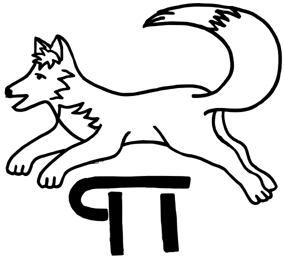
M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XV   číslo 5

Termín odeslání: pondělí, 18. 5. 2009

Milí kamarádi,
opět se vám dostává do rukou nové číslo časopisu M&M. Tentokrát se však vydání čísla trochu protáhlo. V půlce března proběhlo soustředění v Hříběcí a tak jsme měli povinností až nad hlavu.



Jak jste si podle tloušťky možná všimli, můžete se těšit na mnoho zajímavého čtení. Vedle tradičních úloh a tématek vám přinášíme další dva příspěvky z konference M&M z minulého soustředění. Snad se stanou motivací i pro účastníky jarního soustředění a brzy nám přijde mnoho zajímavých příspěvků. Pokud jste nám ještě neposlali příspěvek z podzimního soustředění a rádi byste to udělali, tak máte stále možnost.

Plno slunečných jarních dní nejen nad našim časopisem

organizátoři M&M

Zadání úloh

Úloha 5.1 – Střední doba čekání (3b)

Pokud přicházím na zastávku autobusu a vím, že linka 186 jezdí jednou za sedm minut a linka 210 jednou za 14 minut, jaká je střední doba, kterou budu čekat, pokud mohu jet kterýmkoliv z autobusů?

Jak se tato odhadovaná doba změnila, pokud na zastávce už sedím dvě minuty a právě mi ujela linka 186, protože jsem se zamyslel nad touto úlohou?

Úloha 5.2 – Zaspal (5b)

Kráčam si tak po ulici a odrazu vidím po druhej strane bežať chlapa v montérkach s rebríkom cez rameno. Asi zaspal, pretože uteká rýchlosťou $0,95 \cdot c$ (áno, 95% rýchlosti svetla). Rebrík, ktorý nesie, ako inak, v smere pohybu, je asi bežný rebrík, ktorý má priečky 30 cm od seba. Ako ho ale vidím ja na druhej strane ulice?

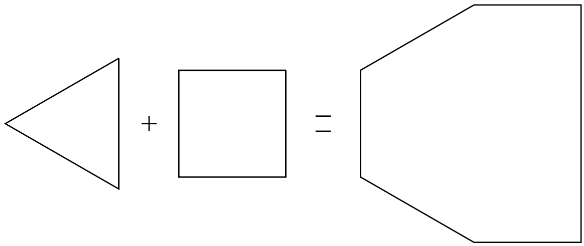
Úloha 5.3 – Minkowského suma (4b)

Mějme vyplněný pravidelný n–úhelník. Jeho vrcholy leží na jednotkové kružnici. Souřadnice vrcholů jsou tedy

$$x_k = \cos\left[\frac{2\cdot k-1}{n}\cdot 180^\circ\right],$$

$$y_k = \sin\left[\frac{2\cdot k-1}{n}\cdot 180^\circ\right].$$

Součtem dvou bodů rozumíme sečtení jejich souřadnic, čili $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$. Minkowského sumou dvou n–úhelníků potom rozumíme množinu všech bodů, které vzniknou jako součet libovolného bodu z prvního n–úhelníku s libovolným bodem z druhého.



Obr. r5.3.1 – Minkowského suma trojúhelníku a čtverce

Zajímalo by nás, jaký obvod a obsah bude mít Minkowského suma pravidelného 3, 4, . . . 42 úhelníku.

Úloha 5.4 – Fosforeskujúca Zem (2b)

Mám v izbe na stene nalepenú (zeleno) fosforeskujúcu Zem. Raz v noci (všade bola tma a už aj táto Zem sa „vybila“) mi napadlo, že ju „nabijem“ poriadne, a tak som zobral červený laser. Akým spôsobom ním mám svietiť, aby som dostal čo najintenzívnejšie svietiacu Zem?

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Sety (3b)

Zadání:

Ve hře Sety je 81 kartiček, na kterých jsou různé symboly. Každá kartička má jiný obrázek. Obrázky se liší ve čtyřech věcech – barva (modrá, červená, žlutá), počet útvarů (jeden až tři), tvar útvarů (čtverce, trojúhelníky, kolečka) a výplní útvarů (prázdné, plné, šrafované). Pokud si vybereme libovolnou kombinaci těchto čtyř vlastností, máme právě jednu kartičku.

Hraje se tak, že se postupně vykládají kartičky lícem vzhůru. Cílem hráče je najít trojici karet, které se v každé vlastnosti buď všechny shodují, nebo všechny navzájem liší. Takovéto trojici říkáme set a když ji někdo najde, vezme si ji k sobě.

Často se stává, že na konci zbude šest karet, které už k sobě nepasují, někdy se stane, že nezbude žádná karta. Zatím se mi ale nestalo, že by zbyly právě tři karty. Je to pravidlo, nebo jen náhoda?

Řešení:

Každou vlastnost si označím číslem od 1 do 3. (Např. barvu: červená 1, zelená 2, modrá 3). 3 karty tvoří set právě tehdy, pokud je součet u každé jejich vlastnosti dělitelný třemi. Buď je totiž vlastnost na všech kartách stejná (např. 3 zelené – $2+2+2=6$), anebo různá (všechny barvy – $1+2+3=6$). Podobně lze ukázat, že pokud mají dvě karty vlastnost stejnou a jedna jinou, součet není dělitelný třemi.

Na začátku je 81 karet, z toho je 27 červených, 27 modrých a 27 zelených. Tj. $1\cdot 27+2\cdot 27+3\cdot 27=162$, což je dělitelné třemi. Toto platí u každé ze čtyř vlastností. Pokud odeberu set, snížím u každé vlastnosti celkový součet o číslo dělitelné třemi, takže mi zbude zase číslo dělitelné třemi.

Pokud by tedy zbyly pouze 3 karty, u každé vlastnosti bude platit, že je jejich součet dělitelný třemi, tedy se v každé vlastnosti buď všechny shodují, nebo navzájem liší a tedy tvoří set. Na druhou stranu, pokud mám šest karet, můžou jejich vlastnosti vypadat např. takhle: barva $[1,2,3,3,3,3]$, tvar $[1,1,2,2,3,3]$ a na dalších už nezáleží, protože tyhle karty už žádný set netvoří, ačkoliv je jejich součet u jednotlivých vlastností dělitelný třemi.

Honza

Úloha 3.2 – Propiska (4b)

Zadání:

Když jednou Riki seděl ve škole a nudil se (zrovna probírali rozklad na parciální zlomky, který už znal), tak si hrál s propiskou. Zapínal ji a vypínal ji, až se mu najednou rozletěla. Našel všechny kousky až na pružinku.

Bylo mu líto propisku vyhodit a tak se rozhodl, že použije jinou pružinku. Doma našel jen n menších, které za sebe naskládal místo té ztracené. Když propisku zkusil zapnout, zjistil, že jde nějak víc ztuha.

Pružinky, které Riki použil místo té ztracené, mají tuhosti k_1, k_2, …, k_n. Jakou mají pružinky výslednou tuhost?

Řešení:

První, co nás napadne (a taky jediné, co se dá skutečně spočítat), je pokusit se nějak složit tuhosti těch jednotlivých pružinek v sérii, jako se to dělá u sčítání odporů nebo kapacit. Jenže jak? Jako u odporů, nebo jako u kapacit? To si budeme muset odvodit…

Někteří z vás si všimli, že je tato úloha vyřešena ve studijních textech FO, konkrétně v tom o kmitání. Sériově spojené pružinky jsou v rovnováze všechny namáhané celým tlakem, který na soustavu působí ve vypnuté propisce. Pružinky na sebe vzájemně působí celkovou silou F_0 podle principu akce-reakce, rozhodně se síla mezi pružinky nedělí (tak by to bylo v paralelním uspořádání).

$$F_0 = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 = \dots$$

kde Δl_i je zkrácení i-té pružinky.

Pokud teď propisku zapneme, zkrátíme celkovou délku pružinek o nějaké x, které se nějak rozdělí mezi jednotlivé pružinky na x_1, x_2, …a nastane nová rovnováha

$$F + F_0 = k_1(\Delta l_1 + x_1) = k_2(\Delta l_1 + x_2)\ldots$$

a Riki tak svým prstem na tlačítku propisky překonává sílu

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = \ldots$$

Pokud si z předchozího vztahu vyjádříme jednotlivá zkrácení pružinek x_i a sečteme je (délku beztrestně sčítat můžeme), dostaneme vztah

$$x = \sum_i x_i = \sum_i \frac{F}{k_i} = F \sum_i \frac{1}{k_i}$$

a už vidíme, že pokud jsou pružinky zapojeny v sérii, sčítají se jejich převrácené hodnoty. K tomuhle výsledku jste došli skoro všichni.

