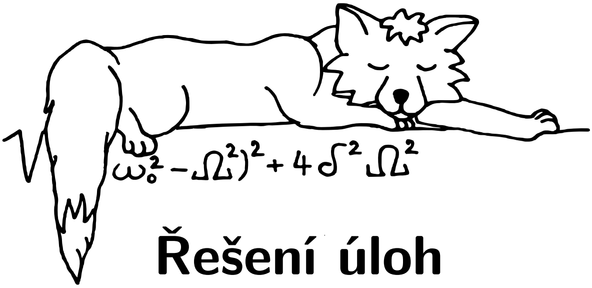
M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XV číslo 7-8

Milé kamarádky a kamarádi,
zase se nám rok s rokem sešel a je za námi další ročník. A tak v tomto čísle naleznete vzorová řešení úloh z 5. a 6. čísla, poslední příspěvky k tématkům a samozřejmě výsledkovou listinu celého ročníku. Letošním nejlepším řešitelem byl Doc.$^{\mathrm{M}}$ Štěpán Šimsa, kterému k úspěchu upřímně blahopřejeme.

Doufáme, že vás letošní ročník zaujal a i v příštím roce nám zachováte přízeň. Již nyní vám můžeme prozradit, že se můžete těšit na několik novinek.

Mnoho štěstí v příštím ročníku přejí

Organizátoři M&M



Řešení úloh

Úloha 5.1 – Střední doba čekání (3b)

Zadání:
Pokud přicházím na zastávku autobusu a vím, že linka 186 jezdí jednou za sedm minut a linka 210 jednou za 14 minut, jaká je střední doba, kterou budu čekat, pokud mohu jet kterýmkoliv z autobusů?

Jak se tato odhadovaná doba změnila, pokud na zastávce už sedím dvě minuty a právě mi ujela linka 186, protože jsem se zamyslel nad touto úlohou?

Řešení:
Co vlastně víme o příjezdech autobusů? Neznáme jejich aktuální rozestup (že jeden jezdí vždy několik minut po druhém), ani dobu kdy vyjeli. Víme jenom, jak často průměrně jezdí. O autobusu 186 můžeme říct, že každou minutu máme pravděpodobnost $1/7$, že přijede, u autobusu 210 to bude $1/14$ za minutu. Pokud bychom měli k dispozici jenom autobus 186, je pro každou minutu pravděpodobnost $1/7$ – když sečteme sedm minut, dostaneme pravděpodobnost 1, protože autobus určitě někdy přijel. Střední doba čekání je průměrný čas, který jsme při čekání strávili. Sečteme tedy $1/7 \cdot (1/2 + 3/2 + \ldots 13/2) = 7/2$ minuty, kde v závorce jsou časy, které jsme museli čekat, přijel-li bus v první až sedmé minutě. (Předpokládáme, že autobus přijede průměrně uprostřed dané minuty.)

Pokud jsou autobusy dva, jaká je pravděpodobnost toho, že jsem odjel v dané minutě? Zjevně je to pravděpodobnost, že autobus 186 v této minutě přijel (1/7), krát pravděpodobnost, že autobus 210 *ještě* nepřijel, tedy $(1 - i/14)$, kde i je pořadí dané minuty. K tomu přičítáme opačný případ, kdy bus 210 přijel, krát pravděpodobnost, že bus 186 ještě nepřijel, a případ, kdy přijely oba busy zároveň $(1/7 \cdot 1/14 = 1/98)$. Když sečteme pravděpodobnosti odjezdu přes všech sedm minut možného čekání (více čekat nebudeme, alespoň bus 186 by do té doby určitě jel), zjistíme, že pravděpodobnost, že autobusy pojedou v jedné z minut, se sečte na jedničku. To je v pořádku.

$$P = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{1}{7} \left(1 - \frac{i}{14} \right) + \frac{1}{14} \left(1 - \frac{i}{7} \right) + \frac{1}{98} \right) = 1$$

Střední dobu čekání zjistíme, když pravděpodobnost svého odjezdu v dané minutě vynásobíme časem, jaký jsme čekali (který nejlépe měříme v půli minuty). Výsledek je tedy

$$T = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{1}{7} \left(1 - \frac{i}{14} \right) + \frac{1}{14} \left(1 - \frac{i}{7} \right) + \frac{1}{98} \right) (i - \frac{1}{2}) \approx 2{,}93\,\text{minut.}$$

Takto získaný výsledek je samozřejmě přibližný – nezapočítali jsme totiž, že pravděpodobnosti se mění i během jednotlivých minut. Přesný výsledek bychom získali integrálem

$$T = \int_0^7 \left(\frac{1}{7} \left(1 - \frac{t}{14} \right) + \frac{1}{14} \left(1 - \frac{t}{7} \right) \right) t \,\mathrm{d}t = \frac{35}{12}\,\text{minuty.}$$

Pak už nemusíme uvažovat, že by autobusy přijely přesně v tentýž okamžik – pravděpodobnost něčeho takového je nulová. K tomuto výsledku se taky můžeme blížit dělením času na menší okamžiky.

Výsledek splňuje naše očekávání, že střední doba čekání by měla být menší, než když jede jen jeden autobus (byť ten rychlejší z uvažovaných dvou).

Co se změní, pokud jsme na zastávce čekali 2 minuty a bus 186 nám právě ujel? Úloha je teď překvapivě lehčí a lze ji řešit přesně i bez integrace. Především jsme získali informaci, že v prvních minutách ze svých intervalů busy nejely. Pokud předtím byla stejná šance, že bus 210 pojede v každé ze čtrnácti minut svého intervalu, nyní je stejná šance pro každou z 12 zbývajících minut. Správně tušíte, že linka 186 znovu přijede právě za 7 minut. Tady už tedy nepočítáme s pravděpodobnostmi, ale máme jistotu. Nyní tedy budeme 7 minut čekat, jestli náhodou nepřijede bus 210, a potom vezmeme přijevší 186.

Pravděpodobnost, že pojedeme busem 210 je 7/12 (sedm minut z dvanácti možných). Pak čekáme průměrně 3,5 minuty. Ve zbylých případech, $(1 - 7/12)$, jsme čekali právě 7 minut na 186ku. Celková střední doba v tomto případě tedy je

$$\frac{35}{10}\,\text{minut}\cdot\frac{7}{12}+7\,\text{minut}\cdot\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{119}{24}\,\text{minut.}$$

Úlohu jsme, jak se někdy stává, bodově trochu podcenili – za správné řešení jsem se proto rozhodl dávat 4 body. Těm, kteří v řešení naznačili zajímavý postup řešení, nebo některé myšlenky, které se skutečně použily, jsem dal po bodu či dvou. Doc.M Štěpán Šimsa úlohu jako jediný vyřešil celou, Mgr.M Filip Štědronský se k řešení přiblížil, když správně spočetl první (těžší) část úlohy. Někteří řešili jinou úlohu, protože nedobře pochopili pojem střední hodnota (příště zkusíme dát definici takového ne úplně standardního pojmu do zadání), zde jsem rovněž udělil bod.

Irigi

Úloha 5.2 – Zaspal (5b)

Zadání:

Kráčam si tak po ulici a odrazu vidím po druhej strane bežať chlapa v montérkach s rebríkom cez rameno. Asi zaspal, pretože uteká rýchlosťou $0,95\cdot c$ *(áno, 95% rýchlosti svetla). Rebrík, ktorý nesie, ako inak, v smere pohybu, je asi bežný rebrík, ktorý má priečky* 30 cm *od seba. Ako ho ale vidím ja na druhej strane ulice?*

Řešení:

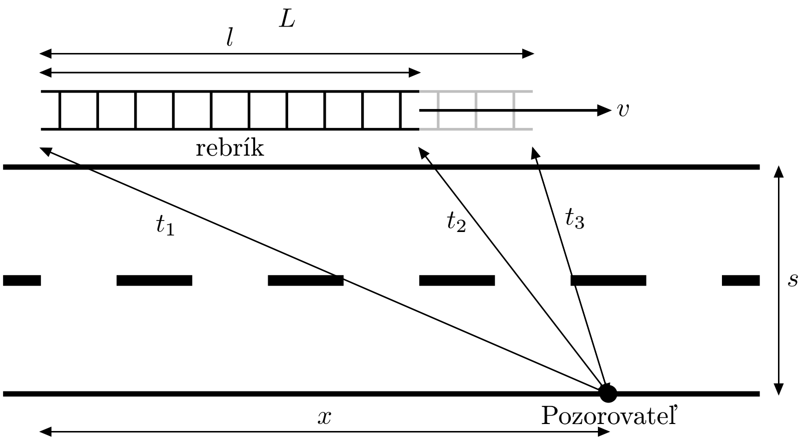
Keďže sa robotník s rebríkom hýbe skoro rýchlosťou svetla, je zrejmé, že budeme operovať so špeciálnou teóriou relativity. Pripomeňme si, že je celá vybudovaná na dvoch postulátoch:

- Všetky prírodné (fyzikálne) zákony platia rovnako vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách.
- Rýchlosť svetla vo vákuu je vo všetkých inerciálnych systémoch rovnaká (c).

Z týchto postulátov sa dospeje ku všetkým dôsledkom, mimo iné k *Lorentzovej kontrakcii dĺžky*. Tá stručne hovorí, že predmety sa v smere svojho pohybu skracujú. Konkrétne matematické vyjadrenie je

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{r5.2.1}$$

kde l_0 je dĺžka v inerciálnej vzťažnej sústave v ktorej je predmet v kľude, v je rýchlosť inerciálnej sústavy z ktorej je predmet pozorovaný a l je dĺžka, ktorú v pohybujúcej sa sústave odmeráme. Takto vyzbrojení dosadíme vzdialenosť medzi priečkami rebríka 30 cm, rýchlosť pohybu $0{,}95c$ a dostávame, že medzi priečkami uvidíme iba 9,4 cm. Príklad vyriešený a päť bodov vo výsledkovej listine.



Obr. r5.2.1 – Situácia na ulici. Pozorovateľ stojí v bode $x = 0$, chlap s rebríkom sa pohybuje v smere osi x (znázornený je teda v časti $x < 0$).

