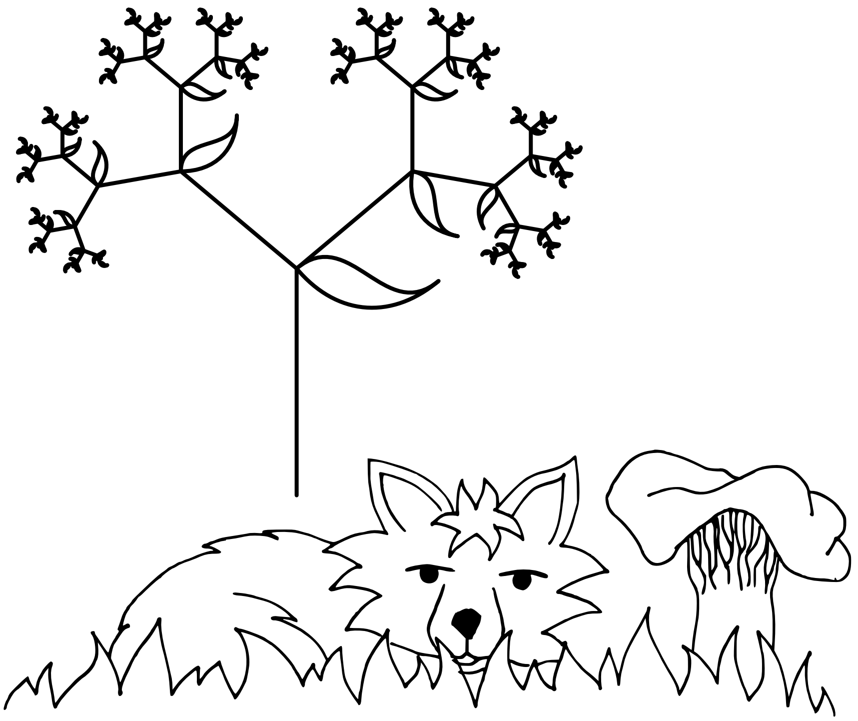
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XVI / Číslo 5



Milí čtenáři,

i když jste si možná mysleli, že jsme na vás již zapomněli, opak je pravdou. Vracíme se k vám s novým číslem, ve kterém naleznete několik velice zajímavých příspěvků k tématům. Doufáme, že tyto příspěvky pro vás budou inspirací a motivací k napsání vlastních článků.

Také bychom chtěli vyhlásit vítězku naší tipovací soutěže z anket. Nakonec se nám sešlo 9 anket. Nejlépe se trefila slečna Dr.MM Michaela Kochmanová, která odhadovala 7 anket. Za nejlepší tip posíláme tričko.

Na závěr bychom vás chtěli upozornit na zajímavou možnost, jak si vyzkoušet vědu vlastníma rukama. Jde o projekt Schola ludus (popis je na internetových stránkách `http://www.ufb.jcu.cz/projekty/vpk/`). Projekty, na kterých tam můžete pracovat, jsou z větší části biologické či chemické, ale najdou se i fyzikální. Pokud vás projekt zaujal a chtěli byste se zapojit, tak se nebojte napsat na adresu redakce a my vám můžeme pomoci se zapojit.

Slunné jaro a maturantům hodně štěstí u maturity přeje

Redakce M&M

Zadání úloh

Termín odeslání páté série: 7. 6. 2010

Úloha 5.1 – Ztracen v horách (5b)

Už dva týdny jsem putoval bezútěšnou pustinou, kde dříve protékal potok a mezi kamennými domy si hrály děti. V polorozpadlých chatrčích zůstali už jen tři z původních obyvatel, v místě, kde všichni bojovali o holý život, o poslední kapku vody, se nenáviděli k smrti. Bylo mi do pláče nad zdejšími lidmi, zdejší krajinou a navíc jsem již druhým dnem pociťoval nesnesitelnou žízeň.

Daleko v horách jsem zahlédl pastýře, nebyl jako ostatní, v celé své opuštěnosti měl stále výraz hrdého a vstřícného muže. Než jsem cokoli stačil říct, podal mi láhev a dal mi napít. Vyzval mě, abych ho doprovázel na cestě domů, nabídl mi nocleh.

V jeho příbytku vůbec nic nenaznačovalo chudobu a bídný stav kraje, vše bylo sice prosté, zato nádherně poklizené a čisté, každičká věc měla své místo. Ani jsem se nenadál a v kotlíku nad krbem pobublávala naše polévka. Využil jsem chvilky, kdy se pastýř nedíval, a potichu jsem proklouzl do vedlejší místnosti s proutěným křeslem a nádhernou knihovnou, voněla čerstvým dřevem a starými knihami.

Knihy byly do poslední vzorně obaleny ve starém novinovém papíře, aby se jejich desky neponičily. Místo názvu knihy byl na hřbetu obalu každé z nich napsán úhledným písmem devíticiferný kód. Každá kniha měla svou jedinečnou devíticifernou posloupnost čísel složenou z cifer 0 až 9, každé dva kódy se ale lišily alespoň ve dvou cifrách, to aby nedošlo k záměně knih. Kolik nejvíce mohl mít pastýř ve své knihovničce knih?

Polévka byla hotová, konečně teplé jídlo, zahřála mě a já byl pastýři opravdu vděčný. Vytáhl jsem váček s tabákem a nabídl mu. „Já nekouřím," řekl. Zastyděl jsem se za svou neomalenou nabídku a mlčky se sklopenýma očima hleděl na stůl. On se ale vůbec nezlobil, vytáhl svůj, o něco větší plátěný váček a začal z něj vysypávat žaludy.

Úloha 5.2 – Záhadné duby (4b)

Pečlivě je rozděloval na hromádky po deseti, až měl takových hromádek deset. Potom každý převracel a prohlížel. Ty, které byly moc malé nebo nemocné, odkládal stranou a nahrazoval je novými většími z váčku. Když byl hotov, spokojeně shrnul všech deset hromádek do jiného váčku, který nosil za pasem, a šel spát.

Přál jsem si, abych mohl zůstat alespoň pár dní v blízkosti tohoto klidného a prazvláštního člověka. Jako bych snad své přání vyslovil nahlas, nabídl mi pastýř, že u něj mohu odpočinout, kolik jen dní budu chtít.

Ráno se nepozorovaně vytratil, myslel jsem, že jde vyhnat na pastvu ovce, on si však vzal s sebou velikou dřevěnou hůl a lano a vydal se do kopců. Hořel jsem zvědavostí, a tak jsem zamířil souběžně s jeho cestou. Obával jsem se, že mě zpozoruje, a bude se zlobit. Opravdu si mě brzy všiml, ale okamžitě mi nabídl, abych jej doprovázel.

Nešli jsme daleko, zato stále do kopce. Cíl naší cesty ležel kousek za kopcem tvaru kužele, který byl dokonale hladký (mezi kopcem a mnou by tedy nevzniklo žádné tření). Nabízela se tedy otázka, zda kopec obejít nebo jej s pomocí lana přelézt. Pastýř se rozhodl vydat se přes kopec, abychom byli na místě rychleji. Na laně tedy vytvořil dokonale ohebnou smyčku s pevným uzlem a přehodil ji přes vrchol kopce. Jaký je mezní vrcholový úhel kužele, pro který mu smyčka již nesklouzne?

Kopec jsme zdárně překonali a já stanul na kraji dubového hájku, nikdy bych nečekal, že uprostřed nehostinné pustiny bude rašit tolik nových stromků. Otočil jsem se za sebe a zůstal nevěřícně zírat, pastýř klečel u země a velikou holí hloubil jamky, do nichž opatrně vkládal žaludy. Celý dubový háj byl dílem jeho mnohaleté práce.

Úloha 5.3 – Návrat (3b)

Jmenoval se Elzéard Bouffier. Tento dobrý muž již po deset let dennodenně sázel duby v blízkosti svého domu, za tuto dobu vysázel již na 360 000 stromků, z nichž polovina vůbec nevyrostla a další část nesnesla dlouho drsné podmínky horské přírody. Za deset let se Elzéardu Bouffierovi podařilo vysázet 100 000 statných vzrostlých dubů, které se dnes hrdě tyčily k nebi.

Miloval svou práci a nikdy mu nezevšedněla, rozhodl se této pustině vrátit život. V blízkosti stromů stékal do údolí malý potůček, první odměna za snahu dobrému pastýři. Ačkoli jsem obdivoval úsilí tohoto muže, nijak zvlášť mne setkání s ním nepoznamenalo. Za rok vypukla válka a já nemohl myslet na duby.

Po návratu z války jsem ale zatoužil vidět známé kopce a hlavně Elzéarda Bouffiera a jeho velké dílo. Tentokrát jsem byl na několikadenní putování nehostinným krajem připraven. Vzal jsem s sebou N šerpů, kteří mi pomáhali nosit zavazadla. Když jsme dosáhli první vesnice v oblasti, zaplatil jsem jim a dál jsem se rozhodl vydat sám. Již před výpravou jsem si vyčlenil obnos M franků, který jsem hodlal mezi své nosiče rozdělit. Jenomže různí šerpové nesli rozdílný náklad a určitě by nebylo spravedlivé, aby ten, kdo nesl méně, dostal zaplaceno více. Měl jsem údaje $m_1, \ldots, m_N$, určující hmotnost nákladu v kilogramech, který jednotliví nosiči nesli. Chtěl jsem tedy rozdělit obnos M mezi N nosičů tak, aby nosič A, který nesl více nákladu než nosič B, dostal alespoň tolik peněz co nosič B. Zajímalo by mě, kolik takových rozdělení existuje? Vaším úkolem je napsat program, který dostane na vstupu počet nosičů N, množství peněz M, které se mezi ně má rozdělit, a hmotnosti nákladů, které jednotliví nosiči nesli, $m_1, \ldots, m_N$ a na výstup vypíše počet způsobů, jakými lze peníze mezi šerpy rozdělit. Frank považujte za dále nedělitelnou měnu, stejně tak můžete předpokládat, že žádní dva šerpové nenesli stejné množství nákladu.

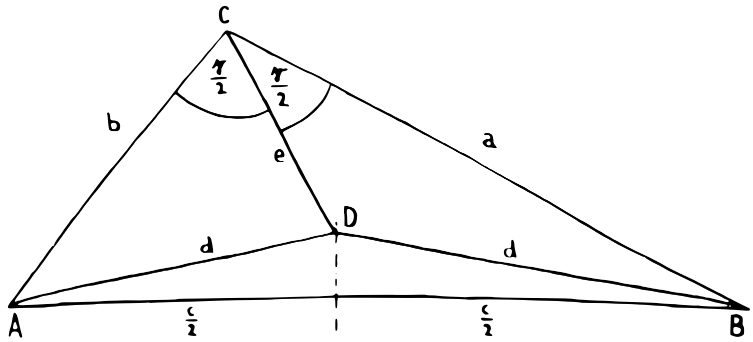
Přede mnou bylo ještě několik dnů cesty bezútěšnou pustinou, začal jsem myslet na stromy. V dálce se tyčily vysoké kopce pokryté tmavými koberci, napadlo mě, zda to nemůže být pozůstatek požáru nebo válečného řádění. Mýlil jsem se, na vrcholcích kopců se rýsovaly neuvěřitelně široké pásy dubových a bukových lesů. Nemohl jsem uvěřit vlastním očím, do vesnice, kde dříve bylo úplné sucho, stékala široká horská bystřina, ze svahů se do údolí hrnuly nekonečné počty drobných potůčků. Zatoužil jsem uvidět toho muže.

Úloha 5.4 – Elzéard Bouffier (2b)

Za války jsem viděl umírat opravdu mnoho lidí, dovedl bych si představit i Elzéarda Bouffiera. Ale on byl právě naopak plný života. Změnil zaměstnání, prodal ovce (okusovaly mladé stromky) a nakoupil čtyři úly. V okolí jeho domu už bylo plno mladých dubů a buků, musel tedy chodit celých dvanáct kilometrů daleko do hor, kde byla krajina ještě stále pustá a opuštěná. Byl už starý a tak se rozhodl, že si časem postaví kamennou chatu v blízkosti pustiny. O rok později svůj plán uskutečnil. V chatě pobýval obvykle několik týdnů. S nikým se nestýkal, byl sám jen se svými stromy. Už nemluvil. Nepotřeboval to. Ačkoli se často potýkal s úplnou beznadějí, když mu vzrostlé semenáčky zahynuly suchem, nikdy neustal ve své práci.

Do kopců jsem se vrátil o rok později, Elzéard Bouffier měl už stovku úlů. Kromě dubů a buků sázel na místech, kde tušil podzemní vodu, břízy. Lidé si na změny zvykli, protože proměna trvala dlouho, a tak množství lesů připisovali samotné přírodě. Elzéard Bouffier nikterak netoužil po uznání nebo poděkování. Věděl, že by byli lidé rozzlobeni, kdyby se dozvěděli, že to on na jejich pozemcích vysazuje stromy. Nebyly to ale jeho stromy, patřily všem. Sázel je pro všechny ostatní a nejvíc pro tu bezútěšně pustou krajinu.

Jednoho roku se mnou přijel můj přítel lesník. Věděl jsem, že umí pomlčet a bude nadšený z našeho tajemství. Proto jsem jej seznámil se včelařem a prozradil mu, odkud jsou všechny ty statné stromy. Krajina mu učarovala a rozhodl se nechat si vzpomínku na zdejší kraj, nakreslit mapu a do ní vyznačit nové lesy. Chvíli něco črtal na papír a potom jej položil na stůl. Uprostřed mapy se nacházela zalesněná oblast.



Byla zakreslena pomocí obecného trojúhelníku. Když jsem se na obrázek podíval lépe, všiml jsem si, že vzniklý trojúhelník ADC byl definovaný stranami e, d a úhlem $\gamma/2$, stejně tak, jako trojúhelník CDE. To ale znamenalo, že se strana a musela rovnat straně b. Jak to může být možné? Vždyť přítel nakreslil obecný trojúhelník.

Když přítel odjížděl, zařídil, aby vzal stát lesy pod svou ochranu, tak mělo být dílo včelaře zachováno.

