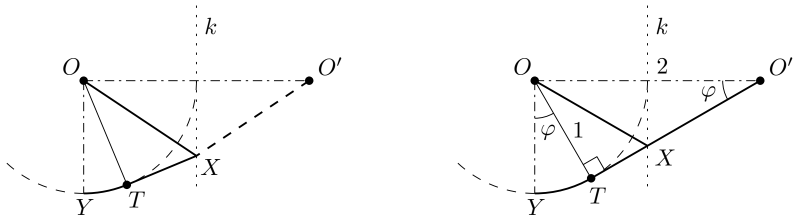
Obr. t3.3.2

Budu tedy hledat nejkratší cestu „tohoto typu“. Má tedy splňovat, že začne v počátku, skončí v bodě, kde Riki původně ušel $1 + \pi/2$ km, dotkne se kolmice na původní směr v bodě, kde lišák ušel 1 km[2] (aby Riki došel na cestu, pokud by vedla tímto směrem) a nepůjde vnitřkem čtvrtkruhu tak, aby narazil na všechny možné cesty vzdálené 1 km.

Nejkratší cesta bude vypadat takto: Lišák nejprve půjde ke kolmici k, pak ke čtvrtkruhu a zbytek cesty půjde po kružnici. Zbývá najít nejlepší místo, kde se dotknout kolmice atd.

Protože dráha po kružnici je delší než přímá dráha, bude nejlepší, když Riki dojde ke kolmici (v bodě řekněme X) a pak půjde po tečně z bodu X ke kružnici (a dále pokračuje po kružnici z bodu T).

Budu chtít najít takový bod X tak, aby $|OX| + |XT|$ bylo minimální.[3] Zobrazím nyní O v osové souměrnosti podle k na bod O'.



Obr. t3.3.3

Zřejmě $|OX| + |XT| = |O'X| + |XT|$ bude minimální, když O', X, T budou ležet v přímce.[4] Trojúhelník OTO' je pravoúhlý, z Pythagorovy věty plyne

$$|O'T| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\,.$$

Bod, kde lišák původně urazil $1 + \pi/2$ označím Y. Stačí zjistit délku oblouku YT kružnice. Ta je rovna hodnotě úhlu $|\angle YOT| = \varphi$. Zřejmě $|\angle YOT| = |\angle OO'T|$ (z podobných trojúhelníků). Platí $\sin\varphi = 1/2$, čili $\varphi = 30^\circ = \pi/6$. Dostávám, že délka této Rikiho cesty je rovna

$$\sqrt{3} + 7/6\pi + 1 \doteq 6{,}39724\ldots \text{ km}.$$

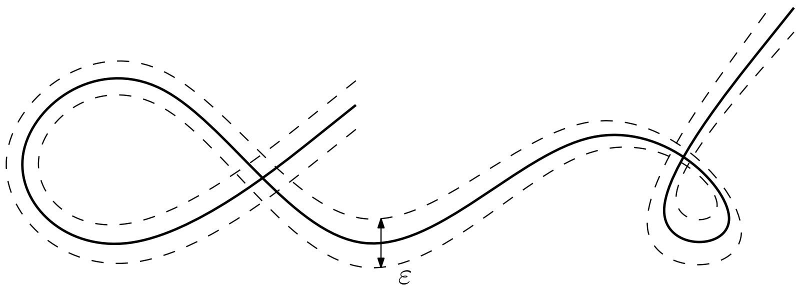
[2] To je špatná věta – dotkne se té kolmice, která je tím bodem vedena, ale nemusí v tom bodě.

[3] *Pozn. red.: Zde se autor dopustil chyby. Do součtu, který minimalizujeme, je potřeba zahrnout i délku oblouku YT.*

[4] *Pozn. red.: Druhá nepřesnost v tomto místě shodou okolností vyrovnává tu první. Korektní by bylo provést předchozí dvě úvahy v opačném pořadí – nejdříve osově zobrazit bod O, až poté minimalizovat součet.*

Nevím, jestli je tato hodnota už optimální, ale lepší se mi zatím nepodařilo získat.