Víme ale, že pak by výsledná tuhost měla být menší než tuhosti jednotlivých pružinek, když jsou použity samy o sobě. Jak je tedy možné, že se Rikimu zdála soustava naopak tužší? Než ho začneme obviňovat, že si vymýšlí, tak se napřed zamyslíme…

Svět není dokonalý, tak se nemůžeme divit, když nám občas s realitou nesouhlasí výpočet, který jsme provedli pro dokonalé pružinky (ty nemáme) ve velmi malých výchylkách (ty už teprv nemáme) a ještě navíc jsme je nesvařili, aby z nich opravdu vznikla jedna pružinka, ale jenom jsme je na sebe položili, takže jejich kontakt je taky dost pochybný, a na tuhosti výsledné soustavy výrazně přidává. A nejdůležitější nakonec: pokud zmáčkneme propisku, tak už samotné tlačítko propisky přestává působit na pružinky a musíme tak její působení nahradit my. Deformujeme tedy z původní délky, ne z délky v zavřené propisce, síla F_0 zmizí, a o to větší musí být F. Tyhle jevy bychom ale těžko kvantifikovali. Je to jako u každé fyzikální úlohy, zanedbávat se holt musí, ale ne vždy to pak funguje.

Poznámka k bodování: za správný výpočet jsem dávala 3 body, za úvahu o nesmyslnosti výpočtu 1 bod. Jediný, kdo tuto úvahu provedl, a správně odůvodnil, byl Doc.MM Laco Bačo, a budiž tedy vyhlášen fyzikem čísla.

Zuzka

Úloha 3.3 – Zatracené jedničky (5b)

Zadání:

Najděte součet čtyřiceti nejmenších prvočíselných dělitelů čísla

$$\underbrace{1111111111\ldots111111}_{10^9\ \textit{jedniček}}.$$

Řešení:

Sečíst nějakých 40 prvočísel, na to nejspíš žádný hezký vzoreček nevymyslíme. Zkusíme na to raději napsat nějaký program. Na druhé straně, žádný počítač nám asi nebude příliš ochotně dělit miliardociferná čísla. Nejdříve si tedy asi budeme muset trochu rozmyslet plán útoku.

Nejdříve si zadané číslo

$$\underbrace{111\ldots11}_{10^9}$$

označíme $č$. Bude se hodit pár prvních prvočísel vyřídit zvlášť, protože desítkový zápis $č$ končí jedničkou, nejsou ani 2 ani 5 dělitelé $č$, a protože ciferný součet $č$ je 10^9, což není dělitelné třemi, není ani $č$ dělitelné třemi. Nadále se budeme zabývat jen prvočísly od sedmičky výše.

Uvažme, jak zapsat $č$ nějak přijatelně matematicky. Všimněme si, že

$$9č = \underbrace{999\ldots99}_{10^9},$$

tedy $9č + 1 = 10^{10^9}$. Nyní zkusme najít nějakou ekvivalentní podmínku pro to, kdy prvočíslo p dělí $č$. Je-li p různé od trojky, pak dělí $č$ právě tehdy, když dělí $9č$, a to je právě tehdy, když $9č + 1$ dává po dělení p zbytek 1.

Zjistit zbytek po dělení čísla a^b číslem p je už výrazně jednodušší úloha než dělení miliardociferných čísel, a to i pro dosti velké hodnoty b. Spočítáme ho například následující rekurencí:

$$a^b \bmod p = \begin{cases} 1 & b = 0, \\ (a^{b/2} \bmod p)^2 \bmod p & b \text{ sudé}, \\ ((a^{b-1} \bmod p) \cdot a) \bmod p & b \text{ liché}. \end{cases}$$

Chceme tedy napsat program, který bude fungovat následovně:

- najdeme prvočísla p od sedmičky výše,
- ověřujme, zda 10^{10^9} má po dělení p zbytek 1,
- prvních 40 takových p sečteme.

Program může vypadat například takhle:

```
#!/usr/bin/python

def mocni(a,b,m):
  if b == 0:
    return 1
  elif b % 2 == 0:
    return (mocni(a,b/2,m)**2) % m
  else:
    return (mocni(a,b-1,m)*a) % m

max = 200000
pocet = 40
jednicek = 10**9
```

```
sito = [0]*max

for i in range(2,max):
  if sito[i]:
    continue
  for j in range (2*i,max,i):
    sito[j] = 1

soucet = 0
nasel = 0
for p in range(7,max):
  if (not sito[p]) and mocni(10,jednicek,p) == 1:
    soucet += p
    nasel += 1
    if nasel == pocet:
      break

print pocet, soucet
```

Program na soudobém domácím počítači vypíše za necelé tři sekundy výsledek 843296.

Xof & Katka

Úloha 3.4 – Problém s promocí (2b)

Zadání:

MatFyzák Eduard se po dlouhých letech dočkal promoce. Protože ví, že se jedná o významnou společenskou událost, vypůjčil si knihu o etiketě. Zde se dozvěděl, že by na promoci měl pozvat: otce, matku, bratra, sestru, syna, dceru, strýce, tetu, bratrance[1] a sestřenici.

Eduard si nebyl jist některými pojmy. Nakonec se na wikipedii dozvěděl následující informace:

- *otec: muž, který vás zplodil spolu s jinou ženou,*
- *matka: žena, která vás zplodila spolu s jiným mužem,*
- *syn: muž, kterého jste zplodil s jinou osobou opačného pohlaví,*
- *dcera: žena, kterou jste zplodil s jinou osobou opačného pohlaví,*
- *bratr: syn vaší matky nebo vašeho otce a zároveň to nejste vy,*
- *sestra: dcera vaší matky nebo vašeho otce a zároveň to nejste vy,*
- *strýc: bratr vaší matky nebo vašeho otce,*
- *teta : sestra vaší matky nebo vašeho otce,*
- *bratranec: syn vaší tety a vašeho strýce.*
- *sestřenice: dcera vaší tety a vašeho strýce.*

[1] Tento tvar slova by mohl být trochu nejasný. Proto dodáváme, že se jedná o jednotné číslo

Eduarda tento problém celkem zaujal. Víte, kolik nejméně lidí by teoreticky mohl Eduard pozvat na promoci, aby pozval všechny rodinné příslušníky zmíněné v knize o etice?

Řešení:
Výsledkem je dost incestní rodina. Máme Eduarda, který chce pozvat otce, matku, bratra, sestru, syna, dceru, strýce, tetu, bratrance, sestřenici. Teď stačí jen podle definic sestavit rodinu o co nejméně členech. Je zřejmé, že Eduard bude muset pozvat minimálně 4 lidi – otce a matku, syna a dceru. Méně lidí opravdu nejde, nemůže mít matku a dceru ve stejné osobě (jsou různé generace) a zároveň nemůže být osoba mužem a ženou zároveň.

Nyní se snažíme přidat co nejméně lidí. Pokud by matka a otec byli sourozenci, tak by zároveň matka byla tetou (sestra otce) a otec zároveň strýcem (bratr matky). Pokud Eduard by měl své děti (syna a dceru) se svou matkou, tak by tyto osoby byly zároveň jeho bratrem a sestrou (syn/dcera mojí matky nebo mého otce a zároveň to nejsem já).

Nyní nám už jen zbývá bratranec a sestřenice. Zde jste se rozdělili na dvě skupiny, někteří si správně přečetli zadání, kde jsou bratranec/sestřenice definováni jako syn/dcera mojí tety a strýce. V tomto případě si rodiče Eduarda ještě pořídí dceru, která bude Eduardovou sestřenicí a Eduard si bude sám sobě bratrancem (to definice nevylučuje).

Druhá skupina lidí brala, že bratranec/sestřenice jsou syn/dcera mojí tety a nebo mého strýce. V tomto případě je sestřenice zároveň Eduardova dcera a bratranec je Eduardův syn (jsou to děti jeho tety/matky).

Suma sumárum pro první případ bylo potřeba 5 lidí, pro druhý případ stačilo Eduardovi pozvat 4 lidi. Nakonec jsem se rozhodla a uznávala obě možnosti, protože původně v zadání mělo být ono „a nebo“, což dávalo větší smysl. :)

Klár(k)a

Řešení témat

Téma 1 – Nejmenší nevybrané

Přinášíme vám další dva články k tomuto tématu. Oba jsou od Dr.^{MM} Josefa Tkadlece.

Jedna nebo moc

Dr.^{MM} Josef Tkadlec

Předpoklady:

Pro zjednodušení budu předpokládat, že se všichni soupeři rozhodují podle nějakého pravidla, toto pravidlo nemění podle mého chování, toto pravidlo je pro všechny stejné a já ho znám (!). Tyto předpoklady jsou velmi neodůvodněné, ale bez nich se nemohu hnout. Ve výpočtech konkrétních pravděpodobností používám zpravidla soubor o 100 hráčích.

Zkusme vypočítat ten nejjednodušší případ:

Dejme tomu, že se každý soupeř rozhodne náhodně rovnoměrně pro některé z čísel 1 až k. V této situaci mám jen dvě možnosti. Pokud je k dost velké, zkusím dát jedničku a spolehnu se na to, že ji nikdo nedá (nemá smysl dávat jiné číslo z intervalu $\langle 1; k\rangle$, neboť jsou všechna rovnocenná - proto dám raději to nejmenší). Pokud je k malé, dám $k+1$ a budu se spoléhat na to, že se všichni ostatní vybijí navzájem. Jaké mám šance?