Tak jednoduché to ale nebude. Pozrime sa na obrázok r5.2.1. Rebrík vidíme vďaka svetlu a aj tomu tá cesta chvíľu trvá. Napríklad od zadného konca rebríka to bude

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + s^2}}{c}\,, \tag{r5.2.2}$$

kde x je súradnica (v smere pohybu), s je šírka ulice a c je ako obvykle rýchlosť svetla. Od predného konca rebríka ale svetlo dorazí už za

$$t_2 = \frac{\sqrt{(x + l)^2 + s^2}}{c}\,, \tag{r5.2.3}$$

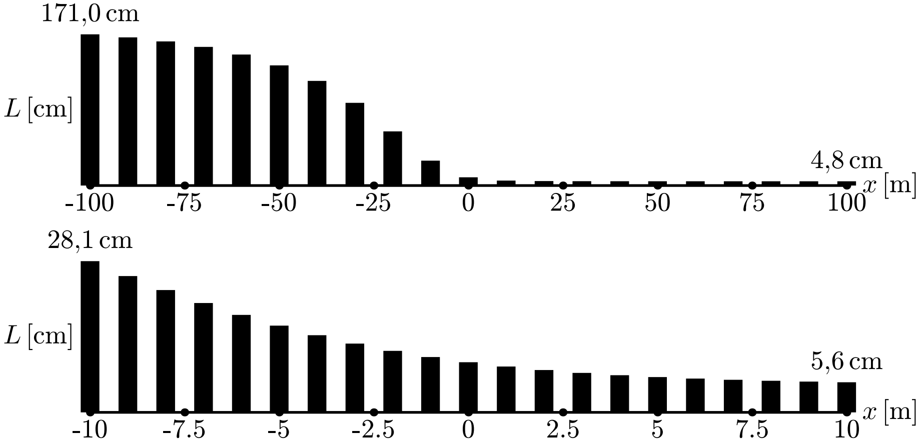
kde l je „pozorovaná“ dĺžka rebríka (alebo vzdialenosť medzi priečkami; teda dĺžka podľa (r5.2.1)). Ako vidíme, tieto dva časy sú rôzne, teda predný koniec na pozícii $x + l$ ($x < 0$) neuvidíme v čase, keď je zadný na pozícii x. V skutočnosti uvidíme predný koniec na inom mieste a to ďalej! Na toto miesto sa predný koniec dostane za t_a, pričom za tento čas sa posunie na miesto $x_1 = x + l + vt_a$ a svetlo z neho poletí $t'_3 = \sqrt{(x + l + vt_a)^2 + s^2}/c$. Pokiaľ označíme $x_1 - x = L$, kde L je pozorovaná dĺžka, môžeme pre celkový čas písať:

$$t_3 = \frac{L - l}{v} + \frac{\sqrt{(L + x)^2 + s^2}}{c}\,. \tag{r5.2.4}$$

Toto je celkový čas, ktorý zabralo posunutie predného konca na miesto kde ho napokon pozorovateľ uvidí a samotný let svetla k pozorovateľovmu oku. Tento čas samozrejme musí byť rovnaký ako pre let od zadného konca do oka. Len v takom prípade totiž uvidíme v jeden moment zadný koniec v pozícii x a predný v $x + L$. To teda ale nutne znamená, že $t_3 = t_1$ a teda

$$\frac{\sqrt{x^2 + s^2}}{c} = \frac{L - l}{v} + \frac{\sqrt{(L + x)^2 + s^2}}{c}\,. \tag{r5.2.5}$$

Pripomeniem len, že s, v, c sú parametre, x je premenná a L je nami hľadaný výsledok. Pohľad na obrázok r5.2.2 ukazuje, aké dlhé priečky vidí pozorovateľ stojaci v $x = 0$ a vzdialenosti $s = 10\,\mathrm{m}$ (na druhej strane ulice) od rebríka letiaceho rýchlosťou $v = 0{,}95c$ s priečkami vo vzdialenosti $l_0 = 30\,\mathrm{cm}$.



Obr. r5.2.2 – Pozorovaná vzdialenosť priečok rebríka.

Ani to však nie je všetko. Vzhľadom na to, že sa zdroj pohybuje rýchlosťou v voči nám, pozorujeme, že u chlapa v montérkach plynie čas oveľa pomalšie ako u nás. Naviac sa tým mení hustota vĺn a teda aj vlnová dĺžka. Celkový *relativistický Dopplerov efekt* sa potom dá vyjadriť asi takto:

$$\nu_p = \frac{\nu_r}{\gamma\left(1 + \frac{v\cos\theta}{c}\right)}\,, \qquad \text{(r5.2.6)}$$

kde ν_p je pozorovaná frekvencia svetla, ν_r je frekvencia pri rebríku, v a c už poznáme, θ je uhol z ktorého prilieta k pozorovateľovi svetlo a γ je Lorentzov gama faktor $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$, ktorý sme už videli pri kontrakcii dĺžky (pripomeňme len, že sa ešte často používa označenie $v/c = \beta$).

Takže nech už je Slnko kdekoľvek, svetlo, ktoré dopadá na rebrík, je už mimo viditeľný rozsah. Ak sa vám bude chcieť, môžete skúmať, pri akej vzájomnej polohe Slnka, chlapa v montérkach a pozorovateľa uvidí pozorovateľ aspoň na chvíľu montérky či rebrík, keď v sústave spojenej s rebríkom sú montérky modré a rebrík červený.

Jeffer

Úloha 5.3 – Minkowského suma (4b)

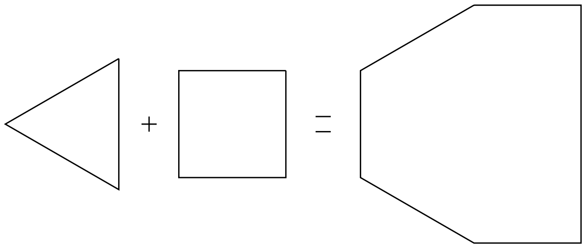
Zadání:

Mějme vyplněný pravidelný n–úhelník. Jeho vrcholy leží na jednotkové kružnici. Souřadnice vrcholů jsou tedy

$$x_k = \cos\left[\frac{2\cdot k-1}{n}\cdot 180^\circ\right],$$

$$y_k = \sin\left[\frac{2\cdot k-1}{n}\cdot 180^\circ\right].$$

Součtem dvou bodů rozumíme sečtení jejich souřadnic, čili $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. Minkowského sumou dvou n–úhelníků potom rozumíme množinu všech bodů, které vzniknou jako součet libovolného bodu z prvního n–úhelníku s libovolným bodem z druhého.



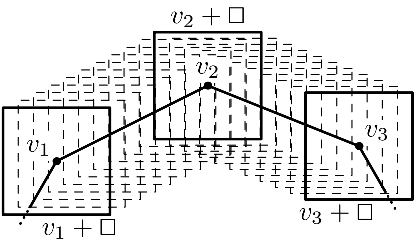
Obr. r5.3.1 – Minkowského suma trojúhelníku a čtverce

Zajímalo by nás, jaký obvod a obsah bude mít Minkowského suma pravidelného 3, 4, . . . 42 úhelníku.

Řešení:

Minkowského sumu $3,4,\ldots,42$-úhelníku si označíme $\mathcal{M}_{42}$.

Nejdříve učiníme pozorování, že Minkowského suma dvou konvexních mnohoúhelníků bude zase konvexní mnohoúhelník a že jeho strany (uvažovány jako vektory) budou právě strany původních dvou mnohoúhelníků. Náznak důkazu viz obrázek. (Může se stát, že se některé dvě strany spojí do jedné dlouhé, ale to nám nikde nebude vadit.)



Dále si určeme délku stran n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice. Abychom si co nejvíce ušetřili práci, všimneme si, že první a n-tý vrchol, tak jak jsou určeny v zadání, mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice se liší znaménkem, přičemž první vrchol ji má kladnou. Délka strany je tedy dvojnásobek y-ové souřadnice prvního vrcholu, tedy

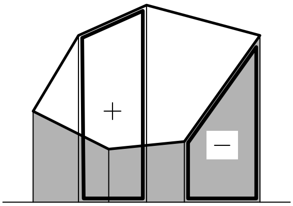
$$s_n = 2n\sin(\pi/n)\,.$$

Použitím pozorování nahoře můžeme nyní říci, že obvod hledané Minkowského sumy $\mathcal{M}_{42}$ je

$$\sum_{k=3}^{42} 2k\sin(\pi/k)\,.$$

Nenapadá mě, jak by se dal tento vzorec zjednodušit, tak jej necháme spočítat počítač.

Dále budeme hledat obsah $\mathcal{M}_{42}$. Z každého vrcholu $\mathcal{M}_{42}$ spustíme kolmici na osu x, čímž nám vznikne spousta lichoběžníků. Obsah $\mathcal{M}_{42}$ zjistíme tak, že sečteme obsahy lichoběžníků odpovídajících horním stranám $\mathcal{M}_{42}$ a odečteme obsahy lichoběžníků odpovídajících dolním stranám (šedých). Přitom strany budeme uvažovat jako orientované úsečky dané směrem (orientovaným úhlem) a délkou. Seznam stran dostaneme spojením seznamů příslušných pravidelným mnohoúhelníkům, přičemž je seřadíme podle úhlu. Stejně jako výše, i zde použiji počítač.



Výsledky najdu následujícím programem:

```
#!/usr/bin/python
from math import sin,cos,pi

N = 42

print "Obvod:", sum([k*2*sin(pi/k) for k in range(3,N+1)])

def zretezeni(sezn):
        # zretezeni seznamu seznamu
        return reduce(lambda x,y:x+y, sezn)

def strany_n_uhelnika(k):
        # vraci seznam dvojic (uhel, delka)
        delka = 2*sin(pi/k)
        return [(pi/2 + i*2*pi/k, delka) for i in range(k)]

def obsah(li):
        y = 0.0
        vysl = 0.0
        for (uhel,delka) in li:
```

```
                dx = delka * cos(uhel)
                dy = delka * sin(uhel)
                vysl += (-dx) * (y + dy/2)
                y += dy
        assert (abs(y)<0.00001)
        return vysl

vsechny_strany = zretezeni([strany_n_uhelnika(k)
  for k in range (3,N+1)])
vsechny_strany.sort()
print "Obsah:", obsah(vsechny_strany)
```

Strany n-úhelníků bereme počínaje tou vpravo, kterou uvažuji ve směru nahoru, a pokračujeme proti směru hodinových ručiček. Obsah lichoběžníků počítáme jako $-\mathrm{d}x \cdot (y + \mathrm{d}y/2)$, přičemž znaménko mínus bereme proto, že horním stranám odpovídá postup doleva, tedy záporné $\mathrm{d}x$, a dolním stranám postup doprava, tedy $\mathrm{d}x$ kladné. Po oběhnutí $\mathcal{M}_{42}$ assertem ověříme, zda jsem skončili zhruba v té výšce, kde jsme začali. Pokud bychom někde udělali chybu, tady by se to poznalo[1].