Nyní se budu zabývat strategií Rikiho při snaze dostat se z lesa. Pokud o lese nemám žádnou dodatečnou informaci, musím počítat s rozměry Rikiho, rozměry stromů a podobně. Kdyby totiž byl Riki pouze pohybující se bod (který je slepý, takže se z lesa dostane až tehdy, kdy překročí jeho hranici) a les pouze množina bodů v rovině, mohl by se stát případ na obrázku t3.3.4.



Obr. t3.3.4

Riki půjde po nějaké dráze, jenže zrovna má fakt velkou smůlu a po celé délce jeho libovolné dráhy jeho cestu z obou stran lemuje zakřivená alej o libovolně malé šířce ε. Pokud tedy Riki ujde libovolnou dráhu, vždy umím zvolit ε takové, že obsah lesa, kterým zatím prošel, je menší než S. Pokud má lišák šířku n, určitě se dostane z lesa, pokud ujde S/n kilometrů (a půjde rovně, ne dokolečka).

Zajímavější je otázka, jak se dostat z neděravého, či dokonce konvexního lesa.

Aby se Riki (dále už jen bezrozměrný) dostal z neděravého lesa, musí jít po uzavřené křivce, jinak se zopakuje situace s obecným lesem. Chci tedy uzavřenou křivku s co nejmenší délkou při daném obsahu plochy, kterou ohraničuje. Nevím teď, jak to dokázat, ale tuším, že to je kružnice.[5] Možnou strategií pro Rikiho je tedy opsat kružnici o poloměru $\sqrt{S/\pi}$ (tak, že začínal na obvodu). Délka jeho dráhy je pak

$$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{4\pi S}\,.$$

Pokud je les konvexní, nemusí se Riki trmácet po kružnici, stačí mu ujít po půlkružnici s obsahem S. Aby měla obsah S, musí mít poloměr $\sqrt{2S/\pi}$ a dráha Rikiho bude rovna

$$\pi\cdot\sqrt{\frac{2S}{\pi}} = \sqrt{2\pi S}\,.$$

[5] *Pozn. red.: Tato úloha je známá pod názvem isoperimetric problem a kružnice je skutečně jejím řešením.*

Je vidět, že hodnota pro konvexní les je menší než pro neděravý les[6], protože $\sqrt{2\pi S} < \sqrt{4\pi S}$. Plyne z toho poučení, že by se měly zakládat pouze konvexní lesy, protože se v nich hůře bloudí.

Pepa

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Sada čísel (3b)

Zadání:

Pepa měl letos opravdu zvláštní Vánoce. Představte si, že byste byli v jeho kůži. Hned první dárek, který našel pod stromečkem, byla veliká krabice. Když ji rozbalil, tak zjistil, že dostal sadu ne nutně různých 2011 *reálných čísel.*

Málem se lekl, že je stejná, jako dostal minulý rok. Ale pak si všiml, že tato sada je něčím zvláštní. Kdykoliv nějakých 2010 *čísel ze sady vynásobí a to zbylé k výslednému součinu přičte, vyjde vždy ten samý výsledek.*

Zjistěte, kolik nejvíce mohlo být v Pepově sadě různých čísel.

Řešení:

Pokud máme různá dvě čísla, máme právě dvě možnosti, jak tvořit náš součet:

$$a^x \cdot b^{2010-x} + b = a^{x-1} \cdot b^{2011-x} + a\,,$$

$$a^{x-1} \cdot b^{2010-x} \cdot (a-b) = a-b\,.$$

Protože ale $a \neq b$, můžeme obě strany vydělit

$$a^{x-1} \cdot b^{2010-x} = 1\,.$$

Vezměme si např. $x = 1$. Řešením rovnice pak je dvojice $a =$cokoliv, $b = 1$. Tzn. jedna z možností obsahu krabice je 2010 krát jednička a jedenkrát cokoliv. Tím jsme konstrukčně dokázali, že dvě různá čísla v krabici být mohla.