Dám-li jedničku, vyhraji, pokud každý soupeř dá něco jiného než jedničku. Tomu odpovídá šance $p = ((k-1)/k)^N$, kde N je počet hráčů.

Jaká je šance, že číslo Z dá právě jeden člověk? Je to

$$\binom{N}{1}\frac{1}{k}.\left(\frac{k-1}{k}\right)^{N-1} = \frac{N(k-1)^{N-1}}{k^N}.$$

Nejdřív vyberu jednoho člověka, který dá Z (samozřejmě s odpovídající šancí) a zbylých $N-1$ lidí musí dát něco jiného (ne nutně navzájem různého). S $k+1$-čkou vyhraji, právě když toto nenastane pro žádné Z od 1 do k, tedy s šancí †

$$q = 1 - [N(k-1)^{(N-1)}]/(k^N)^k.$$

Zajímavé je zjistit, kde nastane zlom. Za použití výpočetní techniky dospějeme k výsledkům (pro $N = 100$): $p_{29} \cong 3,0\%$, $q_{29} \cong 3,77\%$, $p_{30} \cong 3,37\%$, $q_{30} \cong 2,45\%$. Do hodnoty $k = 29$ je tedy lepší dát $k+1$ a spolehnout se na to, že se ostatní vyruší, od třicítky dále se oplatí risknout jedničku. Použitím matematického softwaru, jako je např. Derive (ale určitě i Mathematica nebo Maple), můžeme získat zlomové hodnoty k pro různá N.

N	100	80	60	40	20	15
k	29/30	24/25	19/20	14/15	8/9	7/8

Tabulka t1.1: Zlomové hodnoty k pro různá N.

Bylo by určitě zajímavé zjistit závislost k na N, respektive prozkoumat jiná rozdělení pravděpodobnosti než to prachobyčejné rovnoměrné.

Ve svém článku jsem nepřikládal žádnou váhu opakování hry s týmiž lidmi.

Nejmenší nevybrané II.

Dr.^MM Josef Tkadlec

K této hře mám ještě jednu zajímavou připomínku – návrh. Co se stane, řeknu-li otevřeně po vyhlášení hry pro 100 lidí „dám jednadvacítku“? Pokud jsem

† *pozn. red.:* Toto je pouze horní odhad, protože jevy nejsou nezávislé. Například pro $k > N/2$ už by mělo vyjít $q = 0$ (nemožný jev), ale zde dostaneme nenulovou pravděpodobnost. Pro $k \ll N/2$ je vzoreček alespoň přibližný. Dokážete vzoreček a výsledky opravit?

důvěryhodný, nikdo jiný už jednadvacítku nedá, protože na ni nemůže vyhrát – dávám ji určitě i já! † Zároveň všichni vědí, že musí dát něco menšího než 21, protože tu budu dávat určitě sám a tedy pokud se všichni menší vyruší, já vyhraji a větší čísla nemá smysl dávat (zlomyslníky jsme zamítli). Tímto krokem jsem všechny donutil dát některé z čísel 1 – 20. Pokud se mezi tato čísla rozptýlí 99 ostatních hráčů vcelku rovnoměrně (což je jen hrubý model), mohu použít vzoreček z předchozího článku a zjistím, že mé šance na výhru jsou asi 53,1%.

Otevírají se nám tím dveře k nové variantě hry Nejmenší nevybrané, pracovně pojmenované *Nejmenší nevybrané II.*:

Před hrou samotnou proběhne diskuse: Každý hráč smí pronést nějaký závazný výrok (například „dám jednadvacet"). Může také na výroky ostatních hráčů reagovat dalšími výroky, resp. své vlastní výroky odvolávat či měnit‡. V určitý okamžik ale tato diskuse skončí (pokud možno v okamžik, kdy už žádný z hráčů nechce nic pronést) a začne hra samotná. V té je povinností každého hráče dodržet všechny výroky, které vyřkl a neodvolal (jedná se vlastně o simulaci důvěryhodnosti hráčů). Podle těch se musí zachovat. Je tedy záhodno pronášet pouze takové výroky, jejichž splnění je hráč schopen zajistit bez ohledu na to, co udělají ostatní. Nabízí se otázky jako:

- Bude mít možnost diskuse vůbec nějaký vliv na chování/taktiku hráčů?
- Jak bude diskuse probíhat?
- Skončí samovolně?
- Bude záležet na rychlosti? Neboli záleží na tom, zda něco řeknu dřív já, nebo soupeř?
- Vyplatí se některým hráčům uzavírat mezi sebou dohody a koalice?
- Co kdyby každý hráč mohl zpřístupnit své výroky jen některým konkrétním soupeřům (tedy ne nutně všem)?
- atd…

Najděte si vhodná omezení, která vám usnadní situaci. Například:

- Hráči se budou chovat racionálně, tzn., že si snaží zvednout šance na výhru. Proto se například nebudou chovat zlomyslně. Nedají úmyslně to, co někdo jiný, pokud mají byť sebemenší šanci na výhru jinak.
- Hráči jsou krátkozrací. Porovnávají jenom svůj stav před výrokem a po něm. Pokud je jejich stav po výroku lepší, pronesou ho.
- Hráči se nedomlouvají mezi sebou, pouze pronášejí výroky o sobě a svém chování.
- Hráči neuzavírají dohody

† Předpokládejme, že neexistují zlomyslníci a každý chce hlavně sám vyhrát.

‡ *pozn.red.:* Měla by hra smysl, i kdyby nebylo možné výroky odvolávat či měnit?

Téma 3 – Stavebnice

K tématku stavebnice přišel od posledního vydání pouze jeden zajímavý příspěvek. Dr.[MM] Josef Tkadlec se v něm zabývá zaplněností prostoru krabice pro různé typy uspořádání válců.

Hustímeválečky

Dr.[MM] Josef Tkadlec

Zabývám se stavebnicí s válcovými kostičkami. Když bude Riki stavět do krabice na výšku, znamená to, že mám vymyslet, jak nacpat spoustu stejných koleček do malé krabičky. Krabičky budu mít obdélníkové.

Dejme tomu, že Riki jednu krabičku doma našel. Je čtvercová se stranou devět. Válečky mají v průměru 1. Kolik se jich tam Rikimu vejde? Na tomto modelovém příkladě uvedu některé možnosti skládání.

1. možnost

Riki válečky uspořádá do čtvercové sítě rovnoběžné se stranami krabičky. Válečků se takto vejde $9 \cdot 9 = 81$. Určím něco jako „hustotu zaplnění" krabičky. Pokud je krabička dost velká a vlastně i pokud není, mohu ji rozřezat na čtverečky o straně 1. V každém čtverečku o straně 1 je kruh o ploše $\pi \cdot 1^2/4 = \pi/4$ a zbytek je volný, resp. nevyužitý prostor. Řeknu, že hustota zaplnění je $\pi/4 \doteq 78{,}5\%$.

2. možnost

Tentokrát Riki naskládá válečky tak, aby jejich středy tvořily trojúhelníkovou síť. Na délku se do spodní řady vejde 9 válečků, do další 8 (zapadnou trochu do mezer), pak zas 9 atd. Otázka je, kolik bude řad. Snadno spočteme výšku v rovnostranném trojúhelníku o straně 1 jako $\sqrt{3}/2$. Odečteme dvakrát 1/2 za začátek a konec, podělíme $\sqrt{3}/2$ a zjistíme, že

$$\left(9 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) : \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 9{,}23 > 9$$

Vejde se nám 9 mezer mezi řadami a tedy 10 řad. To je 5 skupin po $(9+8) = 17$ válečcích, což dělá $5 \cdot 17 = 85$. Hustotu zaplnění tentokrát spočteme tak, že si představíme, že krabice je opravdu velká a drobné nesrovnalosti u okrajů můžeme zanedbat. Buňka je pak trojúhelník, pro který vychází poměr

$$\left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left[\frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \doteq 90{,}7\%$$

3. možnost

Je ještě třetí zajímavý způsob, jak válečky skládat. Představuji si ho jako dvě čtvercové sítě vnořené do sebe tak, že vrcholy jedné sítě jsou prostředky čtverců z druhé sítě. Po chvilkovém zkoumání postřehneme, že toto není nic jiného, než čtvercová síť, jen pootočená vzhledem ke krabičce o $45°$. Toto uspořádání má tedy také hustotu $\pi/4 = 78,5\%$. Kolik se tam vejdeválečků? Podívejme se na úhlopříčku. Ta je tvořená (u rohů) dvěma úseky o délce $\sqrt{2}/2$ a pak jsou středy od sebe vždy na vzdálenost 1. Je $9\sqrt{2} - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = 8\sqrt{2} \doteq 11,3 > 11$, takže válečků bude 12. To jsou dva čtverce $6 \cdot 6$, což dělá 72 válečků. Ačkoli má toto uskladnění stejnou hustotu, jako to první, dá v tomto případě o dost horší výsledek. To není překvapivé, protože rozměry krabičky jsme optimalizovali na 1. metodu. Ve druhé i ve třetí vzniká u okrajů nevyužité místo.