Spočítané hodnoty jsou $\approx 247{,}59$ pro obvod a $\approx 4869{,}9$ pro obsah.

Pro kontrolu ještě ověřme jednu věc. Dá se očekávat, že $\mathcal{M}_{42}$ bude velmi podobná kruhu. Spočítejme tedy, jaký obsah by měl kruh o stejném obvodu, jako má $\mathcal{M}_{42}$, a porovnejme ho s obsahem $\mathcal{M}_{42}$. Srovnáním vzorečků $o = 2\pi r$ a $S = \pi r^2$ a vyjádřením S z o dostaneme $S = o^2/4\pi$, což po dosazení dává $\approx 4878{,}1$. To tak zhruba sedí, takže můžeme našemu řešení zhruba věřit.

Xof

Úloha 5.4 – Fosforeskujúca Zem (2b)

Zadání:

Mám v izbe na stene nalepenú (zeleno) fosforeskujúcu Zem. Raz v noci (všade bola tma a už aj táto Zem sa „vybila“) mi napadlo, že ju „nabijem“ poriadne, a tak som zobral červený laser. Akým spôsobom ním mám svietiť, aby som dostal čo najintenzívnejšie svietiacu Zem?

Řešení:

Je to (skoro) úplne jedno, Zem nebude svietiť. Červené fotóny z laseru majú totiž príliš malú energiu (vyžarované zelené fotóny majú energiu vyššiu) a fosforescencia funguje iba pri pohlcovaní fotónov s vyššou energiou ako sa vyžarujú.

Vieme, že svetlo sa šíri (aj) ako častice – fotóny. Energia, ktorú fotón nesie, je pritom priamo úmerná frekvencii svetla a teda rovná $E = h\nu$, kde h je Planckova konštanta. Pripomeňme ešte vzťah medzi frekvenciou ν a vlnovou dĺžkou λ svetla: $\nu = c/\lambda$, kde c je rýchlosť svetla.

[1] Přesněji: *existují* takové chyby, které by se tady poznaly.

Molekula *farbiva* čaká v základnom stave (pri bežných teplotách je najviac molekúl práve v základnom stave – všetky elektróny sedia na svojich miestach a nepreskakujú na vyšše hladiny). Odrazu k nej priletí fotón s dostatočnou energiou a absorbuje sa. Túto energiu prevezme niektorý elektrón (alebo skupina elektrónov). Pokiaľ preskočí zo základnej singletnej[2] hladiny do vyššej (prvej) singletnej hladiny, dôjde vo veľmi krátkom čase (nanosekundy) k jeho opätovnému vyžiareniu. Tomuto procesu sa hovorí fluorescencia. Pokiaľ elektrón prejde až do tripletného (alebo vyššieho multipletného) stavu, zostáva v ňom veľmi dlho (až minúty). Prechod triplet-singlet je totiž *zakázaný*[3] a základný stav je práve singletný. A práve to je princíp fosforescencie.

V tento moment prichádza ďalší nový pojem – Stokesov posun. Zatiaľ pomerne riedke (elektrónové) hladiny sa totiž zahustia pridaní ďalších pohybov. Podstatné sú pre nás vibrácie (ostávajú ešte rotácie). Každej elektrónovej hladine zodpovedá množstvo vibračných hladín (vibrujú pritom atómy v molekule). Podobne ako pre elektróny, aj pre vibračné módy platí, že väčšina z nich je pri bežnej teplote v základnom stave. Absorbovaný fotón nielen zvýši energiu elektrónu (ten sa môže vyskytovať len na presne definovaných hladinách), ale aj zvyškom energie zvýši vibračný stav. Ten ale za pár pikosekúnd spadne späť do základného. Keď sa potom elektrón vracia na základnú hladinu (a vyžaruje konečne nami očakávaný fotón), padá zo základného vibračného stavu vo vyššom elektrónovom stave do vyššieho vibračného stavu (ktorý zas za pár pikosekúnd zrelaxuje do základného) v základnom elektrónovom stave.

Keď to stručne zopakujeme:

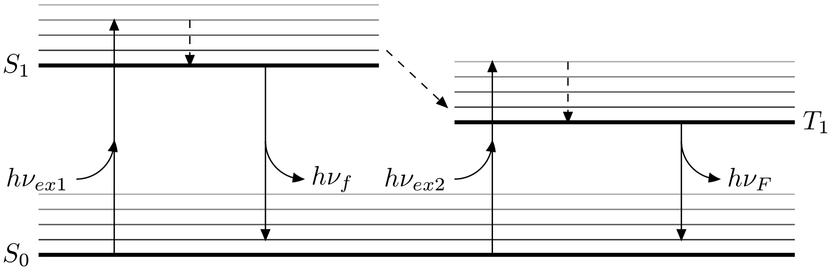
- Excitácia (pohltenie fotónu): základný elektrónový a základný vibračný → vyšší elektrónový a vyšší vibračný.
- Emisia (vyžiarenie fotónu): vyšší elektrónový a základný vibračný → základný elektrónový a vyšší vibračný.

Ešte lepšie je to vidieť na obrázku. Každopádne hýbanie s vibračnými hladinami spôsobí, že vyžiarený fotón bude mať nižšiu energiu (bude „červenší“), ako absorbovaný fotón. Tomuto rozdielu sa práve hovorí Stokesov posun. Pre poriadok musíme priznať, že existuje aj anti-Stokesov posun, ktorý začína na vyššom vibračnom stave ako potom skončí, ale jeho pravdepodobnosť je oveľa nižšia (teda aj intenzia svetla (množstvo fotónov) je nižšia).

Napriek všetkému čo sa zatiaľ povedalo o nemožnosti rozsvietiť zeleno fosforeskujúci predmet červeným svetlom, bude tento svietiť. Ako to? Výhodou

[2] Pojmy ako singletný, alebo tripletný sa vzťahujú na spin. Ich riadne vysvetlenie je obsahom hrubých kníh pojednávajúcich o kvantovej mechanike, a tak dúfame, že nám uveríte aj bez zložitého výkladu, na ktorého pochopenie sa buduje matematický aparát prvé tri roky štúdia na matfyze.

[3] Zložitými výpočtami sa ukazuje, že *pravdepodobnosť* takéhoto prechodu je v porovnaní s prechodom singlet-singlet veľmi malá. Táto pravdepodobnosť sa pritom vzťahuje na jednotku času (p. že elektrón uskutoční tento prechod v najbližších a (nano)sekundách).



Obr. r5.4.1 – Jablonského diagram. Jednotlivé šípky z ľava do prava:

- Prichádza fotón s energiou $h\nu_{ex1}$ (ν_{ex1} je frekvencia žiarenia, h je Planckova konštanta) a excituje molekulu zo základného stavu (S_0) a základného vibračného stavu do prvého singletného stavu (S_1) a niektorého vyššieho vibračného stavu.
- Vyšší vibračný stav rýchlo relaxuje na základný (za pár pikosekúnd).
- Po pár nanosekundách dochádza k vyžiareniu fluorescenčného fotónu. Podobne funguje „neónka" – výboj v trubici svieti v ultrafialovej oblasti, ale na povrchu trubice je nanesené fluorescenčné farbivo, ktoré absorbuje ultrafialové svetlo a znovu ho vyžiari už vo viditeľnej oblasti.
- Za vhodných okolností nemusí dôjsť k vyžiareniu fotónu, ale energia sa môže transformovať. Napríklad prechodom do tripletného stavu, alebo odvedením na iné molekuly (šikmá prerušovaná šípka naznačuje prechod do tripletného stavu T_1).
- Do tripletného stavu T_1 sa molekula môže dostať aj priamo excitáciou pomocou fotónu.
- Vyššie vibračné stavy znovu rýchlo prechádzajú do základného.
- Napokon dôjde k vyžiareniu fosforescenčného fotónu. K nemu môže dôjsť až po niekoľkých minútach.

laseru je, že sa množstvo fotónov v lúči nachádza v rovnakom stave. Môže sa teda stať, že molekulu zasiahnu naraz dva *rovnaké* fotóny. Pravdepodobnosť zachytenia vhodného fotónu je malé číslo (oveľa menšie ako jedna). Ak sa majú zachytiť dva naraz, musíme zobrať druhú mocninu tejto pravdepodobnosti (teda ešte oveľa menšie číslo), ale aj tak je za vhodných podmienok pravdepodobnosť tejto *dvojfotónovej excitácie* nenulová a je tak možné (slabo) rozsvietiť zelený predmet aj červeným laserom.

Jeffer

Úloha 6.1 – Manželské páry (4b)

Zadání:

MatFyzák Eduard úspěšně odpromoval. Začal studovat postgraduální studium. Na katedře se zakoukal do sličné MatFyzačky a slovo dalo slovo a byli zasnoubeni. Ovšem, jak se blížil termín svatby, byl Eduard zamyšlenější a zamyšlenější.

V knize o etiketě doporučovali, aby manželské páry, které jsou pozvány na hostinu, neseděly vedle sebe. V knize byly také další rady, ale na ty Eduard nehleděl.

Na hostině budou všichni sedět u velikého kulatého stolu a Eduarda by zajímalo, kolika způsoby si může sednout n manželských párů na $2 \cdot n$ židliček tak, aby žádný pár neseděl vedle sebe.

Řešení:

Úloha se dala řešit více způsoby, uvádíme dva nejodlišnější: z pohledu informatika a matika. Pohled matika: Je to kombinatorika, dokonce princip inkluze a exkluze. Tento postup tu jen nastíním, protože je dosti náročný a zdlouhavý. Jde o to, že z celkového počtu všech možností odečteme možnosti, kdy sedí vedle sebe aspoň jeden pár, poté aspoň dva páry, až n-párů. Ale pokud bychom provedli pouze tento výpočet, tak některé možnosti odečteme několikrát a tedy o ně přijdeme, proto tyto možnosti se musí opět přičíst.