Pro 3 různá čísla budeme postupovat obdobně. Nechť a, b, c jsou tři různá čísla. Pak existují právě tři varianty, jak vytvořit cílový součet. Vezměme si vždy dvojici:

$$a^x \cdot b^y \cdot c^{2010-x-y} + c = a^{x-1} \cdot b^y \cdot c^{2011-x-y} + a\,,$$

$$a^{x-1} \cdot b^y \cdot c^{2010-x-y} \cdot (a-c) = a-c\,,$$

$$a^{x-1} \cdot b^y \cdot c^{2010-x-y} = 1\,,$$

$$a^x \cdot b^y \cdot c^{2010-x-y} + c = a^x \cdot b^{y-1} \cdot c^{2011-x-y} + b\,,$$

$$a^x \cdot b^{y-1} \cdot c^{2010-x-y} \cdot (b-c) = b-c\,,$$

[6] *Pozn. red.: Podobně jako výše, autor nedokazuje, že tato hodnota je optimální.*

$$a^x \cdot b^{y-1} \cdot c^{2010-x-y} = 1\,.$$

Nyní z výsledků vytvoříme rovnost:

$$a^{x-1} \cdot b^y \cdot c^{2010-x-y} = a^x \cdot b^{y-1} \cdot c^{2010-x-y}\,, \tag{u4.1.1}$$

$$ab = 1\,.$$

Cyklickou záměnou rovnosti (u4.1.1) dostaneme

$$bc = ac = ab = 1\,.$$

Z toho je zřejmé, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ a konečně $c \neq 0$.

Proto když si vezmeme kteroukoliv z rovností $ab = bc$, $bc = ca$ či $ca = ab$, můžeme bez obav obě strany vydělit členem vyskytujícím se na obou stranách rovnice a dostáváme jednu z rovností $a = c$, $b = a$ či $c = b$, což je spor (a, b, c měla být různá čísla).

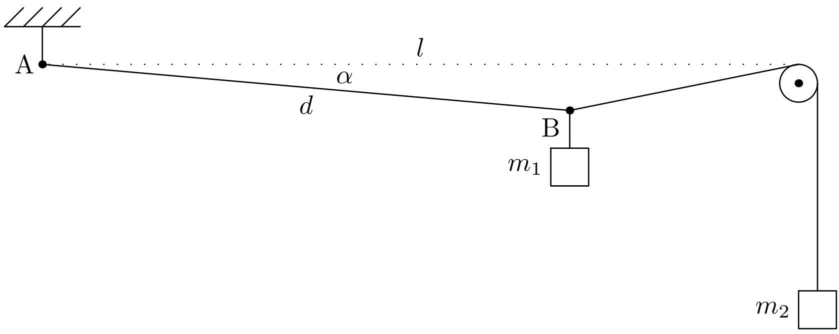
Tím jsme dokázali, že tři různá čísla se v krabici vyskytovat nemohou, tudíž Pepa v krabici měl nejvýše dvě různá čísla.

Lukáš

Úloha 4.2 – Netradiční kyvadlo (5b)

Zadání:

Také další dárek, který Pepa rozbalil, nepatřil mezi něco, co obvykle naleznete pod vánočním stromečkem. Po rozbalení postupoval Pepa podle návodu. K pevnému bodu A (který byl součástí stavebnice) připevnil ideální provázek, na který ve vzdálenosti d přivázal závaží o hmotnosti m_1. Zbývající provázek přehodil přes ideální kladku, která byla ve stejné výšce jako bod A a byla ve vzdálenosti l. Na konec provázku přivázal závaží o hmotnosti m_2. Sestavená stavebnice je znázorněna na obrázku u4.2.1.



Obr. u4.2.1 – Sestavená stavebnice

Pak Pepa celý mechanismus spustil. Na počátku byl provázek mezi bodem A a kladkou vodorovně napjatý ($\alpha = 0$). Jakou rychlost mělo závaží v závislosti na úhlu α? Pro jaký úhel α se závaží zastaví?