Elzéarda Bouffiera jsem viděl naposled v červnu 1945. Když jsem přicházel do původně zpustlé vesnice, nemohl jsem poznat zdejší kraj. Vesnička doslova žila, v kašně prýštila voda a blízko ní si hrály děti za dohledu svých rodičů. Kopce všude kolem byly posypány zelení stromů, místo potůčků ústila do údolí veliká řeka, na březích rostly vrby a jiné stromy, jejichž semena sem přivál vítr. Vzduch byl naplněn vůní bylin a tekoucí voda byla v těchto vyprahlých končinách přímo hudbou pro uši.

Uvážím-li to, všichni tito lidé vděčí za svůj život chudému včelaři, který svou usilovnou prací dokázal do těchto končin přinést život. Ačkoli mě dříve setkání s ním příliš nezměnilo, nyní jsem cítil k tomuto ušlechtilému muži hlubokou úctu.

Elzéard Bouffier zemřel v roce 1947 v domově pro přestárlé.

Příběh je inspirován knihou Muž, který sázel stromy od francouzského spisovatele Joana Giona.

Řešení témat

Téma 3 – Přebíjená

Tento článek byl vytvořen Mgr.[MM] Martinou Bekrovou, která se v tomto článku zabývá analýzou přebíjené pomocí počítačových programů. Sumarizuje v něm své poznatky a doplňuje je o několik pozorování.

Přebíjená s využitím počítače

Mgr.[MM] Martina Bekrová

Nejprve si musíme zadefinovat prostředí. Veškerá svá pozorování jsem prováděla na kartách pro hru prší. Karta `VII` má hodnotu 0, `VIII` má hodnotu 1, ..., `eso` má hodnotu 7. Pokud každý z hráčů dává na spodek balíčku karty podle určitého pravidla, dá se určit, který z nich vyhraje (viz. `prebijena_zadej.py` – pokud hráč dává na spodní stranu balíčku nejdřív své karty a bank jsou 3 karty a také pokud při remíze rozhoduje hned následující karta). Když hrajete proti soupeři, který dává své karty na spodní stranu balíčku podle určitého pravidla, lze ho ve všech případech, které jsem zkoušela, porazit vhodným rovnáním karet pod svou hromádku (viz. `prebijena_vyhraj.py` – pokud protihráč dává dospod nejdřív své karty a bank jsou 3 karty).

Pokud každý hráč dává dospod nejdříve své karty a při remíze odkládá do banku 3 karty, pak většinou vyhraje ten s kladným výherním potenciálem. Výherní potenciál hráče je číslo, které udává rozdíl součtu hodnot jeho karet a karet protihráče. Hráč, který má výherní potenciál kladný, má vyšší karty, vyhraje přibližně v 68% her a ty jsou dlouhé v průměru 56 otočení karet. Ani při záporném výherním potenciálu není vše ztraceno, ale vyhrát zabere více času. V těchto případech hra trvá v průměru 76 otočení. Pokud je výherní potenciál vyšší než -5 je šance na výhru 1 ku 4, pak každou hru otočíme průměrně 78 karet, při hodnotě mezi -5 a -10 je šance na výhru 13% a v průměru to trvá 80 otočení a při hodnotě okolo -15-ti je šance na výhru 9% při 83 otočení v průměru (zdroj: analýza pomocí `vysledky_bank3.py`).

V případě, že při remíze rozhoduje hned následující karta, se výsledky příliš nezmění. Karty v banku dostával výherce bez boje, rychleji, ale teď výhra s kladným výherním potenciálem (65% výher) trvala průměrně 108 otočení, se záporným pak v průměru 148 otočení(vysledky viz `vysledky_bank0.py`).

V žádném případě se mi ale nepodařilo narazit na nekonečnou hru. Pokud by si však při remíze každý vzal svou kartu zpět, byla by nekonečná jakákoli hra, ve které by jeden z hráčů nevlastnil všechna esa. Tato karta by se totiž stala nesebratelnou. Kartu nižší hodnoty by přebila a při setkání se sobě rovnou by stejně vždy zůstala u svého původního majitele. Kdyby se při otočení dvou karet stejné hodnoty rozhodovalo podle barvy (např. srdcová karta vždy přebije stejně vysokou žaludovou, ta zelenou, ta kulovou), tak by zde byla buď nekonečná hra nebo by dříve či později vyhrál hráč vlastnící nejvyšší kartu, v našem případě srdcové eso, protože není způsob, jak mu ji sebrat. Vyhrát hru by mohl i hráč, který dostal na počátku hry méně karet. Tuto situaci můžeme simulovat pomocí situace uprostřed hry, kdy i hráč, který nakonec vyhraje, má občas během hry méně karet než soupeř.

Pozn. red.: Tyto programy, napsané v Pythonu, lze najít na adrese `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti`. *Programy nejsou z programátorského hlediska dokonalé, ale zato algoritmicky správné.*

Honzík

Téma 5 – Trosečník

K tomuto tématku nám přišel jeden příspěvek od Doc.^{MM} Petra Pechy. Zabývá se v něm konstrukcí kondenzátorů a cívek. Ve svém článku uvádí odvážné tvrzení, že vyvrátil vzorec pro výpočet kapacity deskového kondenzátoru

$$C = \varepsilon \frac{S}{l}\,, \qquad (1)\,,$$

kde ε je permitivita izolantu mezi deskami, S je plocha desek a l je tloušťka izolantu (vzdálenost desek). Což samozřejmě není pravda. Najde se někdo, kdo uvede jeho tvrzení na pravou míru a navrhne (odvodí) vhodnější vztah pro výpočet kapacity Petrova kondenzátoru?

Také bych vás chtěl požádat, abyste se v dalších článcích pokusili alespoň odhadnout chybu měření, a nebo ještě lépe ji vypočítat. Návod najdete v M&M číslo 16. 2.

Výroba LC prvků

Doc.^{MM} Petr Pecha

V mém příspěvku jsem se pokoušel vyrobit kondenzátor. Podle něho stanovit přibližnou hodnotu cívky. A nakonec jsem experimentoval s výrobou cívky.

Na začátek malé zamyšlení o pásmech frekvencí. V tabulce t5.2.1 uvádím rozdělení frekvenčních pásem. Vhodné vlny na vysílání jsou asi KV až DV.

Kondenzátory jsem vyráběl z vrstev alobalu o šířce 20 mm a délce 290 mm. Mezi jednotlivé vrstvy alobalu jsem vkládal vrstvy kancelářského papíru o šířce 3 až 4 cm. Jednotlivé pruhy alobalu jsem nechal „trčet“ 30 mm ven. To znamená že funkční plocha je:

$$S = 20 \cdot (290 - 30) = 5200\,\mathrm{mm}^2\,, \qquad (2)$$

Zkoušel jsem dvou, tří a čtyř deskový kondenzátor. Pro měření jsem použil měřící přístroj MIC-40700 LCR METER, který jsem si půjčil ze školní laboratoře. Naměřené hodnoty jsem zapsal do tabulky t5.2.2.

Tímto jsem popřel vzorec pro výpočet kapacity kondenzátoru, který říká, že kapacita je lineární k počtu desek.

Název	Zkratka	Rozsah
extrémě dlouhé vlny	ELF	3 Hz až 3 kHz
velmi dlouhé vlny	VDV	3 kHz až 30 kHz
dlouhé vlny	DV	30 kHz až 300 kHz
střední vlny	SV	300 kHz až 3 MHz
krátké vlny	KV	3 MHz až 30 MHz
velmi krátké vlny	VKV	30 MHz až 300 MHz
ultra krátké vlny	UKV	300 MHz až 3 GHz
super krátké vlny	SKV	3 GHz až 30 GHz
extra krátké vlny	EKV	30 GHz až 300 GHz

Tabulka t5.2.1: Rozdělení frekvenčních pásem.

Počet desek	Kapacita [nF]
2	4,1
3	34
4	100

Tabulka t5.2.2: Výsledky měření kapacity kondenzátorů

Pozn. red.: To samozřejmě není pravda, neboť Petr výše popsané kondenzátory stočil do ruličky. Vyrobil tak svitkové a ne deskové kondenzátory. Nemohl tedy použít vztah (1).

Nyní známe kapacity mých kondenzátorů. Zvolíme si frekvenci v rozsahu 30 kHz až 30 MHz. Pokud upravíme známý vzorec

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,, \tag{3}$$

dostaneme

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C f^2}\,. \tag{4}$$

Vypočtený rozsah indukčností cívky udává tabulka t5.2.3.

Nyní jsem přistoupil ke stavbě cívky. Namotal jsem ji z prvního drátu, který jsem doma našel. Má průřez asi 1 mm^2 s docela tlustou izolací. Namotal jsem ho na mosaznou trubku, myslím o průměru $d = 5$ mm. Cívka má délku 90 mm s 25 závity. Použil jsem stejný měřák. Naměřené hodnoty jsou v tabulce t5.2.4.

Kapacita	Frekvence	Indukčnost
4,1 nF	30 kHz až 30 MHz	6,86 mH až 6,86 nH
34 nF	30 kHz až 30 MHz	828 μH až 828 pH
100 nF	30 kHz až 30 MHz	281 μH až 281 pH

Tabulka t5.2.3: Vypočtené rozsahy indukčností cívek

Jádro	Indukčnost [μH]
vzduch	0,6
ocel	4,0

Tabulka t5.2.4: Naměřené indukčnosti cívky.

Do cívky jsem vsunul první ocelový drát co jsem našel. Měl průměr $d = 4\,\mathrm{mm}$.

S tímto lze dosáhnou frekvence nejméně 252 kHz, což jsou dlouhé vlny. Pokud zmenšíme kapacitu nebo indukčnost frekvence bude větší.

(R)adim

Téma 6 – Měnová reforma

V tomto čísle otiskujeme část článku Dr.MM Filipa Štědronského, který se zabýval měnovými systémy, kde je nejvýhodnější platit vždy nejcennější mincí, která nepřevyšuje hodnotu částky, kterou ještě zbývá zaplatit, tj. tímto způsobem použijeme nejmenší počet mincí. Tento způsob placení už byl zmíněn v předešlých číslech jakožto *standardní*, autor systémy mincí, kde je tento způsob placení vždy nejvýhodnější označuje jako *Hezké*.

Měnové systémy s hezkou vlastností

Dr.MM Filip Štědronský

Opravdu jsem věřil, že najdu elegantní, jednoduchou a ekvivalentní podmínku pro to, kdy má měnový systém Hezkou vlastnost, a bylo pro mne velkým zklamáním, když se taková neobjevila. Nemohu tedy nabídnout víc než pár postřehů, jak Hezké systémy vytvářet. Žádný z nich však neodůvodní Hezkost ani našeho $1, 2, 5, \ldots$ plativa.

Budeme postupovat takovým trochu indukčním postupem. Systém s jedinou mincí (kterážto nemůže být nic než koruna) je určitě Hezký. Už proto, že máme jedinou možnost jak zaplatit, musí být minimální. A když už takový máme, zkusíme z něj vytvořit další přidáním nějaké mince nebo mincí.

Co určitě můžeme udělat je vzít poslední (nejvyšší) minci původního systému a přidat do něj nějaký její n-násobek. Proč to bude fungovat? To co s novou mincí zaplatit jde, zaplatíme, tím se potřebný počet mincí určitě sníží – jinak bychom platili původní nejvyšší mincí, kterých by bylo na každou novou n, tedy určitě více než jedna. A to, co nejde zaplatit novou mincí, zaplatíme původními mincemi – podle Hezké vlastnosti původního systému víme, že počet mincí použitých na zaplacení této částky bude minimální.

Další věc, kterou určitě můžeme provést, je všechny mince vzít a jejich hodnotu vynásobit nějakým k. Pak samozřejmě musíme přidat novou korunu, jelikož z původní se mezitím stala k-koruna. Pokud se na placení podíváme modulo k, zbytek se po celou dobu placení k-násobnými mincemi nemění, takže jej nakonec stejně musíme „dohnat“ korunami na nulu – jinak to nejde. Vše před tím se odehrává v násobcích k a pokud si k-korunovou minci zvolíme za jednotkovou, jde o ten samý Hezký systém, který již známe z původního. Jediné, co bychom ještě mohli udělat, je některou z mincí nahradit korunami[1].

A co takhle měnové systémy skládat tak, abychom mohli platit po řádech?[2] Tedy tak, že si částku rozdělíme na (ne nutně stejně velké) řády a v každém z nich platíme nějakým elementárním Hezkým systémem – jako to dělá naše soustava: 1, 2, 5, pro jednotky, 10, 20, 50 je jen 1, 2, 5 v řádu desítek. I tento příklad ukazuje, že se takto dají vytvářet měnové systémy docela praktické – a přehledné. Mějme dva systémy Hezké vlastnosti, z nichž jeden budeme chtít použít pro řád „jednotek“ a druhý pro nějaký vyšší – tedy násobky nějakého k. Tedy všechny jeho mince zvětšíme k-krát a část částky dělitelnou k s nimi budeme Hezky platit jako v případě výše, tohle je vlastně jen jeho rozšíření, kdy zbytek nedoplatíme korunami, ale druhým Hezkým systémem.

Aby to fungovalo, musí být k násobkem nejvyšší mince menšího (jednotkového) systému.[3] Tak můžeme zajistit, že vše, co zaplatíme mincemi vyššího řádu bychom zaplatili právě a jen touto, tedy určitě by se nedostalo na žádné jiné, kterým bychom v nové situaci možnost upřeli. A s novými mincemi to půjde jistě na menší počet, nebo přinejhorším stejný, však mají větší hodnotu, a ta původní tam zůstala též, když se do čehokoli většího nevejdeme. Určitě si nemůžeme pohoršit.

---

[1] *Pozn. red.: Pro Hezké systémy, kde je každá mince násobkem předchozí, je to zjevně pravda. Pro obecné Hezké systémy mincí (tj. nejen v ty, kde je každá mince násobkem předchozí) vynásobené k to není tak samozřejmé. Jelikož autor toto tvrzení nijak nedokazuje, ponecháváme jeho dokázání či vyvrácení jako námět pro ostatní čtenáře.*

[2] *Pozn. red.: Autor používá slovo řád ve značně obecném smyslu – řády mohou být nejenom desítky, stovky atd., ale třeba* 20, 400, 1600 *pro dvacítkovou soustavu, ale také třeba* 8, 80 *a* 960.