Pokud na úlohu pohlédne informatik, představí si graf. Graf bude mít n uzlů a každý uzel bude mít jeden uzel, se kterým je v páru, takže ve skutečnosti bude mít graf $2n$ uzlů. Hrany budou mezi každými dvěma vrcholy, jen ne mezi vrcholy, které jsou v páru. Nyní každý cyklus v grafu, který obsahuje každý vrchol právě jednou, je možným rozsazením. Nyní tedy stačí spočítat počet takových cyklů. Na to se dá použít hledání do hloubky – vyberu si vrchol, kterým začnu, a vyberu si jednu hranu, po které se dostanu do dalšího vrcholu, z něj pokračuji stejně, toto opakuju dokud se nedostanu do počátečního vrcholu. Tento problém se dá vygooglit pod názvem Coctail graph party, kde se můžete dovědět více, i to, že existuje rekurentní vzorec pro konkrétní počítání.

Klár(k)a

Úloha 6.2 – Ohníčku hoř! (3b)

Zadání:

Lišák Riki si během jednoho letního dne vyrazil do hor. Jak už to tak bývá, zastihla ho na hřebeni bouřka. A než se stihl schovat, promokl on, jeho věci, ale hlavně zápalky.

„Tak to ne, musím vymyslet, co si příště vzít místo zápalek, aby to nenavlhlo," řekl si. „A co takhle lupa? Ale co když se zpozdím a slunce zapadne?"

Jak velkou lupu by Riki potřeboval, aby s ní mohl zapálit papír i při měsíčním světle? Stačí řádový odhad. Bude mít v průměru centimetry, metry, kilometry?

Řešení:

Začnime prístupom značne lenivým a na informačné zdroje náročným. Pozrieme sa totiž do nejakej múdrej knihy na jasnosti Slnka a Mesiaca. Zistíme, že Slnko má bolometrickú[4] hviezdnu veľkosť[5] −26,82 mag a Mesiac v splne −12,5 mag. Jednoduchým výpočtom potom zistíme, že Slnko je asi o 14,3 mag jasnejšie ako Mesiac a teda je intenzita jeho svetla vyššia asi päťstotisíckrát. Lupa na podpaľovanie mesačným svetlom bude musieť byť teda 500000-krát väčšia, ako lupa na podpaľovanie svetlom Slnečným, pričom veľkosťou lupy v tomto prípade myslíme *plochu lupy*, keďže energia sa zbiera z plochy a nie z priemeru. Keď použijeme odhad, že zapáliť papier, suchý mach, či iný vhodný podpalový materiál slnečným svetlom zvládneme lupou s priemerom 5 cm, vyjde nám potrebný priemer lupy na mesačné svetlo 35 m, teda desiatky metrov.

Bez znalosti magnitúd budeme postupovať trochu inak. Vzdialenosť Mesiaca od Zeme sa učí na základnej škole (384400 km, teda asi 400000 km), priemer Mesiaca nás buď tiež naučili, alebo tušíme, že Mesiac má asi štvrtinový priemer v porovnaní so Zemou (3476 km) no a ostáva nám ešte zistiť, ako *kvalitné* zrkadlo je Mesiac. Mesačný povrch (regolit) je podobný prachu, alebo piesku. Jeho odrazivosť (albedo) sa udáva ako 0,07, teda približne jedna desatina. Takže máme slabo odrážajúce zrkadlo s priemerom ako Mesiac a pri tom vieme, že na Mesiac dopadá na jeden meter štvorcový povrchu zhruba rovnaký výkon ako na meter štvorcový na Zemi. Stačí teda zistiť, koľko z tohto výkonu dopadne na meter štvorcový na Zemi vo vzdialenosti 400000 km od Mesiaca. Rýchlym výpočtom nám vyjde, že skutočný Mesiac je asi trikrát jasnejší, ako vypočítaný[6]. Trikrát menší výkon ale nie je problém, akurát nám namiesto tridsaťpäťmetrovej lupy vyjde lupe $\sqrt{3}$-krát väčšia, čiže asi šesťdesiatmetrová, ale stále sa budeme s priemerom pohybovať v desiatkách metrov.

Na záver ostáva akurát poznamenať, že takto veľkú šošovku zatiaľ nikto nevyrobil (dokonca ani zrkadlo), a aj keby, sklo by bolo uprostred tak hrubé, že by veľkú časť svetla pohltilo. Tak či onak, hmotnosťou a veľkosťou by sa do batohu ako príručný zapaľovač táto možnosť neujala.

Jeffer

[4] Slovíčko „bolometrická“ značí, že sa uvažuje celé spektrum a nie len jeho viditeľná časť. V prípade Slnka je síce korekcia veľmi malá, ale prudko narastá pre modré a červené hviezdy (väčšinu výkonu vyžarujú totiž mimo viditeľnú oblasť).

[5] Kto sa s týmto pojmom nestretol, hviezdna veľkosť (udáva sa v magnitúdach) je záporne vzatým logaritmom svietivosti a to tak, aby rozdiel piatich magnitúd zodpovedal stonásobnej zmene svietivosti, teda $m_a - m_b = -2{,}5 \log_{10}(I_a/I_b)$.

[6] Pri rýchlom výpočte totiž predpokladáme, že Mesiac rozptyľuje odrazené svetlo do všetkých smerov rovnako.

Úloha 6.3 – Přívoz (1b)

Zadání:

U přívozu v Podhoří se na břehu řeky sešli otec se svými dvěma syny, matka se svými dvěma dcerami a kriminálník s policistou. Všichni se chtějí dostat na druhou stranu, ale není to tak snadné, neboť převoz lidí na druhou stranu se řídí těmito pravidly:

- *Na loďce se mohou převážet najednou jen dvě osoby.*
- *Otec nesmí zůstat ani s jednou dcerou bez přítomnosti matky.*[7]
- *Matka nesmí zůstat ani s jedním synem bez přítomnosti jejich otce.*
- *Kriminálník nesmí zůstat ani s jedním členem rodiny, když tam není policista.*
- *Jen otec, matka a policista se umí přeplavit (tj. ovládat loďku).*

Jak dostat všechny na druhou stranu?

Úloha je inspirována hrou, kterou si můžete zahrát na `http://freeweb.siol.net/danej/riverIQGame.swf`

Řešení:

Pokud si rozebereme jednotlivé možnosti, které nám zadání dává, zjistíme, že obvykle máme jen jednu možnost, koho poslat přes řeku. A pokud jich máme více, tak se po chvíli vždy ukáže, že to byla slepá cesta. Zároveň můžeme vyloučit případy, kdy bychom prováděli „nulový tah“. Tedy bychom někoho převezli přes řeku a vzápětí bychom stejnou posádku převezli zpátky. Pro větší jednoduchost ještě znázorníme situaci systematicky. Jednotlivé postavy budeme značit písmeny na které začínají (otce písmenem O, syny S atd.).

Loďku může ovládat otec, matka nebo policista. Pokud by přeplul jeden z rodičů s jedním z dětí, tak by na jednom břehu zůstal samotný otec s dcerou nebo matka se synem. Takže rodiče můžou přeplout pouze společně. Při návratu bychom ale řešili podobný problém, takže by se zároveň museli i oba vrátit. Jak asi tušíte, toto přeplutí by nemělo smysl. Jediný kdo zbývá je policista. Ten s sebou musí vzít kriminálníka. Aby přeplutí mělo smysl, tak na druhé straně kriminálníka nechá a vrátí se sám.

M D D O S S P K		
M D D O S S	P K →	
M D D O S S		P K
M D D O S S	← P	K
M D D O S S P		K

Na jednom břehu tak máme opět otce a matku s dětmi a navíc policistu. Pokud bychom chtěli na loďku posadit někoho z rodičů, narazíme na stejný problém jako v předchozím případě. Loďku tedy bude řídit opět policista a s sebou může vzít některé z dětí. Řekněme že převeze dceru. Zpátky s loďkou může jet jen policista a ten s sebou musí vzít kriminálníka

[7] To platí jak na břehu, tak na loďce.

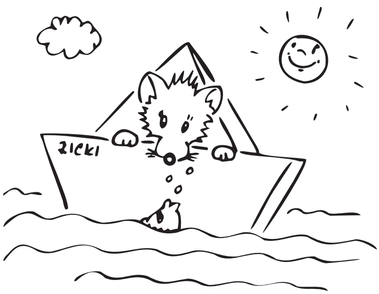
M D O S S	P D →	K
M D O S S		D P K
M D O S S	← P K	D
M D O S S P K		D

Policistu teď necháme vydechnout, protože by s sebou musel vzít kriminálníka a to by pak předchozí cesta byla zbytečná. Na loďku nastoupí tedy jeden z rodičů. Pokud by nastoupili oba, tak by se oba také museli vrátit. Proto na loďku posadíme matku a k ní dceru a společně je necháme přeplavit. Zpátky s loďkou se vrátí jen samotná matka.

O S S P K	M D →	D
O S S P K		M D D
O S S P K	← M	D D
M O S S P K		D D

Kdo popluje teď? Policista a kriminálník opět nepřicházejí v úvahu neboť by se taky museli hned vrátit. Samotná matka je stejný případ. Samotný otec nemůže, takže přeplují spolu oba rodiče. Zpátky se vrátí jen samotný otec.

S S P K	M O →	D D
S S P K		O M D D
S S P K	← O	M D D
O S S P K		M D D



Nyní máme dvě možnosti. Buď se přeplaví otec se synem a nebo policista s kriminálníkem. Zkusme si rozebrat první možnost. Na druhém břehu tak máme otce, matku, obě dcery a syna. Vrátit se tak musí matka s otcem. Nyní máme možnost, že se přeplaví otec se zbylým synem. Ale na druhé straně by byl na jednom břehu otec s dcerami bez matky. To tedy nepůjde. Zbývá tedy možnost, že se přeplaví policista s kriminálníkem. Ti se ale zase budou muset vrátit. Takže jak je vidět, dostali jsme se do slepé uličky. Musíme se tedy vrátit na začátek tohoto odstavce a zvolit druhou možnost a to, že se přeplaví policista s kriminálníkem. Vracet se bude matka. Má s sebou vzít dceru? Pokud by to udělala, tak by se v následujícím kroku musela přeplavit matka s otcem a celá situace by se zablokovala. Proto matka popluje samotná.

O S S	P K →	M D D
O S S		M D D P K
O S S	← M	D D P K
M O S S		D D P K

Teď by se mohli přeplavit otec s matkou. Vrátit se může jen samotný otec nebo policista s kriminálníkem. Druhá varianta nic nepřinese, tak se vrátí samotný otec.