Nebojte se poslat jen náznak řešení. K výpočtu složitějších rovnic můžete použít počítač.

Řešení:
K řešení této úlohy můžeme přistupovat dvěma způsoby. Buď budeme diskutovat síly, které nám v našem systému působí, nebo si vzpomeneme na zákon zachování energie. V zadání se nás ptají, jak závisí rychlost závaží na úhlu α. Pokud bychom postupovali prvním způsobem a uvažovali nad silami, které na závaží působí, mohli bychom snadno spočítat zrychlení, ale samotná rychlost (vzhledem k tomu, že se zrychlení mění) by se počítala složitě. Zůstaneme tedy u zákona zachování energie.

Na počátku je systém v klidu. Veškerá kinetická energie, kterou obě závaží získají, pochází ze změny potenciální energie. Můžeme tedy napsat, že

$$E_{k1} + E_{k2} = \Delta E_{p1} - \Delta E_{p2}\,.$$

Kinetické energie těles jsme si označili E_{k1} a E_{k2}. Změny potenciální energie těles máme značeny jako ΔE_{p1} a ΔE_{p1}. Na pravé straně rovnice máme znaménko mínus proto, že těleso s hmotností m_2 pohyb zpomaluje. Jak je už z náhledu jasné, tak musí platit $m_1 > m_2$. Jinak by se sestém nedal do pohybu.

Pro konkrétní hodnotu úhlu α určíme snadno změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_{p1} - \Delta E_{p2} = m_1 g d \sin\alpha - m_2 g k\,, \qquad \text{(u4.2.1)}$$

kde g je tíhové zrychlení a k je vzdálenost mezi tělesem s hmotností m_1 a kladkou, které určíme z kosínové věty jako

$$k = \sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}\,.$$

Určení kinetických energií těles bude složitější. I když by se na první pohled mohlo zdát, že rychlosti obou těles se sobě rovnají, tak tomu tak není. Stačí si problém dobře rozkreslit. Naší snahou proto nyní bude si pro daný úhel α vyjádřit rychlost v_1 na rychlosti v_2. Předpokládejme, že se úhel α změní za malinký časový okamžik Δt o $\Delta\alpha$. Těleso s hmotností m_1 se musí ve vodorovném směru posunout o

$$\Delta x_1 = d(\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha)$$

a ve svislém o

$$\Delta y_1 = d(\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha)\,.$$

Těleso s hmotností m_2 se ve svislém směru posune o vzdálenost, která odpovídá změně velikosti k, tedy

$$\Delta y_2 = \sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos(\alpha + \Delta\alpha)} - \sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}\,.$$

Rychlosti v_1 a v_2 pak snadno určíme jako

$$v_1 = \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_2^2}}{\Delta t}\,, \qquad \text{(u4.2.2)}$$

$$v_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta t}\,. \tag{u4.2.3}$$

Nyní do rovnice (u4.2.2) dosadíme a umocníme ji, dále upravíme

$$v_1^2 \Delta t^2 = d^2(\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha)^2 + d^2(\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha)^2\,,$$

$$\frac{v_1^2 \Delta t^2}{d^2} = \cos^2(\alpha + \Delta\alpha) - 2\cos(\alpha + \Delta\alpha)\cos\alpha + \cos^2\alpha +$$

$$+ \sin^2(\alpha + \Delta\alpha) - 2\sin(\alpha + \Delta\alpha)\sin\alpha + \sin^2\alpha\,,$$

$$1 - \frac{v_1^2 \Delta t^2}{2d^2} = \cos(\alpha + \Delta\alpha)\cos\alpha + \sin(\alpha + \Delta\alpha)\sin\alpha\,.$$

