Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XVI / Číslo 6-7

Milí kamarádi,

se zpožděním se vám dostává do rukou poslední číslo XVI. ročníku. Tento ročník přinesl několik plánovaných novinek a jednu neplánovanou, kterou bylo zkrácení ročníku o jednu sérii.

A jak tento „revoluční“ ročník dopadl? I letos se stal vítězem Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa, kterému přejeme hodně úspěchů i v následujícím roce. Zároveň bychom mu chtěli pogratulovat k zisku titulu Prof.$^{\mathrm{MM}}$

Na úplný závěr ročníku se s vámi chceme podělit o jednu radostnou událost. Předposlední květnový víkend byli slečna Bětka Pechová a náš bývalý řešitel Marek Nečada oddáni v obřadní síni městského muzea v Kralupech nad Vltavou.

Mnoho štěstí do následujícího společného života přejí

organizátoři M&M

Řešení témat

Téma 5 – Trosečník

Toto téma uzavřeme druhým příspěvkem Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Pechy, který jím doplňuje a opravuje článek z 5. čísla XVI. ročníku.

Zkoumání kapacit kondenzátoru

Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha

Kapacita svitkového kondenzátoru nerostla přímo úměrně k počtu desek, proto jsem se rozhodl provést další měření.

Abych zlepšil měření, tak jsem se rozhodl vyrobit vždy dva kondenzátory s daným počtem desek. Počty desek jsem zvolil stejně jako u prvního měření, a to 2, 3 a 4.

Měřil jsem kapacitu nesvinutého (deskového) a kapacitu po svinutí (svitkového). Desky jsem vyrobil z alobalu a jako dielektrikum jsem použil kancelářský papír. Funkční velikost alobalu byla $20\,\mathrm{mm} \times 100\,\mathrm{mm}$. $S = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$.

Měření jsem provedl stejným měřícím přístrojem jako v minulém měření[1]. Výsledky měření jsem zapsal do tabulky t5.3.1.

Kapacita deskového kondenzátoru se vypočítá

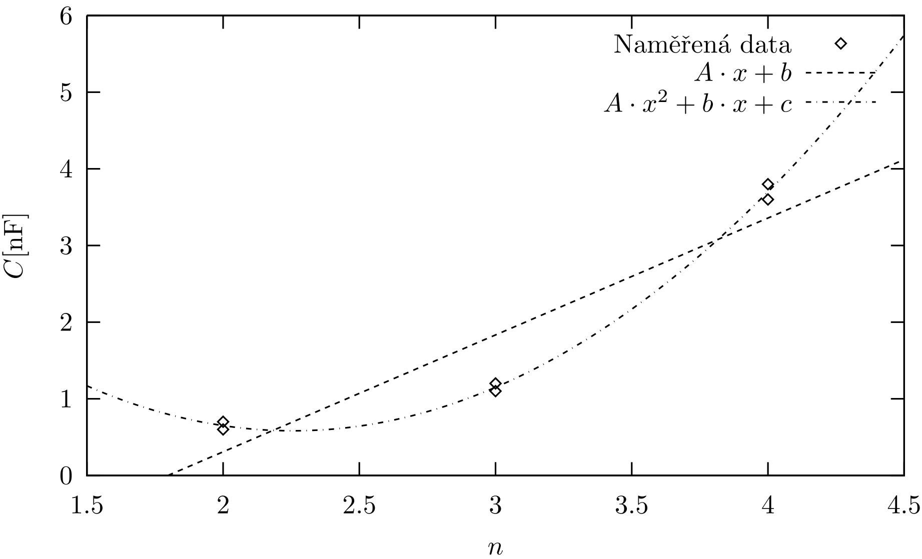
$$C = n\frac{\varepsilon S}{d}\,.$$

Proto jsem proložil (pomocí gnuplotu) naměřené body lineární křivkou. Výsledek ukazuje graf t5.3.1.

[1] *Pozn. red.: Jednalo se o přístroj MIC-40700 LCR METER.*

Číslo kondenzátoru	Počet desek n	Kapacita (deskový) [nF]	Kapacita (svitkoý) [nF]
2_1	2	0,6	1,5
2_2	2	0,7	1,8
3_1	3	1,2	4,1
3_2	3	1,1	6,5
4_1	4	3,8	8,0
4_2	4	3,6	9,4

Tabulka t5.3.1: Výsledky měření kapacit deskových a svitkových kondenzátorů.



Obr. t5.3.1 – Závislost kapacity deskového kondenzátoru na počtu desek.

Výpočet kapacity svitkového kondenzátoru je složitější. Nikde jsem nenašel, jak závisí kapacita na počtu desek. Proto jsem proložil naměřené hodnoty jak funkcí lineární, tak kvadratickou. Kvadratická dopadla lépe.

Pozn. red.: Oceňuji Petrovo snažení a způsob, jakým problém řešil. Fyzika opravdu není o dosazování do vzorečků a počítání konkrétních rychlostí, vzdáleností a podobně. Přesto mám k jeho příspěvku několik připomínek.

Zkusme se zamyslet nad uvedeným vzorečkem, který udává závislost kapacity kondenzátoru C na počtu desek n. První, co nás může zarazit, je fakt, že *pro dvě desky, tedy klasický deskový kondenzátor, jehož kapacita je*

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}\,,$$

dostáváme dvakrát větší kapacitu, než bychom očekávali. Zároveň nás může zarazit jistá jednoduchost vzorečku. Můžeme si představit, že každé dvě dvojice desek tvoří kondenzátor. Celkovou kapacitu kondenzátoru pak získáme jako superpozici všech těchto kondenzátorů.

Pak je ale zřejmé, že pokud máme víc desek, tak závisí na pořadí, neboť pokud vezmeme uspořádání desek A, B, C, tak pokud spojíme desky A a B a měříme kapacitu těchto desek vzhledem k desce C, tak dostaneme jinou kapacitu, než v případě, že bychom spojili desky A a C. A to proto, že vzdálenost desek A a C je větší, než vzdálenost sousedních desek.

Na závěr bych provedl pár úvah ohledně grafu t5.3.1. Je zřejmé, že máme dost málo dat na to, abychom mohli vyvodit nějaké relevantní závěry. Kvůli tomu, že nevíme, s jakou chybou bylo provedeno měření, nemůžeme určit, zda lineární fit odpovídá.

Pro zajímavost jsem do grafu vynesli také kvadratický fit. Mohlo by se zdát, že tento fit ideálně odpovídá naměřeným datům, ovšem to by odpovídal, ať by byla data jakákoliv, neboť parabolu můžeme proložit libovolnými třemi body.

(R)adim

Řešení úloh 4. série

Úloha 4.1 – Alarm (5b)

Zadání:

Agent R se blížil k budově. Hbitě se schoval za strom a počkal, než projde hlídka. Následovalo pár rychlých kroků a už byl u vchodových dveří. Odklopil kryt bezpečnostního zařízení a chtěl zadat přístupové heslo. Ale tu se zarazil.

„Jak že byl ten přístupový kód?“ zamyslel se a vytáhl z kapsy papírek, na kterém měl napsáno: Kód jsou všechna řešení rovnice[2]

$$a! + b! + c! = a! \cdot b!\,.$$

„Je jasné, že čísla a, b a c jsou přirozená, jiná se nedají zadat“, uvědomil si a ještě chvíli řešil tuto rovnici. Pak ho to přestalo bavit a raději našel kámen, kterým rozbil nejbližší okno a vnikl do budovy.

[2] Číslo $n!$ znamená n faktoriál a vyjadřuje součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Uměli byste si poradit méně nápadně než agent R, tedy vyřešit tuto rovnici v oboru přirozených čísel?

Řešení:
Nejprve zkusíme pár možností jako $[a, b] = [1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 1]$, $[2, 2]$, abychom se zbavili možných řešení na začátku. c takové, aby rovnice platila, nenajdeme. Rovnici proto upravíme tak, že odečteme $a!$ a $b!$ a přičteme 1.

$$a! \cdot b! - a! - b! + 1 = a!(b! - 1) - (b! - 1) = (a! - 1)(b! - 1) = c! + 1 \,.$$

$c!$ je přirozené číslo a tedy obě závorky musí být větší než jedna. $c!$ pak musí být větší než $a!$ i než $b!$. Z čehož vyplývá, že i c je větší než a a b.

Nyní si opět vezmeme rovnici ze zadání a podělíme $a!$

$$b! = 1 + \frac{b!}{a!} + \frac{c!}{a!} \,.$$

Aby byla na obou stranách celá čísla, musí být $a \leq b$. Když celou rovnici ze zadání podělíme $b!$, dostaneme to samé. Jen si a a b prohodí místa na $a \geq b$. Tedy $a = b$. Tím se nám zadaná rovnice zjednoduší

$$a!^2 = 2a! + c! \,.$$

Rovnici podělíme $a!$

$$a! = 2 + \frac{c!}{a!} \,.$$

Díky vyloučení počátečních možností je a dělitelné 3, a tedy $c!/a!$ nemůže být dělitelné 3. Dostáváme tak tři možnosti. c může být maximálně $a+2$, nebo $a+1$, nebo a.

1) Pro $c = a$ dostáváme $a! = 3$, což neexistuje.
2) Pro $c = a + 1$ dostáváme

$$a! = a + 3 \,,$$

což zjevně pro $a \geq 4$ neplatí. Proto zkusíme $a = 3$ a vidíme, že nám to dává jeden možný výsledek

$$[a, b, c] = [3, 3, 4] \,.$$

3) Pro $c = a + 2$ dostáváme

$$a! = a^2 + 3a + 4 \,,$$

což ale opět pro $a \geq 5$ zjevně neplatí, a tak zkusíme $a = 4$ a $a = 3$. Ani jedna z těchto možností nepřinese očekávaný výsledek. Je tedy jen jeden výsledek splňující zadání, a to $[a, b, c] = [3, 3, 4]$.

Honzík

Úloha 4.2 – Výtah (5b)

Zadání:

Agent R proběhl prázdnou místností a vešel do prostorné haly. Představa, že by měl jít až do nejvyššího n–tého patra pěšky, ho moc nenadchla. Proto si přivolal výtah.