S S	M O →	D D P K
S S		O M D D P K
S S	← O	M D D P K
O S S		M D D P K

Nyní už situace začíná být zřejmá. Otec vezme jednoho ze synů. Vrátit se může jen policista s kriminálníkem. Ovládat loďku teď může jen policista, tak vezme na druhou stranu zbylého syna. Vrátí se sám a odveze kriminálníka. Nerozváděl jsem zde možné případy že se přeplaví společně otec s matkou. Ale jak asi tušíte, tak to povede jen k zablokování celé situace.

S	O S →	M D D P K
S		O S M D D P K
S	← P K	O S M D D
S P K		O S M D D
K	P S →	O S M D D
K		O S S M D D P
K	← P	O S S M D D
P K		O S S M D D
	P K →	O S S M D D
		O S S M D D P K

(R)adim

Řešení témat

Téma 1 – Nejmenší Nevybrané

Řešitelé a řešitelky! Třetí a poslední kolo soutěže *Nejmenší nevybrané* je již za námi a my Vám přinášíme jeho nečekaný výsledek! Tipovaná čísla byla:

$$1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4$$

A nám tedy nezbude, než věnovat hlavní cenu do nadačního fondu pro postižené ekonomickou krizí.

Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa se rozhodl provést simulace průběhu hry pro velký počet hráčů a použil k tomu zajímavou myšlenku – rozdělit hráče do skupin podle rozložení, které tipují, odhadnout velikosti skupin a simulovat velké množství her takové skupiny. Výsledkem je statistika, jak často vyhrávalo které číslo.

Výsledný článek neotiskujeme, ale je velmi zajímavé z něj vyzdvihnout některé hodnoty. Především je to procento her, kdy vyhrálo číslo 1. Tato naměřená četnost je pro 15 hráčů 20%, pro 50 hráčů 14% a pro 1000 hráčů 5,5%. Dále je pak zajímavé, že takřka nikdy nedošlo při simulaci k remíze – i při pouhých 15 hráčích nastala remíza v 0,07% her, při vyšším počtu pak jen ojediněle. Ještě poznamenejme, že vítězné číslo bylo se 75% pravděpodobností nanejvýš 5 pro 15 hráčů, nanejvýš 8 pro 50 hráčů a nanejvýš 25 pro 1000 hráčů.

Ačkoliv je Štěpánova simulace založena na hrubých odhadech počtu lidí v jednotlivých skupinách, dává nám dost dobrý řádový odhad závislosti hry na počtu hráčů.

Na rozloučenou přidáváme ještě krátký článek redakce o tom, jak by to asi dopadlo, kdyby hrála hru velká skupina lidí při každé snídani.

Jak by se chovala populace?

Jak si všimlo mnoho řešitelů, má hra Nejmenší nevybrané při malém počtu hráčů dost divoké a špatně definované vlastnosti. Jak by to ale vypadalo, pokud by hru hrála větší skupina lidí opakovaně velmi dlouhou dobu? Zkusme úvahami dojít k alespoň základním vlastnostem hry, které jste všichni pozorovali.

Předpokládejme, že každý člověk začíná s nějakým (vcelku libovolným) rozložením tipovaných čísel a že své rozložení časem pozvolna mění tak, aby zvýšil svou šanci na úspěch *za současného stavu.*

To, jakou šanci na výhru má jedno konkrétní rozložení, závisí na tom, jaké je aktuální rozložení čísel, která by byla vyhrála. Přesněji řečeno, šance hráče T na výhru je

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot v_i \,,$$

kde p_i je pravděpodobnost, že T zvolí i a q_i je pravděpodobnost, že ve hře bez T nikdo i nezvolil, ale vyhrálo by, kdyby bylo zvoleno. Tady se nám poprvé hodí předpoklad o velkém počtu hráčů. S ním můžeme v této úvaze a definici q_i zanedbat přítomnost či nepřítomnost T ve hře při úvahách o vlastnostech q_i.

Nyní uvažme, jak se změní statistika q_i, když jeden hráč pozmění svou strategii tak, že sníží pravděpodobnost čísla a a zvýší čísla b. Uvěřme na chvíli, že tím pro ostatní hráče sníží q_b a zvýší q_a.[8] Zároveň s tím ale též ovlivní pravděpodobnosti ostatních čísel větších než a nebo b a není jednoduché nahlédnout jak.

Abychom tento problém obešli, uděláme malý krok do neznáma a budeme předpokládat, že rozložení q_i je takřka totožné s rozložením v_i *vyhrávajících čísel*, opět jen za předpokladu mnoha „rozumných rozdělení". S tímto už můžeme odhadnout, že v_i čísel mezi a a b se zmenší, resp. zvětší, pokud $a < b$, resp. $a > b$.

Předchozí úvahy mají několik důsledků. Je zřejmé, že velké výkyvy v průběhu v_i se budou s časem vyrovnávat, jak budou hráči přesouvat své tipy na vyhrávající čísla. To by mohlo vést až k myšlence, že na konci budou mít u všech hráčů všechna čísla stejnou pravděpodobnost. To ale není možné, protože výběr čísel je nekonečně velký.

Je možné odvodit, že v_i bude nerostoucí a dokonce klesající, ale vyžaduje to ještě podrobnější analýzu situace při změně rozložení některého hráče. Souvisí to s faktem, že „vyvážením v_i a v_{i+1}" o něco klesne v_j všech vyšších čísel. Odpovídá tomu například to, že je-li např. $v_i = 0$, kvůli dvěma hráčům, kteří stále volí i, je i vyřazeno a šance čísel větších než $i + 1$ jsou zvýšeny oproti tomu, kdyby třeba oba ti hráči volili náhodně mezi i a $i + 1$.

Poslední důsledek této úvahy je pak ten, že rozložení v_i bude konvergovat k nějakému stabilnímu rozložení závislému na n. To odpovídá intuici a simulacím, které jsem prováděl, ale není to vůbec samozřejmé a bude to možná záviset na rychlosti a „plynulosti" změn strategií jednotlivých hráčů a na jejich počtu.

Rád bych věděl, zda by tytéž závěry platily o rozložení tipů p_i – zda by rozložení hráčů konvergovala k nějakému stabilnímu a zda by toto bylo monotónní (klesající). Pokud takové limitní existuje a je společné pro všechny hráče bez ohledu na jejich počáteční strategii, pak musí nutně být klesající, jinak by se vyplatila změna.

Mockrát díky řešitelům, kteří mi zaslali své postřehy a nápady. Moc se mi líbilo přemýšlet s vámi nad tímhle tématkem.

Tomáš

[8] Toto bohužel není pravda pro malé počty hráčů a speciální skupiny strategií, jak se mnozí z vás přesvědčili, ale odpovídá to u velkého množství „hladkých" rozložení.

Téma 2 – Netradiční teploměry

K tomuto tématku přišly dva obsáhlé články, jejíž zaměření se z části překrývalo. Jeden z těchto článků vyšel ve třetím čísle tohoto ročníku. V tomto čísle, byl také uveden zdánlivý paradox. K popisu závislosti elektrického odporu na teplotě se zpravidla používá vztah

$$R = R_0(1 + \alpha_R \Delta t)\,,$$

kde α_R je teplotní součinitel elektrického odporu, Δt je změna teploty. Pokud si v tabulkách nalezneme konstantu α_R a zkusíme si vypočítat o kolik se změní odpor rezistoru, pokud jej zahřejeme o např. 20 °C a pak zkusíme, co se stane, pokud takto zahřátý rezistor ochladíme o 20 °C, zjistíme, že se odpor zmenšil. Jak jde snadno usoudit, tak je někde chyba, protože jinak bychom stálým ohříváním a ochlazováním mohli dosáhnout toho, že rezistor bude mít třeba i nulový odpor. Zkusme se tedy zamyslet nad tímto problémem.

Jednoduchou úpravou si můžeme vyjádřit teplotní součinitel elektrického odporu

$$\alpha_R = \frac{R_t - R_0}{R_0 \cdot T}\,.$$

Je tedy vidět, že α_R závisí na teplotě. Zdá se tedy, že k řešení našeho problému by mohlo stačit si uvědomit, že ona konstanta, kterou nalezneme v tabulkách, se váže k teplotě. Při této teplotě má rezistor odpor R_0. Ovšem, jak ve svém řešení uvedl Bc.$^{\mathrm{M}}$ Pavel Novotný, tak závislost odporu kovového vodiče na teplotě není lineární. Pavel se odvolával na [1], kde můžete nalézt graf závislosti odporu na teplotě.

Tato připomínka je zcela na místě a navádí nás k hlubšímu zamyšlení na závěr tohoto tématka. Je dobré si uvědomit, že fyzika nám předkládá pouze modely, které více či méně dobře odpovídají experimentům. Stejně jako jste se setkali či setkáte se speciální teorií relativity, která popírá určité představy, které jsou zažity v klasické newtonovské mechanice. Při měření závislosti odporu na teplotě se nelinearita vztahu začne projevovat až pro vysoké teploty. Pro takové teploty měření neprovádíme a proto si vystačíme s tímto jednoduchým vzorcem.

A pokud stále nejste přesvědčeni, tak se můžete podívat na [2]. Zde najdete vysvětlení co je to tzv. Taylorova řada. Jedná se o řadu, do které je možné rozvinout libovolný vztah (tedy i obecný vztah závislosti odporu na teplotě). Při rozvíjení vztahu do Taylorovy řady se vezme určitý bod A (např. 0 °C). Pak můžeme závislost odporu R na teplotě t vyjádřit jako

$$R(T) = R(A) + R'(A)(T - A) + \frac{R''(A)}{2}(T - A)^2 + \frac{R^{(3)}(A)}{3!}(T - A)^3 + \dots\,,$$

kde čárkou značíme derivaci podle t, $''$ značí druhou derivaci a $^{(n)}$ n-tou derivaci podle t. Označme $R(A) = R_0$, $R'(A) = \alpha_R$ a $(T - A) = \Delta t$. Pokud zkoumáme závislost pouze v okolí bodu A, tak obvykle můžeme členy s druhou a vyšší derivací zanedbat. Pak dostaneme nám známý vzorec.

Tak doufám že se vám toto tématko líbilo a něco nového jste se naučili :-)

Literatura

[1] J. Reich, M. Všetička: Encyklopedie fyziky,
http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=242
[2] http://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada

(R)adim

Téma 4 – Divný svět

Rozřešení

Podivný svět pochází z pera australského spisovatele Grega Egana. Popsal jej v románu Incandescence, který do češtiny nebyl přeložen. Svět skrýval hodně věcí, které se daly šikovnými experimenty odhalit. Nejprve se věnujme vyhodnocení experimentů, které jste poslali a postupně odkryjme vše, co se odkrýt dalo.

