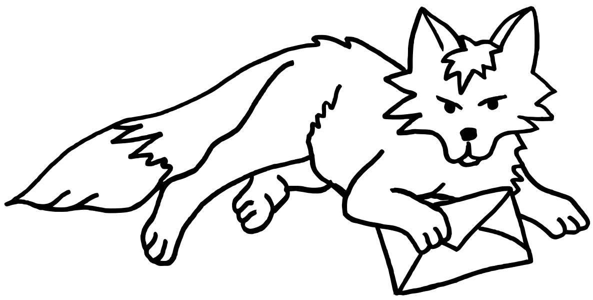
M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XV číslo 4

Termín odeslání: pondělí, 9. 3. 2009

Milé kamarádky a kamarádi,
vracíme se k vám i v novém roce. Přejeme vám do něj vše nejlepší a doufáme, že nám i letos zachováte přízeň. Připravili jsme proto pro vás tradičně několik nových úloh.

Stejně jako se vám blíží pololetní vysvědčení, blíží se i nám zkoušky. Proto jsme termín odeslání úloh posunuli až na březen. A tak máte jednu z posledních možností jak získat body a zajistit si tak účast na jarním soustředění.

Redakce M&M



Zadání úloh

Úloha 4.1 – GeoMag (4b)

Riki dostal pod stromeček stavebnici GeoMag. Tato stavebnice funguje na principu magnetismu. Základem jsou zmagnetizované tyčky, ke kterým je možno díky magnetickým silám přichytit malé kuličky.

Z této stavebnice je tak možné sestavit nejrůznější tělesa. Riki začal tím, že postavil čtverec. Ovšem tento čtverec není moc stabilní, neboť pokud na něj jen trochu zatlačí, tak se zdeformuje na kosočtverec. Jak by měl Riki postupovat, aby dostal stabilní čtverec?

Zdá se, že řešení by mohlo být snadné – Riki postaví oktaedr, a čtverec se už nebude deformovat. Oktaedr však zabere spoustu prostoru. Proto se pokuste vymyslet konstrukci, která by byla v ploše. A zkuste k tomu použít co nejméně tyček.

Reálnou tloušťku tyček a kuliček neuvažujte. Tyčky si zidealizujte jako úsečky a kuličky jako body.

Úloha 4.2 – Není válec jako válec (3b)

Správce královské pokladnice se rozhodl, že si trochu přilepší k platu. Zalíbil se mu zlatý válec o průměru $d = 10\,\mathrm{cm}$ a délce $l = 30\,\mathrm{cm}$. Aby se na krádež nepřišlo, rozhodl se, že vyrobí stejně veliký válec z mědi, kterým nahradí ten chybějící.

Měď má ovšem menší hustotu než zlato. Správci se podařil sehnat kus iridia, které je těžší než zlato. Trápí ho však jedna věc. Pokud by pouze obalil iridium mědí, měl by jeho válec jiný moment setrvačnosti než válec z čistého zlata. A to by bylo nápadné. Poradíte správci, jak by měl válec vyrobit tak, aby na povrchu byla vrstvička mědi a válec měl správný moment setrvačnosti?

Úloha 4.3 – Kámen, nůžky, papír, ještěrka... (3b)

MatFyzáci Adam a Bohouš se nemohli rozhodnout, kam půjdou na oběd. A tak se rozhodli, že si „střihnou". Ovšem hrát klasický kámen, nůžky, papír jim přišlo málo zajímavé. Proto se dohodli, že přidají další symboly.

Původní kámen, nůžky, papír má tu vlastnost, že všechny symboly jsou stejně výhodné. Dále platí, že mezi žádnými dvěma symboly nenastává remíza. Adam s Bohoušem by rádi věděli, kolik symbolů mohou přidat, aby se tyto vlastnosti zachovaly.

Své tvrzení nezapomeňte dokázat.

Úloha 4.4 – Skořápky (2b)

Znáte hru skořápky? Je to jednoduché, pod jednu skořápku se dá čokoláda a skořápky se pak zamíchají. Vaším úkolem je pak uhádnout, pod kterou skořápkou se čokoláda skrývá. Nemáte šanci sledovat míchání, proto je vaší jedinou možností náhodně zvolit jednu ze tří možností.