Využijeme vzorce $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ a dostaneme

$$\frac{v_1^2 \Delta t^2}{d^2} = 2 - 2\cos\Delta\alpha\,. \tag{u4.2.4}$$

V tuto chvíli využijeme počítač. Mohlo by se zdát, že bychom měli postupovat analyticky a rovnice jen upravit. Dostali bychom tak závislost v_1 resp. v_2 na α, ale zdání klame. Po chvíli bychom se dostali do slepé uličky a nevěděli, jak rovnice dál upravovat. Pokud bychom se chtěli lépe dobrat analytického výsledku, museli bychom postupovat jinak a využít Lagrangeovy rovnice. Dostali bychom pak diferenciální rovnici druhého řádu. Ta by byla ovšem také obtížně řešitelná a pravděpodobně bychom stejně použili počítač. Ve fyzice nám velmi často matematické postupy pro řešení nějakého problému nepomohou, a tak musíme problém nasimulovat.

Jak budeme postupovat? Zvolíme si nějaký krok Δt a do systému maličko „šťouchneme“ (udělíme tělesu s hmotností m_1 rychlost $v_1(0)$). Při simulaci předpokládáme, že se po nějaký malý časový okamžik Δt nemění rychlost v_1. Těleso s hmotností m_1 se za daný okamžik přesune o vzdálenost $v_1 \Delta t$. V místě, kam jsme se posunuli, určíme rychlost v_2 a z ní pomocí zákona zachování energie rychlost v_1. Následně výpočet opět zopakujeme. Tentokrát už je $\alpha = \Delta\alpha$ (posunuli jsme se o úhel $\Delta\alpha$).

Výpočty provedeme následovně: Pomocí upraveného vzorce (u4.2.4) určíme $\Delta\alpha$

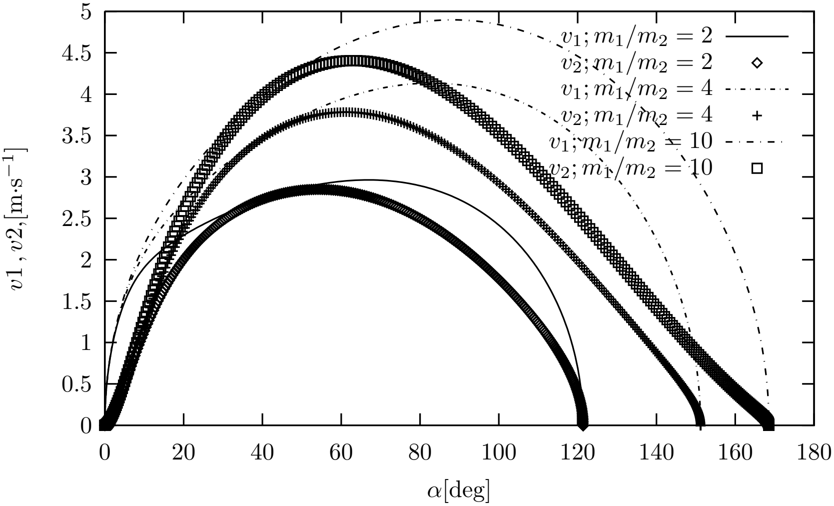
$$\Delta\alpha = \arccos\left(1 - \frac{v_1^2 \Delta t^2}{2d^2}\right)\,.$$

Následně můžeme určit ze vztahu (u4.2.3) rychlost v_2

$$v_2 = \frac{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos(\alpha + \Delta\alpha)} - \sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}}{\Delta t}\,.$$

Upravením zákona zachování energie (u4.2.1) dostaneme

$$v_1 = \sqrt{2\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{m_1}{m_2} g d \sin\alpha - gk - \frac{1}{2} v_2^2\right)}\,.$$



Obr. u4.2.2 – Výsledky simulace závislosti rychlostí v_1 a v_2 na úhlu α pro různé poměry m_1/m_2.

Při úpravě vztahu (u4.2.1) jsme si všimli, že můžeme celou rovnici vydělit m_2 a dále diskutovat pouze poměr hmotností.