Dále jsem rozmýšlel nad tím, jak vměstnat zadaný počet válečků do co nejmenší a hezké krabičky. Usoudil jsem, že je chci uspořádat jako v příkladu 2, tedy po řádcích o n, $n-1$, n, $n-1$, … válečcích. Pokud tato řada končí číslem $n-1$, je její součet $(2n-1)a$. Dostanu-li pak číslo jako např. 66, bryskně ho rozložím na $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. a vyberu (aby vyšly zhruba stejné rozměry) $(2n-1) = 11$, $a = b$. Řešením je pak uspořádání 2.

To je relativně snadné, ale není to ideální. V optimálním případě bude mít poslední sloupeček také délku n. Jak ale zjistit rozměry, je potom složitější úloha, kterou se mi nepodařilo uspokojivě vyřešit.

Honza

Téma 5 – Deratizace

Značná část Hammelnských sklepení již sice byla vyčištěna (především ta, která se řídí módními trendy), ale stále ještě zbývá co dělat. Mnoho z vás sice vyčistilo podzemí pod radnicí, ale nezkusili jste jít dál a zkusit nějaké jiné, obecnější.

Navíc, městští radní by pro případ, že se něco podobného stane znovu, chtěli studii, jak nechat krysaře nachodit co nejméně. Tento problém zatím nikdo neřešil.

Dr.[MM] Josef Tkadlec se ve své studii zabýval několika typy sklepení a navrhl postup, jak zjistit potřebný počet krysařů ve sklepení bez cyklů[2].

Čistím, čistíš, čistíme

Dr.[MM] Josef Tkadlec

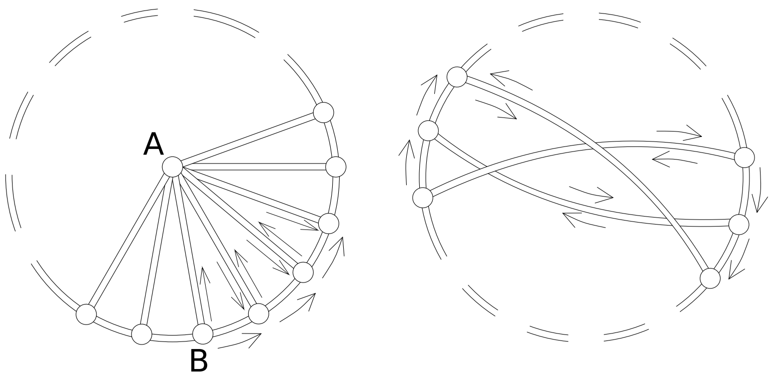
Začnu tím, že si sklepení představím jako graf. Křižovatky, resp. uzly budou vrcholy, chodby budou hrany. Budu se téměř výhradně zabývat grafy, kde mezi žádnými dvěma sousedními vrcholy nevede více než jedna hrana. Rozeberu podrobně několik jednodušších případů.

Kola s loukotěmi a středem

Nezávisle na počtu vrcholů na obvodu ukážu, že mi stačí 4 krysaři. Jeden bude neustále stát veprostřed a bude hlídat, aby tamtudy krysy neutíkaly. Druhý bude stát stále dole a bude tvořit začátek a konec trasy pro zbylé dva, kteří

[2] *Pozn. red.: Řečí diskrétní matematiky - nalézt systém ohodnocování stromů.*

projdou kolem dokola. Na každém uzlu se zastaví a jeden z nich překontroluje chodbu směrem doprostřed. Kolikrát toto udělají je lhostejno, pročež může být kolo jakkoliv husté. Proces čištění končí v okamžiku, kdy celé kolo obejdou a zkontrolují i chodbu spodek – střed.



Obr. t5.1 – Kolo s loukotěmi a středem. Obr. t5.2 – Kolo se spojnicemi napříč

Kola se spojnicemi napříč

Ukážu, že vždy stačí 5 krysařů. Dva si stoupnou do protějších vrcholů (a překontrolují si svou spojnici). Každý z nich má u sebe ještě druhého krysaře a na TEĎ je pošlou chodbou po směru hodinových ručiček. Tito dva pohybliví krysaři dorazí do dalšího uzlu. Zde nastupuje onen pátý krysař a zkontroluje chodbu mezi nimi. Pak se naši dva posunou o uzel dále atd.

Úplné grafy

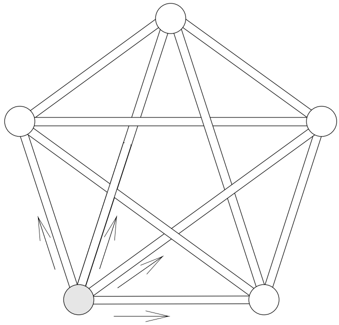
Tady už neznám řešení nezávislé na počtu vrcholů, ale zjevně vždy postačujících $|V|+1$[3] krysařů (každý si stoupne do jednoho vrcholu a poslední obíhá všechny chodby) umím zredukovat alespoň o jednoho. $|V|-1$ krysařů se z jednoho předem určeného vrcholu rozprchne do všech ostatních. Tím je první vrchol čistý a stejně tak všechny chodby do něj vedoucí. Poslední krysař pak obíhá zbytek.

Bipartitní grafy

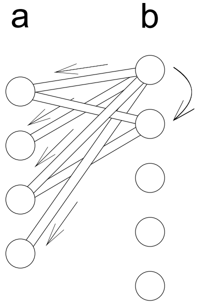
Bipartitní graf[4] je tvořen dvěma částmi. Nechť ty sestávají z a, b vrcholů. Ukážu, že stačí $\min(a,b)+2$ krysařů. BÚNO $A \leq b$. a krysařů použiji na

[3] *Pozn. red.: Jako V označujeme množinu vrcholů, takže $|V|$ je jejich počet.*

[4] *Pozn. red.: Vrcholy bipartitních grafů se dají rozdělit do dvou skupin tak, že uvnitř skupin nevedou žádné hrany. Úplné bipartitní grafy jsou pak bipartitní grafy, ve kterých je každý vrchol z jedné skupiny spojen se všemi vrcholy z druhé skupiny.*



Obr. t5.3 – Příklad úplného grafu.



Obr. t5.4 – Příklad bipartitního grafu.

obsazení celé jedné části grafu. $(a+1)$-tý krysař si stoupne do jednoho vrcholu druhé části a $(a+2)$-tý obíhá všechny hrany z tohoto vrcholu. Pak se $(a+1)$-tý krysař posune dále atd. Nebohé krysy se nemohou dostat do vrcholů, kde $(a+ +1)$-tý už byl, protože všechny cesty tam vedou přes hlídané vrcholy v první části.[5]

Dále autor pokračuje popisem ohodnocování stromů. Stejný algoritmus vymyslel také Mgr.MM Jan Vaňhara. Uveřejňujeme část jeho článku, ve které se tímto problémem zabývá.[6]

Mýtíme stromy

Mgr.MM Jan Vaňhara

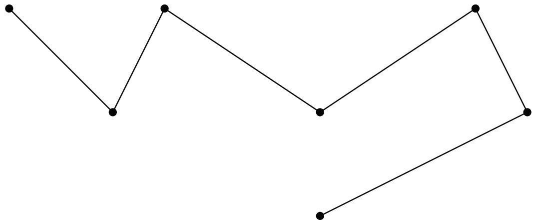
Mapy podzemních chodeb v Hammelnu jsou v podstatě grafy. A ty se dělí do dvou skupin: na stromové grafy a cyklické grafy. Já jsem si vybral k řešení hammelnského problému právě stromové grafy. Mějme tedy graf A (t5.5). Na takový strom nám bude bohatě stačit jeden krysař, který začne na jednom konci a skončí na druhém.

Co když ale máme horší sklep (t5.6). Zde už si jeden krysař neporadí, ale už dva jej hravě zvládnou (jeden vymítá, druhý stojí vždy na křižovatce a hlídá již vyčištěné chodby před zamořením). Toto si sami můžete vyzkoušet. Jeden krysař bude stát vždy na křižovatce a druhý bude pěkně vymítat.