Představte si, že jste si vybrali jednu ze tří možností. Skořápkář pak odhalil jinou skořápku a ukázal, že tam čokoláda není, a dal vám možnost změnit váš tip. Je pro vás výhodné svůj tip změnit?

Pokud si nevíte rady, zkuste se zamyslet nad případem, kdy hrajete se 42 skořápkami a po vašem tipu je odhaleno 40 skořápek, pod kterými nic není. Jaké jsou vaše šance v tomto případě?

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Poštovní holub (3b)

Zadání:

Na rovné železniční trati se porouchalo zabezpečovací zařízení, takže strojvedoucí dvou protijedoucích vlaků se rozhodli posílat si informace pomocí poštovního holuba. Ten vyletí od vlaku A přímo k vlaku B jedoucímu v protisměru na vedlejší koleji. Jakmile k němu doletí, *otočí se (v nulovém čase) a letí se zprávou zas zpět. U vlaku A se opět otočí a takto létá dokud se vlaky neminou.*

Vzhledem ke stále foukajícímu větru letí ve směru od vlaku A k vlaku B rychlostí 100 km/h*, ale od vlaku B k vlaku A letí proti větru rychlostí pouze* 60 km/h*. Platné drážní předpisy omezují maximální rychlost při použití holubího zabezpečovacího zařízení a tak jede vlak A stálou rychlostí* 30 km/h *a vlak B rychlostí pouze* 25 km/h*. Ve chvíli, kdy holub poprvé odlétl od vlaku A byly od sebe vlaky vzdáleny* 20 km*. Kolik kilometrů nalétá holub, než se vlaky minou?*

Řešení:

Tuto úlohu lze řešit a vyřešit „hrubou silou“ sečtením nekonečné řady, která se v zadání přímo nabízí. To je ale postup složitý, nenápaditý a vcelku nezajímavý, a proto se ve vzorovém řešení neobjeví. Zájemci si jej mohou zkusit sami, pokud tak již neučinili při psaní řešení.

Teď tedy slibovaný pěkný postup. Holub po celou dobu letí jedním ze dvou možných směrů. Na všech přeletech od vlaku A k vlaku B strávil dohromady čas t_1. Na všech přeletech od vlaku B k vlaku A pak dohromady čas t_2. Součet těchto časů je doba t, která uplyne, než se vlaky setkají:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_\mathrm{A} + v_\mathrm{B}}\,,$$

kde d je počáteční vzdálenost vlaků; v_A a v_B jsou rychlosti vlaků.

Holub letí dohromady čas t_1 rychlostí v_1 ve směru pohybu vlaku A a čas t_2 letí naopak rychlostí v_2 proti směru pohybu vlaku A. Nakonec, po uplynutí času t, doletí do místa vzdáleného $t_1v_1 - t_2v_2$ od počáteční polohy vlaku A. Ze zadání víme, že vlak A se musí v tomto okamžiku nacházet na stejném místě (stejně tak i vlak B, ale ten nás teď nezajímá), tedy musí platit $tv_\mathrm{A} = t_1v_1 - t_2v_2$. Z toho můžeme vyjádřit t_1:

$$t_1v_1 - tv_2 + t_1v_2 = tv_\mathrm{A}\,; \qquad t_1 = \frac{v_\mathrm{A} + v_2}{v_1 + v_2}\,t\,.$$

Holub sám uletí dráhu $t_1v_1 + t_2v_2$, což je $t_1(v_1 - v_2) + tv_2$.

Po dosazení konkrétních hodnot máme $t = (4/11)$ h a $t_1 = (9/44)$ h. Celková dráha, kterou holub uletí je 30 km.