Když čekal, než přijede, rozezněla se kolem něj siréna. Hlídka si konečně všimla rozbitého okna a vyhlásila poplach. Výtah zrovna přijel, a tak do něj agent nastoupil. Začínal být čím dál více nervozní, neboť se věci začínaly komplikovat.

Výtah pomalu stoupal nahoru a agent přemýšlel, jak ho zrychlit. Jedna z možností by bylo vylézt na střechu kabiny, přeřezat lano a nechat se vynést protizávažím výtahu nahoru. Ale kolik takové protizávaží může vážit?

Předpokládejte, že kabina má hmotnost M a nosnost m. Výtah si můžete představit jako kabinu a protizávaží na opačných koncích lana, které přechází přes buben motoru. Jakou hmotnost byste zvolili pro ono protizávaží, aby byl provoz výtahu dlouhodobě co nejekonomičtější? Samozřejmě předem nevíte, jak zatížený bude výtah jezdit, tak si nějak poraďte.

Řešení:

Na začátek bych si dovolila filozofickou poznámku k řešení úloh. Někteří jste se vůbec nesnažili svůj výsledek něčím podložit (a to není problém jen této úlohy, je to problém všech úloh). Vžijte se do situace třeba takového architekta, ke kterému přijde několik konstruktérů výtahů a každý navrhuje nějakou hmotnost protizávaží. Koho poslechne? No přeci toho, kdo svůj návrh podpoří rozumnými argumenty, ne toho, jehož výsledek je správný. On neví, který je správný. Kdyby výsledek předtím znal, tak se na nějaké konstruktéry vykašle, a vůbec si je nezve. Tak se zkuste učit argumentovat, M&Mko vám k tomu bude rádo učitelem.

Tato úloha se dala pojmout různými způsoby. Ve vzorovém řešení uvádíme takové umírněně teoretické, ale mohli jste postupovat i tak, že byste experimentálně sledovali obsazení výtahů v nějakém konkrétním domě a z něho určili průměrné zatížení, nebo jste mohli potřebná data najít na internetu (což někteří z vás udělali). Pokud používáte internet, tak to však musíte přiznat a uvést které stránky jste použili. Na těch, co jsme použili my, se dočtete, že je to údajně 40 %. Na webu se dají najít i simulátory vytížení výtahů. Mohli jste si také vzít jiné předpoklady. Všechny tyto způsoby jsou správné, ale je vždy potřeba napsat, co jste to dělali a kde jste které číslo vzali.

Takže k teoretickému řešení úlohy. Nejprve si shrneme obecné vlastnosti zaplněnosti výtahu (v našem případě firemního), jaké známe ze zkušenosti a z našich představ o práci. Z nich pak vyvodíme matematický popis chování lidí/výtahu.

1 Výtahem lidi většinou jezdí z nebo do přízemí, když na své pracoviště přicházejí, nebo odcházejí domů, případně chodí na oběd. Málokdo potřebuje jezdit mezi patry – navštěvovat pracoviště někoho jiného. To dělá častěji tak leda uklízečka. Tyto jízdy tedy vyřadíme z našich úvah, protože jejich podíl je zanedbatelný.

2 V určité denní doby jezdí lidé určitým směrem. Ráno, když přichází do práce, jezdí téměř výhradně nahoru. V poledne, kdy se chodí na

oběd, jezdí nahoru i dolů. Odpoledne, kdy už se odchází, se zase jezdí prakticky jenom dolů.

Člověk tedy jede za den čtyřikrát, z toho dvakrát pro něj musí přijet prázdný výtah a dvakrát má šanci, že se při na/vystupování s někým srazí. Z toho vyplývá, že výtah jede prázdný v 1/3 případů (ráno: dolů prázdný, nahoru lidi do práce, poledne: dolů lidi na oběd, nahoru lidi z oběda, odpoledne: dolů lidi domů, nahoru prázdný). Pokud bychom chtěli být ještě přesnější, můžeme uvažovat, že ze začátku a ke konci obědů jezdí výtah taky jedním směrem prázdný, a upravit tak podíl případů, kdy jezdí prázdný. To ale dost dobře nejde jinak, než vycucat si z prstu nějaké číslo. Takže tak akorát víme, že podíl jízd prázdného výtahu je někde mezi 1/3 a 1/2.

3 Výtah nejede celou svou jízdu stejně zaplněný, ale lidi postupně na/vystupují v různých patrech. Předpokládejme, že náhodně.

V danou chvíli tedy předpokládáme, že je pro všechna patra stejná pravděpodobnost, že je o ně zájem, tedy o dané patro je zájem s pravděpodobností $1/n$. Zaveďme si místo nosnosti m, že výtah uveze N normovaných osob.[3] Lidi budeme považovat za nerozlišitelné. Tj. je nám jedno, jestli nastoupí Pepa v pátém patře a Franta v osmém, nebo naopak. Důležité je, že jeden člověk nastoupí v pátém patře a jeden v osmém.

Nyní si uvědomíme, že ve výtahu je v daném patře tolik lidí, kolik jich jede do/z patra vyššího. Každý člověk ve výtahu nastoupil s pravděpodobností $1/n$ v k-tém patře. Je-li celkový počet lidí ve výtahu v přízemí náhodné číslo od 1 do N, je průměrná hodnota $N/2$. Celkem tedy máme, že v k-tém patře nastoupí s pravděpodobností $1/n \cdot N/2$ člověka. Průměrný počet lidí v j-tém patře ve výtahu, který si označíme a. Součet je pravděpodobností, že člověk nastoupí v k-tém patře přesčítaná přes patra $k > j$:

$$a = \sum_{i=j}^{N} \frac{1}{n} \cdot \frac{N}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{N}{2} \cdot (N - j)\,.$$

Výtah každé patro (nyní jednotka vzdálenosti, po kterou výtah jede) veze a lidí. Teď provedeme další předpoklad, že příkon motoru závisí lineárně na hmotnosti, kterou táhne, což sice není zcela pravda, ale jakékoli lepší přiblížení by bylo zbytečně složité. Můžeme si tedy dovolit dál počítat jenom s hmotnostmi. A proč tenhle předpoklad děláme právě tady? Je to první místo výpočtu, kde by se vlastnosti motoru daly teoreticky zavést. Přes průměrné patro tedy veze a zprůměrované přes patro lidí, to je

$$\overline{a} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{N}{2} \cdot (N-j)}{n} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{N}{2}}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} (N - j)\,,$$

[3] Průměrný člověk váží 70 kg (podle wikipedie), můžeme to považovat za normu. Ale je to zbytečné, protože se po nás stejně nechce číselný výsledek.

což je aritmetická řada, jejíž součet známe

$$\overline{a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{N(N-1+1)}{2} = \frac{N^2}{2n^2}\,.$$

Teď už můžeme opustit lidi a vrátit se od N k m. Výtah veze přes průměrné patro, kde něco veze, hmotnost

$$\overline{m} = \frac{m^2}{2n^2}\,.$$

Ještě zbývá spočítat, kolik pater oproti tomu jede výtah prázdný. To už jsme ale v podstatě spočítali – 1/3 až 1/2 počtu pater, která něco veze. My si vycucáme z prstu třeba jejich průměrnou hodnotu (s nulovými znalostmi je to to nejlepší, co můžeme udělat), tedy 5/12. Takže můžeme spočítat definitivní průměrné zatížení výtahu μ

$$\mu = \frac{5}{12} \cdot 0 + \frac{7}{12} \cdot \overline{m} = \frac{7}{12}\frac{m^2}{2n^2}\,.$$

Nejrozumnější hmotností protizávaží je tedy

$$M + \frac{7}{12}\frac{m^2}{2n^2}\,.$$

Zuzka

Úloha 4.3 – Zatoulaná součástka (4b)

Zadání:

Po otevření dveří agent R bleskurychle zneškodnil stráže a konečně se dostal do padouchovy kanceláře. Rutinně prohrabal pár stolů, než nalezl, co hledal. Kufřík plný malých integrovaných obvodů.

Agent sebral kufřík a chystal se k odchodu. Tu se však stala veliká nepříjemnost. Kufřík se otevřel a součástky se rozkutálely po celé místnosti. Agent je sesbíral, ale zjistil, že z původních n *součástek nalezl pouze* k*. Ví, které obvody jsou důležité a které ne, a proto by potřeboval vědět, které součástky mu scházejí.*

Integrované obvody jsou na pouzdrech očíslovány přirozenými čísly 1 *až* n*. Agent R je už od cesty výtahem velmi nervózní, a tak po něm nechtějte, aby si pamatoval nějaká čísla. Má s sebou speciální agentské hodinky, do kterých si může zapsat omezeně veliké číslo. Součet čísel od* 1 *do* n *se do hodinek vejde, ale součin nikoliv.*

Jak má agent R postupovat, aby zjistil, kterých $n-k$ *obvodů chybí? Jak by měl postupovat, kdyby chyběl jenom jeden obvod? A kdyby chyběly dva?*

Řešení:

Většinu z vás napadlo hledat zatoulanou součástku tím, že si rozsypané čipy seřadíme a podíváme se, kde jsou mezery. Tento způsob sice funguje, ale má několik úskalí. Předně si musíme rozmyslet, jakým způsobem (řekli bychom algoritmem) budeme součástky třídit. Úloha byla zformulována tak, aby bylo jasné, že máme k dispozici konstantní paměť – můžeme si tedy zapamatovat jenom nějaké maximální množství informací, nehledě na to, kolik součástek celkem máme. Z toho nám vyplývá, že nemůžeme použít příliš mnoho třídících algoritmů, neboť většina z nich zabírá více než konstantní pomocnou paměť. Asi nejlepším, co můžeme v tomhle případě použít, je tzv. heapsort[4] – třídění pomocí haldy. Ten má konstantní paměťovou složitost a časovou $N \cdot \log(N)$. To není špatný čas, ale my si ukážeme, jak ho ještě zlepšit. Zapomeneme na chvíli na třídění a zavedeme si operaci s názvem **xor**. Asi víte, že každé číslo je v počítači reprezentováno posloupností jedniček a nul. Když vezmeme taková 2 čísla a pustíme na ně operaci **xor** (je to operátor, stejně jako třeba +), tak si je zarovná pod sebe a v řádu, kde se ta dvě čísla liší, vydá výsledek 1, jinak 0.