V grafu u4.2.2 jsou vyneseny závislosti rychlostí v_1 a v_2 na úhlu α pro různé poměry m_1/m_2. Simulace probíhala pro $l = 2\,\mathrm{m}$ a $d = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Při každé simulaci se provedlo vždy přibližně 4000 kroků. V grafu je zaznamenán každý desátý.

Při simulaci byl použit jednoduchý program, který si můžeme prohlédnout na `http://mam.mff.cuni.cz/zr`. Byla naprogramována výše popsaná tzv. Eulerova metoda. Pokud bychom chtěli dosáhnout lepších výsledků, tak bychom museli použít nějakou složitější metodu, např. Runge–Kuttova metoda.

(R)adim

Úloha 4.3 – Posloupnosti (4b)

Zadání:

Při rozbalování dárků si Pepa vzpomněl na peripetie, které zažil, když sháněl dárek pro svého bratra[7]*. Chtěl mu dát určitou posloupnost nul a jedniček délky n. Požadovanou posloupnost však ne a ne sehnat.*

Musel tak vymyslet algoritmus, kterým by převedl jinou posloupnost nul a jedniček $b_1, b_2, \ldots b_n$ na požadovanou posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_n$. Jak by měl takový algoritmus vypadat, aby provedl co nejméně kroků?

[7] Někdo tvrdí, že to byl dárek pro Pepovu sestru, ba dokonce, že Pepa žádného bratra nemá, ale to naštěstí v tuto chvíli není podstatné.

Jedním krokem rozumíme přepsání všech číslic $b_j, b_{j+1}, \dots b_k$ v nějakém intervalu $[j, k]$, $1 \le j \le k \le n$ na jejich opak (jedničky přepíšeme na nuly a nuly na jedničky).

Řešení:
Prakticky všichni řešitelé popsali správný postup, jak provést kroky k vyrobení vytoužené posloupnosti, jen málo z vás však popsalo, proč je tento počet minimální, což byla také důležitá část řešení.

V každém kroku budeme chtít co nejvíce bitů nastavit na správné hodnoty. Vezmeme si tedy dva nejkrajnější bity (na i–té a j–té pozici), jejichž hodnotu si přejeme změnit. Provedeme krok na intervalu $[i, j]$, a dostaneme stejný příklad zmenšený o dvě pole. Představme si nyní, že mezi i–tým a j–tým bitem existují tři intervaly oddělené dvěma bity, které si přejeme změnit – k–tým a l–tým. Chceme tedy udělat kroky $[i, k]$ a $[l, j]$, jejichž provedení je ovšem ekvivalentní s provedením kroků $[i, j]$ a $[k, l]$. V každém takovém kroku se totiž zbavíme dvou intervalů, které jsme potřebovali přenastavit, ale vyrobíme si jeden nový. Obecně, při přenastavování n intervalů nám vždy ubude pouze jeden. Je tedy jedno, jestli souvislé intervaly špatných bitů převracíme po jednom, nebo všechny najednou – vždy musíme provézt právě tolik kroků, kolik je souvislých posloupností opačně nastavených bitů.

Honza

Úloha 4.4 – Kostičky (2b)

Zadání:
Poslední dárek byl pytlíček s kostičkami. Na každé kostičce byla jedna číslice od nuly do pěti. Když si Pepa tento dárek prohlížel, začal bezmyšlenkovitě sestavovat čísla v šestkové soustavě[8].

Jaký je součet všech čísel šestkové soustavy, v nichž je každá číslice obsažena právě jednou (nula může být na počátku čísla)? Výsledek uveďte v desítkové soustavě.

Řešení:
Počet čísel šestkové soustavy, v nichž je každá číslice obsažena právě jednou, je roven počtu permutací ze šesti prvků, tedy $6! = 720$. Zafixujeme–li si libovolnou číslici na jakékoli pozici, například 0 na poslední pozici, máme $5!$ možností jak uspořádat zbylé číslice na zbylých pěti pozicích. Tedy každá číslice se na každé pozici bude nacházet právě $5! = 120$ krát.