Marble

Úloha 2.2 – Odporný odpor vzduchu (3b)

Zadání:

Marble ví, že pokud na svém kole šlape do pedálů s výkonem 200 W*, jede po rovině a za bezvětří rychlostí přesně* 30 km/h*. Jakou rychlostí pojede, pokud nezmění svůj výkon, ale bude foukat protivítr o rychlosti* 4 m/s*? Na jakou hodnotu by musel zvýšit svůj výkon, aby udržel původní rychlost* 30 km/h*? Také by jej zajímalo, jak silný vítr by mu musel foukat do zad, aby při šlapání svým maximálním výkonem* 300 W *dosáhl rychlosti* 50 km/h*. Spočítáte mu to?*

Řešení:

Fyziku schovanou v této úloze jde rozdělit na několik částí. Nejprve probereme, jak je to s výkonem. Pokud cyklista jede konstantní rychlostí, spotřebová veškerý výkon na překonání odporových sil. Při stálé rychlosti je tento výkon rovný součinu síly a rychlosti cyklisty, jak plyne přímo z definice práce a výkonu.

Dále vyřešíme, jaké odporové síly tu působí. Už formulace zadání napovídá, že půjde především o odpor vzduchu. Přesto existují i další odporové síly (valivé tření kol, tření v ložiskách, řetězu a podobné). Pokud je chceme zanedbat, měli bychom to nějak zdůvodnit.

Odporové síly mimo odporu vzduchu jsou v prvním přiblížení nezávislé na rychlosti, měly by tedy působit zhruba stejně při pomalé i rychlé jízdě. Udělejme si v myšlenkách následující pokus: Máme kolo s přehazovačkou, rovnou silnici a bezvětří. Nejprve zařadíme dostatečně těžký převod, abychom při rozumné frekvenci šlapání dosáhli rychlosti 30 km/h. Zapamatujeme si sílu, kterou jsme museli působit na pedály. Teď se rozjedeme znovu, budeme šlapat stejnou frekvencí, ale zařadíme nejlehčí převod. Jedeme kupředu rychlostí několikrát nižší a síla, kterou působíme na pedály, klesla velmi výrazně. Pokud jste někdy jeli na kole, budete pravděpodobně souhlasit, že o dva řády není přehnané tvrzení. Protože jsme nezměnili frekvenci šlapání, klesl námi dodávaný výkon úměrně poklesu síly. Pokud by byly odporové síly nezávislé na rychlosti, klesne jejich výkon úměrně poklesu rychlosti kola, v našem konkrétním případě třeba šestkrát (z 30 km/h na 5 km/h). Jenže výkon, který dodáváme my, poklesl mnohem více. Většinu odporu při rychlosti kolem 30 km/h musí tedy tvořit síla závislá na rychlosti, odpor vzduchu. Vliv dalších sil bude řádově nižší.

Zdůvodnění je sice jen přibližné a opírá se o subjektivní zkušenosti, nicméně pro naše účely dostačuje. K přesnější analýze by bylo potřeba operovat s typem kola, velikostí cyklisty, nahuštěním kol a s podobnými věcmi. Zájemce odkazuji na pěknou stránku `http://www.kreuzotter.de/english/espeed.htm`.

Tím jsme omezili zkoumaný problém na odpor vzduchu. K jeho vyjádření nám bude stačit nejjednodušší přiblížení, které říká, že odporová síla je úměrná druhé mocnině rychlosti a konstanta úměrnosti, která závisí na hustotě vzduchu, čelní ploše a tvaru, se s rychlostí nemění:

$$F_\mathrm{o} = kv^2 \tag{r2.2.1}$$

V tuto chvíli zbývají konkrétní otázky ze zadání. Z první informace o stálé rychlosti 30 km/h při výkonu 200 W můžeme odhadnout koeficient odporové síly. Z uvedených dvou hodnot vychází síla pohánějící kolo, a tedy i odporová síla 24 N. Koeficient odporu vzduchu získáme podělením čtvercem rychlosti a vychází $k = 0{,}35\,\mathrm{kg/m}$.