[3] *Pozn. red.: Za této podmínky systém rozhodně hezký bude. Je to ale skutečně nutné, nebo lze podmínku nějak zeslabit?*

Vidíme to například u našeho známého 1, 2, 5, kde si prostě zvolíme $k = 10 = 2 \cdot 5$ a pro vyšší řád (v tomto případě desítky, ale mohly by to být klidně třeba patnáctky a fungovalo by to stejně) použijeme ten samý systém.

Pozn. red.: Dále se autor zabýval hledáním optimálních systémů zkonstruovaných těmito metodami pomocí počítače, tuto část neotiskujeme, místo toho předkládáme následující návrh k zamyšlení: omezíme-li se na hezké systémy s nějakými speciálními vlastnostmi (například že každá mince je k-násobkem té předchozí, jako v článku), umíte najít čistě matematický důkaz, že daný systém je optimální (například, že pro systém se čtyřmi mincemi je optimální zvolit $k = 4$?)

Tereza

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Za zrcadlem (4b)

Zadání:

Alenka běžela ze všech sil, jen aby nemusela vystoupit před všemi těmi podivnými dospělými. Chtěla utéct tak daleko, jak jen to šlo. Když tu spatřila bílého králíka, jak natahuje zvědavě hlavu do nory ve vyschlém kmeni, kde v mžiku zmizel. Natáhla se za ním a najednou, jako by se celá propadla dutým kmenem až na samotné dno dlouhatánského černého tunelu.

„Prásk!“ ozvalo se, jakmile dopadla na ledovou zem. Když se pevně postavila na obě nohy, které se jí ještě stále třásly úlekem, uviděla veliké čtvercové zrcadlo a za ním toho malého bílého králíčka. Natáhla ruku k lesklé ploše zrcadla a zlehka se jí dotkla.

„Až vyluštíš hádanku,“ ušklíbl se králík.

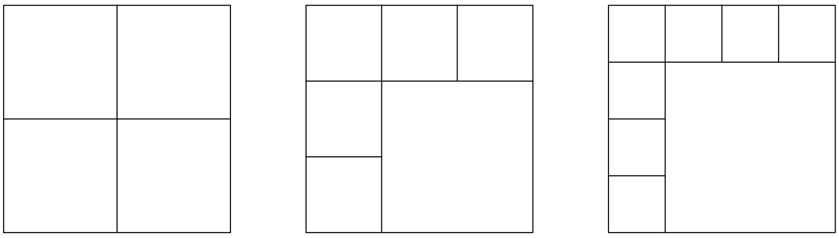
„Hádanku?“ znejistěla Alenka.

„Hádanku, copak neznáš hádanky a už se tak hloupě neptej a poslouchej…“

„Podívej se na to veliké čtvercové zrcadlo před tebou. Je potřeba jej rozřezat na n ne nutně stejných čtverečků. Až přijdeš na to, pro která n se ti to může povést, projdeš zrcadlem.“

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že pokud umíme rozřezat čtverec na nějakých k částí, tak můžeme jeden ze vzniklých čtverců ještě rozdělit na čtyři stejné čtverečky, čímž dostaneme $k + 3$ kusů. Po troše hraní přijdeme na to, jak rozřezat čtverec pro nějaká malá n.



Podle obrázků umíme čtverec rozřezat pro n rovné 4, 6 a 8. Zároveň už víme, že určitě umíme i vytvořit o tři čtverečky víc. Indukcí tedy snadno dokážeme, že čtverec umíme rozdělit na n částí pro $n = 4+3k$, $n = 6+3k$ i $n = 8+3k$, kde $k \in \mathbb{N}$. To znamená, že čtverec umíme rozdělit pro všechna přirozená n mimo 1, 2, 3 a 5. Rozřezat čtverec na jednu část ale není obtížné, to s ním jednoduše nebudeme dělat vůbec nic.

Rozdělit čtverec na 2 nebo 3 části nelze. Jinak by jeden ze vzniklých čtverečků musel obsahovat dva vrcholy původního čtverce a tedy musel mít velikost hrany alespoň takovou jako původní čtverec.

A dokonce neexistuje rozdělení ani pro $n = 5$. Nejprve si rozmyslíme, že každý čtvereček se musí dotýkat alespoň jedné hrany původního čtverce. Pokud by se nějaký nedotýkal, musely by ostatní čtyři čtverce pokrýt každý úsek strany a pokud se žádné dva z nich nemají překrývat, musí situace vypadat jako na obrázku pro $n = 4$ a na pátý čtvereček tak nezbývá místo. Nyní tedy máme jednu stranu, které se dotýkají tři čtverečky, nechť je to horní. Pokud by byl každý z horních čtverců jinak velký, už tam zbývající dva nemůžeme poskládat tak, aby akorát pokryly původní čtverec. Alespoň dva z nich (a to dva vedle sebe) tedy musí mít stejnou velikost. Ale zase nemohou být všechny stejně velké. Protože by nám zůstal obdélník, který pomocí dvou čtverců už nepokryjeme (očividně by poměr stran 1:2 neměl). Zbývající útvar můžeme pokrýt pomocí dvou čtverců jen tak, že jeden bude pod dvěma stejně velkými a poslední pod třetím v řadě. Pak ale poslední s třetím musejí mít stejnou velikost a protože pokrývají jednu stranu, bude jejich velikost rovna polovině strany původního čtverce. Obdobně pak dostaneme, že oba dolní čtverce musejí být stejně velké. Tedy pro dva stejně velké v horní řadě zbývá čtverec. My už ale víme, že čtverec pomocí dvou menších čtverců pokrýt nelze.

Kuba

Úloha 3.2 – Lék (5b)

Zadání:

Alenka se celou svou silou opřela do skleněné desky a najednou se propadla na druhou stranu, daleko za zrcadlo. Zmateně se vrátila zpět a pokusila se projít znovu skrz, zlehka se dotkla, ale zrcadlo, jako by najednou bylo úplně lhostejné ke všem jejím snahám.

Rozhodla se tedy vyjít skrz dlouhý sál s mnoha dveřmi, v němž se ocitla. Jediná věc, která ji poněkud znepokojovala, byla její výška. Od té chvíle, co se ocitla v tomto prapodivném světě, měla pocit, že stropy jsou tu o něco níž, než kdekoliv jinde.

Alence její zvědavost nedala a otevřela velké dveře z lipového dřeva na konci chodby. Za dveřmi uviděla velikou zahradu s prapodivným obyvatelem uvnitř. Byl to pan Kornelius, šnek, který vlastnil továrnu na výrobu zázračného lektvaru pro příliš velké návštěvníky.

„Dobrý den,“ pozdravila Alenka a zlehka se uklonila.

„Vítejte madam, račte si přát.“

„Mám velikou žízeň, mohu dostat trošku vody?“

„Ó, madam, není nic snazšího, dovolte mi, abych vám nabídl daleko lepší pochoutku … Bohužel, ale nic není jen tak, musíte mi nejprve pomoci. Již dlouho si lámu hlavu nad tím, odkud se bere energie, kterou potřebuji pro chod své domácí továrny. Samozřejmě, že naše elektrárny využívají nejrůznější zdroje energie, jako třeba přílivová elektrárna, kterou vlastní můj vzdálený bratranec, ta přeměňuje energii přílivu a odlivu na elektřinu. Problém je ale v tom, že pokud nějakou elektřinu vyrobí, musí jinde energie zmizet. Tak mi vážená slečno povězte, odkud se bere energie, kterou využívají přílivové elektrárny? Kolik jí je v tomto zdroji schováno, a co by se stalo, kdyby se všechna vyčerpala? Slunce nemusíte uvažovat.“

Jako bonus můžete zkusit odhadnout, jak moc stavba přílivových elektráren urychluje vyčerpávání této energie. Chápejte, je to pro mne opravdu zásadní věc, vždyť na energii závisí celá má živnost!"

Řešení:
Pan Kornelius je trochu rozpačitý: „Děkuji vám za vaši snahu pomoci mi s problémem přílivových elektráren, ale musím bohužel říct, že k řešení jsme se moc nepřiblížili. Ano, příliv určitě souvisí s Měsícem, o tom není pochyb, ale tady jde o energii. ... Z gravitační síly, říkáte? Nu, proč ne, ale jistě víte, že energii může dodat jen síla, která je spojená s pohybem. ... Ano, říkáte, že Měsíc se přeci pohybuje, to je jistojistě pravda. Ale zároveň je jistojistou pravdou i to, co vypátrali už dávní učenci – totiž že energii tvoří, případně spotřebovává, jen takový pohyb, co má směr shodný s působící silou. Ale Měsíc obíhá Zemi pěkně dokola a gravitace působí svisle, takže původ energie tímto neobjasníme. Anebo je to tak, že elektrárny získávají energii tím, že Měsíc přitahují k Zemi? To bychom potom měli pohyb ve směru působící síly. Ale ... to by byl malér, to by nám pak také mohl Měsíc spadnout na hlavu!", Kornelius vypadá nervózně, „měl bych se raději zeptat svého známého astronoma, tohle by mohl být problém nesmírných důsledků. A vy, pokud máte zájem, pojďte se mnou, a můžete si poslechnout jeho odpověď."

Příliv a odliv, aneb slapové jevy, jak je můžeme také učeně nazývat, to je zajisté zajímavý problém. Tak si sedněte a poslouchejte ... Příliv je vlastně kopeček na povrchu kulaté Země, který si k sobě svým gravitačním působením přitahuje Měsíc. Tedy, ony jsou ty kopečky dva, jeden v místě, kde je Měsíc v nadhlavníku, tam je gravitace Měsíce nejsilnější, a voda se zvedá směrem k němu. Naopak přesně na opačné straně zeměkoule je gravitační působení Měsíce nejslabší (je to k němu nejdále), a voda se tedy naopak bude mít možnost od Měsíce vzdálit. Obě situace vytvoří z pohledu zemského povrchu kopeček zvaný příliv.

Pokud bychom žili na dokonale tekuté planetě, nic dalšího zvláštního by se nedělo, Planeta by měla mírně elipsoidní tvar s nejdelší osou směřující přímo k Měsíci a po povrchu by v souhlasu s tímto běžela vlna, držící se přímo pod Měsícem. Jenže naše reálné oceány nejsou dokonale tekuté a pevnina už teprve ne. Takže kopeček ve skutečnosti poněkud zaostává, chvíli mu trvá, než se zvedne, chvíli, než zas klesne.

Protože Země se kolem své osy otočí rychleji, než za jak dlouho ji oběhne Měsíc, bude tento kopeček unášen povrchem rotující Země vždy kousek před (ve smyslu rotace Země) místo, kde je Měsíc v nadhlavníku. Co z toho plyne? Především to, že gravitační působení Země a Měsíce nemůžeme aproximovat jen dvojicí koulí. Gravitační síla „navíc" působící mezi Měsícem a kopečkem bude mít vždy takový směr, že bude brzdit rotaci Země a urychlovat oběh Měsíce (směr oběhu Měsíce kolem Země je totiž stejný jako směr rotace Země).[4] Pokud

[4] Ovšem urychlení Měsíce je třeba chápat s ohledem na jeho rychlost pohybu. Protože se zároveň bude vzdalovat od Země, oběžná doba bude naopak klesat.

vám vzájemné působení není jasné, zkuste si třeba nakreslit obrázek, není na tom skutečně nic složitého.

Takže vidíte, že pádu Měsíce na naši hlavu se bát nemusíme. Ale naopak nám přílivové dmutí zpomaluje rotaci Země a odhání Měsíc pryč (čím rychleji obíhá, tím dále od Země musí být, s tím přišel už pan Kepler, a měl pravdu). Kdy to může skončit? No samozřejmě tehdy, kdy se kopeček po zemském povrchu přestane pohybovat. Jakmile bude stále na jednom místě, dříve zmíněné „zpožďování“ se pochopitelně nijak neprojeví. Taková situace může nastat v okamžiku, kdy se oběžná doba Měsíce vyrovná s dobou otočky Země. Protože příliv rotaci Země zpomaluje a rychlost Měsíce zvyšuje, budeme se skutečně tomuto stavu blížit.

Ve skutečnosti příliv ovlivňuje i působení Slunce, i když v menší míře. Říkal jste, že to vás v prvním přiblížení nezajímá, takže jen dodám, že kvůli vlivu Slunce by se ještě musela doba rotace Země shodná s dobou oběhu Měsíce podle stejných principů ještě navíc vyrovnat s dobou oběhu Země kolem Slunce. Ale to už jsou skutečně příliš vzdálené věci.

Vidím, že vás obecnými úvahami už začínám unavovat a vy jste zajisté chtěl znát konkrétní čísla. Nuže do toho. Pro jednoduchost budu předpokládat, že Měsíc obíhá přesně nad rovníkem a po kruhové dráze. To sice není úplně pravda, ale pro naše účely to bude dostatečné přiblížení, koneckonců, sami za chvíli uvidíte, že získáme výsledky spíše orientační.

Pokud zanedbáváme vliv Slunce, máme co dělat jen s izolovanou soustavou dvou těles, Měsíce a Země. V takovéto soustavě musí zajisté kromě gravitačního zákona platit i zákon zachování hybnosti. Mechanická energie, to jest pohybová a potenciální, se zachovávat nemusí, vždyť celý problém je o tom, že ji chceme čerpat.

Energii, kterou čerpáme, můžeme brát jen z celkové mechanické energie této soustavy, tedy kinetické energie pohybu Země a Měsíce, kinetické energie jejich vlastní rotace a dále potenciální energie gravitačního působení. Mechanická energie se mezi těmito složkami ale bude přelévat tak, aby vše zůstalo poslušno zákonů pana Newtona. Dále už víme, že rozhodně nemůžeme „spotřebovat“ veškerou mechanickou energii, protože v okamžiku, kdy se sjednotí perioda rotace Země a oběhu Měsíce, ji už nebude jak čerpat.