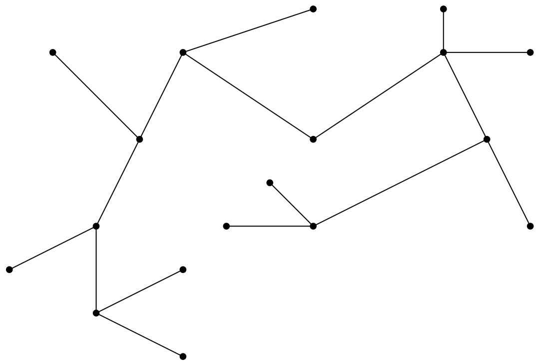
Jenže co když je sklep o jednu větev bohatší (t5.7). Zde už to jenom dva krysaři nevyřeší, protože kdyby stačili, tak jeden brání krysám zamořit místo

[5] *Pozn. red.: Toto řešení je sice funkční, ale nikoliv optimální. Optimální řešení je to pouze pro úplné bipartitní grafy. Zkusíte ho někdo optimalizovat a vyrobit řešení i pro obecné bipartitní grafy?*

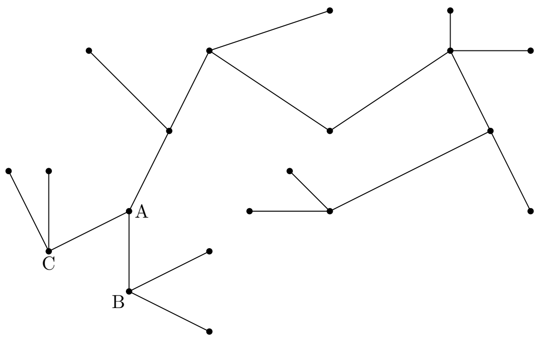
[6] *Pozn. red.: Mgr.MM Jan Vaňhara také vymyslel způsob pro spočítání počtu krysařů pro obecné grafy s cykly. Tuto část prozatím neuveřejňujeme a necháváme ostatním k přemýšlení.*



Obr. t5.5 – Graf A.



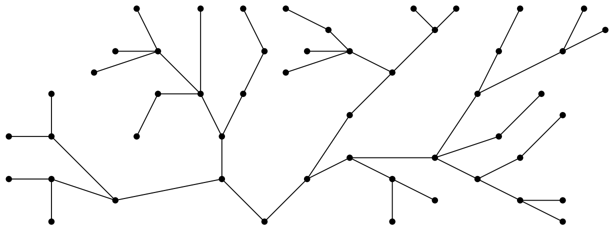
Obr. t5.6 – Horší sklep, kde je potřeba více, než jeden krysař.



Obr. t5.7 – Sklep bohatší o jednu větev.

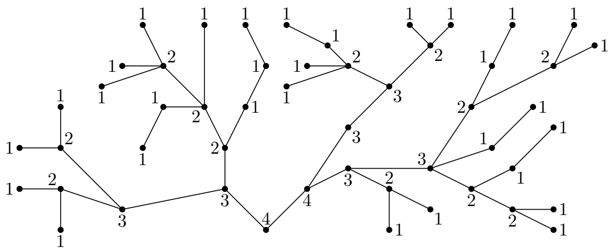
z bodu A a druhý by měl problém samotný vymýtit chodbu B či C. A tak musí přibrat ještě třetího, který bude právě bránit krysám v bodě B a později v bodě C, zatímco třetí bude pěkně vymýtat.

No ale teď nějaký opravdu hodně obecný graf (t5.8). Jak tento graf spočítat? Já jsem na to vyvinul takovouto metodu. Vždy stačí mít jednoho čistícího krysaře a zbytek hlídacích. Takže jakoby se ten jeden hlídací postaví na každý list stromu. A zbytek bránících krysařů bude stát na křižovatkách. A celkový počet všech krysařů dostanu tak, že půjdu z listů postupně po grafu a na každý vrchol buď opíšu číslo z předchozího vrcholu (pokud do vrcholu jde jen jedna větev), nebo se rozhodnu pro větší číslo (pokud mi do vrcholu jde víc než 2 větve, z nichž z aspoň dvou mi přichází nějaké číslo) a zároveň pokud mi přichází z aspoň dvou větví stejné nejvyšší číslo, tak přičtu 1 (to je kvůli tomu, že v jedné větvi mi stačí méně krysařů, a tak jeden může zůstat strážit…



Obr. t5.8 – Hodně obecný graf.

Ovšem pokud je jich potřeba v obou stejně, tak musí někdo hlídat křižovatku a zároveň se snažíme mít v každé větvi nejnutnější počet krysařů). A tak se postupně dostanu až k pseudokořenu grafu (za kořen grafu může být teoreticky prohlášen každý vrchol grafu), kde se mi potká několik čísel a z nichž si vyberu to vyšší. Pokud budou obě stejně vysoká a do pseudokořene mi půjde víc než 2 větve, tak přičtu 1, aby i u kořene byl hlídač. A takto nebudu potřebovat skutečně ani o krysaře navíc, protože se snažím v každé větvi jich použít co nejméně. Pro příklad viz (t5.9). Na ten nám budou bohatě stačit 4 krysaři a ani o jednoho více (zde si můžeme vyzkoušet, že kořen grafu můžeme zvolit kdekoliv, protože ať jej zvolíme v kterékoliv větvi, tak vždy nám z konkurence 2 zbylých větví vyjde počet čtyř krysařů, který už se v té třetí větvi nezvýší).



Obr. t5.9 – Příklad grafu, kde jsou potřeba 4 krysaři.

Podle instrukcí, které jsem výše napsal by se dal napsat právě rekurzivní program, který by v takovémto stromu našel nejnižší možný počet krysařů. V prvním kroku by zvolil náhodně pseudokořen. Potom by zavolal velikost větví, které do daného vrcholu vedou (takže sama sebe spočíst o úroveň vyšší větve), až by se dostal k listům, kterým by dával velikost 1. A pak už to jen spočetl právě podle výše uvedených pravidel.

Honza

Konference Mlýn 2008

Přinášíme vám další várku zpracovaných konferenčních příspěvků ze soustředění M&M Mlýn 2008. Tentokrát nám do redakce došly dva příspěvky. V jednom se trojice autorů zabývá kreslením fraktálů pomocí jimi napsaných programů v programovacím jazyce Python. V druhém se můžete těšit na popis, jak dvojice autorů vytvářela mapu okolí.

Fraktály

Dr.[MM] Alena Bušáková, Bc.[MM] Filip Hlásek, Mgr.[MM] Jitka Novotná

Co je to fraktál?

Není to nic nám neznámého, čeho bychom se měli děsit – fraktály jsou všude okolo nás, v přírodě například vločky sněhu, větve stromů, kapradiny.

Nejjednodušší definice fraktálu zní „je to nekonečně členitý útvar“. Jeho opakem je tedy jakýkoliv hladký eukleidovský geometrický útvar. Fraktál je geo-metrický útvar, jehož každá část je podobná jeho jiné, menší části. Tato vlastnost se nazývá *soběpodobnost*, nebo také invariance vůči změně měřítka. Znamená to, že když objekt libovolně zvětšíme nebo zmenšíme, vypadá pořád stejně.

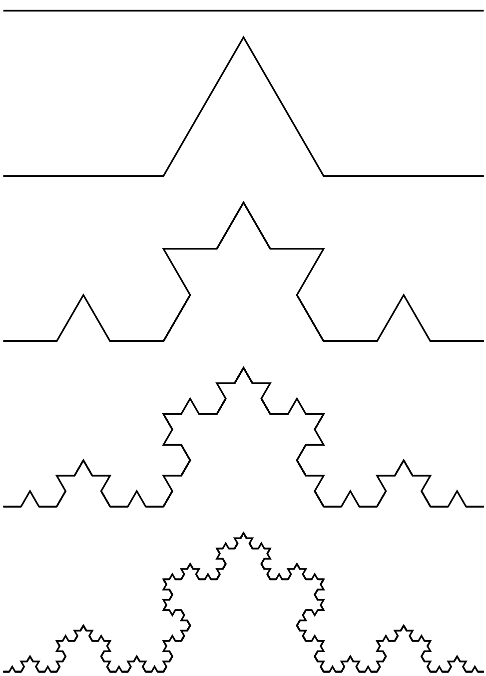
Matematicky definováno: Soběpodobná množina A n-dimenzionálního eukleidovského prostoru je taková množina, pro niž existuje konečně mnoho kontrahujících zobrazení $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ takových, že A vznikne jako:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A)$$

Zabýváme-li se fraktálem jako „pěkným obrázkem“ – jeho estetickými, nikoliv matematickými vlastnostmi (znalost matematiky jsme využívali k tomu, aby nám program vykreslil, co jsme potřebovali), můžeme ho brát jen jako neustále se opakující motiv nějakého obrázku. Vypadá to pěkně.

Obr. kI-3.1 – Cantorova množina.

Nějakými klasickými příklady fraktálů, jimiž se zabývali slavní matematici, jsou např. *Cantorova množina* (kI-3.1), která vznikne tak, že máme úsečku, kterou rozdělíme na třetiny a prostřední z množiny vyjmeme. Totéž uděláme



Obr. kI-3.2 – Kochova vločka.

s následujícími dvěma úsečkami a tak dále. Je jednoduchá, ale má význam např. v grafice. Také je příčným řezem nespojité Juliovy množiny, kterou se budeme zabývat dále. Dalším jednoduchým fraktálem je *Kochova vločka* (kI-3.2).

Je vidět, jak fraktál postupně vzniká. Tato křivka neobsahuje žádné úsečky (po nekonečně mnoha krocích), nemá tedy derivaci v žádném bodě.