Příklad:

$$42 \,\mathbf{xor}\, 31 = 101010 \,\mathbf{xor}\, 011111 = 110101 = 53\,.$$

Je snadno vidět, že $a \,\mathbf{xor}\, a = 0$ pro všechna přirozená čísla (s jinými ani nemá cenu v počítači operovat).

1. Chybí nám jedna součástka. Nejdříve si uděláme **xor** všech čísel od 1 do N. Potom vezmeme každou součástku, kterou jsme na podlaze našli, a vyxorujeme její číslo s tím, co už máme. Tím jsme každou součástku zařadili do xoru dvakrát, kromě jedné. Když dáme stejné číslo do xoru dvakrát, je to jako kdyby tam vůbec nebylo, a tím pádem nám po vyxorování všech součástek zbude právě číslo té jedné chybějící součástky.

   Příklad: $N = 5$ (chybí součástka č. 2):
   $A =$ **xor** všech čísel od 1 do 5

   $$001 \,\mathbf{xor}\, 010 \,\mathbf{xor}\, 011 \,\mathbf{xor}\, 100 \,\mathbf{xor}\, 101 = 001\,.$$

   $B =$ **xor** všech nalezených součástek

   $$001 \,\mathbf{xor}\, 011 \,\mathbf{xor}\, 100 \,\mathbf{xor}\, 101 = 011$$

   $$A \,\mathbf{xor}\, B = 001 \,\mathbf{xor}\, 011 = 010 = 2\,,$$

   a to je naše chybějící součástka.
2. Nejprve si řekněme, že by bylo pěkné, kdybychom uměli rozdělit součástky na dvě skupiny tak, aby v každé z nich byla právě jedna chybějící součástka. Potom bychom jednoduše aplikovali postup z bodu 1. Že to neumíme? Ale kdeže. Pokud uděláme to samé, co v bodě 1, vyjde nám číslo, které je xorem dvou chybějících. Bude mít alespoň na jednom místě 1 (protože každá součástka je unikátní).

[4] http://cs.wikipedia.org/wiki/Heapsort

Pokud nám chyběly například součástky č. 3 a 5, vyjde nám

$$011\,\mathbf{xor}\,101 = 110\,.$$

Vezmeme z tohoto výsledku první jedničku (tj. tady hned první řád) a rozdělíme podle tohoto řádu čísla na dvě hromádky – ty, které mají v tomto řádu 1, a ty, které tam mají 0.

Příklad: 1. hromádka: 001, 010, 011; 2. hromádka: 100, 101.

S těmito hromádkami už snadno provedeme krok č. 1, a zjistíme, která součástka nám chybí.

3. Chybí nám více součástek. Bylo by hezké, kdyby to takhle fungovalo i dál, ale nefunguje, už u třech chybějících součástek se nám může stát, že jejich **xor** je 0. Není však důvod k zoufání. Pokud víme, že chybí lichý počet součástek, pak na místě, kde je jejich **xor** roven 0, mají určitě právě sudý počet z nich stejnou hodnotu. Můžeme si je tedy rozdělit podle tohoto místa a pokračovat dál rekurzí[5]. V případě, že nám chybí sudý počet součástek, bohužel toto použít nelze. Uchýlíme se proto k dříve zmiňovanému heapsortu.

Poznámka: Řešení 1 i 2 mají lineární časovou složitost.

Honza

Úloha 4.4 – Rogalo (2b)

Zadání:

Po překontrolování agent R zjistil, že mu chybí ten nejdůležitější integrovaný obvod, a tak ho začal hledat. Během hledání jej překvapil padouch, který se vrátil do své pracovny. Při velmi vzrušujícím boji proti přesile přelezl agent R na venkovní římsu, a začal po ní utíkat pronásledovatelům. Ti mu však nadběhli z druhé strany a obklíčili ho.

Agentova situace se zdála beznadějná. Když tu si všiml velkého padouchova loga, které bylo připevněno na zdi budovy. Logo vypadá jako osmiúhelník vepsaný do kružnice. Délky stran tohoto osmiúhelníku jsou po řadě $2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\,\mathrm{dm}$.

Agent R logo strhl a velmi rafinovaně jej přichytil ke své kombinéze. Pak se otočil, zamával svým pronásledovatelům a skočil dolů.

Co následovalo? To záleží na ploše rogala. Jaká je plocha popsaného osmiúhelníku?

Bonusová otázka: Je plocha rogala dostatečná a agent R bezpečně dosedne na zem a splní úkol, nebo je plocha rogala malá a agent misi nesplní?

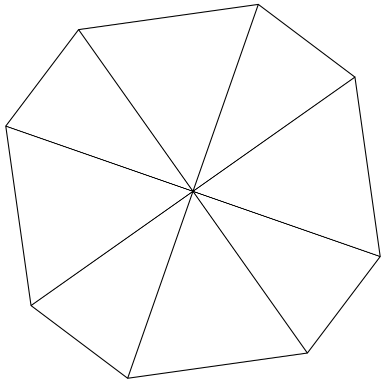
Řešení:

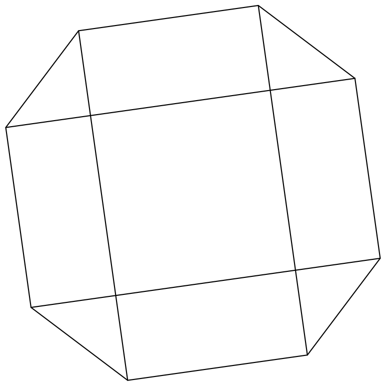
K úloze bylo možné přistupovat mnoha způsoby. Většina řešitelů se ji pokusila nějak upočítat pomocí goniometrických funkcí, což se jim většinou podařilo. Existuje ale i jednodušší a dle mého názoru mnohem elegantnější řešení.

Pokud spojíme vrcholy zadaného osmiúhelníku se středem kružnice jemu opsané, dostaneme celkem osm trojúhelníků. Obsah osmiúhelníku pak záleží pouze na obsahu těchto trojúhelníků, takže je můžeme libovolně přeskládat.

[5] viz http://cs.wikipedia.org/wiki/Rekurze

Třeba tak, že budeme mít osmiúhelník, kde se budou pravidelně střídat strany s délkou dva a s délkou tři podle prvního obrázku.





Obsah tohoto osmiúhelníku už není obtížné spočítat. Stačí si ho šikovně rozložit na čtverec o straně tři, čtyři obdélníky se stranami tři a odmocnina ze dvou a čtyři rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délky odmocnina ze dvou. Rozdělení znázorňuje druhý obrázek.

Nyní už snadno posčítáme celý obsah

$$S = 3^2 + 4 \cdot \left(3\sqrt{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}^2}{2}\right) = 13 + 12\sqrt{2}\,\mathrm{dm}^2 \doteq 30\,\mathrm{dm}^2\,.$$

Na závěr bych chtěl pochválit Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anču Chejnovskou a Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáše Pokorného za pěkná řešení bez zaokrouhlování. A Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtu Koláře, který jako jediný dává agentovi R podloženou naději na úspěch. Plocha rogala sice není nijak závratná, ale argumentu, že agent Tau si vystačí s deštníkem, nelze nic vytknout.

Kuba

Úloha 4.5 – Gnuplot (6b)

Zadání:

A) Fibonacci

Vykreslete pomocí gnuplotu graf 100 prvních Fibonacciho čísel (posloupnost můžete vytvořit i externím programem). Najděte pěknou jednoduchou analytickou funkci, která přibližně vystihuje (tuto část) Fibonacciho posloupnosti (můžete využít fitování v gnuplotu) a vytvořte graf (anebo více grafů), které rozumným způsobem ukazují, jak dobře tato funkce posloupnost vystihuje.

Jako řešení posílejte jak příslušné příkazy pro gnuplot, tak i obrázky, pokud je vytvoříte.

B) Odporový teploměr

Představte si následující experiment: Do vakua jsme umístili wolframový drát, který můžeme žhavit průchodem elektrického proudu. Drát je umístěný ve vakuu a chladí se jen zářením[6]*. Ztrátový výkon chlazení bude tedy splňovat Stefan-Boltzmannův zákon*

$$P = \varepsilon\sigma S T^4\,,$$

kde S je plocha vlákna, T jeho termodynamická teplota, σ je Stefan-Boltzmannova konstanta a ε emisivita wolframu. Emisivita wolframu bude s dostatečnou přesností pro tepelné záření přímo úměrná termodynamické teplotě. Navíc nesmíme zapomenout na tepelné záření ze stěn vakuové komory, které dopadá zpátky na vlákno. Výsledný vyzářený výkon tedy bude

$$P = k\left(T^5 - T_0^5\right)\,,$$

kde k je konstanta charakterizující vlákno (plocha, koeficient emisivity), T je teplota vlákna a T_0 teplota stěn vakuové komory.

Vlákno je zahříváno procházejícím proudem I a měříme na něm napětí U. Z naměřených dvojic I a U bychom rádi zjistili, jak vypadá závislost odporu wolframu na teplotě. Předpokládáme, že odpor půjde v celém rozsahu teplot vystihnout výrazem ve tvaru

$$R(T) = R_0\left[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \gamma(T - T_0)^3\right]\,.$$

Odpor R_0 má vlákno za teploty T_0 a koeficienty α, β a γ určují teplotní závislost odporu (tedy to, co nás zajímá).

Za situace, kdy $T_0 = 293\,\mathrm{K}$, byly změřeny následující dvojice proudu a napětí:[7]

```
# I [A]   U [V]    |                    |
4.5611    3.0905   | 7.1691    6.6622   | 9.4244    10.7185
4.9969    3.5887   | 7.5498    7.2937   | 9.7411    11.4316
5.146     3.7689   | 7.6562    7.4823   | 10.144    12.2395
5.7449    4.5521   | 7.9009    7.9177   | 10.334    12.689
6.0473    4.9856   | 8.1375    8.326    | 10.533    13.111
6.4435    5.5276   | 8.4241    8.8325   | 10.794    13.6605
6.6478    5.8647   | 8.8754    9.703    | 10.869    13.8397
6.9925    6.4106   | 9.1319    10.1839  |
```

Určete z těchto informací teplotní závislost odporu wolframu a k výsledným hodnotám nezapomeňte poslat i pěkné ilustrační obrázky a podstatné příkazy gnuplotu použité pro spočtení výsledků a vytvoření obrázků.