Co přišlo od vás

Prof.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová v průběhu zaslala vyhodnocení svých experimentů. V jednom z řešení zaslala následující text:

Stáčení roviny kyvu kyvadla způsobuje stáčení celého systému (Jiného světa). Tedy spíše kyvadlo je v klidu (přesněji jeho rovina kyvu) a pod ní se otáčí krychle, která tvoří jiný svět. Je to obdoba Foucaultova kyvadla, jímž lze demonstrovat otáčení Země okolo její osy. Stáčení způsobuje Alčina síla, což je nepravá síla vzniklá otáčením soustavy. (V našem světě se jí říká Coriolisova síla.)

Elipsy uprostřed vzniklých obrazců mají vždy stejné osy, tj. vždy míří v jednom směru. Závisí totiž na otáčení krychle a ta se otáčí stejně, i když kyvadlo má jinou počáteční výchylku.

Bětčin první odstavec je velice zdařilý postřeh, který správně poukazuje na to, že síla závislá na rychlosti je pravděpodobně způsobena tím, že krychle je neinerciální soustava. Kdyby bylo více času na reakce, bylo by určitě zajímavé se této myšlenky chytit a ze směru působení Alčiny (Coriolisovy) síly zjistit jak se přesně krychle otáčí. S elipsami uprostřed obrazců už Bětka pravdu nemá, jak to je doopravdy si můžete přečíst kousek níže.

V dalším příspěvku Bětka poslala velice pěkné podrobné vyhodnocení jak Alčiných pokusů s kuličkou, tak svých pokusů s kyvadlem. Jak Bětka správně uvádí, statistická chyba byla malá. Největší (systematická) chyba byla v odkrokování vzdálenosti – ta byla různá v Alčině a v Bětčině pokusu, mělo tedy smysl experimenty např. průměrovat, i když pokus s kyvadly měl menší statistickou chybu. Bětka ve svém hodnocení bohužel přehlédla směr gravitačního zrychlení popsaný v zadání, takže místo jednoznačné přímky jdoucí nulou získala průběh podobný funkci $|x|$ s chybějící hodnotou v nule. Tento pak prokládala polynomem – parabolou, takže závislost, kterou Bětka předpokládala, neodpovídala příliš skutečnosti. Přesto šlo o jinak velmi zdařilé vyhodnocení.

Nyní, když jsme se seznámili s vašimi posledními výsledky, můžeme se podívat na autorské řešení.

Šikovně experimentujeme

Ve třetím čísle najdete vyhodnocení experimentů Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alči Bušákové. Experiment se svíčkou říká asi jen tolik, že svíčka zhasne – skutečně jsme tento experiment provedli a poslali výsledek do čísla, tím jsme chtěli naznačit, že atmosféra má stejné složení jako na Zemi. Zajímavější byl experiment s padáním kuličky. Hlavní pozorování bylo, že kulička ve směru osy x padá vždy od středu, ve směru osy z směrem do středu a podél osy y nepadá vůbec a že zrychlení podél osy x roste se vzdáleností od středu rychleji. Měření jsme zatížili jak statistickou, tak systematickou chybou – systematická chyba pocházela především z toho, že bylo obtížné odkrokovat v tunelech přesně vzdálenost. Takže Alča nepouštěla kuličku ve vzdálenostech uvedených v tabulce, ale v trochu odlišných. Této chyby se dalo zbavit jen tak, že byste napsali, že odkrokujete vzdálenost nezávisle. Chytřejší způsob měření vzdálenosti od středu, kromě proražení tunelu podél osy, kterým by se prostrčilo pravítko, nás nenapadl. Statistické chyby se s dobrou přesností zrušily průměrováním hodnot z dílčích hodů kuličkou. A co jste tedy mohli usoudit?

Především, pokud spočítáte ze vzorce pro rychlost dopadu kuličky ve vakuu[9]. Zjistíme, že zrychlení roste přibližně úměrně vzdálenosti (ano, toto tvrzení chtělo trochu odvahy, protože systematická chyba mohla způsobit, že to nebylo úplně zřejmé) – podél osy x jako

$$g_x = x\,(1{,}48 \pm 0{,}13) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-2}$$

a podél osy z jako

$$g_z = -z\,(4{,}79 \pm 0{,}37) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Zajímavý je potom jejich poměr

$$\left.\frac{g_x}{g_z}\right|_{x=z} = -3{,}09$$

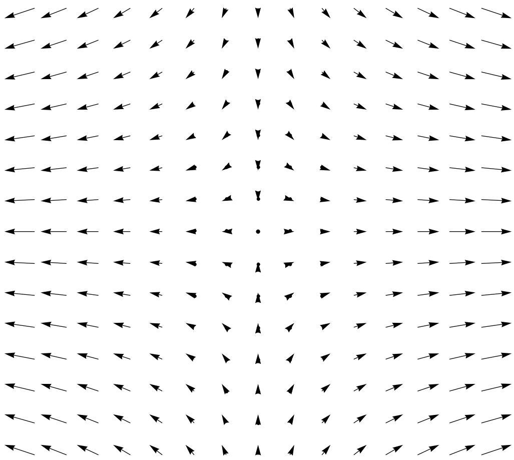
s relativní chybou asi 10%. Kdybyste prošli krajinu a udělali další měření, zjistili byste, že tyto lineárně rostoucí zrychlení se rovněž normálně vektorově sčítají. V souvislosti s tímto musíme napsat, že jsme se v prvním čísle bohužel dopustili chyby v zadání – v prvním čísle je zmínka o dvou „nulových rovinách“ protínajících se v ose y, kde se zrychlení mají vyrušit – ve skutečnosti jsou to roviny, ve kterých je nenulové zrychlení kolmé na střed. Pokud vás tato chyba zmátla, pak se velmi omlouváme. Každopádně poměr dvou narůstajících

[9] Zde jsme vám to trochu ulehčili a experimenty sestavili, jakoby byly provedeny skutečně ve vakuu.

zrychlení udává úhel mezi těmito rovinami. Tohoto faktu se dalo využít k přesnějšímu stanovení poměru velikosti mezi zrychleními. Ať už tímto způsobem, nebo opětovným přeměřením zrychlení (například, jako to udělala Bětka) se dalo přijít na to, že poměr velikosti zrychlení podél os při stejné vzdálenosti od středu je roven s velkou přesností číslu -3. Přesné hodnoty zrychlení potom byly

$$
\begin{aligned}
g_x &= x \cdot 1{,}48 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-2} \equiv 3\alpha x\,,\\
g_y &= 0\,,\\
g_z &= -z \cdot 4{,}92 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-2} \equiv -\alpha z\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme zavedli konstantu $\alpha = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-2}$.



Obr. t4.1 – Zde vidíme směry sil v (kterékoliv) rovině $x - z$. Levopravý směr odpovídá ose x, dolnohorní ose z. S polohou v ose y se zrychlení nemění.

Dalším neopomenutelným faktem je objev Alčiny síly, která se poprvé objevila v experimentu s roztočeným provázkem a kuličkou. Dále se „náhodou" objevila i v Bětčině pokusu s kyvadlem, kde stáčela jeho dráhu, i v Alčině pokusu s pouštěním kuličky, kde byla zmínka, že kulička dopadá trochu bokem. Zjevně šlo o sílu závislou na rychlosti. Z Bětčina experimentu jsme viděli, že netriviálně se stáčelo jenom kyvadlo zavěšené podél osy z a to tak, že při pohybu ve směru osy x působila směrem $-y$ a při pohybu ve směru y působila ve směru $+x$. To způsobovalo neustálé stáčení o konstantní úhel. Pohyb ve směru osy z žádnou sílu nezpůsoboval a tedy při zavěšení podél osy x síla mířila nahoru nebo dolů, což způsobovalo cukání provázkem. Nepatrný pohyb kyvadla nahoru a dolů ve směru osy x způsoboval malé stáčení ve směru osy y, stejně tak se projevila chyba poloze kyvadla (nebylo-li přesně na ose) – to způsobilo zmíněné malé stáčení při tomto zavěšení.[10]

Přímo ze stočení kyvadla bylo poměrně těžké získat velikost Alčiny síly[11], daleko snazší bylo zkoušet házet kuličkami a měřit, o kolik se stočila jejich dráha. Výborným stanovištěm by byla místnost uprostřed krychle, kde byla všechna zrychlení slabá a dala se zanedbat. Takovýmito pokusy byste zjistili hodnoty zrychlení buzených Alčinou silou

$$\begin{aligned} g_x &= v_y \cdot 0{,}14\,\mathrm{s}^{-1} \equiv \beta v_y\,, \\ g_y &= -v_x \cdot 0{,}14\,\mathrm{s}^{-1} \equiv -\beta v_x\,, \\ g_z &= 0\,, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli konstantu $\beta = 0{,}14\,\mathrm{s}^{-1}$.

Středová místnost byla ovšem skvělou laboratoří pro celou sérii dalších možných experimentů. Pokud byste z klidu pustili kuličku vzdálenou od středu ve směru osy z, kmitala by sem a tam v důsledku z-ového dostředného zrychlení. Perioda takového kmitání by byla 89,6 s. Kuličku bylo možno vypustit ještě dalším, jiným způsobem tak, aby její dráha byla periodická. K tomu je potřeba ji hodit přesně ve směru $+x$ tak, aby její počáteční výchylka byla podél osy z. Pak by kulička opisovala v rovině $x - y$ elipsu a přitom by zároveň konala pravidelné kmity podél osy z s periodou 89,6 s – výsledkem by byl pohyb, který se nikdy nezopakuje. Dráha ve tvaru elipsy je způsobena Alčinou silou – pokud bychom si s rychlostmi hráli dost dlouho, najdeme dráhu, kdy se elipsa stane kruhem. (Souřadnici z můžeme zvolit nulovou, aby se nám tyto dva nezávislé pohyby neskládaly.) Pak se Alčina síla rovná síle dostředivé a můžeme snadno spočítat vztah mezi Alčinou silou, rychlostí a poloměrem, získáme tak

$$g_o = \frac{v^2}{r} = \beta v = g_a \Rightarrow \frac{v}{r} = \frac{2\pi r}{rT} = \beta \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\beta} \approx 44{,}8\,\mathrm{s}\,,$$

[10] V článku jsme se rovněž ptali, proč uprostřed Bětčina obrazce vzniká přibližně elipsa a o čem vypovídá ostrost / oblost okrajů obrazců. Odpověď snadno získáte, pokud si uvědomíte, že v místě, kde kyvadlo vypustíte, je v bodě obratu jeho úhlová rychlost nulová a bod obratu tedy musí být ostrý. Jak se kyvadlo stáčí, působí na něj zrychlení podél osy x směrem od středu – nabírá tedy další rychlost kolem středu. Samotné stáčení není produktem rychlosti kuličky kolem středu, ale produktem Alčiny síly, kulička však zároveň může nějakou rychlost kolem středu mít, což se nejlépe pozná právě v bodech obratu. Tuto rychlost nabírá kvůli permanentním zrychlením, které narozdíl od Alčiny síly mohou konat práci. Zajímavé je, že při vypuštění podél osy x kulička rychlost nabírá, okraje jsou tedy zaobleny po směru otáčení a čára sama sebe nekříží, zatímco při vypuštění podél osy y kulička cestou rychlost ztrácí, takže v bodech obratu se pohybuje proti směru stáčení a dráha se sama kříží. Elipsa vzniká podobným mechanismem – zda je to skutečně elipsa se nám nepodařilo dokázat.