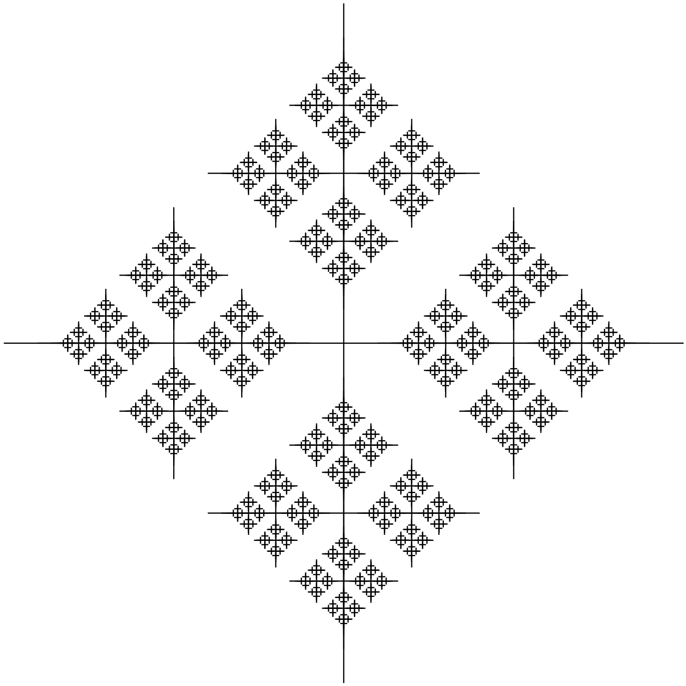
To by bylo k Fraktálům obecně. Jak jsme je programovali? Nechali jsme program (napsaný v Python-u) dělat přesně to, co vidíte na obrázku Kochovy křivky – postupně vykreslovat fraktál do podrobnějších detailů pomocí rekurzivního programování. Samozřejmě náš program nemůže dělat fraktál donekonečna, pro větší počet kroků si už počítal pár minut a víc jsme ho netrápili, protože s přidáním počtu kroků o 1 se o 1 zvýší mocnina času a složitosti počítání. Pro *Sierpinského koberec* jsme např. došli k počtu kroků 7 a pro *Mandelbrotovu množinu* ke dvaceti. (O těchto množinách víc dále.)

Příkladem takového programu budiž třeba:

```
import Image

im = Image.new("P",(1024,1024))
d = 512
x = 512
y = 512
barva = 255
```

```
def fce(x,y,d,barva,svisle):
  if d <= 1:
    return
  for i in range(-d+1,d):
    print x,y,i,d
    if svisle:
      im.putpixel((x,y+i),barva)
    if (svisle % 2) == 0:
      im.putpixel((x+i,y),barva)
  pulka = d/2
  cast = d*2/5
  barva = barva-35
  fce(x+pulka,y,cast,barva,1)
  fce(x-pulka,y,cast,barva,1)
  fce(x,y+pulka,cast,barva,0)
  fce(x,y-pulka,cast,barva,0)

  fce(x,y,d,barva,2)

  im.save("muj_prvni_obrazek.png")
```

který vykreslí toto:



Obr. kI-3.3 – Výstup programu.

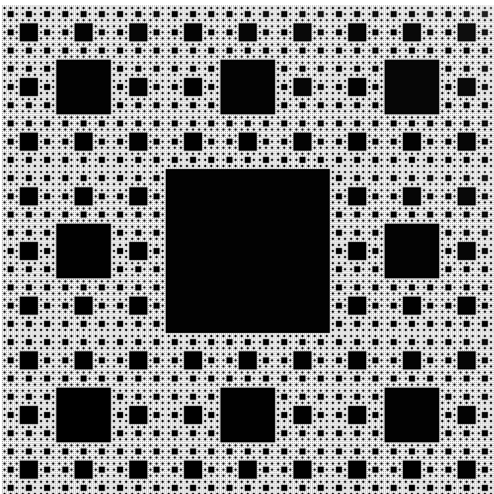
Co program dělá? Nejprve importujeme knihovnu Image, aby Python mohl zpracovávat výstup do obrázku. Nadefinujeme barevné rozložení a velikost obrázku, nastavíme základní hodnoty proměnných x, y a d – tedy x-ovou a y-ovou souřadnici bodu, který vykreslujeme, a d neboli počet bodů, které takto postupně vykreslíme. Pak mu řekneme, aby ty body postupně vykresloval a kolikrát to má rekurzivně udělat. Navíc proměnná „barva“ má na svědomí různou intenzitu odstínů šedé v jednotlivých krocích. Nakonec ho necháme zobrazit výstup. Víc se asi zdrojovými kódy zabývat nebudu. Jen dodám, že jdou dělat i věci jako definování RGB barev, např. postupné zbarvování do modra v dalších krocích. To ovšem nebude v černobílém časopise moc dobře vidět. ;-)

Trochu složitějším fraktálem je tzv. *Sierpinského koberec.* Program pracuje na stejném principu, po bodech vykresluje pod sebe stejně dlouhé úsečky, čímž vznikají čtverce (kI-3.3). Zde je výsledek:

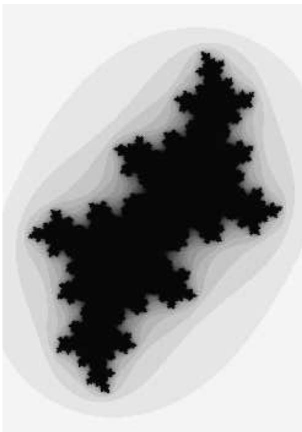
Tím se tedy při našem konferování zabývala Alča. Jitka se zabývala *Juliovou množinou.* Juliova množina J je definována jako:

$$J = \{z_o \in C| \lim_{n \to m} z_n \neq \infty\}$$

Znamená to, že každému bodu roviny je přiřazeno komplexní číslo z_o stejné jako v Gaussově rovině. Pro něj se spočítá posloupnost, a když jde k nekonečnu, víme o něm, že do množiny nepatří. Posloupnost diverguje do čísla, jehož absolutní hodnota je menší než dva. Když posloupnost překročí tuto hranici, nediverguje, a tudíž bod není součástí Juliovy množiny. Aby fraktál vypadal hezky, může se měnit barva bodu podle toho, kdy opustil Juliovu množinu. Příklad Juliovy množiny, kterou jsme vygenerovali, (kI-3.4)- je upravený černobíle.



Obr. kI-3.4 – Sierpinského koberec.



Obr. kI-3.5 – Juliova množina.

Další a poslední množinou, kterou jsme se zabývali, je *Mandelbrotova množina.* Nejprve něco k její historii. Přestože se tato množina jmenuje podle Mandelbrota, tak se jí jako první zabýval již v roce 1905 jiný francouzský matematik Pierre Fatou. Ten ji ale nikdy na vlastní oči nespatřil. Studoval ji pouze teoreticky a prvním, kdo tuto množinu nechal vykreslit na počítači, byl Benot Mandelbrot. Tento Francouz také popularizoval v roce 1975 pojem *fraktál* ve své knize. To byla špetka historie, ale co to vlastě Mandelbrotova množina je?

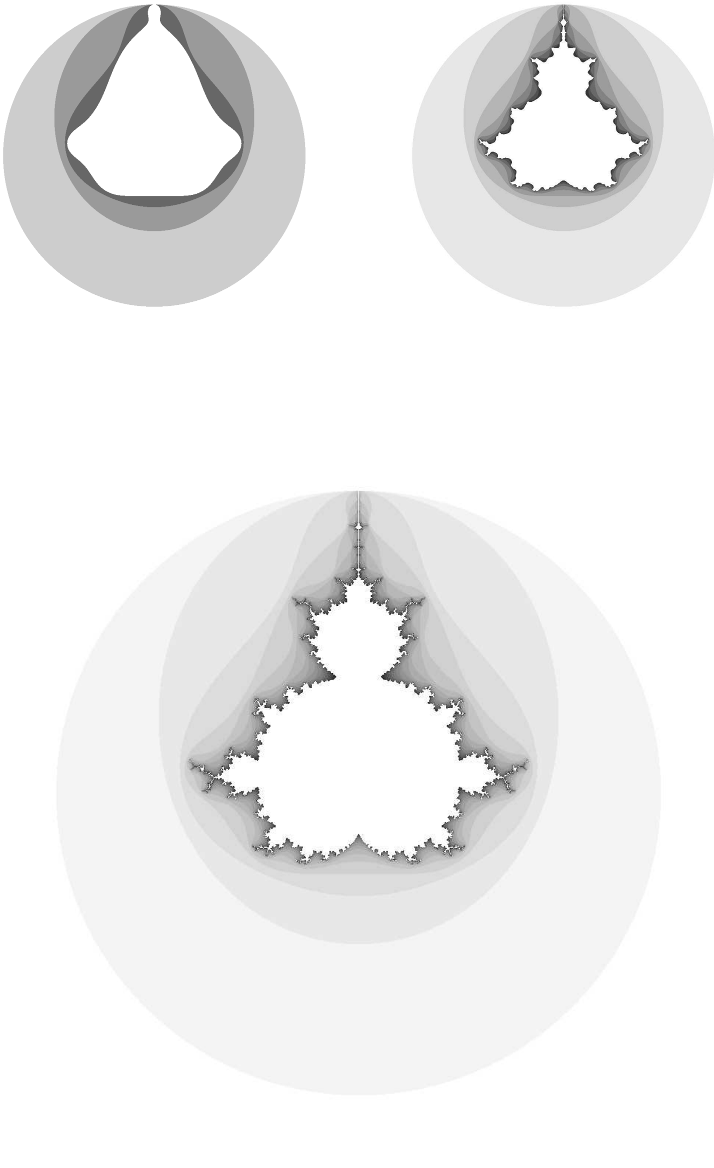
Mějme množinou komplexních čísel c. Dále je třeba zadefinovat posloupnost komplexních čísel z