Označme si nyní důležité veličiny. Hmotnost Země je M_{Z} a Měsíce pak M_{M}. Jejich vzájemná vzdálenost je d. Vzdálenost Země od společného těžiště bude d_{Z}, vzdálenost měsíce d_{M}. Zřejmě musí platit

$$d_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{z}} = d_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{M}} \qquad \text{a} \qquad d_{\mathrm{Z}} + d_{\mathrm{M}} = d\,.$$

Perioda rotace Země (vůči inerciálnímu sytému, tedy „hvězdám“) budiž T_{Z} a perioda oběhu Měsíce (která je shodná s dobou rotace Měsíce – tato vazba vznikla už dávno kvůli stále stejným slapovým efektům a není důvod předpokládat, že by byla v budoucnu porušena) bude T_{M}. Poloměr Země je r_{Z} a poloměr Měsíce r_{M}.

Síla, kterou na sebe Země a Měsíc působí, je

$$F_\mathrm{g} = \kappa \frac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{M}}{d^2} \,.$$

Tato síla udržuje kruhový pohyb obou těles kolem společného těžiště. Rychlost takového pohybu je svázána s dostředivou silou, platí tedy[5]

$$F_\mathrm{g} = \frac{M_\mathrm{Z} v_\mathrm{Z}^2}{d_\mathrm{Z}} = 4\pi^2 \frac{M_\mathrm{Z} d_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{M}^2} \,, \qquad F_\mathrm{g} = \frac{M_\mathrm{M} v_\mathrm{M}^2}{d_\mathrm{M}} = 4\pi^2 \frac{M_\mathrm{M} d_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}^2} \,.$$

Dobu oběhu máme přímo svázanou se vzájemnou vzdáleností:

$$d^3 = T_\mathrm{M}^2 \frac{\kappa (M_\mathrm{Z} + M_\mathrm{M})}{4\pi^2} \,.$$

Celkovou mechanickou energii soustavy vyjádříme postupně po jednotlivých složkách. Translační pohyb vůči inerciální soustavě spojené s těžištěm systému dává energii

$$E_\mathrm{trans} = \frac{2\pi^2 d_\mathrm{Z}^2 M_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{M}^2} + \frac{2\pi^2 d_\mathrm{M}^2 M_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}^2} = 2\pi^2 \frac{d^2}{T_\mathrm{M}^2} \frac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z} + M_\mathrm{M}} = \kappa \frac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{M}}{2d} \,.$$

Rotace obou těles přidá složku[6]

$$E_\mathrm{rot} = 4\pi^2 \frac{M_\mathrm{Z} r_\mathrm{Z}^2}{5 T_\mathrm{Z}^2} + 4\pi^2 \frac{M_\mathrm{M} r_\mathrm{M}^2}{5 T_\mathrm{M}^2} = \frac{4\pi^2}{5} \left(\frac{M_\mathrm{Z} r_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{Z}^2} + \frac{M_\mathrm{M} r_\mathrm{M}^2}{T_\mathrm{M}^2} \right) .$$

A nakonec potenciální energie gravitačního působení:

$$E_\mathrm{pot} = -\kappa \frac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{M}}{d} \,.$$

Dohromady tedy

$$E = \frac{4\pi^2}{5} \left(\frac{M_\mathrm{Z} r_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{Z}^2} + \frac{M_\mathrm{M} r_\mathrm{M}^2}{T_\mathrm{M}^2} \right) - \kappa \frac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{M}}{2d} \,.$$

Pro současné hodnoty vzdálenosti a dob rotace vyjde $2{,}2 \cdot 10^{29}$ J. Vzhledem k volnému určení nulové potenciální energie nelze tuto hodnotu chápat jako celkovou energii „schovanou“ v systému, ale musíme se vždy zajímat jen o rozdíl

[5] nezapomínejte, že kolem společného těžiště obíhá jak Měsíc, tak Země (ta samozřejmě s menším poloměrem dráhy) a obě tělesa musí mít stejnou oběžnou dobu, totiž T_M.

[6] Moment setrvačnosti koule o poloměru r a hmotnosti m rotující kolem své osy je $I_\mathrm{koule} = \frac{2}{5} m r^2$. Zanedbáváme zde fakt, že jak Země tak Měsíc nemají v celém svém objemu stejnou hustotu.

mezi nějakými dvěma stavy. V našem případě současným stavem a stavem s vázanou rotací Země vůči Měsíci.

Jaká tedy bude vzdálenost Země-Měsíc a doba oběhu v zmíněném mezním případě? Už jsme zmínil, že se musí zachovávat moment hybnosti soustavy. Spočtěme jej tedy.

Moment hybnosti koule o poloměru r a hmotnosti m rotující s periodou T bude

$$L_{\mathrm{koule}} = \frac{2\pi I}{T} = \frac{4\pi m r^2}{5T}\,.$$

K tomuto vztahu, jednou pro Měsíc a jednou pro Zemi, musíme přidat ještě moment hybnosti oběhu obou těles. Tedy ve výsledku (uvědomte si prosím, že můžeme sčítat jen proto, že vše rotuje a obíhá ve stejném směru):

$$L = \frac{4\pi M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2}{5T_{\mathrm{Z}}} + \frac{4\pi M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2}{5T_{\mathrm{M}}} + \frac{2\pi M_{\mathrm{Z}} d_{\mathrm{Z}}^2}{T_{\mathrm{M}}} + \frac{2\pi M_{\mathrm{M}} d_{\mathrm{M}}^2}{T_{\mathrm{M}}}\,,$$
$$L = \frac{4\pi}{5}\cdot\left(\frac{M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2}{T_{\mathrm{Z}}} + \frac{M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2}{T_{\mathrm{M}}}\right) + \frac{2\pi d^2}{T_{\mathrm{M}}}\,\frac{M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}}}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}\,.$$

Dosadíme konkrétní hodnoty a máme

$$L \doteq (0{,}70724 + 0{,}00002 + 2{,}84889)\cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \doteq 3{,}56\cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\,.$$

Můžete si všimnout, že rotace Měsíce kolem jeho vlastní osy přispívá k celkovému momentu zanedbatelně. To se dá očekávat, když si uvědomíme, že rotace je pomalá a jak poloměr, tak hmotnost Měsíce malé.

Mezní stav je, jak už bylo zmíněno, takový, kdy $T_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{Z}}$. Pokud to dosadíme do předchozího vzorce, vyjde

$$L = \frac{1}{T_{\mathrm{M}}}\cdot\left(\frac{4\pi M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2}{5} + \frac{4\pi M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2}{5} + 2\pi d^2\,\frac{M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}}}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}\right)\,.$$

Ještě vyjádříme d pomocí T_{M} a dostaneme vcelku nepěknou rovnici

$$T_{\mathrm{M}} = \frac{1}{L}\cdot\left(\frac{4\pi M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2}{5} + \frac{4\pi M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2}{5}\right) + 2\pi\,\frac{T_{\mathrm{M}}^{4/3}}{L}\cdot\frac{M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}}}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}\cdot\left(\frac{\kappa(M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}})}{4\pi^2}\right)^{2/3}\,.$$

Po dosazení známých hodnot včetně spočteného momentu hybnosti L, který se zachovává, vyjde:

$$T_{\mathrm{M}} \doteq (0{,}00604\,\mathrm{s}^{-1/3})\cdot T_{\mathrm{M}}^{4/3} + 17152\,\mathrm{s}\,.$$

Tato rovnice má pro kladné hodnoty T_{M} dvě řešení, 5,709 hodiny a 1246,3 h, což je 51,93 současného dne. První řešení nemůže nastat, protože se, jak jsem již ukázal, rotace Země bude zpomalovat. Zbývá tedy doba oběhu 1246 hodin a vzdálenost Země-Měsíc téměř dvojnásobná oproti současnosti, konkrétně 590 tisíc kilometrů.

Pro tento stav nám vyjde celková energie $-2{,}47\cdot 10^{28}$ J. (Záporné znaménko není chyba, protože jsem nulovou potenciální energii zadefinoval pro nekonečnou vzdálenost, a tudíž má libovolná jiná vzdálenost potenciální složku energie zápornou.)

Slapové působení (příliv a odliv) má tedy k dispozici zhruba $2{,}4\cdot 10^{29}$ J energie. Pro představu, současná spotřeba celého lidstva je jen zhruba $5\cdot 10^{20}$ J za rok.[7] Není třeba se tedy obávat, že bychom mohli v dohledné době značnou část vyčerpat.

Ale tato energie bude mizet i tehdy, pokud by žádné elektrárny neexistovaly. Třením vodních mas a nepružnou deformací pevniny se přeměňuje na teplo a zahřívá oceány a Zemi vůbec.

Víme, že vzdálenost Měsíce od Země pomalu narůstá, konkrétně o 38 mm za rok.[8] To podle námi odvozených vztahů pro dostředivou sílu odpovídá nárůstu doby oběhu T_M o 0,35 ms za rok. Mimo to ještě musí narůstat doba rotace Země, ze zákona zachování momentu hybnosti plyne, že to bude zhruba o 17 μs za rok. Pokud dosadíme tyto změny do výrazu pro celkovou mechanickou energii, zjistíme, že se takto ztratí asi 10^{20} J za rok. To je číslo srovnatelné s celkovou spotřebou lidstva, ale maximální instalovatelný výkon přílivových elektráren bude určitě mnohem nižší, takže se není třeba bát ani toho, že příliš urychlíme vzdalování Měsíce od Země.

Navíc si musíte uvědomit, že i touto rychlostí „mizení“ kinetické energie by trvalo dosažení stavu vázané rotace 10^9 let. Navíc postupem času s rostoucí vzdáleností bude slapové působení slabší a energie bude mizet pomaleji. Za podobný čas ale také s největší pravděpodobností vzroste zářivý výkon Slunce natolik, že se oceány na Zemi vypaří, čímž (mimo jiné) ztratí přílivové elektrárny svůj smysl.

Marble

Úloha 3.3 – Dláždění (3b)

Zadání:

Alenka dostala za svou pomoc obchodníkovi maličkou lahvičku s bleděmodrou tekutinou a ze samé žízně ji ve vteřině vypila. Ani se nenadála a její nohy se počaly neuvěřitelně rychle zkracovat, hned za nimi ruce, krk i hlava. A najednou byla docela maličká, jako všechno v tomhle prazvláštním světě.

Možná snad proto se vrátila zpět do veliké místnosti a našla ty nejmenší dveře, které byly přímo uprostřed a bez obav jimi prošla. Ocitla se na dlouhé cestě vedoucí k lesu. Rozběhla se přímo vpřed. Proběhla krajem lesíku, když zaslechla opravdu hlasitou hádku.

Uprostřed cesty stáli dva mužíci od hlavy až k patě oblečení do plechu. Sotva se jeden z nich pohnul, plechové plátky se na něm rozhoupaly a rozřinčely na celý les. Přeli se o jakousi tuze složitou věc a jeden druhého vyzýval na souboj, v případě, že mu nedá za pravdu.

Do hovoru vstoupila Alenka a s neskrývanou účastí se otázala, co že to vlastně řeší. Oba dva pánové začali jeden přes druhého Alence vysvětlovat.

---

[7] Dle `http://www.bp.com`.

[8] Apollo Laser Ranging Experiments Yield Results, `http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEhelp/ApolloLaser.html`.

„Od královny jsme dostali krabici dominových kostek, větší, než si zdaleka dokážete představit, a několik dlouhých čtverečkovaných pásů šířky nanejvýš čtyři čtverečky. Čtverečky na pásech jsou vybarveny porůznu černě a bíle.

Královna rozkázala vydláždit černá pole dominem tak, aby je všechny zakryla, ale zároveň aby žádná dominová kostka neležela na bílém čtverečku. Dominové kostky mají velikost dvou čtverečků a máme jich dostatek pro vydláždění všech černých čtverečků.“

Ve vstupním souboru jsou pásky zakresleny jako bitmapy, kde „0“ znamená černý a „1“ bílý čtvereček. Jednotlivé pásky (vstupy) jsou odděleny prázdným řádkem. Pro každý pásek musíme zjistit, jestli jde takto vydláždit dominem. Pokud ano, vypište na výstup „ANO“, pokud ne, vypište „NE“. Pro i–tý pásek se tak bude řešení nacházet na i–tém řádku.

Příklad vstupního souboru:

```
111111100001111111110111111
110000101111100011110110000
111000001110001111110111110
111111111111000011110100000

111111111111111110111100001
111000011011100000111000101
111110000011110000111100001
111111111000001111111111111
```

Příslušný výstupní soubor:

```
ANO
NE
```

Soubor se vstupními daty naleznete na adrese
`http://mam.mff.cuni.cz/vstupy/r16-3-3-pasky.txt`

No vidíte a když takový úkol nesplníme, královna nám dá setnout hlavu.

Řešení:

Správné řešení této úlohy (výstupní soubor) měl vypadat takto:
`ANO ANO NE ANO NE NE ANO ANO NE ANO ANO ANO ANO NE NE NE ANO ANO NE NE ANO ANO ANO`

Jak se šlo k tomuto výsledku dobrat? Pokud pomineme ruční vyplňování obdélníčků v nějakém grafickém programu, poslali skoro všichni řešitelé program postavený na stejném algoritmu (slovem „čtvereček“ myslíme černý čtvereček, není–li řečeno jinak):

1. Pro každý čtvereček si spočítej počet jeho sousedů
2. Dokud existuje čtvereček, který má jenom jednoho souseda:
3. Umisti dominovou kostičku (jedna její polovina leží na poli s pouze jedním sousedem)
4. Přepočítej sousedy
5. Pokud ti vznikl čtvereček s nulovým počtem sousedů, vypiš „NE“, jinak vypiš „ANO“

Tento algoritmus je hezký, ale má jednu chybu, nefunguje. Pokud se v našem pásku vyskytne např. díra 3x3, která určitě nelze vyplnit, algoritmus přesto zahlásí „ANO“. Někteří z vás si toho všimli a doplnili proto ještě podmínku, že každá souvislá černá oblast se musí skládat ze sudého počtu políček. V programu to však téměř nikdo zapracované neměl. Otázka tedy zní, zda je každá souvislá oblast se sudým počtem políček, z nichž každé má alespoň 2 sousedy, vydlážditelná. Důkaz tohoto tvrzení nikdo z řešitelů nezaslal. Místo toho někteří zkoušeli použít na takovéhle útvary rekurzi – tento postup sice funguje, ale má poměrně nehezkou časovou složitost.