Podobně jako v desítkové soustavě, kde jednotlivé pozice cifer odpovídají mocninám deseti, v šestkové soustavě odpovídá každá z pozic příslušné mocnině šestky, tj. 6^0, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4, 6^5 (bráno odzadu). Součet čísel na poslední pozici tedy bude

$$5! \cdot 0 \cdot 6^0 + 5! \cdot 1 \cdot 6^0 + \dots + 5! \cdot 5 \cdot 6^0 = 5!(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6^0 .$$

Podobně na ostatních pozicích, přičemž se akorát mění příslušná mocnina šestky.

[8] Číslice v této soustavě jsou 0, 1,. . . 5. Číslo $(123)_6$ odpovídá hodnotě 51 v desítkové soustavě.

Nyní již máme všechny potřebné informace k sestavení vztahu pro výsledný součet všech čísel

$$5!(0{+}1{+}2{+}3{+}4{+}5)\cdot 6^0{+}5!(0{+}1{+}2{+}3{+}4{+}5)\cdot 6^1{+}\ldots{+}5!(0{+}1{+}2{+}3{+}4{+}5)\cdot 6^5 =$$
$$= 5!(0{+}1{+}2{+}3{+}4{+}5)\cdot(6^0{+}6^1{+}6^2{+}6^3{+}6^4{+}6^5) = 120\cdot 15\cdot \frac{6^6-1}{6-1} = 16795800\,,$$

kde jsme pro součet mocnin šestky využili vzorec pro součet geometrické řady.

Ke stejnému výsledku bylo možno dojít i pomocí trochu jiných úvah. Například Bc.MM Petra Kubincová si na základě faktu, že na libovolné pozici se stejněkrát vyskytují všechny číslice, určila průměrnou číslici na všech pozicích $(0+1+2+3+4+5)/6 = 2{,}5$. Hledaný součet je pak roven součtu 720, tj. počet všech uvažovaných čísel šestkové soustavy, takovýchto „průměrných“ čísel. Jelikož však nemáme k dispozici cifru 2,5, vezmeme místo součtu 720 „průměrných“ čísel součet 360–ti dvakrát větších čísel, tedy 360 krát 555555 (v šestkové soustavě). Převedeme číslo 555555 z šestkové soustavy do desítkové

$$5\cdot(6^0+6^1+6^2+6^3+6^4+6^5) = 5\cdot\frac{6^6-1}{6-1} = 5\cdot 9331 = 46655\,.$$

Nyní ho již stačí vynásobit 360 a dostáváme hledaný výsledný součet

$$360\cdot 46655 = 16795800\,.$$

Na závěr zde uvedeme ještě vztah odvozený Dr.MM Filipem Hláskem pro hledaný součet čísel soustavy o základu n

$$(n-1)!\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n^n-1}{n-1} = \frac{n!(n^n-1)}{2}\,.$$

Peťa

Úloha 4.5 – Seriál o Pythonu (IV. díl) (3+b)

Zadání:

Dnešní jedinou úlohou je napsat s pomocí PyGame jednoduchou hru nebo jiný grafický interaktivní program. Fantazii a ztřeštěnosti se meze nekladou.

Zadání odpovídá i bodování, které bude spíše jako bodování příspěvku k tématku, body ale dostanete i za jednoduché experimenty. (Dalo by se tedy říci, že úlohou je demonstrovat pochopení a použití PyGame.) Hodnotí se jak samotný program, tak nápad a provedení. Rozhodně si nelamte hlavu se složitou grafikou a hezkou hudbou, úplně postačí třeba jen mnohoúhelníky. Dobře poslouží i fotokoláž nebo dobře umístěný text.

Vzhledem k tomu, že jde o bodovanou úlohu, se snažte používat hlavně vlastní kód. Použití kusů cizího kódu není zakázáno, ale pak nám napište, které části programu jsou vaše, abychom je mohli zhodnotit. Samozřejmě můžete použít kostru programu z našeho webu.