[6] Předpokládejme, že experiment je postavený tak, že ztráty vedením jsou skutečně zanedbatelné.

[7] Tato data jsou k dispozici ke stažení na adrese `http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/gnuplot.txt`

Malá nápověda: Při používání příkazu `fit` *bude pravděpodobně potřeba gnuplotu poněkud napovědět. Uvědomte si, že koeficient k v sobě obsahuje Stefan-Boltzmannovu konstantu a bude to tedy velmi malé číslo. Také není nutné hledat výraz, který vystihuje přímo závislost napětí na proudu. Klíčové slovo* `using` *můžete v gnuplotu použít i u příkazu* `fit` *a vstupní data si díky němu předzpracovat do vhodnější podoby.*

Řešení:

Fibonacci

Napsat v gnuplotu funkci, která spočte člen Fibonacciho posloupnosti, je možné díky rekurzi a „otazníkovému“ operátoru. Např. následovně:

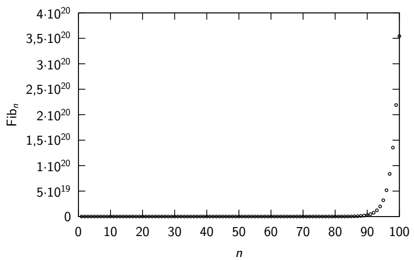
```
gnuplot> fib(x)=(x<=2)?1:fib(x-1)+fib(x-2)
```

Nicméně takováto funkce bude mít několik podstatných nevýhod. Především je značně neefektivní, protože si nepamatuje dříve spočítané mezivýsledky. Druhý problém je, že ji gnuplot bude brát jako funkci, a ne jako posloupnost (takže příkaz `plot` vykreslí místo jednotlivých bodů spojité „schody“). Snažit se tyto problémy obcházet čistě pomocí gnuplotu nemá v tomto případě smysl, a raději si soubor s posloupností vytvoříme jiným způsobem.

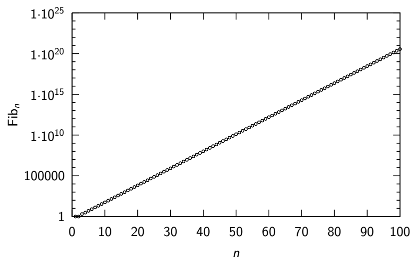
Pokud už tento soubor upravíme do tvaru, kdy na každém řádku bude dvojice čísel oddělených mezerou – pořadové číslo příslušného členu a jeho hodnota, můžeme posloupnost ze souboru `fib.dat` vykreslit jednoduše příkazem

```
gnuplot> plot 'fib.dat'
```

Když se ale na výsledný obrázek (obr. u4.5.1) podíváme, vidíme, že toho zas tak moc nevidíme. Kromě posledních několika členů jsou všechny ostatní „splácnuté“ na spodním okraji grafu. Rozdíly mezi sousedními členy posloupnosti totiž velmi prudce narůstají. Takové situace jsou třeba ve fyzice poměrně časté a standardně se řeší použitím logaritmické stupnice v grafu. Přepneme tedy vertikální osu do logaritmické škály – buďto příkazem `log y`, anebo stiskem klávesy `l` v interaktivním okně zobrazujícím graf (viz obr. u4.5.2).



Obr. u4.5.1



Obr. u4.5.2

Na první pohled vidíme, že body posloupnosti leží v logaritmickém grafu prakticky na jedné přímce. To by nám mělo napovědět, že půjdou dobře vystihnout funkcí ve tvaru $a \cdot b^x$ (logaritmus tohoto výrazu bude obecně $c + dx$, tedy lineární funkce).

Zkusme tedy najít vhodné koeficienty metodou nejmenších čtverců. Máme dvě možnosti, které mají obě své opodstatnění. Buďto můžeme nechat gnuplot najít přímo koeficienty výrazu $a \cdot b^x$ tak, aby výsledná funkce co nejlépe proložila body Fibonacciho posloupnosti, anebo můžeme hledat koeficienty funkce $c + dx$ tak, aby odpovídaly logaritmu hodnot posloupnosti.

V prvním případě minimalizujeme sumu čtverců odchylek, tedy absolutní chybu „fitu“, v druhém případě jde o absolutní odchylky v logaritmické škále, což jsou relativní odchylky od původních hodnot.[8] V tom případě budeme minimalizovat relativní chybu „fitu“.

První metoda má podstatný nedostatek v tom, že hodnoty prvků Fibonacciho posloupnosti v našem rozsahu rostou přes velmi mnoho řádů, takže i zanedbatelná relativní odchylka u posledního prvku bude znamenat velmi podstatnou absolutní odchylku. A jistá relativní odchylka bude způsobena už jen numerickými chybami výpočtu. Gnuplot počítá s desetinnými čísly se zhruba 16 platnými číslicemi desítkového zápisu (tzv. double precision), takže výsledná přesnost rozhodně nebude lepší, naopak, řetězením výpočtů klesá. Maximální hodnoty posloupnosti jsou řádu 10^{20}, takže můžeme očekávat absolutní odchylku přinejmenším v řádu statisíců jen z numerických chyb. Tudíž hledat koeficienty dávající nejmenší odchylku pomocí příkazu `fit` nemá v tomto případě valného smyslu, neboť výpočet bude záviset na numerických chybách a k ničemu rozumnému nedospěje.

Pokud bychom přeci jen stáli o minimální absolutní odchylky, můžeme zkusit najít koeficienty tak, aby naše funkce přesně odpovídala dvěma nejvyšším prvkům (tam se relativní chyba projeví jako největší absolutní). Řešením jednoduché soustavy rovnic dostaneme po koeficienty ve výrazu $a \cdot b^x$ hodnoty

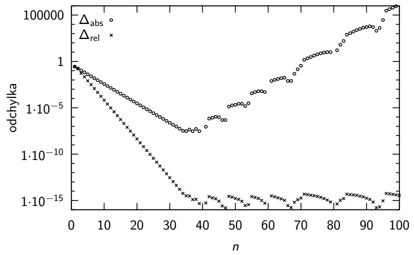
$$a = 0{,}44721359549995793928, \quad b = 1{,}61803398874989484820\,.$$

Vykreslíme si graf absolutní hodnoty odchylek:

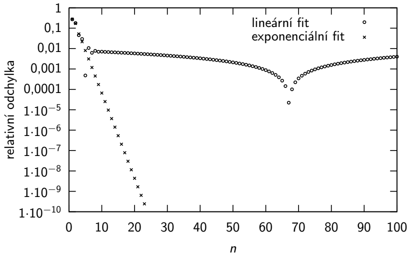
```
gnuplot> a=0.44721359549995793928; b=1.61803398874989484820
gnuplot> f(x)=a*exp(log(b)*x)
gnuplot> plot [][1e-16:1e6] 'fib.dat' u 1:(abs($2-f($1))) \
       > t 'Dabs', '' u 1:(abs(($2-f($1))/$2)) t 'Drel'
```

a z výsledného grafu (obr. u4.5.3) můžeme vidět, že pokles absolutní odchylky se u asi 35. prvku změní v nárůst způsobený právě numerickými chybami výpočtu (relativní odchylka zůstává blízko 10^{-15}, což odpovídá numerické přesnosti).

[8] Posun v logaritmické škále totiž znamená násobení, nikoliv přičítání. Uvědomte si, že platí $\log m + \log n = \log mn$. Pokud jste někdy viděli logaritmické pravítko, tak právě díky této vlastnosti logaritmů je na něm možné násobit prostým posouváním stupnic.



Obr. u4.5.3



Obr. u4.5.4

Pokud budeme chtít minimalizovat relativní odchylku, bude situace výrazně jednodušší, neboť prokládáme jen lineární závislost:

```
gnuplot> gl(x)=c+d*x; g(x)=exp(gl(x))
gnuplot> fit gl(x) 'fib.dat' u 1:(log($2)) via c,d
gnuplot> plot [][1e-10:] 'fib.dat' u 1:(abs(($2-g($1))/$2)) \
       > t 'lineární fit', \
       > '' u 1:(abs(($2-f($1))/$2)) t 'exponenciální fit'
```

Získáme graf relativních odchylek ukázaný na obrázku u4.5.4. Vidíme, že jsme si oproti předchozímu případu příliš nepomohli, většina bodů má i relativní odchylku horší. Důvodem je, že se minimalizuje součet odchylek, takže hraje roli jen několik prvních bodů s relativní odchylkou řádu desetin. Zbytek je z hlediska součtu zanedbatelný.

Závěrem budiž zaprvé poznatek, že hodnotu n-tého členu Fibonacciho posloupnosti můžeme zapsat přibližným výrazem

$$\mathrm{Fib}_n = a \cdot b^n \,, \text{ kde } \quad a \doteq 0{,}4472136 \,, \quad b \doteq 1{,}618034 \,,$$

přičemž relativní chyba rychle klesá s rostoucím n a už u desátého členu je menší než promile. Dále závisí odchylka na přesnosti koeficientů a a b.

Zadruhé pak poznatek, že ne vždy se dá bezmyšlenkovitě spoléhat na výsledek nějakého programu bez toho, abychom alespoň přibližně chápali, co se „uvnitř“ děje. Je pravda, že příklad s Fibonacciho posloupností je poněkud umělý, protože u ní můžeme výraz, který ji vystihuje, najít i čistě analyticky, ale obdobné vlastnosti (exponenciální nárůst atd.) mohou mít i některé změřené fyzikální závislosti.