Ukážeme si ještě jedno řešení, které se ubírá trochu jiným směrem. Představíme si, že na začátek pásku nastavíme ukazatel a budeme se postupně posouvat po sloupcích směrem vpravo. U každého sloupce si zapamatujeme, jakým způsobem přes něj můžou (ne)přecházet dominové kostičky. Např. pro tento sloupec:

```
1 0 0 1
```

máme dvě možnosti: buď položíme kostičku přes obě dvě nuly (a pak máme přechod do dalšího sloupce 0000 – žádná kostička nepřesahuje), nebo položíme 2 přesahující dominové kostičky (a pak máme přechod do dalšího sloupce 0110). V každém kroku si tedy pamatuji, jakými způsoby mohou vypadat přechody do dalšího sloupce. Pokud si budeme tento seznam možných stavů udržovat tak, jak procházíme páskem (zleva doprava), můžou nám vyjít dvě možnosti. Buď nám nezbude žádná možnost jak postupovat dál – v tom případě vypíšeme „NE“, nebo se dostaneme až na konec pásku – potom vypíšeme „ANO“. Protože si v každém kroku průchodu páskem pamatujeme pouze konstantní počet možností (nejvýše 16) a každou možnost můžeme zaznamenat číslem od 0 do 15, má tento algoritmus lineární časovou složitost vzhledem k délce pásku.

Honza

Úloha 3.4 – Kloboučník (2b)

Zadání:

Alenka samozřejmě oběma mužíkům poradila, což rozhodně zlepšilo i jejich vzájemné vztahy, už se totiž nehádali, naopak, pozvali Alenku na odpolední šálek čaje a partii šachu ke královně. Před branami zahrady Alenka potkala docela malého človíčka s cylindrem dvakrát větším, než on sám.

„Jsem Kloboučník a přicházím na partii šachu ke královně,“ představil se.

„To je milé, také jsem byla pozvána. Hrajete rád šachy?“

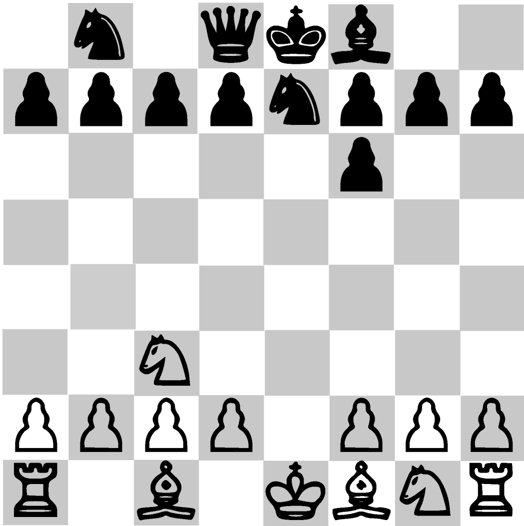
„Rád, ale pamatujte si, že musíte nechat vyhrát královnu, jinak bude zle.“ Alenka se nechápavě podívala na Kloboučníka a jistě by se ráda ještě zeptala, ale to už byli v zahradě před královnou.

Alenka se uklonila a už už se chystala k pozdravu, ale královna jen prohodila: „Posaďte se, začneme. Přineste šachy!“

Tak tedy začali. Po chvilce vypadala rozehraná partie jako na obrázku. Na začátku partie věnoval bílý hráč jednu figuru černému (to znamená, že ji před začátkem hry odstranil z šachovnice). Hra se pak vyvíjela podle standardních šachových pravidel. Poznáte jakou figuru bílý obětoval?

Alenka zřejmě příliš neporozuměla Kloboučníkovým slovům a královnu porazila.

„Setněte jí hlavu, setněte jí hlavu!“ pištěla královna.



Alence bylo v mžiku jasné, jak to chodí v téhle povedené krajině. Nebylo jí to však nic platné, než se totiž stihla vzpamatovat, z každé strany ji držela královnina stráž. Naštěstí se jim Alenka vytrhla a rozběhla se ze všech sil…

Řešení:

Nejdříve si všimneme, že bílému chybí dáma a pěšec, který na počátku stál na poli E2. Mohlo by se zdát, že bílý hráč na začátku musel věnovat jednu z těchto figur, což ovšem nemusí být pravda. Ale nepředbíhejme.

Při zkoumání černých figur si všimneme podezřelého pěšce na F6. Jak víme, tak pěšec se může pohybovat pouze dopředu. V případě, že bere jinou figuru, tak se pohybuje do diagonály. Pěšec na F6 tedy na tomto poli musel vzít nějakou bílou figuru. Mohl být touto figurou bílý pěšec? Nikoliv, neboť před tímto tahem stál zkoumaný černý pěšec na poli E7, tedy ještě nedošlo k pohybu žádného z černých pěšců. Černý hráč tak mohl vyjet pouze s jezdci. Oba jsou stále na hracím poli. Pak se bílý pěšec, který byl na počátku na poli E2 neměl jak dostat na pole F6. A černý pěšec tedy musel vzít jinou figuru.

Nabízí se, že by touto figurou měla být dáma a bílý na začátku věnoval protihráči pěšce. Je to však jediné možné řešení této situace? Opět musíme říct, že nikoliv. Zkusme se zamyslet, co by se stalo, pokud by se bílý pěšec z pole E2 dostal na pole E8. Pak se, podle pravidel šachu, přemění na dámu, věž, střelce či jezdce. Není žádný důvod, aby se pěšec nemohl na toto pole dostat. Po pár tazích můžeme dosáhnout toho, že černý vezme bílou figuru na poli F6. Pak černý ve svých tazích „odklidí“ krále a bílý pěšec může dojít na toto pole.

Je však nutné si uvědomit, že pokud by se pěšec změnil na střelce, tak by zůstal na tomto poli zablokován, neboť s černými pěšci na polích D7 a

`F7` se nehýbalo. Pokud by se pěšec změnil na dámu, tak bychom ji museli někde na šachovnici vidět. Vzhledem k tomu, že tam není, tak by musela být sebrána černým hráčem, ale pak by nám neseděl počet bílých figurek (jedna byla věnována protihráči, jedna figura byla sebrána na poli `F6` a pěšec, který se změnil na dámu by byl sežrán, ovšem chybá pouze dvě bílé figurky). Bílý pěšec se proto mohl proměnit pouze na jezdce či věž. Pak jezdec, či věž mohly být sebrány na poli `F6`.

Chybějící černé figury (věže na `A8` a `H8`, střelec na `C8`) mohly být sebrány bílými jezdci.

Dostáváme tak čtyři řešení. První případ je, že bílý věnoval protihráči pěšce. A na poli `F6` byla sebrána bílá dáma. V druhém případě bílý na začátku věnoval protivníkovi dámu, pak byl na poli `F6` sebrán bílý jezdec či věž a bílý pěšec došel na pole `E8`, kde se přeměnil na jezdce či věž. Třetí a čtvrtý případ jsou podobné. Bílý věnoval protivníkovi jezdce resp. věž. Na poli `F6` byla sebrána dáma a bílý pěšec se na `E8` přeměnil na věnovanou figuru.

Pravděpodobně se vám takto vylíčené partije můžou zdát podivné. Ovšem v zemi za zrcadlem se může dít všelicos. Pokud stále nevěříte, že popsané partie je opravdu možné hrát podle pravidel, tak se podívejte na adresu `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti`), kde najdete část řešení od Mgr.[MM] Filipa Hláska, který nasimuloval jednotlivé případy.

(R)adim

Úloha (2.5) – Mathematica (2b)

Zadání:

Nakonec pár jednoduchý příkladů, na kterých si můžete své schopnosti s Mathematikou (pokud k ní máte přístup) zkusit. Jako řešení posílejte zdrojový kód. Pokud k programu přístup nemáte a bylo by vám líto, že nemůžete soutěžit o body z této úlohy, můžete poslat, jak by podle vás měl zdrojový kód vypadat a co si myslíte, že by se mělo stát.

1. *Vykreslením grafu a spočtením několika bodů na 42 desetinných míst se přesvědčte, že funkce* `(x^2)^(1/2)` *a* `Abs[x]` *dávají stejné hodnoty.*

   Výsledek tohoto zdánlivě nesmyslného cvičení se může hodit znát, protože Mathematica neumí zjednodušit funkci `Abs[x]` *v reálných číslech (ověřte zjednodušením rovnice* `Abs[x]^2 == x^2`*), zatímco u alternativního výrazu ano (ověřte zjednodušením* `((x^2)^(1/2))^2 == x^2`*).*
2. *Zjednodušte výrazy $\sqrt{x^2}$ a $(\sqrt{x})^2$. Proč se výsledky liší?*
3. *Spočtěte integrál*

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

   Sledujte, jak se výsledek změní, pokud jako třetí argument funkce `Integrate` *dáte logickou podmínku, že α je větší než nula. Jako α skutečně použijte řeckou alfu!*

Řešení:

1. Příslušné grafy vykreslíte jako

   `Plot[{(x^2)^(1/2),Abs[x]},{x,-5,5},PlotRange->All]` ,
   tím se vykreslí přes sebe, takže vidíte, že žádný rozdíl funkcí nevidíte. Vyčíslení na 42 desetinných míst můžete udělat jako

```
N[(x^2)^(1/2), 42], N[Abs[x], 42] .
```

Ověřit, co Mathematica umí zjednodušit můžete příkazy:

```
FullSimplify[Abs[x]^2 == x^2] ,
FullSimplify[((x^2)^(1/2))^2 == x^2] .
```

V jednom případě dostanete původní rovnici, v druhém dostanete hodnotu True, značící, že rovnice je vždy splněna.

2. Použijeme příkaz

```
FullSimplify[(x^2)^(1/2)] ,
FullSimplify[(x^(1/2))^2] .
```

Výsledky se budou lišit, protože odmocninu nelze v komplexních číslech obecně roztrhnout, zatímco druhou mocninu ano. (Možná znáte známý trik $1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$). Proto se výsledek prvního příkazu nezjednoduší, ale druhého ano.

3. Použijete příkaz

```
Integrate[E^(- ESC a ESC x^2), {x,- ESC inf ESC, ESC
          inf ESC}] .
```

Výsledkem bude logická podmínka, která říká, že integrál může být vyčíslen jen když α je větší než nula. Přidáme-li

```
Integrate[E^(- ESC a ESC x^2), {x,- ESC inf ESC, ESC
          inf ESC}, Assumptions-> ESC a ESC > 0] ,
```

integrál se vypočte rovnou.

Irigi

Konference Krásno 2009

Znaky dělitelnosti

Mgr.ᴹᴹ Petra Vahalová, Mgr.ᴹᴹ Martina Bekrová,
Dr.ᴹᴹ Michaela Kochmanová

Každý z nás si jistě již ze základní školy pamatuje poučky pro dělitelnost čísel dvěma, třemi, pěti atd. Ale málokdo asi ví, jak určit dělitelnost čísla například sedmičkou, třináctkou či třicet sedmičkou. V naší konfeře jsme zkoumali nejen, proč platí již zmíněné poučky a jak to dokázat, ale také, jak zjistit dělitelnost čísla libovolným jiným číslem. A to hned několika různými způsoby. Rozebrali bychom především univerzální kongruence, ale samozřejmě zmíníme i další, často velmi zajímavé způsoby určování, zda je nějaké číslo dělitelné jiným daným číslem, či nikoliv. Ať už však využijeme libovolnou metodu, cíl bude u všech stejný – zjednodušit číslo natolik, abychom jeho dělitelnost daným číslem dokázali již sami bez problémů určit. Chcete-li se o této problematice dozvědět více, pohodlně se usaďte a pokračujte ve čtení.

Základní poučky

Dělitelnost 2

Obecně můžeme říci, že všechna sudá čísla jsou dělitelná 2. Číslo je tedy dělitelné 2 právě tehdy, je-li jeho poslední cifra dělitelná 2.

Libovolné číslo můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned}\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} &= 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \\ &= 2 \cdot 5(10^{n-1} a_n + \dots + 10 a_2 + a_1) + a_0\end{aligned}$$

Prvních $n-1$ cifer je vždy dělitelných 2. Aby tedy bylo celé číslo dělitelné 2, musí být i poslední cifra a_0 dělitelná 2.

Jelikož platí: $10 = 2 \cdot 5$, je dělitelnost 5 a 10 analogická jako u 2. Číslo je dělitelné 5, resp. 10 právě tehdy, je-li jeho poslední cifra dělitelná 5, resp. 10.

Dělitelnost 2^n

Aby bylo číslo dělitelné 2^n, jeho posledních n cifer musí být dělitelných 2^n.

Každé číslo můžeme zapsat:

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} = 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

Například číslo je dělitelné 16 právě tehdy, jsou-li poslední 4 cifry dělitelné 16 ($16 = 2^4$).

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} = 2^4 \cdot 5^4 (10^{n-4} a_n + \dots + 10^2 a_5 + 10 a_4) + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

Prvních $n-4$ cifer je vždy dělitelných 16 (2^4). Aby bylo celé číslo dělitelné 16, musí být i poslední 4 cifry ($10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$) dělitelné 16.

Opět analogicky platí i pro 5^n a 10^n.

Dělitelnost 3 a 9

Podle binomické věty platí: $3 \mid (9+1)^n - 1$, tj. číslo 3 dělí čísla 9, 99, 999, 9999 atd.

Libovolné číslo lze zapsat: $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} = 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 = (9+1)^n a_n + \dots + (9+1)^2 a_2 + (9+1) a_1 + a_0$ Po „vyškrtnutí“ všech členů s 9, tj. členů, které v každém případě budou dělitelné 3, nám zůstane $a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0$, což součet jednotlivých cifer čísla.

Číslo je dělitelné 3, pokud je součet jeho cifer dělitelný 3.

Dělitelnost devíti je podobná jako u čísla 3, protože $9 \mid (9+1)^n - 1$. Aby bylo celé číslo dělitelné 9, musí být součet jeho cifer dělitelný 9.

Zjišťování dělitelnosti pomocí kongruence

Kongruence

Dvě čísla jsou kongruentní, pokud dávají po dělení určitým číslem stejný zbytek. Matematický zápis: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (b-a)$. Například $31 \equiv 24 \equiv 17 \equiv 3$

(mod 7), neboli 31 je kongruentní s 24, 17 a 3 modulo 7. To znamená, že při dělení 7 dávají všechna tato čísla stejný zbytek. Při počítání s kongruencemi lze do jisté míry uplatnit stejné operace jako při řešení rovnic. Pozor si musíme dát akorát u dělení.