Pokud nám to dovolíte, moc rádi vaše výtvory zveřejníme.

Řešení:

K poslední seriálové úloze přišlo sedm her od pěti řešitelů. Jejich popis, screenshoty a soubory ke stažení můžete najít jako obvykle na stránkách věnovaných seriálu `http://mam.mff.cuni.cz/python/`. Jsou mezi nimi krom nových a nápaditých implementací známých druhů her (například plošinovek a starého dobrého hada) i fyzikální simulace a abstraktní experimenty. Pěknou zábavu!

Tomáš

Výsledková listina

Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t1**	**t3**	**t4**	**s4**	**+**	$\sum_{1}$
1.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ P. Pecha	4.	259	1	3	4	2				6	0	66
2–3.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Bušáková	4.	154	3		3	2					0	54
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Sopoušek	4.	54	2	4	0	2				7	0	54
4.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Š. Šimsa	2.	261	2		3	2				5	1	53
5.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ T. Pokorný	4.	104	3	3	4	2					1	52
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kubečka	3.	46	1		3	2		3			0	46
7.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ F. Štědronský	4.	120	3		4	2					0	42
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Kocián	4.	70	1		4	2		4		8	0	39
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Setnička	4.	35			3	2					0	35
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Grund	1.	30	3	4	2	2					3	30
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ E. Gocníková	3.	29	1	2		0	3				0	29
12–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ F. Hlásek	4.	76	3			2					0	25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Töpfer	3.	25	3		3	2					0	25
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Svoboda	2.	24	3					9			0	24
15–16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Bok	4.	26			1	2					0	22
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Harlenderová	3.	48				2					0	22
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Dung	1.	21									0	21
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Sedláček	3.	19									0	19
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bekrová	4.	71	3	2	3	2					0	18
20–23.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Kochmanová	4.	86	3			2					0	17
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Kubelka	3.	95	1			0			1		0	17
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škoda	4.	45	1	2	3	2					0	17
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Zemková	3.	31				2					0	17
24.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Zavřel	4.	64	3			2					0	16
25–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Fiedler	4.	16				1				8	0	15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Kubincová	4.	15	3		3	2					0	15
27–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ R. Kubíček	2.	13									0	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Novotná	2.	13									0	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Šafin	2.	13	3	4	2				2		2	13
30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Kohoutová	2.	12				2					0	12
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ B. Mólová	3.	11									0	11
32–33.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bílý	4.	10									0	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ F. Lux	4.	10									0	10
34–36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Kratochvíl	3.	17									0	9
	L. Langerová	1.	9									0	9
	R. Navrátil	3.	9	3	2	0	2	2				0	9
37–39.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Cífka	2.	21									0	8
	D. Tělupil	3.	8									0	8
	P. Vincena	1.	8				2					0	8

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t1	t3	t4	s4	+	$\sum_{1}$
				Číslo									
40–43.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ B. Böhmová	3.	37									0	7
	S. Havadej	4.	7									0	7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ G. Kubíčková	4.	21									0	7
	B. Said	3.	7									0	7
44–48.	T. Bárta	3.	6	3	1		2					0	6
	L. Jančařík	4.	6				2					0	6
	M. Kopf	3.	6									0	6
	M. Landa	1.	6									0	6
	M. Poppr	1.	6									0	6
49–50.	V. Kletečka	3.	7									0	5
	D. Vít	1.	5									0	5
51–54.	K. Duníková	4.	4	3		0	1					0	4
	J. Erhart	1.	4									0	4
	J. Kadlec	1.	4									0	4
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Mička	2.	10									0	4
55–56.	E. Bušáková	2.	3									0	3
	S. Ondrčková	2.	3									0	3
57.	O. Krčmář	2.	2									0	2
58–60.	O. Darmovzal	1.	1									0	1
	K. Jiráková	4.	3									0	1
	J. Křivonožka	3.	1									0	1
61.	V. Václavík	1.	0									0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_{1}$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.