Odporový teploměr

Výkon, který vláknu dodá procházející proud, musí být shodný s vyzářeným výkonem. Vztah pro vyzářený výkon je napovězen v zadání, takže můžeme psát rovnice

$$UI = k\left(T^5 - T_0^5\right) ,$$

$$T = \sqrt[5]{UI/k + T_0^5} \,.$$

Z tabulky naměřených hodnot tedy můžeme přímo spočíst teplotu vlákna. Stejně tak můžeme určit odpor jako poměr napětí a proudu. Jedinou vadou je, že neznáme hodnotu k. Ale zkusme si s tím poradit. Poslední výraz upravíme na

$$T\sqrt[5]{k} = \sqrt[5]{UI + kT_0^5}\,.$$

Součin UI bude mít podle tabulky hodnotu řádově deset a více.[9] Hodnota T_0^5 je řádově 10^{12}. V hodnotě k je schován součin Stefan-Boltzmannovy konstanty $(6 \cdot 10^{-8})$, koeficient úměrnosti emisivity (emisivita je menší než jedna, takže příslušný koeficient bude nejvýše 10^{-3}) a plochy vlákna (dá se očekávat hodnota zhruba 10^{-4}, tj. milimetrový obvod a centimetrová délka). To nám dává velmi hrubý odhad hodnoty k v řádu 10^{-15} a vidíme, že i po vynásobení pátou mocninou teploty bude výsledek stále podstatně menší, než součin UI. Provedeme tedy následující zanedbání:

$$T\sqrt[5]{k} \doteq \sqrt[5]{UI}\,.$$

Zadefinujeme si v gnuplotu potřebné funkce a hodnoty:

```
gnuplot> T0=273.
gnuplot> Tk5(U,I)=(U*I)**(1./5.)
gnuplot> R(Tk5)=R0*(1+a*(Tk5/k5-T0)+b*(Tk5/k5-T0)**2.+ \
       > c*(Tk5/k5-T0)**3.)
```

Jako `Tk5` jsme označili součin teploty a $\sqrt[5]{k}$ a proměnná `k5` je $\sqrt[5]{k}$.

Můžeme teď zkusit provést fit (tabulka ze zadání je uložena v souboru `gnuplot.txt`):

```
gnuplot> fit R(x) 'gnuplot.txt' using (Tk5($2,$1)):($2/$1) \
       > via R0,a,b,c,k5
```

Příkaz sice projde, ale vidíme, že chyba výsledných koeficientů, kterou nám gnuplot ukazuje, je neúměrně vysoká.

Důvod je ten, že prokládáme funkci `R(x)`, která je pro `x` (resp. pro `Tk`) polynomem třetího řádu. Takovýto polynom má obecně čtyři nezávislé koeficienty (absolutní člen a koeficienty u první až třetí mocniny `x`). Nicméně výše uvedený příkaz `fit` operuje s pěti různými koeficienty. To znamená, že jednotlivé koeficienty nejsou nezávislé.

Rozmysleme si, co konkrétně znamená, že koeficienty jsou navzájem závislé. Jednoduše řečeno, můžeme jakkoliv změnit hodnotu jednoho z koeficientů, následně upravit vhodným způsobem zbývající, a dostaneme úplně stejnou funkci, jakou jsme měli před změnou prvního koeficientu. Takže gnuplot nám sice může, alespoň teoreticky, najít nějaké hodnoty, které budou „pasovat" na data z tabulky, ale o skutečné hodnotě koeficientů se nic nedozvíme. Koeficienty

[9] V následujících úvaze předpokládám u všech veličin základní jednotky SI.

nemusí být navzájem ani závislé úplně, obdobný problém budeme mít tehdy, pokud současnou změnou několika koeficientů způsobíme jen velmi malou změnu celkové funkce.

Pro pochopení si za `R(x)` dosaďte obecný polynom třetího stupně ($R(x) = m + nx + ox^2 + px^3$), který má čtyři nezávislé koeficienty. Takový polynom půjde více či méně dobře proložit naměřenými daty a získáme čtyři konkrétní hodnoty. Poté můžeme napsat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} pk^{3/5} &= R_0\gamma\,, \\ ok^{2/5} &= R_0\beta - 3R_0\gamma T_0\,, \\ nk^{1/5} &= R_0\alpha - 2R_0\beta T_0 + 3R_0\gamma T_0^2\,, \\ m &= R_0 - R_0\alpha T_0 + R_0\beta T_0^2 - R_0\gamma T_0^3\,. \end{aligned}$$

Tato soustava ale není řešitelná bez znalosti přesné hodnoty k.

Závěrem tedy je, že ze zadaných hodnot není možné příslušné koeficienty tepelné závislosti určit. Teoreticky by nám stačilo znát R_0, tedy odpor za teploty T_0, což je jednoduše měřitelná veličina (stačí měřit s dostatečně malým proudem). Ale prakticky bychom ani tak nezískali řešení, protože v soustavě rovnic uvedené výše jsou hodnoty m, n, o a p zatížené chybou měření, která by se v následujících výpočtech promítla v podstatně větší míře.[10]

Marble

[10] Pokud jste se tuto úlohu pokoušeli řešit a vzdali to proto, že se nedalo dostat k rozumnému výsledku, tak se vám omlouvám. Původním cílem byla úloha řešitelná, ale během psaní zadání jsem ji překombinoval natolik, že skončila tak, jak to vidíte v tomto vzorovém řešení.

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Ztracen v horách (5b)

Zadání:

...

Knihy byly do poslední vzorně obaleny ve starém novinovém papíře, aby se jejich desky neponičily. Místo názvu knihy byl na hřbetu obalu každé z nich napsán úhledným písmem devíticiferný kód. Každá kniha měla svou jedinečnou devíticifernou posloupnost čísel složenou z cifer 0 až 9, každé dva kódy se ale lišily alespoň ve dvou cifrách, to aby nedošlo k záměně knih. Kolik nejvíce mohl mít pastýř ve své knihovničce knih?...

Řešení:

Nejdříve zdůvodníme, že knih nemohlo být více než 10^8. Pokud bychom na chvíli zapomněli na poslední cifru, tak z prvních osmi cifer můžeme vytvořit nanejvýš 10^8 různých kódů (pro každou z osmi pozic máme deset různých možností). Pokud by tedy existovalo více než 10^8 kódů lišících se v alespoň dvou pozicích, museli by mezi nimi být i takové dva, které mají prvních osm cifer stejných. Potom se ale mohou lišit jen v jedné cifře, což je spor s naším požadavkem.

Nyní by nám stačilo, kdybychom dokázali 10^8 vyhovujících kódů vytvořit. To opravdu uděláme a to podobně jako při dokazování horního odhadu. Opět pomyslně odebereme poslední cifru a vyrobíme 10^8 kódů, které se po dvou liší v alespoň jedné cifře na prvních osmi pozicích. Jako devátou cifru pak zvolíme u každého kódu zbytek součtu předchozích osmi cifer po dělení deseti.

Pokud se nějaké dva kódy v prvních osmi cifrách lišily ve dvou a více cifrách, podmínku zjevně splňují i teď. Pokud se lišily jenom v jedné cifře, přidali jsme k nim jako devátou pokaždé jinou cifru, takže teď se liší ve dvou cifrách.

Kuba

Úloha 5.2 – Záhadné duby (4b)

Zadání:

...

Nešli jsme daleko, zato stále do kopce. Cíl naší cesty ležel kousek za kopcem tvaru kužele, který byl dokonale hladký (mezi kopcem a mnou by tedy nevzniklo žádné tření). Nabízela se tedy otázka, zda kopec obejít nebo jej s pomocí lana přelézt. Pastýř se rozhodl vydat se přes kopec, abychom byli na místě rychleji. Na laně tedy vytvořil dokonale ohebnou smyčku s pevným uzlem a přehodil ji přes vrchol kopce. Jaký je mezní vrcholový úhel kužele, pro který mu smyčka již nesklouzne?...

Řešení:

Smyčku si představíme jako spojnici počátečního a koncového bodu. Tyto dva body tvoří uzel. Kužel si rozvineme do roviny a rozdělíme uzel na počáteční a koncový bod. Smyčka pak bude představovat nejkratší přímou spojnici těchto dvou bodů. Bude–li tato spojnice ležet uvnitř kužele, smyčka nesklouzne. Bude-li ale ležet vně, znamená to, že stabilní poloha je pro ni mimo kužel a tedy sklouzne. Odtud vidíme, že mezní případ je takový, kdy rozvinutý plášť kužele tvoří půlkruh. Stačí dopočítat vrcholový úhel kužele příslušející úhlu 180° rozvinutého pláště. Tvoří-li rozvinutý kužel půlkruh o poloměru R, je obvod podstavy kužele πR a poloměr podstavy kužele $\frac{R}{2}$. Odtud již snadno určíme vrcholový úhel, platí

$$\sin\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R}\,,$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\,,$$
$$\alpha = 60^\circ\,.$$

Mezní vrcholový úhel, pro který smyčka již nesklouzne, je 60°.

Bětka

Úloha 5.3 – Návrat (3b)

Zadání:

Po návratu z války jsem ale zatoužil vidět známé kopce a hlavně Elzéarda Bouffiera a jeho velké dílo. Tentokrát jsem byl na několikadenní putování nehostinným krajem připraven. Vzal jsem s sebou N šerpů, kteří mi pomáhali nosit zavazadla. Když jsme dosáhli první vesnice v oblasti, zaplatil jsem jim a dál jsem se rozhodl vydat sám. Již před výpravou jsem si vyčlenil obnos M franků, který jsem hodlal mezi své nosiče rozdělit. Jenomže různí šerpové nesli rozdílný náklad a určitě by nebylo spravedlivé, aby ten, kdo nesl méně, dostal zaplaceno více. Měl jsem údaje $m_1, \ldots, m_N$, určující hmotnost nákladu v kilogramech, který jednotliví nosiči nesli. Chtěl jsem tedy rozdělit obnos M mezi N nosičů tak, aby nosič A, který nesl více nákladu než nosič B, dostal alespoň tolik peněz co nosič B. Zajímalo by mě, kolik takových rozdělení existuje? Vaším úkolem je napsat program, který dostane na vstupu počet nosičů N, množství peněz M, které se mezi ně má rozdělit, a hmotnosti nákladů, které jednotliví nosiči nesli, $m_1, \ldots, m_N$ a na výstup vypíše počet způsobů, jakými lze peníze mezi šerpy rozdělit. Frank považujte za dále nedělitelnou měnu, stejně tak můžete předpokládat, že žádní dva šerpové nenesli stejné množství nákladu…

Řešení:

Většina z vás si správně uvědomila, že náklady jednotlivých nosičů vůbec nemusíme znát – stačí nám vědět kolik jich bylo a že žádní dva nenesli stejný náklad (pak by totiž podle našich pravidel museli dostat oba stejně franků).