$$z_{n+1} = z_n^2 + c;\ z_0 = 0\,.$$

Mandelbrotova množina je množina takových c, pro která tato posloupnost nekonverguje k nekonečnu. To, že by konvergovala k nekonečnu si lze představit, že pokud n poroste stále více, tak i z se bude neustále zvětšovat, dokud nepřekročí nějakou hranici, o které jistě víme, že z ní není návratu, a bude se zvětšovat do nekonečna. Při bližším pohledu na definici je zřejmé, že pokud $|z|$ překročí 2, tak už není šance, že by se pro nějaké další číslo posloupnosti snížilo. Posloupnost tedy bude konvergovat k nekonečnu. Pokud tedy bude $|c| > 2$, tak hned pro $|z_1| = |c| > 2$. Mandelbrotova množina zakreslená v Gaussově rovině (na ose x je reálná část a na y je imaginární část komplexního čísla) bude tedy ohraničena kružnicí o poloměru 2. Nic kolem této kružnice nemůže být součástí množiny. Z tohoto poznatku jsme také vycházeli při psaní programu, který by Mandelbrotovu množinu generoval.

V programu, který bude vykreslovat Mandelbrotovu množinu v Gaussově rovině, jsme nejprve museli zadefinovat rozlišení jako výšku a šířku pomocí počtu bodů v daném rozměru. Pro každý bod c budeme podle definice zkoumat, zda je součástí množiny nebo není. Předem musí být dán ještě počet iterací. To je v podstatě nejvyšší n, pro které se bude zkoumat hodnota z_n členu posloupnosti. Nyní už by mělo být jasné, jak bude vykreslování probíhat. Vezmeme každý bod c Gaussovy roviny v zadaném rozmezí a zkoumáme pro něj, zda bude členem množiny. Provedeme zadaný počet iterací a při každé iteraci spočteme další člen posloupnosti jako $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Pokud po provedení všech iterací bude z menší než 2, tak zkoumaný bod c můžeme označit jako součást Mandelbrotovy množiny (ale není jisté, že její součástí opravdu je). Pokud již někde dříve hodnota z překročí 2, tak je již jasné, že c není součástí množiny. Zvýšením počtu iterací se tedy naleznou nějaké body, které při předchozí iteraci byly označeny jako součást množiny, ale nyní již víme, že její součástí jistě nebudou. Zvyšováním počtu iterací se tak Mandelbrotova množina neustále zpřesňuje. Při první iteraci je znázorněna jako kružnice o poloměru 2. Počítání pozdějších iterací je postupně stále náročnější.

Ty části obrázků Mandelbrotovy množiny, které všichni nejvíc obdivují, jsou okraje a části, kde se mění mnoho různých barev. Je na tom však překvapující, že tyto části vlastně vůbec součástí množiny nejsou. Jenom se při několika iteracích stále nevědělo, zda to bude součástí nebo ne, a až později se tyto body vyloučí. Podle iterace, ve které se daný bod vyloučil, se také určí odstín vykreslovaného bodu a obrázek je hotov. Přikládáme také obrázky, které jsme touto metodou vykreslovali, je zde vidět postupné přibližování ke kýženému tvaru.



Obr. kI-3.6 – Mandelbrotova množina.

Stůj, než tě zaměřím!

Mgr.[MM] Zuzana Dočekalová, Dr.[MM] Jakub Töpfer

Abstrakt

Jednalo se o outdoorovou konferu, ve které bylo naším úkolem najít, jak měřit vzdálenosti a úhly mezi zvolenými body v terénu. S využitím vlastnoručně zkonstruovaného dalekohledu, pravítka, tyčky a buzoly jsme pak vytvořili mapu okolí našeho objektu.

Protože tato konfera byla zadána poměrně široce a my jsme si z ní měli vybrat jen jednu určitou část, nejtěžší věc asi bylo dohodnout se na tom, co vlastně budeme měřit a jak. Nakonec jsme se rozhodli vytvořit mapu okolí našeho objektu, která bude zobrazovat vzdálenosti a úhly mezi jednotlivými měřenými objekty. Nezabývali jsme se tedy měřením výškových rozdílů ani velikostí měřených objektů. Pro tyto účely jsme použili tři způsoby měření: dalekohledem, pravítkem a obyčejné změření vzdálenosti svinovacím metrem.

Teorie

Pro měření vzdáleností jsme používali různé prostředky. Všechny vzdálenosti jsme změřili pomocí dalekohledu a tyčky známé velikosti, většinu i pomocí pravítka a té samé tyčky. Na začátek jsme jednu vzdálenost změřili i pomocí svinovacího metru.

Dalekohled

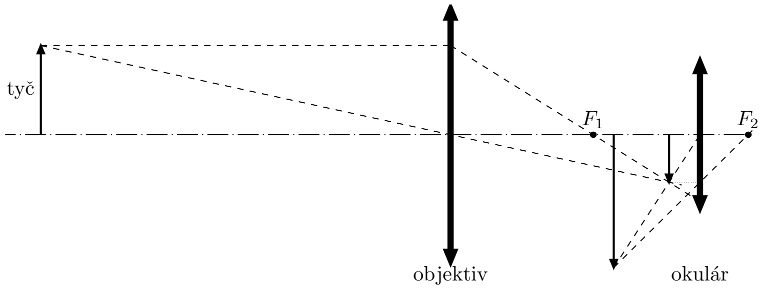
Při tomto měření jsme si vyrobili dobře viditelnou tyčku délky přesně jeden metr a měřili jsme, pod jakým úhlem ji vidíme. Z velikosti úhlu pak už nebylo obtížné spočítat vzdálenost.

Po mnoha pokusech jsme se nakonec rozhodli sestavit pro měření Keplerův dalekohled. Ten sice stranově převrací, ale to nám nevadilo. Oproti Keplerovu dalekohledu jsme ale nezaostřovali do nekonečna, nýbrž na tyčku. To znamená, že vzdálenost čoček byla menší, než součet jejich ohniskových vzdáleností. V místě, kam se zobrazil předmět přes objektiv, jsme měli umístěnou stupnicí s dílky po 0,1623 mm. Tedy jsme dalekohled zaměřovali tak, aby stupnice a tyčka byly rovnoběžně vedle sebe. Okulár pak jako lupa stupnici i obraz tyčky zvětšoval, takže bylo možné odečíst, kolik dílků odpovídá délce tyčky. Pro výpočty to znamená že nás zajímala pouze ohnisková vzdálenost objektivu, měřili jsme délku tyčky po zobrazení objektivem.

Označme délku tyčky h a její vzdálenost od čočky a. Dále pak velikost jejího obrazu h' a vzdálenost od okuláru a'. Nakonec ještě ohniskovou vzdálenost objektivu f. Pak platí vztahy

$$\frac{h}{h'} = \frac{f}{a' - f}\,,$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,.$$



Obr. kI-4.1 – Geometrická konstrukce optické soustavy.

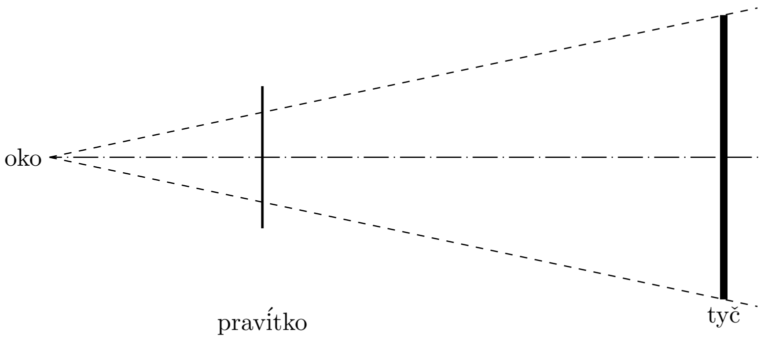
Druhý vztah je zobrazovací rovnice pro čočku. První snadno odvodíme z podobných trojúhelníků tvořených optickou osou, zobrazením rovnoběžného paprsku, obrazem předmětu a čočkou. Z těchto vztahů pak jednoduchou úpravou dostáváme

$$a = f \cdot \left(1 + \frac{h}{h'}\right) .$$

Známe $h = 1\,\mathrm{m}$ a $f = 15\,\mathrm{cm}$. Pokud tedy změříme h', můžeme hledanou vzdálenost a dopočítat.

Pravítko

Měření pravítkem fungovalo na stejném principu jako měření dalekohledem. Opět jsme zjišťovali, pod jakým úhlem vidíme tyčku a opět jsme na tom měřili, jak velkou ji vidíme. Tentokrát jsme na to ale použili mnohem jednodušší postup. Umístili jsme pravítko kolmo do určité vzdálenosti od oka a odečetli na stupnici délku tyčky.