[11] Šlo by to jedině snad numerickým modelem s předpokladem, že síla je úměrná velikosti rychlosti.

kde v je rychlost oběhu kuličky, g_o je dostředivé zrychlení, g_a Alčino zrychlení, r poloměr kružnice a T čas oběhu[12]. Tento experiment tedy umožňuje další možnost měření Alčina zrychlení.

Dalším zajímavým nápadem bylo zkoumat rotující tělesa (setrvačníky). Obecně by byl jejich pohyb složitý, ale pokud bychom těleso roztočili podél jeho osy symetrie dostatečně rychle, otočilo by se pod vlivem Alčiny síly kolem dokola jednou za 89,6 s. Rovněž pokud si vezmeme vztah pro periodu kmitu matematického kyvadla nataženého podél osy z a ze vzorce odstraníme závislost na čase

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_z}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\,\sqrt{\frac{l}{z}} = \tau\sqrt{\frac{l}{z}}\,.$$

Konstanta τ má rozměr času a není náhodou, že $\tau = 89{,}6\,\mathrm{s}$. Co tato podivná hodnota znamená?

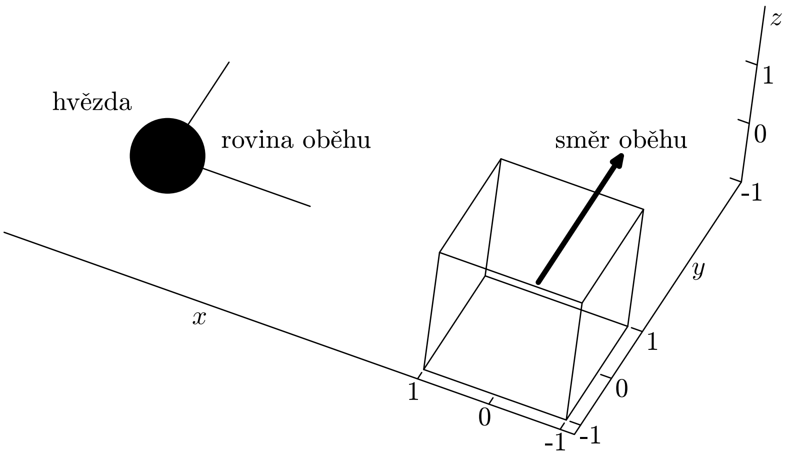
Jak to tedy je?

Nyní jsme popsali poměrně hodně experimentů, které jste provedli, nebo které jste mohli provést. Nyní je potřeba uhodnout, co se za tím vším skrývá. To není jednoduchý úkol, zkusme se však do něj pustit. Prvním vodítkem nám může být, že Alčina síla působí úměrně rychlosti. Pokud zalovíme v paměti (nebo v učebnicích fyziky), zjistíme, že v přírodě se běžně vyskytuje síla závisející na rychlosti. Říká se jí Coriolisova síla. Je to síla charakteristická pro neinerciální vztažné soustavy. Pokud vystřelíte na točícím se kolotoči šíp do jeho středu, šíp letí volně. Během jeho doby letu se však kolotoč pootočí, takže šíp nezasáhne protější bod. Pozorovatel ze soustavy kolotoče si to vysvětlí tak, že na šíp působí síla, která jej strhává proti směru otáčení. Udělejme tedy první předpoklad – krychle je neinerciální soustava, zbývá přijít na to, jak se přesně otáčí.

Druhé vodítko, které můžeme použít je, že se v hodně experimentech, (kterých se ovšem bohužel neprovedlo dost, abyste si toho mohli všimnout), objevuje podezřelá konstanta 89,6 s, udělejme tedy předpoklad číslo dvě – krychle se otáčí s touto periodou. Ale jak? Pokud si představíme model s kolotočem a zahýbajícím šípem, měli bychom usoudit, že se krychle otáčí v rovině os, ve kterých působí Coriolisova síla, tedy kolem osy z, a to v kladném smyslu kolem kladné osy z.

A co zrychlení? Celá pravda je taková, že Divný svět je krychle obíhající po kruhové dráze kolem neutronové hvězdy s hmotností $M = 3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti 34 400 km. „Magický“ čas 89,6 s není přitom nic jiného, než doba oběhu krychle kolem neutronové hvězdy. Za delší dobu se již v systému ustavila

[12] Tady by se mohlo zdát, že čas 44,8 s je podezřelý, že by to mohla být polovina magického času 89,6 s – v tomto případě jde ovšem jen o pozoruhodnou náhodu, jak se později ukáže – odhalit, že taková souvislost neexistuje, by bylo poměrně experimentálně náročné. Oba časy jsou nezávislé parametry a jak se za chvíli ukáže, jeden charakterizuje sílu permanentních zrychlení a druhý sílu Alčina zrychlení.



Obr. t4.2 – Nákres oběhu planety kolem hvězdy.

vázaná rotace (což je rovnovážný stav, do kterého se kolem sebe obíhající tělesa časem dostanou vlivem slapových sil), takže krychle se otočí kolem své osy jednou za otočku kolem dokola. Kladná osa x míří od hvězdy, záporná ke hvězdě (proto je horká).

A jak tedy vznikají zrychlení? Snadno. Pokud stojíte uprostřed krychle, pohybujete se spolu s jejím těžištěm a zůstáváte ve stavu beztíže, jako kosmonaut na oběžné dráze. Pokud odcházíte ve směru osy x, tedy dál od hvězdy, vaše „přirozená“ oběžná dráha už není kruhová a je mírně eliptická. Elipsa a kružnice mají tendenci se pořád více rozcházet (dotýkají se v jednom bodě, časem se ale od sebe vzdalují, než se zase spojí) – to způsobuje sílu od středu. To samé se děje, pokud jdete blíže ke hvězdě. Pokud se pohybujete ve směru osy y, tedy podél oběžné dráhy, nic se neděje, protože pořád zůstáváte zhruba na kruhové dráze. Jakmile ale jdete nad oběžnou dráhu, podél osy z, vaše přirozená dráha zůstává kruhová, jenže už neleží v rovině oběhu krychle. Je tedy proti dráze krychle trochu sklopená – pokud byste po ní volně letěli, chvíli budete nad rovinou oběhu a chvíli pod. Vykonávali byste stejný pohyb, jako kamínek puštěný podél osy z – kmitání s dobou oběhu 89,6 s.[13] Proto síla podél osy z působí do středu.

Trocha matematiky

Pro úplnost spočtěme, jak velká přesně zrychlení budou. My jsme napřed na řešení pustili obecný aparát Lagrangeova formalismu (obohacený o kovariantní derivace), protože pak člověk rychle a bez zbytečných obav z toho, že udělá chybu, získá výsledek. Sám Egan ovšem použil daleko průhlednější řešení[14],

[13] Ne, tento článek skutečně není reklamou na AZ radio 89,6 FM. :-)

[14] `http://gregegan.customer.netspace.net.au/INCANDESCENCE/`

takže jej otiskneme, aby bylo přístupnější i pro ty, kdo ještě příslušné metody neznají.

Začněme tak, že označíme zrychlení *na jednotku vzdálenosti*[15] ve směru jednotlivých os (velkými písmeny) a zapíšeme je jako členy spojené s odstředivou silou a zrychlení na jednotku vzdálenosti způsobené hvězdou (malými písmeny)

$$\begin{aligned} A_x &= a_x + \omega^2 , \\ A_y &= a_y + \omega^2 , \\ A_z &= a_z , \end{aligned}$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení krychle kolem její vlastní osy. Členy ω^2 pocházejí z faktu, že odstředivé zrychlení kruhového pohybu je rovno $\omega^2 r$ a že jde o měrné zrychlení, takže poloměrem je vyděleno. Pokud se posuneme ve směru oběhu, zůstáváme stále na té samé oběžné dráze, takže musí být

$$A_y = 0 \Rightarrow a_y = -\omega^2 .$$

Nyní napíšeme rovnice pro zrychlení

$$\begin{aligned} g_x &= xA_x + 2\omega v_y , \\ g_y &= -2\omega v_x , \\ g_z &= zA_z . \end{aligned}$$

Členy úměrné rychlostem jsou důsledkem Coriolisovy síly, jejich odvození bohužel přesahuje plánovaný rozsah článku, takže vás odkazujeme na příslušnou literaturu. Zbylé členy jsou zrychlení vyjádřené pomocí měrných zrychlení.

Pokud krychle obíhá kolem hvězdy hmoty M na poloměru R, pak spočteme úhlovou rychlost z rovnosti gravitačního a odstředivého zrychlení

$$\omega^2 R = g_{\mathrm{grav}}(R) = \frac{MG}{R^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MG}{R^3}} ,$$

kde G je gravitační konstanta a $g_{grav}(R)$ je gravitační zrychlení. Protože gravitační pole hvězdy je sféricky symetrické, jsou směry z a y zaměnitelné a musí platit

$$a_z = a_y = -\omega^2 = -\frac{MG}{R^3} .$$

Teď využijeme toho, že a_x je měrné zrychlení, které je tedy podílem g_x/x, což lze ovšem chápat také tak, že x je malým úsekem radiální souřadnice R ke hvězdě, $x \to \mathrm{d}R$, a že gravitační zrychlení $g_{grav}(R)$ se v centru krychle přesně kompenzuje s odstředivou silou kruhového pohybu kolem hvězdy, takže nás zajímá jen malý přírůstek tohoto zrychlení $\mathrm{d}g_{grav}(R)$ na vzdálenosti $\mathrm{d}R$

`Orbits/OrbitsDetailed.html`. Zde můžete nalézt i řešení pro relativistický případ.