Úlohu si tedy můžeme přeformulovat na ekvivalentní zadání: Kolik existuje neklesajících posloupností délky N, jejichž součet je M? Budeme tedy přiřazovat peníze. Nejprve nosiči, který nesl nejmenší náklad. Peníze které dáme jemu, musíme dát i všem ostatním, jinak by to nebylo fér. Dáme mu tedy k franků a stejně tolik i ostatním nosičům. Právě jsme rozdělili $k \cdot N$ franků. Prvního nosiče jsme vyplatili. A pokračujeme dál. Druhému nosiči dáme k jeho už získaným k frankům dalších l franků. Ty musíme dát i všem ostatním a tak jsme právě rozdali dalších $l \cdot (N-1)$ franků. Takhle pokračujeme dál, dokud nezbude poslední nosič (ten který nesl nejvíc), kterému dáme zbytek. Samozřejmě i–tému nosiči můžeme dát j franků, jenom v případě, že nám jich ještě alespoň $j \cdot (N-i+1)$ zbývá.

Zdrojový kód v C

```
\#include <stdio.h>
int rozdeleni(int n, int m) {
    if (n == 1) {
        return 1;
    }
    int zpusobu = 0;
    for (int i = 0; i*n <= m; i++) {
        zpusobu += rozdeleni(n-1, m-n*i);
    }
    return zpusobu;
}
int main(void) {
    int N, M;
    scanf("d", &N, &M);
    printf("%d", rozdeleni(N, M));
    return 0;
}
```

Zdrojový kód v Pythonu

```
\#!/usr/bin/python
def rozdeleni(n, m):
    if (n == 1):
        return 1
    zpusobu = 0
    i = 0
    while i*n <= m:
        zpusobu += rozdeleni(n-1, m-n*i)
        i += 1
    return zpusobu
N = raw_input() M = raw_input()
print rozdeleni(int(N), int(M))
```

Poznámka: tento kód není úplně optimální, protože některá rozložení počítá vícekrát. Pokud bychom ho chtěli zrychlit, museli bychom si pamatovat předchozí výsledky v pomocném poli.

Honza

Úloha 5.4 – Elzéard Bouffier (2b)

Zadání:

...

Byla zakreslena pomocí obecného trojúhelníku. Když jsem se na obrázek podíval lépe, všiml jsem si, že vzniklý trojúhelník ADC byl definovaný stranami e, d a úhlem $\gamma/2$, stejně tak, jako trojúhelník CDB. To ale znamenalo, že se strana a musela rovnat straně b. Jak to může být možné? Vždyť přítel nakreslil obecný trojúhelník...

Řešení:

Pri pohľade na poctivo rysovaný obrázok u5.4.1 vidíme prvý „podraz" – os uhlu a os strany sa pretínajú niekde úplne inde, totiž mimo samotný trojuholník[11]. Ovplyvní to nejako dôkaz rovnoramennosti? Zdanlivo nie, pretože vetu SSU môžeme stále použiť na trojuholníky ACD a BCD. V skutočná je ale chyba skrytá naozaj tu a je ňou priamo použitie vety SSU. Tá totiž tvrdí, že trojuholníky, ktorých dve strany sú zhodné a zhodné sú aj uhly naproti **dlhším** z nich, sú zhodné. A v zvýraznenom slove „dlhším" je skrytý onen problém, lebo ako vidíme na novom (presnom) obrázku, strana e (os uhlu) je dlhšia ako strany d. Platí ale táto ostrá nerovnosť vždy?

Ak by bol trojuholník ABC skutočne rovnoramenný, os uhlu γ a os strany c by boli totožné. Môžu sa ale tieto dve priamky pretnúť tak, aby bola strana d dlhšia ako strana e? BUNO[12] môžeme predpokladať, že vrcholmi trojuholníka sú body $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ a $C = (c_1, c_2)$, kde $b, c_1, c_2 \geq 0$. Os strany AB má potom parametrické vyjadrenie $x = b/2$, $y = t_1$. Os uhlu γ má parametrické vyjadrenie $x = c1 + \cos(\alpha + \gamma/2) \cdot t_2$, $y = c2 + sin(\alpha + \gamma/2) \cdot t_2$, pričom uhly γ a α môžeme vyjadriť pomocou kosínusovej vety a definície tangensu ako funkcie parametrov b, c_1, c_2. Súradnice bodu D potom sú

$$D = \left[\frac{b}{2}, c_2 + \tan\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - c_1\right)\right].$$

Aby bolo možné použiť vetu SSU, musí byť strana d dlhšia, ako strana e. Zapísať dĺžky strán Pythagorovou vetou nie je problém

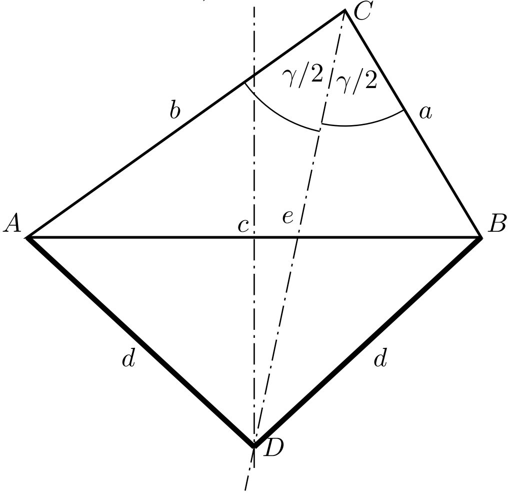
$$e = \sqrt{\left(c_1 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left[\tan\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - c_1\right)\right]^2},$$
$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left[c_2 + \tan\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - c_1\right)\right]^2}$$

ale porovnávať veľkosti týchto dvoch čísel je jednoduchšie počítačom. Ukazuje sa (ako pekne vidieť na grafe u5.4.2), že dĺžka strany e je vždy väčšia ako dĺžka strany d okrem prípadu, keď je trojuholník skutočne rovnoramenný, pretože v rovnoramennom trojuholníku neexistuje jednoznačný bod D a teda ani strany

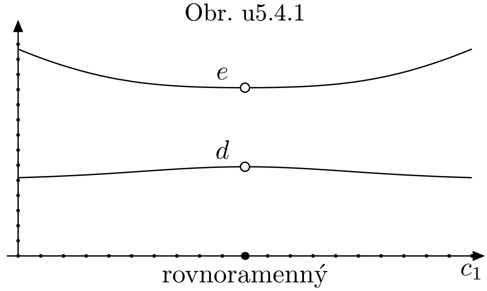
[11] Tento priesečník sa nazýva Švrčkův bod a leží na kružnici opísanej trojuholníku.

[12] Bez ujmy na (vše)obecnosti

e a d. Pri tvorbe grafu sa hýbe iba s parametrom c_1. Pokiaľ je parameter c_2 malý proti parametru b (trojuholník je veľmi nízky, tupouhlý), objavuje sa uprostred krivky výrazný „hrb“. Na grafe u5.4.2 je hodnota c_2 porovnateľná s hodnotou b (trojuholník je vysoký, ostrouhlý).



Obr. u5.4.1



Obr. u5.4.2

Jeffer

Úloha 5.5 – METAPOST (3b)

Zadání:

Pro alespoň dva různé trojúhelníky překreslete pomocí METAPOSTu obrázek ze zadání příkladu 5.4. Odešlete nám funkční zdrojový kód.

Řešení:

Jednoduchým príkladom funkčného kódu je nasledujúci, ktorým je sádzaný obrázok k úlohe 5.4. XVI. ročníka (pre ušetrenie miesta chýba časť kódu, ktorá značí uhly $\gamma/2$):

```
input TEX;

% bodkočiarkovaná čiara
picture bodkociarka;
```

```
bodkociarka:=dashpattern(on 4bp off 2bp on 1bp off 2bp on 4bp);

beginfig(1);
% nastavenie
   linecap:=butt;
   linejoin:=mitered;
% univerzálna jednotka
   u:=1.2cm;
% vrcholy trojuholníka:
   pair a,b,c,d;
   a:=origin;
   b:=(10u,0);
   c:=(7u,5u);
% trojuholník
   draw a--b--c--cycle withpen pencircle scaled 1bp;
% os uhlu gama pri vrchole C
   z1=unitvector(b-c)+unitvector(a-c)+c;
% os úsečky AB
   z2=.5[a,b];
   z3=a rotatedabout(z2,-90);
% priesečník osi uhlu a strany
   d=whatever[c,z1]=whatever[z2,z3];
% pomocné body na kreslenie osí
   z4=1.1[c,d];
   z6=1.1[z2,d];
   z5=z6 rotatedabout(z2,180);
% kreslíme osi
   draw z5--z6 dashed bodkociarka;
   draw c--z4 dashed bodkociarka;
% kreslíme strany AD, BD
   draw a--d withpen pencircle scaled 2bp;
   draw b--d withpen pencircle scaled 2bp;
% nápisy
   label.ulft(btex $A$ etex, a);
   label.urt(btex $B$ etex, b);
   label.rt(btex $C$ etex, c);
   label.rt(btex $D$ etex, d);
   label.ulft(btex $b$ etex, .5[a,c]);
   label.urt(btex $a$ etex, .5[c,b]);
   label.ulft(btex $c$ etex, .5[a,b]);
   label.llft(btex $d$ etex, .5[a,d]);
   label.lrt(btex $d$ etex, .5[b,d]);
   label.ulft(btex $e$ etex, .5[c,d]);
endfig;
end.
```

Konference Dolní Bečva 2010

Velice nás těší, že vám už nyní můžeme nabídnout první konferenční příspěvěk z jarního soustředění. Konfera se týká teorie čísel a velice důsledně a přesně popisuje problém, který vyžaduje i mnohé vyskoškolské znalosti. Může se tedy stát, že některé pasáže vám nebudou úplně jasné. Pro představu, jak může vypadat důkaz jedné dle mého názoru velice pěkné věty, se ale určitě vyplatí si článek přečíst.