Této ekvivalence čísel jsme využili při zjišťování znaků dělitelnosti dalšími čísly. Postupně jsme „modulili“ mocniny 10 a hledali periodu opakování. Zbytky po dělení jsme často z praktických důvodů převáděli do záporných hodnot tak, aby absolutní hodnota čísla byla nejmenší možná.

Dělitelnost 11

Při zjišťování znaku pro dělitelnost libovolného čísla 11 jsme postupně určovali, jaké zbytky dávají mocniny 10 ($10^n; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) při dělení číslem 11.

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv 1 \pmod{11} \\
10 &\equiv 10 \equiv -1 \pmod{11} \\
10^2 &\equiv 1 \pmod{11} \\
10^3 &\equiv 10 \cdot 10^2 \equiv -1 \cdot 1 \equiv -1 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

10^2 dává po dělení 11 stejný zbytek jako 1 (10^0), tj. zbytek 1. To znamená, že jsme našli periodu.

Číslo je dělitelné 11, pokud rozdíl součtu cifer na lichých pozicích (dávají zbytek 1) a součtu cifer na sudých pozicích (dávají zbytek -1) je dělitelný 11.

Například pro 83195872341 máme $8-3+1-9+5-8+7-2+3-4+1 = -1$. Tedy $83195872341 \equiv -1 \pmod{11}$ a číslo 83195872341 není dělitelné 11.

Dělitelnost 7

Při určování dělitelnosti čísla číslem 7 jsme opět postupně zjišťovali, jaké zbytky dávají mocniny 10 při dělení číslem 7.

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv 1 \pmod{7} \\
10 &\equiv 3 \pmod{7} \\
10^2 &\equiv 2 \pmod{7} \\
10^3 &\equiv 6 \equiv -1 \pmod{7} \\
10^4 &\equiv 4 \equiv -3 \pmod{7} \\
10^5 &\equiv 5 \equiv -2 \pmod{7} \\
10^6 &\equiv 1 \pmod{7} \\
10^7 &\equiv 10 \cdot 10^6 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{7}
\end{aligned}
$$

10^6 dává po dělení 7 stejný zbytek jako 1 (10^0), takže jsme nalezli periodu.

Můžeme si však všimnout, že 10^3 s 10^0, 10^4 s 10^1 a 10^5 s 10^2 mají hodnotu zbytku lišící se pouze znamínkem. Proto již při objevu takové mocniny 10, která dává zbytek -1, lze snadno zjistit úplnou periodu a tedy i utvořit kompletní pravidlo pro dělení libovolného čísla sedmi.

Číslo $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$ je dělitelné 7, právě když platí: $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + \dots \equiv 0 \pmod 7$

Jiný způsob určování dělitelnosti čísel 7

Škrtneme poslední cifru a od zbytku odečteme její dvojnásobek.

Číslo, u něhož zjišťujeme, zda je dělitelné 7, lze zapsat ve tvaru $10x + y$, kde y značí poslední cifru čísla a x všechny zbylé cifry. Po škrtnutí poslední cifry a odečtení jejího dvojnásobku od zbytku, dostaneme číslo, které lze zapsat $x - 2y$. Pokud bylo původní dělitelné 7, bude i nově vzniklé a naopak. Tedy platí $7 \mid 10x + y \Leftrightarrow \mid x - 2y$.

Platnost uvedená ekvivalence dokážeme, když pomocí ekvivalentních úprav převedeme výraz na jedné straně na výraz na druhé straně.

$$\begin{aligned} 10(x - 2y) &= 10x - 20y \\ 10x - 20y + 21y &= 10x + y \end{aligned}$$

Za ekvivalentní úpravy zde považuje všechny, které zachovávají, zda je číslo dělitelné 7. Tedy například násobení číslem nesoudělným se 7 (využíváme v prvním kroku, kdy násobíme 10) nebo přičtení či odečtení násobku 7 (v druhém kroku přičítáme $21y$).

Zkusme tuto metodu na příkladu

$$\begin{aligned} 8319587234 &\to 831958723 - 2 \cdot 4 = 831958715 \\ &\to 83195871 - 2 \cdot 5 = 83195861 \\ &\to 8319586 - 2 \cdot 1 = 8319584 \\ &\to 831958 - 2 \cdot 4 = 831950 \\ &\to 83195 - 2 \cdot 0 = 83195 \\ &\to 8319 - 2 \cdot 5 = 8309 \\ &\to 830 - 2 \cdot 9 = 812 \\ &\to 81 - 2 \cdot 2 = 77 \end{aligned}$$

A protože $7 \mid 77$, platí, že $7 \mid 8319587234$.

Dělitelnost 13

I při zjišťování, zda je číslo dělitelné 13, lze opět využít kongruence. Opět jsme tedy určovali, jaké zbytky dávají mocniny 10 při dělení číslem 13.

$$1 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$10 \equiv 10 \equiv -3 \pmod{13}$$
$$10^2 \equiv 9 \equiv -4 \pmod{13}$$
$$10^3 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$$
$$10^4 \equiv 3 \pmod{13}$$
$$10^5 \equiv 4 \pmod{13}$$
$$10^6 \equiv 1 \pmod{13}$$

10^6 dává po dělení 13 stejný zbytek jako 1 (tj. zbytek 1), takže jsme nalezli periodu. 10^3 a 1 mají po dělení 13 zbytek lišící se pouze znaménkem. To nám stačí pro nalezení první poloviny periody, druhá polovina periody bude mít pak vždy jen opačná znaménka než první polovina.

Opět můžeme použít i jiný způsob. Tentokrát škrtneme poslední cifru a ke zbytku přičteme její čtyřnásobek. Matematický zápis: $13 \mid 10x+y \Leftrightarrow 13 \mid x+4y$. Důkaz: $10(x+4y) = 10x+40y$ (10 je nesoudělná s 13) a $10x+40y-39y = 10x+y$ (39 je násobkem 13; $39 = 3 \cdot 13$)

Jiný způsob pro určování dělitelnosti obecně

Metoda určování znaků dělitelnosti pomocí kongruence je univerzální a lze ji tedy použít u libovolného čísla. Jen je pravděpodobné, že u zjišťování dělitelnosti většími čísly bude postup komplikovanější a zdlouhavější.

U dělitelnosti 7 a 13 jsme uvedli i jiné způsoby určování, zda je dané číslo jimi dělitelné či nikoli. Obecně lze říci, že škrtneme několik posledních cifer (nejčastěji 1) a od zbytku odečteme nebo ke zbytku přičteme jejich několikanásobek. Kolik cifer máme škrtnout a jejich kolikanásobek máme přičíst či odečíst, si můžete prohlédnout v tabulce[9] k2.1.

„Náhodné“ znaky dělitelnosti

Tyto znaky dělitelnosti nazýváme „náhodné“, protože při „náhodném“ vynásobení několika čísel dostaneme součin, který se o jedničku liší od nějaké mocniny 10. Tato vlastnost nám pak umožní číslo, jehož dělitelnost daným číslem určujeme, zjednodušit do tvaru, z kterého již snadněji určíme, zda je, či není dělitelné daným číslem.

Dělitelnost 27 a 37

Všimli jsme si, že $27 \cdot 37 = 999 = 10^3 - 1$. Desítka se zde objevuje ve 3. mocnině, proto číslo, jehož dělitelnost zjišťujeme, rozdělíme na trojice (skupiny

[9] Tabulka pochází ze stránky `http://mathforum.org/k12/mathtips/ward3.html`

X	N	K	+ nebo −	X	N	K	+ nebo −
3	1	1	+	41	1	4	−
7	1	2	-	43	2	3	-
9	1	1	+	47	2	8	+
11	1	1	-	49	1	5	+
13	1	4	+	53	2	9	-
17	1	5	-	59	1	6	+
19	1	2	+	61	1	6	-
23	1	7	+	67	2	2	-
23	2	3	+	71	1	7	-
27	1	8	-	79	1	8	+
29	1	3	+	81	1	8	-
31	1	3	-	89	1	9	+
37	1	11	-	89	2	8	-
37	3	1	+				

Tabulka k2.1: X číslo, jímž dělíme, N počet škrtnutých cifer, K násobek cifer.

po 3 cifrách; bráno od konce). Následně trojice sečteme, a je-li jejich součet dělitelný 27, resp. 37, poté i původní číslo je dělitelné 27, resp. 37.

Například pro šesticiferné číslo $10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 = 10^3(10^2a_5 + 10a_4 + a_3) + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 = (999 + 1)(10^2a_5 + 10a_4 + a_3) + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 = 999(10^2a_5 + 10a_4 + a3) + (10^2a_5 + 10a_4 + a_3) + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$ Výraz násobený 999 bude vždy dělitelný 27, resp. 37, proto nás dále nemusí zajímat. Po odstranění všech výrazů, které budou vždy dělitelné 27, resp. 37, nám zůstane již jen součet trojic cifer.

Konkrétní příklad: 8319587234 rozdělíme na 8, 319, 587, 234. Potom sečteme $234+587+319+8 = 1148$, to opět rozdělíme. Tentokrát na $148+1 = 149$. 149 je prvočíslo, tedy 27 ani 37 nedělí 149. A proto také 8319587234 není dělitelné 27 ani 37.

Dělitelnost 41 a 271 (a 9)

Dalším zajímavým součinem je: $41 \cdot 271 \cdot 9 = 99999 = 10^5 - 1$. Zde se 10 vyskytuje v 5. mocnině, proto číslo rozdělíme na pětice (bráno od konce). Je-li jejich součet dělitelný 41, resp. 271, pak i původní číslo je dělitelné 41, resp. 271.

Dělitelnost 73 a 137

Také součin čísel 73 a 137 se o jedničku liší od mocniny 10, konkrétně od 4. mocniny. Tentokrát je však o 1 větší než daná mocnina 10. Postup při určování dělitelnosti bude podobný jako v předchozích případech, avšak se nám do výpočtů zapojí i záporné znaménko.

$73 \cdot 137 = 10001 = 10^4 + 1$ Číslo 10 se zde vyskytuje ve 4. mocnině, proto číslo rozdělíme na čtveřice (od konce). Ty pak střídavě odčítáme (sudé čtveřice od konce) a přičítáme (liché čtveřice). Je-li výsledek dělitelný 73, resp. 137, pak i původní číslo je dělitelné 73, resp. 137.

Například $10^9a_9 + 10^8a_8 + 10^7a_7 + 10^6a_6 + 10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 = 10^8(10a_9 + a_8) + 10^4(10^3a_7 + 10^2a_6 + 10a_5 + a_4) + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 = (73{,}137-1)^2(10a_9+a_8)+(73{,}137-1)(10^3a_7+10^2a_6+10a_5+a_4)+10^3a_3+10^2a_2+10^1a_1+10^0a_0$. Po roznásobení a odstranění členů, které budou vždy dělitelné 73, resp. 137, nám zůstane již jen součet čtveřic, přičemž každá sudá čtveřice od konce bude mít záporné znaménko (-1 ve výrazu $73 \cdot 137 - 1$ při umocnění na lichou mocninu nezmění své znaménko).

Konkrétně třeba 8319587234 rozdělíme na 83, 1958 a 7234, $7234 - 1958 + 83 = 5359$ a protože 73 ani 137 nedělí 5359, ani 8319587234 není dělitelné 73 ani 137.

Dělitelnost 101

Číslo 101 lze zapsat jako $100 + 1$, tedy $101 = 10^2 + 1$. Situace je tedy podobná jako při zjišťování dělitelnosti čísel čísly 73 a 137. Číslo, jehož dělitelnost zjišťujeme, rozdělíme na dvojice (od konce), které následně střídavě odčítáme (sudé dvojice od konce) a přičítáme (liché dvojice). Je-li výsledek dělitelný 101, pak i původní číslo je dělitelné 101. V opačném případě dělitelné není.

Zkusme opět 8319587234. To rozdělíme na 83, 19, 58, 72, 34. Sečteme $34 - 72 + 58 - 19 + 83 = 84$. 101 nedělí 84, takže 8319587234 není dělitelné číslem 101.

Kuba

Systém METAPOST

V časopise M&M máme v zásade dva druhy obrázkov – kreslené ilustrácie (líštičky) a potom rôzne grafy, schémy, náčrtky… Kým líštičky sa kreslia ručne, potom skenujú, prevádzajú na vektorový formát a ďalej upravujú, ostatné obrázky vznikajú v METAPOSTe. METAPOST je programovací jazyk, v ktorom sú obrázky popísané podobne ako v postupe, ktorý si píšete pri konštrukčných úlohách na hodine matematiky. Tak napríklad bod A na súradniciach (1 cm, 1,5 cm) sa zapíše ako

```
pair a, b;

a=(1cm,1.5cm);
```

Pridajme teraz bod B napríklad ako

```
b=(5cm,-2.3cm);
```

a konečne niečo aj nakreslime, pretože doteraz sme iba ukladali informácie do pamäti:

```
draw a--b;
```

Aby sme boli schopní kód METAPOSTom preložiť, budeme musieť pridať ešte úvod a záver, teda jednoduché príkazy (makrá)

`beginfig(`*číslo*`);`

príkazy

`endfig;`

ďalšie obrázky, teda bloky `beginfig, endfig`

`end.`

kde číslo použité ako argument `beginfig` bude prípona výstupného obrázku a meno bude zhodné s názvom súboru, v ktorom budú obrázky uložené. Ak teda v súbore `obrazky.mp` budeme mať `beginfig(1001);` a spustením príkazu `mpost obrazky`[10] ho necháme preložiť, výstupom bude okrem iného aj súbor `obrazky.1001`. Výstupné súbory sú vo formáte Encapsulated PostScript čo v skratke znamená, že sa napríklad hodia na vloženie do TEXového dokumentu – stačí v plainTEXovom dokumente použiť makrá na to určené pomocou

```
\input epsf
                                   ...
\epsffile{obrazok.1}
```

Pokračujme teraz v kreslení obrázku kružnicou so stredom v bode (−2 cm, 1 cm) a polomerom 2 cm:

```
draw fullcircle scaled 4cm shifted (-2cm,1cm);
```

Prvýkrát sa stretávame s transformáciou. V tomto prípade ide najprv o zväčšenie, ktorým sa dĺžka jednotkovej úsečky (priemer jednotkovej kružnice v preddefinovanej premennej `fullcircle`) predĺži na 4 cm a potom o posun do príslušného bodu. Keby sme poradie týchto transformácií vymenili, zväčšovala by sa posunutá kružnica aj s príslušným posunutím. Okrem týchto dvoch transformácií existuje ešte otočenie okolo počiatku súradníc o ľubovoľný uhol `rotated` *uhol*, otočenie okolo ľubovoľného bodu `rotatedabout (`*bod*`,` *uhol*`)`, osová súmernosť `reflectedabout (`*bod*`,` *bod*`)`, skosenie `slanted` *číslo*, zväčšenie iba v jednej osi `xscaled` a `yscaled` a identita `identity`. Transformácia je aj

[10] METAPOST je obvykle súčasťou inštalácie TEXu.

zvláštny datový typ, ktorý predstavuje šesť nezávislých zložiek transformačnej matice. Ku každej transformácii môžeme skúsiť nájsť inverznú pridaním slovka `inverse`. Okrem kružnice máme preddefinovaný aj štvorček `unitsqare` a hornú polkružnicu `halfcircle`.