[15] Tedy dělené příslušnou vzdáleností od středu. Např. $A_x = g_x/x$

od středu. Takže měrné zrychlení je vlastně derivací gravitačního zrychlení v daném bodě

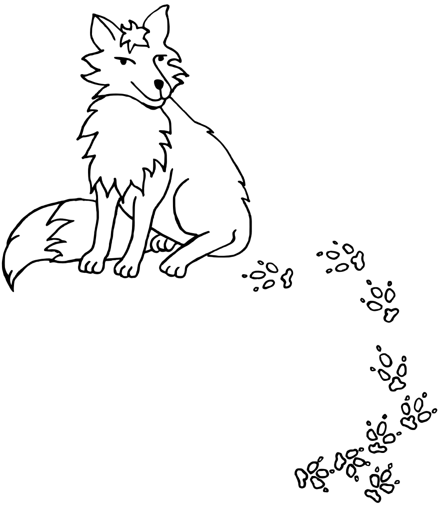
$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(-\frac{MG}{R^2}\right) = \frac{2MG}{R^3}\,, \\ A_x &= a_x + \omega^2 = \frac{3MG}{R^3}\,. \end{aligned}$$

Právě odtud pochází záhadná trojka – poměr mezi velikostmi zrychlení. Teď již snadno napíšeme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{3MG}{R^3}\,x + 2\sqrt{\frac{MG}{R^3}}\,v_y\,, \\ g_y &= -2\sqrt{\frac{MG}{R^3}}\,v_x\,, \\ g_z &= -\frac{MG}{R^3}\,z\,. \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli situaci brát do důsledků, museli bychom započíst i relativistické jevy. (Ty jsme pro jednoduchost vůbec nezohledňovali.) Projevily by se například tím, že poměr zrychlení by se zmenšil z trojky na menší číslo – dá se ukázat, že při poměru rovném dvěma se dráha stává nestabilní a krychle by musela na hvězdu spadnout. Rovněž se dá ukázat, že setrvačníky s vysokou rychlostí otáčení by se nevracely do původní polohy a několik dalších efektů. Na závěr můžeme ještě říci, že v původní knize bylo světlo řešeno tak, že obyvatelé krychle nebyli lidé, nýbrž mimozemšťané, kteří měli vyladěný zrak na terahertzové světelné frekvence a materiál krychle (kamenné tunely) byly postaveny tak, aby byly pro ně skoro průhledné. Nechtěli jsme však situaci komplikovat popisem takových detailů, nebo rozebíráním fiktivní mimozemské anatomie. Pokud máte o ně zájem, budete si muset přečíst knihu :-)

Irigi



Výsledková listina 5. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t3	t4	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy									
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	96	4			1	3		5	1	14	96
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec	4.	86										55
3.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	4.	230						3			3	50
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	4.	78										43
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	68										41
6–7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	2.	83	2							0	2	36
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Štědronský	2.	36	3						7	0	10	36
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Dočekalová	3.	34										34
9.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	2.	153			2					0	2	31
10–11.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	3.	110										27
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	3.	65										27
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karel Kraus	3.	26	2	2	2	2				0	8	26
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	4.	47										22
14–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	4.	47										21
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Hlásek	2.	21	1							0	1	21
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Jurásková	1.	21	1	2		0				1	4	21
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Kochmanová	2.	21	0	2	1					0	3	21
18–19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková	3.	33	2							0	2	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Husek	3.	20										20
20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	2.	59										18
21–23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Bekrová	2.	17										17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Anna Chejnovská	2.	17										17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Miloš	3.	17										17
24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Novotný	3.	15		2						0	2	15
25.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	2.	48										14
26–27.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	2.	56										13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	3.	37										13
28–30.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	4.	65										12
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	4.	37										12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Pokorný	2.	12										12
31–32.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková	3.	16										11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Škoda	2.	11				2				0	2	11
33–34.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	4.	52										9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	23										9
35.	Barbora Šmídová	1.	8										8
36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	4.	34										7
37.	Vojtěch Dziewicki	3.	6										6
38.	Pavel Kratochvíl	1.	5										5

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t3	t4	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
39–41.	Alena Harlenderová	1.	4										4
	Martin Holeček	3.	4							4		4	4
	Tereza Zábojníková	4.	4										4
42.	Libor Plucnar	4.	3										3
43–44.	Barbora Böhmová	1.	2										2
	Lukáš Langer	3.	2	1	1						0	2	2

Výsledková listina 6. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\text{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	108	3		1	6		2	12	108
2–3.	Prof.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	4.	235					5		5	55
	Dr.$^{\text{MM}}$ Josef Tkadlec	4.	86								55
4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	78	3	2	1	0		4	10	51
5–6.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Töpfer	4.	78								43
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Filip Štědronský	2.	43	4		1			2	7	43
7.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alena Bušáková	2.	83		0	0	0		0	0	36
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Dočekalová	3.	34				0			0	34
9.	Doc.$^{\text{MM}}$ Petr Pecha	2.	153								31
10–11.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Klemsa	3.	68		2	1			0	3	30
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Karel Kraus	3.	30		3	1			0	4	30
12.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michaela Kochmanová	2.	28	1	3	1	0		2	7	28
13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo	3.	110								27
14–15.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Eliška Nekvapilová	4.	47								22
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Filip Hlásek	2.	22			1	0		0	1	22
16–18.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Vaňhara	4.	47								21
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Husek	3.	21		0	1	0		0	1	21
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Alena Jurásková	1.	21			0			0	0	21
19.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Honzáková	3.	33								20
20–22.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Koblížek	2.	61		3	1			1	5	18
	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Bartoněk	2.	59								18
	Bc.$^{\text{MM}}$ Anna Chejnovská	2.	18		0	1			0	1	18
23–24.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martina Bekrová	2.	17								17
	Bc.$^{\text{MM}}$ Vojtěch Miloš	3.	17		0	0			0	0	17
25.	Bc.$^{\text{MM}}$ Pavel Novotný	3.	16			1			0	1	16
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Škoda	2.	15	2	0	1			1	4	15
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Zavřel	2.	48								14
28.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Peter Smolárik	3.	37								13
29–31.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	4.	65								12
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jitka Novotná	4.	37								12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Tomáš Pokorný	2.	12			0	0		0	0	12
32.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martina Vaváčková	3.	16								11
33–34.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Prokopová	4.	52								9
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	23								9
35.	Barbora Šmídová	1.	8								8
36–37.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Bílková	4.	34								7
	Barbora Böhmová	1.	7		2	1			2	5	7
38–39.	Vojtěch Dziewicki	3.	6								6
	Karel Král	3.	6	1	3	1			1	6	6

Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**Úlohy** r1	r2	r3	t1	t4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
40.	Pavel Kratochvíl	1.	5								5
41–43.	Alena Harlenderová	1.	4								4
	Martin Holeček	3.	4								4
	Tereza Zábojníková	4.	4								4
44–45.	Lukáš Langer	3.	3			1			0	1	3
	Libor Plucnar	4.	3								3
46.	Kristýna Onderková	3.	2	1	0	1			0	2	2

Výsledková listina XV. ročníku

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	1	2	3	4	5	6	$\sum_{1}$
1.	Doc.$^{\text{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	108	24	7	32	19	14	12	108
2–3.	Prof.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	4.	235	7	18	5	17	3	5	55
	Dr.$^{\text{MM}}$ Josef Tkadlec	4.	86		32	11	12			55
4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	78	21	9		11		10	51
5–6.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Töpfer	4.	78	20		14	9			43
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Filip Štědronský	2.	43	24	2			10	7	43
7.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alena Bušáková	2.	83		10	13	11	2	0	36
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Dočekalová	3.	34	19		15			0	34
9.	Doc.$^{\text{MM}}$ Petr Pecha	2.	153	6	4	12	7	2		31
10–11.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Klemsa	3.	68	6	7	4	10		3	30
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Karel Kraus	3.	30			8	10	8	4	30
12.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michaela Kochmanová	2.	28		0		18	3	7	28
13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo	3.	110		6	11	10			27
14–15.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Eliška Nekvapilová	4.	47	22						22
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Filip Hlásek	2.	22	4	5	5	6	1	1	22
16–18.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Vaňhara	4.	47	7			14			21
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Husek	3.	21	9	7	4			1	21
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Alena Jurásková	1.	21	3	4	5	5	4	0	21
19.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Honzáková	3.	33				18	2		20
20–22.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Koblížek	2.	61	9			4		5	18
	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Bartoněk	2.	59	9	5		4			18
	Bc.$^{\text{MM}}$ Anna Chejnovská	2.	18	4	1	2	10		1	18
23–24.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martina Bekrová	2.	17	1	3	2	11			17
	Bc.$^{\text{MM}}$ Vojtěch Miloš	3.	17	3	5	2	7		0	17
25.	Bc.$^{\text{MM}}$ Pavel Novotný	3.	16	4	2	6	1	2	1	16
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Škoda	2.	15				9	2	4	15
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Zavřel	2.	48	9	5					14
28.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Peter Smolárik	3.	37		4	3	6			13
29–31.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	4.	65	7		5				12
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jitka Novotná	4.	37	7		5				12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Tomáš Pokorný	2.	12			2	10		0	12
32.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martina Vaváčková	3.	16	6			5			11
33–34.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Prokopová	4.	52	9						9
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Tērešková	1.	23	3	1	3	2			9
35.	Barbora Šmídová	1.	8	8						8
36–37.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Bílková	4.	34	5	2					7
	Barbora Böhmová	1.	7	2	0	0	0		5	7
38–39.	Vojtěch Dziewicki	3.	6	6						6
	Karel Král	3.	6						6	6

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo 1	2	3	4	5	6	$\sum_1$
40.	Pavel Kratochvíl	1.	5	3			2			5
41–43.	Alena Harlenderová	1.	4				4			4
	Martin Holeček	3.	4					4		4
	Tereza Zábojníková	4.	4	4						4
44–45.	Lukáš Langer	3.	3					2	1	3
	Libor Plucnar	4.	3	3						3
46.	Kristýna Onderková	3.	2						2	2

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

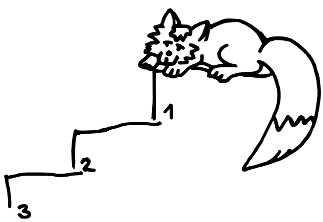
Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.