O kvalitě konfery vypovídá i to, že ji otiskujeme jen s naprostým minimem drobných úprav.

Kuba

Věta o čtyřech čtvercích

Prof.MM Štěpán Šimsa

Na konfeře jsem se zabýval dvěma důkazy věty o čtyřech čtvercích. Jedním algebraickým a druhým spíše geometrickým. Na začátek tedy uvedu znění věty:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}_0 : n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Algebraický důkaz

K samotnému důkazu budeme potřebovat ještě dvě další lemmata. První z nich je identita od Eulera

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 +$$

$$+(x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2)^2 +$$

$$+(x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 .$$

Platnost si můžeme ověřit jednoduše roznásobením. Důležité je uvědomit si jednu věc. Z tohoto lemmatu vyplývá, že pokud již umíme některá dvě čísla rozepsat jako součet čtyř čtverců, umíme tak rozepsat i jejich součin. Z toho ihned vyplývá, že větu stačí dokázat již jen pro prvočísla.

Nyní si dokážeme druhé lemma. To říká, že existují nějaká nezáporná celá čísla a, b pro která platí $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, kde p je liché prvočíslo (pro jediné sudé prvočíslo 2 jsou zřejmě řešením například čísla $a = 0$, $b = 1$). Nyní uvažujme a z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, (p-1)/2\}$. Stejně tak b. Tím máme $(p+1)/2$ zbytkových tříd. Nyní si ukážeme, že pokud vezmeme a_1, a_2 z této množiny, tak pokud $a_1^2 \equiv a_2^2 \pmod{p}$, už to nutně znamená $a_1 = a_2$. To ukážeme jednoduše. Jednoduše rozložíme na součin $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) \equiv 0 \pmod{p}$. To ale znamená, že jedna ze závorek je dělitelná p. Jelikož $0 \le a_1, a_2 \le (p-1)/2$, tak dostáváme odhady $-(p-1)/2 \le a_1 - a_2 \le (p-1)/2$. Levá závorka tedy bude dělitelná p právě když $a_1 - a_2 = 0$, tedy $a_1 = a_2$. Podobně pro druhý dvojčlen dostáváme odhad $0 \leq a_1 + a_2 \leq p-1$, bude se tedy jednat o násobek p právě když $a_1 = a_2 = 0$. Proto máme $(p+1)/2$ zbytkových tříd pro a^2.

Podobně máme $(p+1)/2$ zbytkových tříd pro b^2, a tedy zřejmě i pro $-b^2 - 1$ (když u všech zbytků převrátíme znaménka a všechna o jedna posuneme, tak nám jich zřejmě zůstane stejný počet). Chceme ukázat, že existuje řešení pro $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod{p}$. No a jelikož a^2 nabývá $(p+1)/2$ zbytkových tříd, stejně tak i výraz na pravé straně, tak kdyby žádné dva zbytky nebyly stejné měli bychom $p+1$ zbytkových tříd modulo p, což je ovšem spor, proto řešení existuje.

Toto lemma by se navíc dalo pomocí Čínské zbytkové věty rozšířit i pro zbylá čísla (nejen pro prvočísla).

Z tohoto lemmatu víme, že existují taková čísla a, b, že $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, tedy že existuje číslo m, že $m \cdot p = a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Z toho, jak jsme si vybrali čísla a a b, dostáváme odhad

$$p \leq m \cdot p \leq \frac{(p-1)^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} + 1 \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{p}{2} - 1 + \frac{3}{2p} < \frac{p}{2}\,.$$

Nyní si najdeme nová čísla y_1, y_2, y_3 a y_4, aby platilo: $x_i \equiv y_i \pmod{m}$ a $-m/2 < y_i \leq m/2$. Tato čísla určitě existují, stačí od čísla x_i odečíst správný násobek m, a dostaneme číslo y_i. Jelikož součet čtverců $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ byl dělitelný m, zřejmě to bude platit i pro nově zavedené proměnné. Máme tedy $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = n \cdot m$, kde $0 \leq n \leq m$ (zřejmě je součet čtyř čtverců nezáporný a z podmínek dosazením zjistíme druhou nerovnost). Nejdřív rozeberem krizové případy $n = 0$ a $n = m$.

V prvním případě tedy máme $x_i = k_i \cdot m$. Víme tedy $k_1^2 m^2 + k_2^2 m^2 + k_3^2 m^2 + k_4^2 m^2 = m \cdot p$, vydělíme rovnici číslem m a dostáváme: $m \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = p$. Jelikož p je prvočíslo, tak buď $m = 1$, pak už máme vyhráno, nebo $m = p$ což je spor s odhadem $m < p/2$.

V druhém případě máme $x_i = k_i \cdot m + m/2$. Vidíme tedy, že m je sudé. Proto už zřejmě platí $\sum_{i=1}^{4} (k_i m + m/2)^2 = mp$. Po úpravě dostáváme: $m \cdot (k_1 + k_1^2 + k_2 + k_2^2 + k_2 + k_2^2 + k_4 + k_4^2 + 1) = p$. Ale my víme, že m je sudé, tedy i p je sudé, problém by tedy mohl nastat jen pro $p = 2$, ale toto číslo umíme napsat jako součet čtyř čtverců $1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, takže se tím nemusíme dále zabývat.

Nyní už tedy víme $0 < n < m$. Teď opět využijeme Eulerovy identity a vynásobíme čísla mp a nm a tím víme že dostaneme opět součet čtyř čtverců

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = npm^2\,.$$

Nyní se koukněme na čísla z_i^2 modulo m^2. K tomu využijeme vztahu $x_i \equiv y_i \pmod{m}$. Proto zřejmě $z_1 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \equiv mp \equiv 0 \pmod{m}$. Proto zřejmě $m^2 | z_1^2$. Pro číslo z_2 dostáváme $z_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) \equiv (x_1 x_2 - x_1 x_2 + x_3 x_4 - x_3 x_4) \equiv 0 \pmod{m}$. Tedy víme i $m^2 | z_2^2$. Obdobně bychom ukázali pro z_3 a z_4 že jsou dělitelné číslem m^2. No ale tím pádem můžeme podělit naší předešlou rovnici číslem m^2

$$npm^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

$$np = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2.$$

Tím jsme ukázali, že pokud máme číslo mp vyjádřeno jako součet čtyř čtverců, umíme tak vyjádřit i číslo np, kde $n < m$, a jelikož $m < p/2$, tak zřejmě po několika krocích vyjádříme p jako součet čtyř čtverců, čímž máme hotovo.

Geometrický důkaz

I v tomto případě nepůjdeme rovnou k důkazu. Nejprve využijeme Minkowského větu. K jejímu pochopení si nejdříve musíme vysvětlit, co je to mřížka. Mřížka je určená vektory $\boldsymbol{v_1}$ až $\boldsymbol{v_n}$ a jedná se vlastně o množinu bodů, které jsou lineárními kombinacemi těchto vektorů, tedy nějaký násobek $\boldsymbol{v_1}$ plus nějaký násobek $\boldsymbol{v_2}$ atd. Například čtevrcová síť je vlastně mřížka definovaná vektory (1, 0) a $(0, 1)$, mřížové body jsou body ve tvaru (a, b), kde $a, b \in \mathbb{Z}$, což by například u mřížky definované vektory $(1, 0)$, $(1, 1)$ neplatilo. Máme-li tedy mřížku označenou λ, můžeme ji obecně vyjádřit jako $\lambda = \{\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}\}$. Ještě si potřebujeme říct, co je to základní rovnoběžník. Je to vlastně to základní těleso, které se v mřížce opakuje, tedy např. ve čtvercové síti je to jeden čtvereček. My budeme základní rovnoběžník značit T a platí tedy $T = \{\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1)\}$. Důležité je, že pro tento rovnoběžník platí, že jeho objem je roven determinantu matice, kde jednotlivé řádky jsou vektory v_1 až v_n.

Minkowského věta

Tak teď si tedy řekneme, co je Minkowského věta. Ta říká, že máme-li nějaké těleso B, pro které platí, že je středově souměrné, konvexní a omezené a objem tohoto tělesa je větší než $2^n \cdot Vol(T)$, kde $Vol(T)$ je objem základního rovnoběžníka a n je počet vektorů určujících mřížku, pak toto těleso protíná ještě nějaký mřížový bod (střed tělesa leží v mřížovém bodu, takže ještě alespoň jeden jiný).

Nyní tedy důkaz. V prvé řadě zaveďme značení $1/2B$, které bude označovat těleso B zmenšené na polovinu podle středu (nikoliv na polovinu objemu, nýbrž každý bod z tělesa B přiblížeme na polovinu ke středu). Ještě si uvědomme, že objem tohoto tělesa je 2^n-krát menší než objem tělesa B. Nyní označme B_z množinu, pro kterou platí $B_z = (1/2B + z) \cap T$, kde z je nějaký mřížový bod a podobně $C_z = 1/2B \cap (T + z)$. Nyní víme, že platí

$$\sum_z Vol(B_z) = \sum_z Vol(C_z) = Vol(\frac{1}{2}B) = \frac{1}{2^n} \cdot Vol(B) > Vol(T)\,.$$

První rovnost zřejmě platí. To můžeme vidět tak, že v prvním případě vlastně posouváme těleso $1/2B$ a to pak pronikneme s rovnoběžníkem T. Ve druhém případě to děláme naopak, posouváme rovnoběžníkem a ten pak pronikneme s tělesem $1/2B$. Zřejmě tedy dostaneme v obou případech to samé. Další rovnost je také poměrně vidět. My totiž vlastně posouváme základní rovnoběžník postupně o každý mřížový bod, tím tedy dostaneme vlastně celou rovinu a pak děláme průnik s tělesem $1/2B$. O další rovnosti jsme si již zmiňovali a poslední nerovnost je podmínkou v Minkowského větě.