Preddefinovaná kružnica, preddefinovaný štvorček a aj náš zápis z prvého príkladu `a--b` sú premenné typu `path`, čiže cesta. METAPOST pracuje s cestou v parametrickom tvare a používa kubické (Beziérove) krivky. Základný zápis spojnice dvoch bodov je `a..b`, pričom môžeme METAPOSTU povedať aj ktorým smerom má krivka do bodu vchádzať, a ktorým vychádzať:

```
a{dir 30}..tension 2..{dir 15}b
```

Smer sa počíta proti smeru hodinových ručičiek od smeru osi x a METAPOST pracuje prakticky bez výnimky so stupňami, použiť sa však dajú aj preddefinované konštanty `left`, `right`, `up` a `down`. Parameter `tension` udáva v tomto prípade „napätie“ krivky – čím napnutejšia, tým ostrejšie sa zatáča. Najnižšia možná hodnota `tension` sú tri štvrtiny. Ak chceme, môžeme priamo určiť takzvané „kontrólne body“ Beziérovej krivky pomocou `controls`.

Tým sa dostávame k vyjadreniu čísel, ktoré METAPOST používa. Čísla sú uložené v premennej typu `numeric`, ktorá s krokom 1/65536 môže dosahovať maximálnu hodnotu 4096 (konštanta `infinity` zodpovedá o jeden krok nižšej hodnote, teda $4096 - 1/65535$), pričom medzivýsledky môžu byť až osemkrát väčšie. Pokiaľ netušíte, akú hodnotu má vypočítaná premenná, napíšte proste `show` *premenná*; a METAPOST vám aktuálnu hodnotu vypíše pri spracovaní súboru na obrazovku. Základnou rozmerovou jednotkou METAPOSTu je jeden PostScriptový bod `bp`, teda 1/72 palca, ale METAPOST pozná aj tlačiarenské body `pt`, milimetre `mm`, centimetre `cm` a palce `in`.

Ale späť k cestám. METAPOST dokáže s cestami rôzne veci. Nie je problém nájsť priesečník dvoch ciest[11], vybrať z cesty ľubovoľný bod, cestu ľubovoľne orezávať, určiť dotyčnicu alebo dĺžku.

Cestu METAPOST popisuje parametricky, čiže ako $(x(t), y(t))$, pričom t je parameter „čas“. A preto väčšina príkazov pre prácu s cestou pracuje s časom. Napríklad zápis `point` *čas* `of` *cesta* by mal vrátiť súradnice bodu s príslušným časom. Ale ako sa vzťahuje čas k ceste? Cestu sme už zapísali ako spojnicu bodov, teda napríklad `a..b..c..d..e`. V tomto prípade je v bode `a` čas 0, v bode `b` čas 1 a tak ďalej. Ak vyberieme čas väčší, ako je dĺžka cesty, dostaneme jej koniec, avšak v prípade uzavretej cesty (končí „bodom“ `cycle`) dostaneme bod, ktorý zodpovedá zadanému času modulo dĺžka cesty. Keď už sme pri tej dĺžke, zistíme ju jednoduchým príkazom `length` *cesta*. Pokiaľ chceme z cesty vybrať iba jej časť, použijeme príkaz `subpath` *pár* `of` *cesta*. Párom je v tomto prípade usporiadaná dvojica počiatočného a koncového času zapísaná úplne rovnako ako súradnice bodu (ostatne ide o rovnaký typ premennej, len inak

[11] Väčší problém je v prípade, ak je tých priesečníkov viac – nie že by METAPOST priesečník nenašiel, len sa horšie odhaduje, ktorý z nich to bude.

použitý), pokiaľ je počiatočný čas väčší ako koncový, berieme cestu odzadu a pokiaľ ju chceme zobrať odzadu inde, použijeme pred cestou slovo `reverse`. Smernicu dotyčnice k ceste nájdeme príkazom `direction` *čas* `of` *cesta* a aby to bola smernica jednotková, použijeme na ňu ešte príkaz `unitvector`, inak bude mať prakticky ľubovoľnú dĺžku. Onen priesečník dvoch ciest nájdeme príkazom *cesta* `intersectiontimes` *cesta*, pričom výstupom je usporiadaná dvojica časov – pre každú z ciest jeden. Nijak nás už neprekvapí, že makro *cesta* `cutbefore` *cesta*, ktoré vráti kus prvej cesty od jej začiatku až po priesečník s druhou cestou je len kombináciou makier `intersectiontimes` a `subpath`. Napokon ešte spomeňme, že pokiaľ nám nestačí dĺžka cesty v akomsi „čase“, môžeme sa dopýtať aj na dĺžku oblúku v bodoch príkazom `arclength` *cesta*.

Pri práci s cestami som sa už dostal k datovému typu usporiadanej dvojice, ktorý sa v METAPOSTe zapisuje ako `pair`. Videli sme už, že tento pár zďaleka nemusí reprezentovať len súradnice bodu v rovine. Obvykle sa na zápis bodov používajú preddefinované premenné[12] `z0`, `z1`, `z2`, …Na výber jednej zložky páru sa nám budu hodiť príkazy `xpart` a `ypart`.

Aj keď na to obrázky v časopise nevyzerajú, METAPOST vie pracovať aj s farbami. Má na to dokonca dva datové typy a to `color` (ekvivalent `rgbcolor`), ktorý je usporiadanou trojicou červenej, zelenej a modrej zložky (pre farbu sú prípustné hodnoty od nula do jedna) a `cmykcolor`, ktorý pracuje s tlačiarenským štandardom čiernej, purpurovej, žltej a azúrovej farby. Podobne ako sme videli „zneužitie“ páru na iné veci ako len súradnice bodu, môžeme aj farby vhodne využiť na iné veci – napríklad na pokusy s 3D grafikou. Ekvivalentom `xpart` a `ypart` je pre RGB farbu `redpart`, `greenpart` a `bluepart`.

Dôležitým datovým typom je nepochybne aj pero, pretože tým sa všetko kreslí. Typickým preddefinovaným perom je `pencircle` (teda okrúhle pero, predvolené vo veľkosti 0,5; existuje aj `pensquare`) a pokiaľ ho chceme v inej veľkosti (inú hrúbku čiary), použijeme

`pickup pencircle scaled` *veľkosť*`;`

čím METAPOSTu povieme, že chceme ďalej používať príslušné pero. Môžeme dokonca vybrať zvláštne pero iba pre jeden nákres

`draw a..b withpen` *pero*`;`

Viacerých asi prekvapí, keď prezradím, že tak základný príkaz ako `draw` je vlastne makro. Prekladá sa totiž na niečo ako (záleží ale na tom, čo konkrétne na mieste … kreslíme)

```
addto currentpicture ... withpen currentpen;
```

čo sa dá preložiť ako „pridaj do aktuálneho obrázku … posledne použitým perom“. Pokiaľ pri našom kreslení použijeme ďalší príkaz `withpen`, bude sa

[12] V skutočnosti sú to makrá

kresliť nami vybratým perom, pretože METAPOST si zapamätá iba poslednú nastavenú hodnotu.

Zatiaľ sme v tichosti prehliadli použitie premennej typu `picture` nazvanej `currentpicture` v príklade s makrom `draw`. Klasické využitie má pri tom premenná `picture` napríklad keď chceme hotový obrázok zmenšiť, alebo otočiť:

```
picture a;

a:=currentpicture;

currentpicture:=nullpicture;

draw a scaled .5 rotated 30;
```

V preklade teda vytvoríme obrázkovú premennú, následne do nej priradíme[13] obsah aktuálneho pracovného obrázku („rysovacej dosky") potom vyprázdnime rysovaciu dosku a napokon na čistú nakreslíme obsah premennej `a` zmenšený na polovicu a otočený o tridsať stupňov. Možnosťou ako sa vyhnúť tejto konštrukcii je kresliť rovno do premennej (teda na inú „rysovaciu dosku" ako `currentpicture`) použitím

obrázok`:=image(`*kresliace príkazy*`);`

Obvykle použijeme tento spôsob, keď chceme nejakú časť obrázku viackrát opakovať.

Na začiatku sme tvrdili, že príkazy METAPOSTu sa podobajú zápisu postupu v geometrii. Jedným z obvyklých bodov postupu je nájdenie priesečníku dvoch priamok.

```
z0=whatever[z1,z2]=whatever[z3,z4];
```

Kľúčové slovo `whatever` (teda „čokoľvek") v tomto prípade zastupuje ľubovoľné, zatiaľ neznáme, číslo. Týmto príkazom sme METAPOSTu povedali, že bod `z0` leží niekde na priamke určenej bodmi `z1` a `z2` a niekde na priamke určenej bodmi `z3` a `z4`. Pokiaľ hľadaný priesečník existuje, METAPOST ho nájde. Zápis `[`*pár*`,`*pár*`]` je ale užitočný aj na iné veci, tak napríklad `.5[z0,z1]` je stred úsečky `z0,z1`, `2[z0,z1]` je zas jej dvojnásobné predĺženie. Slovom `whatever` môžeme tiež nahradiť len jednu zo zložiek (súradníc). Jediným limitom je v tomto prípade nutnosť použiť lineárne rovnice a ich sústavy. Zložitejšie rovnice METAPOST riešiť nevie.

Schopnosť METAPOSTu dopočítavať môžeme použiť napríklad aj pri definovaní transformácie. Tá funguje jednoduchým spôsobom

pár=*pár* `transformed` *transformácia*;

[13] `:=` je príkazom priradenia, `=` rovnosťou. Pokiaľ budú v rozpore dve rovnosti, METAPOST sa bude sťažovať, že riešenie neexistuje. Priradenie presne podľa názvu priradí premennej hodnotu bez ohľadu na jej predchádzajúci obsah.

Tromi takýmito rovnicami dokážeme nadefinovať zatiaľ neznámu transformáciu.

Na kreslenie prerušovanou čiarou pripojíme za príkaz `draw` slovko `dashed` a zaň názov premennej, v ktorej máme vzor uložený. Typický príklad je použitie

```
draw cesta dashed evenly scaled .5;
```

Kľúčové slovo `evenly` skrýva základnú čiarkovanú čiaru (čiarky aj medzery majú dĺžku 3 bp), pod slovom `withdots` sa skrýva čiara bodkovaná. Zmena veľkosti na polovicu v tomto prípade skráti čiarky aj medzery na polovicu a teda zahustí čiarkovanie.

Na kreslenie šípiek zas slúži `drawarrow`, alebo `drawdblarrow` na šípku obojstrannú.

Na vyfarbenie uzavretej plochy použijeme `fill` *uzavretá cesta* `withcolor` *farba*, poprípade `filldraw`.

Do obrázkov často potrebujeme vložiť text – titulok, alebo označenie bodov a podobne. Na tieto úlohy slúži makro `label`. Lepšie ako zložitý popis sú príklady:

```
label.ulft(btex Nadpis grafu etex, .5[z2,z3]);

dotlabel.bot(btex $5\,{\rm cm}$ etex, z0);

napis=thelabel(btex $Q$ etex, origin);

unfill bbox napis; draw napis;
```

Prvý príklad vysádza nápis „Nadpis grafu“ vľavo hore (preto `u`*pper* `l`*e*`ft` za bodkou) od stredu úsečky `z2,z3`. Kľúčové slová `btex` a `etex` vymedzujú blok, ktorý METAPOST po spustení pošle na preloženie TEXu. Ďalšie možnosti umiestnenia sú `top`, `bot`*tom*, `l`*e*`ft`, `r`*igh*`t` a všetky ich zmysluplné kombinácie, v ktorých sa `top` nahrádza `u`*pper* a `bot`*tom* zas `l`*ower*. Druhý príklad okrem samotného nápisu obsahuje aj príkaz pre vyznačenie bodu, ku ktorému nápis patrí, bodkou. Tretí príklad najprv nič nekreslí, len príslušný (TEXom spracovaný) nápis uloží do obrázkovej premennej `napis`. Na poslednom riadku príkladu sa dejú postupne dve veci. Prvý príkaz prekreslí farbou pozadia (obvykle biela; čiže vlastne vymaže) obdĺžnik, ktorý zodpovedá tzv. „bounding boxu“[14] tohto nápisu a ďalším príkazom ho nakreslí. Kľúčové slovo `origin` neznamená nič iné, len počiatok súradnicovej sústavy, teda pár `(0,0)`.

Zatiaľ sme nespomenuli, že je možné jednotlivé bloky príkazov baliť do okrúhlych zátvoriek (to napríklad keď sa chceme uistiť, že sa príslušná transformácia uplatní na celú cestu a nie len na jej posledný bod, alebo obecne podľa pravidla „nefunguje to ako má, dám to do zátvoriek“), alebo do `begingroup`

[14] Je to najmenší obdĺžnik so stranami rovnobežnými so súradnicovými osami, do ktorého sa vôjde celý obrázok aj s prípadnými nastavenými okrajmi.

a `endgroup`, ktoré sa hodia na vytváranie makier. METAPOST samozrejme ovláda aj podmienky pomocou konštrukcie `if` *logický výraz*: *príkazy* `fi;`, pričom pred koncom podmienkového bloku, teda pred `fi` môže nasledovať aj `elseif` *podmienka*: a `else:`.