Obr. kI-4.2 – Měření pomocí pravítka.

Pokud označíme délku tyčky h, naměřenou hodnotu h' a vzdálenost pravítka od oka d', tak pak pro vzdálenost d od oka k tyčce podle podobných trojúhelníků platí

$$d = d' \cdot \frac{h}{h'} .$$

V našem případě bylo $d' = 32\,\mathrm{cm}$ a $h = 1\,\mathrm{m}$.

Svinovací metr

Myšlenkově asi nejméně náročné měření. Předpokládám, že si ho každý dovede představit. Tento způsob jsme použili pouze při prvním měření, abychom vyzkoušeli, zda měření dalekohledem a pravítkem dávají přibližně správné výsledky. Odhadnout chybu měření je totiž v tomto případě mnohem jednodušší.

Postup měření

Jeden z nás stál s tyčkou nasměrovanou rovnoběžně s měřeným objektem. Druhý si ke stále stejné vzdálenosti od očí přiložil buď pravítko, nebo dalekohled a zjišťoval, kolik dílků stupnice zabírá naše metrová tyčka. Přitom stál u předchozího měřeného objektu. Nakonec pomocí buzoly zjistil, jaký úhel spolu objekty svírají a zaznamenal údaje.

Co jsme měřili? Postupovali jsme po cestě, a tak jsme si za své cíle vybírali např. sloupy vysokého napětí či stromy s turistickými značkami.

Přesnost měření

Na základě prvního měření můžeme usoudit, že dalekohled je oproti pravítku přesnější, a proto jsme těmto údajům věřili i při zpracovávání mapy, kde jsme použili právě vzdálenosti měřené tímto způsobem. Větší přesnosti dalekohledu nahrává i fakt, že měl mnohem podrobnější stupnici. Navíc pravítko bylo potřeba držet vůči měřené tyčce v rovnoběžné poloze, což se vždy nemuselo povést. Pokud nebyl úplně přesně rovnoběžně dalekohled, už s ním nebylo možné tyčku spatřit. Naopak na pravítku bylo mnohem jednodušší a tím pádem i přesnější odčítání hodnot na stupnici. Dalekohled byl velmi citlivý na sebemenší pohyb.

Celkově tedy považujeme za přesnější dalekohled, ale ani jím naměřené hodnoty nelze považovat za příliš přesné. Měření úhlů buzolou bylo možné s mnohem větší přesností, než měření vzdáleností.

Vyhodnocení údajů

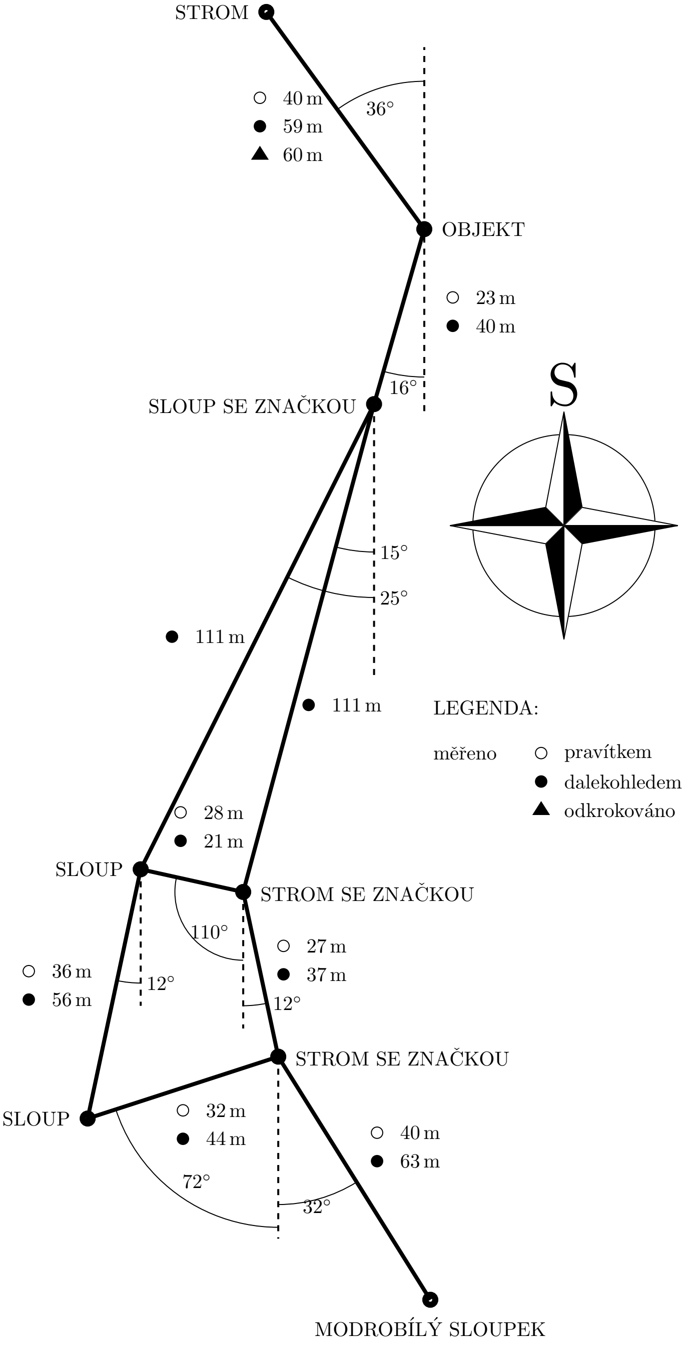
Naměřené hodnoty jsme přepočítali podle vzorců výše na metry a zpracovali v programu AutoCAD.

Vyhodnocení přesnosti měření

Na základě prvního měření se zdá, že dalekohled je oproti pravítku mnohem přesnější, a proto jsme těmto údajům věřili i při zpracovávání mapy, kde jsme použili právě vzdálenosti měřené tímto způsobem.

Domníváme se, že dalekohled je přesnější z těchto důvodů:

- dalekohled měl mnohem podrobnější stupnici, a i přesto, že se nám při zaměřování trochu klepala ruka, jsou údaje pečlivě proměřené
- pravítko bylo potřeba držet vůči měřené tyčce v rovnoběžné poloze, což se vždy nemuselo úplně povést. Pokud nebyl úplně přesně rovnoběžně dalekohled, už s ním nebylo možné tyčku vidět.



Obr. kI-4.3 – Výsledná mapa.

Závěr

Naše konfera byla akční s venkovním provedením, a zároveň jsme ji museli pečlivě promyslet a dopočítat. Také jsme si pohráli se sestavováním dalekohledu a samotným zpracováním pro ostatní. Přesnější měření se dalo provést s pomocí fotoaparátu, ale o možnosti jeho zapůjčení jsme se bohužel dozvěděli až po prezentaci našich výsledků.

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R." je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+" značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	k	+	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy										
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	61	3	3	5	2	10		3		4	30	61
2.	Dr.$^{\text{MM}}$ Josef Tkadlec	4.	74	3	3	3	2					0	11	43
3–4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Töpfer	4.	69		3		2	3			6	0	14	34
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Dočekalová	3.	34		3			6			6	0	15	34
5–6.	Prof.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	4.	210		3		2					0	5	30
	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	57											30
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Filip Štědronský	2.	26											26
8.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alena Bušáková	2.	70				2	6			5	0	13	23
9–10.	Doc.$^{\text{MM}}$ Petr Pecha	2.	144		3	5	2					2	12	22
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Eliška Nekvapilová	4.	47											22
11.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Husek	3.	20	1	0	1	1	1				0	4	20
12–13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo	3.	100	3	5		2					1	11	17
	Dr.$^{\text{MM}}$ Jakub Klemsa	3.	55		3		1					0	4	17
14–16.	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Bartoněk	2.	55											14
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Zavřel	2.	48											14
	Bc.$^{\text{MM}}$ Filip Hlásek	2.	14								5		5	14
17–20.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	4.	65			5						0	5	12
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jitka Novotná	4.	37								5		5	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Alena Jurásková	1.	12	2			2					1	5	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Pavel Novotný	3.	12		3		0		3			0	6	12
21.	Bc.$^{\text{MM}}$ Vojtěch Miloš	3.	10				2					0	2	10
22–23.	Dr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Koblížek	2.	52											9
	Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Prokopová	4.	52											9
24–25.	Karel Kraus		8	3	3		2					0	8	8
	Barbora Šmídová	1.	8											8
26–30.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Bílková	4.	34											7
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Vaňhara	4.	33											7
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Peter Smolárik	3.	31		1		2					0	3	7
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	21				2	1				0	3	7
	Anna Chejnovská	2.	7				2					0	2	7
31–33.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martina Vaváčková	3.	11											6
	Martina Bekrová	4.	6				2					0	2	6
	Vojtěch Dziewicki	3.	6											6
34.	Tereza Zábojníková	4.	4											4
35–36.	Pavel Kratochvíl	1.	3											3
	Libor Plucnar	4.	3											3
37–38.	Barbora Böhmová	1.	2		0							0	0	2
	Tomáš Pokorný	2.	2				2					0	2	2
39.	Michaela Kochmanová	2.	0											0

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.