Co to pro nás znamená? Že máme nějaké dva mřížové body z_1 a z_2, pro které je průnik B_{z_1} a B_{z_2} neprázdný. Řekněme, že uvnitř jejich průnik leží nějaký bod x. Ten odpovídá nějakým bodům x_1 a x_2 v původním tělese B, tak že $z_1 + 1/2x_1 = z_2 + 1/2x_2$. Po úpravě dostáváme $(x_1 + (-x_2))/2 = z_2 - z_1$. Rozdíl dvou mřížových bodů je opět mřížový bod, stačí tedy ukázat, že bod na levé straně leží v B. Vidíme, že bod $-x_2$ leží v B, protože je B středově souměrné. A jelikož je konvexní, tak všechny body na úsečce $x_1(-x_2)$ leží uvnitř B, tedy speciálně i střed této úsečky $(x_1+(-x_2))/2$. Tím je tedy důkaz hotov, našli jsme bod uvnitř B různý od středu (neboť $x_1 \neq x_2$), který je bodem mřížovým.

Samotný důkaz

Nyní tedy k samotnému důkazu. Chceme dokázat, že n jde napsat jako součet čtyř čtverců. Opět si najdeme čísla a, b, pro která platí $a^2+b^2+1 \equiv 0 \pmod{n}$, což jsme již ukázali, že se nám povede. Vezměme mřížku $\lambda = \{\boldsymbol{v_1} = (n,0,0,0), \boldsymbol{v_2} = (0,n,0,0), \boldsymbol{v_3} = (a,b,1,0), \boldsymbol{v_4} = (b,-a,0,1)\}$. Spočteme si diskriminant a zjistíme $Vol(T) = n^2$. Nyní si vybereme vhodné těleso B. Pro jednoduchost například kouli v $\mathbb{R}^4$. Navíc si chceme vybrat takové těleso, abychom mohli využít Minkowského věty. Tedy

$$Vol(B) = \frac{\pi^2 r^4}{2} > 2^4 n^2 \Rightarrow r^2 > \frac{4\sqrt{2}n}{\pi} \doteq (1,801) \cdot n\,.$$

Můžeme si tedy zvolit například takový poloměr, že $r^2 = 1,9 \cdot n$. Tím máme zajištěno, že existuje nějaký mřížový bod s různý od středu koule, který leží uvnitř mřížky. Píšeme

$$\begin{aligned} s &= a_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + a_4 \boldsymbol{v_4} \\ s &= (a_1 n + a_3 a + a_4 b, a_2 n + a_3 b - a_4 a, a_3, a_4) \\ |s|^2 &= (a_1 n + a_3 a + a_4 b)^2 + (a_2 n + a_3 b - a_4 a)^2 + a_3^2 + a_4^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že $|s|^2$, což nám vyjadřuje druhou mocninu vzdálenosti od středu, máme vyjádřeno jako součet čtyř čtverců. Navíc se koukněme na hodnotu $|s|^2$ modulo n:

$$|s|^2 \equiv (a_3 a + a_4 b)^2 + (a_3 b - a_4 a)^2 + a_3^2 + a_4^2 \equiv (a^2+b^2+1)(a_3^2+a_4^2) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Jinak řečeno tedy $n \,|\, |s|^2$ a jelikož víme $|s|^2 > 0$ (s není střed koule) a $|s|^2 \leq r^2 < 2n$ tak $|s|^2 = n$ a to už máme vyjádřeno jako součet čtyř čtverců, takže máme hotovo!

Výsledková listina 4. série

Poř.	Jméno	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t3	t5	k	+	$\sum_1$
1.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	5		3						1	69
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Kochmanová	2		3	2					0	41
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kolář	0		2	2					0	37
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Bekrová	5					8			0	36
5–7.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha		3			6		5		0	35
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Štědronský	2		4	1				8	0	35
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Kraus										35
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Král	1	3	1						0	34
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Miloš	4			2					0	31
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Pokorný	3		3	2					0	30
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Vahalová										25
12.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Hlásek	5								0	24
13–14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Harlenderová				2					0	22
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Kocián										22
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Langer	4								0	21
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Chejnovská				2				8	0	18
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Onderková										18
18–20.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková				0					0	17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Hubatová										17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Márová										17
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Böhmová		2							0	15
22–23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Gabriela Kubíčková										14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Zemková										14
24–26.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková	5								0	13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Škoda										13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Tesař										13
27–28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Novotný		4		2					0	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Štoček	1			1					0	12
29–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Jurásková				2					0	9
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Holeček										9
	Tomáš Trégner										9
32.	Jiří Biolek	5	2		1					0	8

Poř.	Jméno	r1	r2	r3	r4	r5	t3	t5	k	+	$\sum_1$
		Úlohy									
33–34.	Mgr.^{MM} Kateřina Honzáková										6
	Ondřej Mička										6
35.	Marek Stehlík										5
36–39.	Mgr.^{MM} Michal Husek										4
	Josef Klesa										4
	Pavel Pejřimovský	1								0	4
	Daniel Šafka										4
40.	Pavel Kratochvíl										3
41–45.	Mgr.^{MM} Zuzana Dočekalová										2
	Bc.^{MM} Barbora Šmídová										2
	Jan Česal				2					0	2
	Kateřina Jiráková										2
	Dominik Miketa										2
46.	Karel Tesař										1
47.	Simona Ondrčková										0

Výsledková listina 5. série

Poř.	Jméno	r1	r2	r3	r4	r5	t2	t5	k	+	$\sum_1$
		Úlohy									
1.	Prof.^{MM} Štěpán Šimsa	5		3	2	3			15	3	100
2.	Mgr.^{MM} Vojtěch Kolář	5	1	3	0	3				0	49
3.	Dr.^{MM} Karel Král								10		44
4.	Dr.^{MM} Michaela Kochmanová										41
5–6.	Doc.^{MM} Petr Pecha							5			40
	Dr.^{MM} Tomáš Pokorný								10		40
7.	Dr.^{MM} Martina Bekrová										36
8–9.	Dr.^{MM} Filip Štědronský										35
	Dr.^{MM} Karel Kraus										35
10–12.	Mgr.^{MM} Vojtěch Miloš										31
	Mgr.^{MM} Lukáš Langer								10		31
	Mgr.^{MM} Matěj Kocián	5		1	1	2				0	31
13.	Dr.^{MM} Filip Hlásek			3	2					0	29
14.	Mgr.^{MM} Petra Vahalová				1					0	26
15.	Mgr.^{MM} Barbora Böhmová	5	2							1	23

Poř.	Jméno	r1	r2	r3	r4	r5	t2	t5	k	+	$\sum_1$
		Úlohy									
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Harlenderová										22
17–18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Chejnovská										18
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Onderková										18
19–21.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková										17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Hubatová										17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Márová										17
22–23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Gabriela Kubíčková										14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Zemková										14
24–27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková										13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Škoda										13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Cífka		2	3	2	3	1			2	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Tesař										13
28–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Novotný										12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Štoček										12
30–32.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Jurásková										9
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Holeček										9
	Tomáš Trégner										9
33.	Jiří Biolek										8
34–35.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková										6
	Ondřej Mička										6
36.	Marek Stehlík										5
37–41.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Husek										4
	Jan Bok			3	1					0	4
	Josef Klesa										4
	Pavel Pejřimovský										4
	Daniel Šafka										4
42.	Pavel Kratochvíl										3
43–49.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Dočekalová										2
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Šmídová										2
	Jan Česal										2
	Kateřina Jiráková										2
	Dominika Kalasová				2					0	2
	Vojtěch Kletečka	1	1		0					0	2
	Dominik Miketa										2

Poř.	Jméno	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t2	t5	k	+	$\sum_1$
50–51.	Ondřej Fiedler			1						0	1
	Karel Tesař										1
52.	Simona Ondrčková										0

Výsledková listina XVI. ročníku

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo 1	2	3	4	5	$\sum_1$
1.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	208	22	24	14	9	31	100
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kolář	4.	49	18	5	10	4	12	49
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Král	4.	50	14	11	4	5	10	44
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Kochmanová	3.	69	15	5	14	7		41
5–6.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	3.	193	3	2	16	14	5	40
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Pokorný	3.	52	10	5	7	8	10	40
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Bekrová	3.	53	7	6	10	13		36
8–9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Štědronský	3.	78		6	14	15		35
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Kraus	4.	65	22	8	5			35
10–12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Miloš	4.	48	10	10	5	6		31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Langer	4.	34	7	6	4	4	10	31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Kocián	3.	31	6	9	7		9	31
13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Hlásek	3.	51	6		13	5	5	29
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Vahalová	4.	26	8	6	11		1	26
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Böhmová	2.	30		5	8	2	8	23
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Harlenderová	2.	26	11	6	3	2		22
17–18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Chejnovská	3.	36	4	4		10		18
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Onderková	4.	20	10	8				18
19–21.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	3.	100	11		6	0		17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Hubatová	3.	17	17					17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Márová	4.	17	17					17
22–23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Gabriela Kubíčková	3.	14		7	7			14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Zemková	2.	14		2	12			14
24–27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková	4.	29	4		4	5		13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Škoda	3.	28	13					13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Cífka	1.	13					13	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Tesař	4.	13	7	3	3			13
28–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Novotný	4.	28	0	2	4	6		12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Štoček	3.	12	7	2	1	2		12
30–32.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Jurásková	2.	30	5		2	2		9
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Holeček	4.	13	9					9
	Tomáš Trégner	2.	9	9					9

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo					$\sum_1$
				1	2	3	4	5	
33.	Jiří Biolek	2.	8				8		8
34–35.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Honzáková	4.	39	6					6
	Ondřej Mička	1.	6	6					6
36.	Marek Stehlík	3.	5	5					5
37–41.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Husek	4.	25	0	4				4
	Jan Bok	3.	4					4	4
	Josef Klesa	2.	4	0		4			4
	Pavel Pejřimovský	3.	4		3		1		4
	Daniel Šafka	3.	4	4					4
42.	Pavel Kratochvíl	2.	8	3					3
43–49.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Dočekalová	4.	36	2					2
	Bc.$^{\text{MM}}$ Barbora Šmídová	1.	10	2					2
	Jan Česal	2.	2				2		2
	Kateřina Jiráková	3.	2			2			2
	Dominika Kalasová	3.	2					2	2
	Vojtěch Kletečka	2.	2					2	2
	Dominik Miketa	3.	2	2					2
50–51.	Ondřej Fiedler	3.	1					1	1
	Karel Tesař		1			1			1
52.	Simona Ondrčková	1.	0	0					0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.