Chybou by bolo nespomenúť cykly, ktorých základná konštrukcia je

`for` *číslo*=*číslo* `step` *číslo* `until` *číslo*: *príkazy* `endfor;`

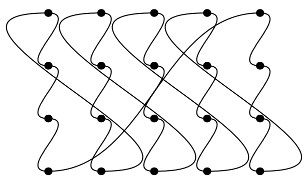
čo sa dá skrátiť na

`for` *číslo*=*číslo* `upto` *číslo*: *príkazy* `endfor;`

a obľúbeným trikom je zjednodušenie zápisu čiary skladajúcej sa z množstva bodov týmto spôsobom:

```
draw for i=0 upto 19: z[i]{left}.. endfor cycle;
```

príčom výsledok vidíte na obrázku (body boli predtým rozmiestnené do pravidelnej siete). Za slovíčkom `for` však môže nasledovať prakticky ľubovoľný logický výraz a na mnohých miestach, kde hovoríme o „príkazoch" sa jedná v skutočnosti o takzvané bloky vyvážených tokenov. Presnejší rozbor tohoto pojmu je nad rámec článku, ale mnohé o možnostiach napovie posledný príklad na použitie cyklov.



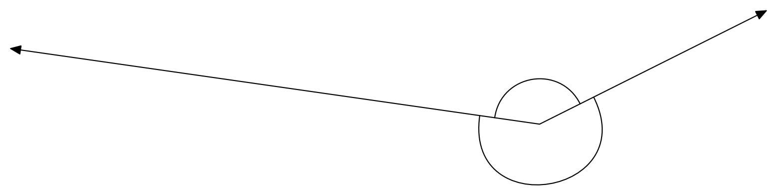
Dôležité veci na koniec, ale s operátormi si každý skôr či neskôr poradí. Stačí vedieť, že mocnina sa zapisuje ako `**`, že `++` neznamená inkrementáciu (zväčšovanie o jedničku), ako sme zvyknutí napríklad z C, ale Pythagorovský súčet, teda $\sqrt{a^2+b^2}$, že to isté, ale so znamienkom mínus sa zapíše ako `+-+`, a hlavne si treba dať pozor na prioritu operácií, pretože umocňovanie a násobenie majú rovnakú prioritu a tak sa výraz `a*b**c` vypočíta ako $(a\cdot b)^c$, a nie ako $a\cdot b^c$. Za zmienku stojí ešte operátor skalárneho súčinu *pár* `dotprod` *pár*.

Dalo by sa ešte pokračovať v podrobnejšom popise jednotlivých príkazov a ich použitia, ale myslím, že názornejšie bude ukázať Vám zdrojové kódy niektorých obrázkov z M&M a odkázať vás na podrobný manuál jazyka METAPOST, ktorý nájdete na adrese `www.tug.org/docs/metapost/mpman.pdf`. V prípade akýchkoľvek problémov neváhajte a napíšte autorovi článku žiadosť o pomoc na adresu `jeffer@matfyz.cz`.

Príklad prvý, makro na kreslenie oblúčika uhlu:

```
def uhol(expr x,y,z,m)= % makro má štyri parametre jedno
% rameno, vrchol, druhé rameno (tri krát pár) a polomer
% oblúčika (číslo)
  begingroup
    path uholl; % budem používať cestu uholl
    uholl = (m*unitvector(x-y)){(y-x)rotated 90}..
              {(y-z)rotated 90}(m*unitvector(z-y));
% cesta vychádza z jedného ramena, kde je naň kolmá a končí
% na druhom ramene; všimnite si, že bez problémov odčítam
% "vektory", čiže premenné typu pair
    draw uholl shifted y; % cestu posuniem na jej miesto,
% teda do vrcholu uhlu a nakreslím
  endgroup
enddef; % koniec definície

beginfig(1);
  z0=(2cm,0cm); % definujem si tri body
  z1=(-5cm,1cm);
  z2=(5cm,1.5cm);
  drawdblarrow z1--z0--z2; % kreslím ramená - obojsmernú šípku
  uhol(z2,z0,z1,.8cm); % používam makro uhol pre vonkajší uhol
  uhol(z1,z0,z2,.6cm); % a ešte raz pre doplnkový (vnútorný)
endfig;
end
```

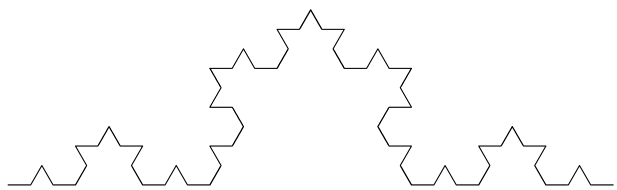


Druhý príklad je makro na kreslenie jednej strany Kochovej vločky:

```
def koch(expr lokraj, pokraj, level, maxlevel)=begingroup;
% príkazom save definujem premenné ako lokálne
% beginfig mimo iné vykonáva aj save pre všetky
% premenné x,y a z, teda súradnice a body
  save dlzka, novadlzka, z;
  pair z[];
% zisťujem dĺžku úsečky, ktorú budem deliť na tretiny
  dlzka=arclength(lokraj--pokraj);
  novadlzka=dlzka/3;
% nadefinujme potrebne body:
  z0=lokraj;
  z4=pokraj;
  z1=(1/3)[z0,z4];
```

```
  z2=(2/3)[z0,z4];
% ešte vrchol trojuholníka - otočením ľavého okraja
% úsečky okolo ľavého bodu základne trojuholníka
% o 120 stupňov v smere hodinových ručičiek
  z3=z0 rotatedaround(z1,-120);
% odmažem čiaru tam, kde príde "zub"
  undraw z1--z2 withpen currentpen scaled 2;
  draw z0--z1--z3--z2--z4;
% mám odmazanú čiaru a nakreslený trojuholník
% ak som sa zatiaľ nedostal na požadovanú úroveň,
% rekurzívne volám sám seba
  if level<maxlevel:
    koch(z0,z1,(level+1),maxlevel);
    koch(z1,z3,(level+1),maxlevel);
    koch(z3,z2,(level+1),maxlevel);
    koch(z2,z4,(level+1),maxlevel);
  fi;
endgroup; enddef; % koniec definície makra

beginfig(2);
% používam makro na úsečku počiatok až (8cm,0)
  koch(origin,(8cm,0),1,3);
endfig;
end
```



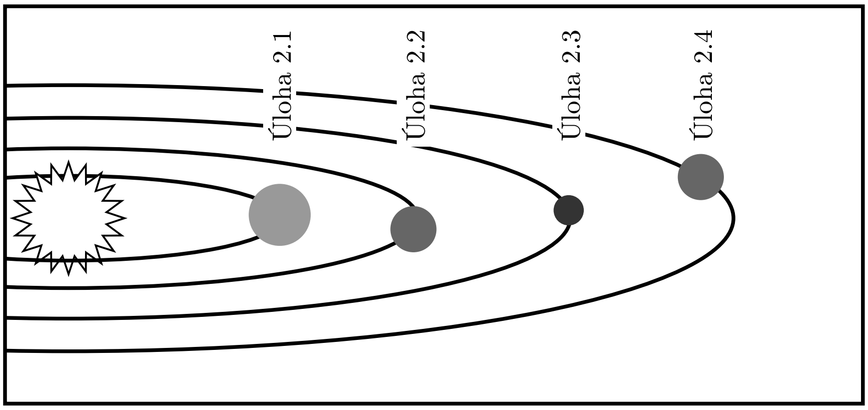
Tretí príklad je obrázok z titulnej strany druhého čísla s malým vylepšením:

```
input TEX; % makrá pre rozšírenú sadzbu TeXu

beginfig(3);
  TEXPRE("\font\a=csr10\a"); % definujem CS font pre popisky
  linecap:=butt; % rovný koniec čiary kreslenej okrúhlym perom
  linejoin:=mitered; % spoj čiar do ostrej špičky
%  (iné možnosti nastavenia v manuále na strane 41)
  u:=.7cm; % všetky rozmery budú v násobku tejto jednotky
% takto ľahko zmením celkovú veľkosť obrázku bez toho, aby
% sa mi na ňom poposúvali jednotlivé objekty
  path planety[], slnko; % definujem cesty
  picture slvrch,slspodok; % a obrázky
% z cesty slnko budem kresliť slnko (štvorcípa hviezdička)
```

```
  slnko=(-1,1)--(0,4)--(1,1)--(4,0)--(1,-1)--(0,-4)--(-1,-1)
        --(-4,0)--cycle;
  pickup pencircle scaled 1.5;
  for i=1 upto 5: % najprv kreslím
    draw slnko scaled (.25*u) rotated (i*360/5);
  endfor;
  for i=1 upto 5: % potom mažem zbytočné čiary vo vnútri
    unfill slnko scaled (.25*u) rotated (i*360/5);
  endfor;
  slvrch:=currentpicture; % tu bude vrchná polovica slnka
  slspodok:=currentpicture; % tu bude spodná polovica slnka
  currentpicture:=nullpicture; % vyprázdňujem papier
% clip nechá z obrázku len to, čo je vnútri uzavretej cesty
  clip slvrch to (-8*u,0)--(8*u,0)--(8*u,8*u)--(-8*u,8*u)
               --cycle;
  clip slspodok to (-8*u,0)--(8*u,0)--(8*u,-8*u)
                 --(-8*u,-8*u)--cycle;
  draw slspodok; % spodnú polovicu slnka môžem nakresliť,
% dráhy planét (nakreslené neskôr) pôjdu popred neho
  for i=1 upto 4: % a kreslím štyri planéty
% použitím xscaled a yscaled na kružnicu vyrábam elipsy -
% dráhy planét
    planety[i]=fullcircle xscaled (4*(i**1.2+1)*u)
                        yscaled (0.8*(i**1.2+1)*u);
    draw planety[i]; % konštanty sú dielom metódy pokus-omyl
% čas v ktorom na kružnici deformovanej na elipsu bude planéta
    polohap:=-0.2+0.3*abs(i-2);
    rozmer:=(abs(i-3)*0.3+0.5)*u; % priemer planéty
    z[i]=point polohap of planety[i]; % prevod času na bod
% vyprázdniť miesto na planétu nie je nutné, ale ja to urobím
    unfill fullcircle scaled rozmer shifted z[i];
% kreslím planéty s rôznym priemerom a rôzne intenzívnou sivou
% farbou
    filldraw fullcircle scaled rozmer shifted z[i]
             withcolor ((abs(i-3)*0.2+0.2)*white);
  endfor;
  for i=1 upto 4: % na popisky používam makro TEX
% podrobnejší popis v manuále na strane 62
% najprv vyprázdnim miesto, kam príde popisok
    unfill bbox(thelabel.rt(TEX("Úloha 2."&decimal(i)), origin)
            rotated 90 shifted (xpart(z[i]),(1.3*u)));
% a teraz ho píšem
    draw thelabel.rt(TEX("Úloha 2."&decimal(i)), origin)
            rotated 90 shifted (xpart(z[i]),(1.3*u));
  endfor;
```

```
  draw slvrch; % konečne nakreslím aj hornú polovicu slnka,
% ktorá vystupuje pred dráhy planét - to sa do druhého čísla
% nestihlo dostať
  path orez;
  orez:=(-1.2*u,-3.5*u)--(15*u,-3.5*u)--(15*u,4*u)
        --(-1.2*u,4*u)--cycle;
  clip currentpicture to orez; % znovu orezávam obrázok aby
% na ňom neboli prázdne kusy elíps bez planét na druhej
% strane od slnka
  draw orez; % pre názornosť kreslím cestu, orez
endfig;
end
```



Jeffer

Úloha 5.5 – METAPOST (3b)

Pro alespoň dva různé trojúhelníky překreslete pomocí METAPOSTu obrázek ze zadání príkladu 5.4. Odešlete nám funkční zdrojový kód.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	r5	t5	t6	k	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	168	4		4	1	2				3	14	60
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Kraus	65	4			1					0	5	35
3–4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Kochmanová	62	3		3	2				6	0	14	34
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kolář	34	4	2	4	1					0	11	34
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Král	35	4								0	4	29
6–7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Miloš	42	4			1					0	5	25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Vahalová	25	4	0		1				6	0	11	25
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Bekrová	40	3			1				6	0	10	23
9–10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Pokorný	34	3		3	1					0	7	22
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Kocián	22	4		2	1					0	7	22
11.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	174	4		4	1		7			0	16	21
12–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Štědronský	63	3		3				8		0	14	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Harlenderová	24	2			1					0	3	20
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Hlásek	41	4		5	3					1	13	19
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kristína Onderková	20											18
16–19.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	100	4			2					0	6	17
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Langer	20	3			1					0	4	17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Hubatová	17											17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Márová	17											17
20–21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Gabriela Kubíčková	14	4	2		1					0	7	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Zemková	14	2	2	3	1	2				2	12	14
22–24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Škoda	28											13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Böhmová	20	4		2	1					1	8	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Tesař	13	3								0	3	13
25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Štoček	10				1					0	1	10
26–27.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Holeček	13											9
	Tomáš Trégner	9											9
28–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Chejnovská	26											8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková	24	4								0	4	8
30–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková	39											6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Jurásková	27	1	0							0	1	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Novotný	22	1	3							0	4	6
	Ondřej Mička	6											6
34.	Marek Stehlík	5											5
35–36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Husek	25											4
	Daniel Šafka	4											4
37–39.	Pavel Kratochvíl	8											3
	Josef Klesa	3		0	2	1					0	3	3
	Pavel Pejřimovský	3											3

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t5	t6	k	+	$\sum_0$	$\sum_1$
40–43.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Dočekalová	36											2
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Barbora Šmídová	10											2
	Kateřina Jiráková	2	1	0		1					0	2	2
	Dominik Miketa	2											2
44.	Karel Tesař	1		0		1					0	1	1
45.	Simona Ondrčková	0											0

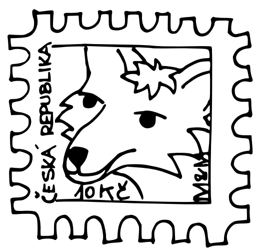
Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.