Protivítr o rychlosti w zvýší odporovou sílu na hodnotu $F_\mathrm{o} = k\left(v + w\right)^2$, kde v je rychlost cyklisty vůči silnici. Upravíme na výraz pro výkon potřebný k vyrovnání této síly

$$P = kv\left(v + w\right)^2 \,. \tag{r2.2.2}$$

Při známém výkonu je hledaná rychlost kořenem rovnice

$$v^3 + 2wv^2 + w^2 v - \frac{P}{k} = 0\,. \tag{r2.2.3}$$

Tuto rovnici je možné rovnou vyřešit[1], ale výpočet je relativně složitý. Můžeme místo toho využít, že už z povahy fyzikálních zanedbání nemá smysl hledat početně přesné řešení. Z rovnice (r2.2.2) je vidět, že rychlost jízdy určitě nebude snížena o víc, než je rychlost protivětru. Spočteme podle (r2.2.2) výkon potřebný k jízdě rychlostí o 2 m/s (polovina rychlosti větru) nižší než původních 30 km/h. Vyjde 237 W. Rychlost jízdy tedy bude ve skutečnosti snížena více. Zkusme opět polovinu zbylého intervalu, snížení o 3 m/s. Vychází výkon 163 W. Hledáme proto v intervalu zpomalení mezi 2 a 3 m/s. Polovina intervalu vede na výkon 197 W, a zpomalení je menší než 2,5 m/s. Naposledy rozpůlíme interval a potřebný výkon 216 W nás ujistí, že hledané zpomalení je mezi 2,25 a 2,5 m/s. To je přibližně 9 km/h a rychlost jízdy proti větru bude jen 21 km/h.

Pro udržení původní rychlosti by bylo potřeba šlapat do pedálů s výkonem 440 W, jak ihned plyne z (r2.2.2). To je hodně výrazný nárůst[2], a podle informací v zadání Marble takovouto rychlostí proti větru ani dlouhodobě jet nezvládne.

Výkon potřebný pro udržení rychlosti jízdy v s větrem o rychlosti w v zádech je analogicky předchozímu

$$P = kv\,(v - w)^2\ . \qquad \text{(r2.2.4)}$$

Z toho vyjádříme potřebnou rychlost větru $w = v - \sqrt{P/kv}$, po dosazení výkonu 300 W a rychlosti 50 km/h vyjde vcelku nízká rychlost větru 6 m/s.

Marble

Úloha 2.3 – Správy o mojej smrti boli značně prehnané. (5b)

Zadání:

V bani ležiacej v bode A došlo k závalu. Prvé správy, ktoré z bane vyrazia hovoria o stovkách zavalených a šíria sa rovnomerne do okolia rýchlosťou v_a. V čase τ (to už o nehode vedia v celom kruhu o polomere $v_a\tau$ so stredom v bode A) sa baníci v bode B (vzdialenom r od bodu A) vyhrabú na povrch. Správa o tom, že sa zachránili sa začne šíriť z bodu B do okolia rýchlosťou v_b. Tam, kde ako prvá dorazí správa o katastrofe z bodu A, vyvesia čierne zástavy. Tam, kde ako prvá dorazí správa o záchrane z bodu B, už žiadne zástavy vyvesovať nebudú (vedia už predsa, že baníci sú v poriadku).

Vašou úlohou je popísať tvar územia, na ktorom čierne zástavy stihli vyvesiť (teda kam ako prvá dorazila správa z bodu A). Pre zjednodušenie môžete vyriešiť konkrétny prípad, kde $r = 3\,\mathrm{km}$, $v_a = 0{,}5\,\mathrm{km/h}$, $v_b = 1\,\mathrm{km/h}$ a $\tau = 10\,\mathrm{h}$ (keď zvolíte prevod km → cm, mohlo by sa riešenie vôjsť na A4). Obecné riešenie má ale oveľa vyššiu cenu. Ak naviac budeme predpokladať, že z miest, kde ako prvá dorazila správa o záchrane už správu o katastrofe ďalej nepošlú, bude možno stačiť vyslať správu o záchrane iba do časti uhla (teda do výseku a nie

[1] Návod na řešení kubických rovnic můžete najít v různých sbírkách matematických vzorců, anebo porůznu na webu, například na stránkách wikipedie: `http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation`.

[2] Rychlost 4 m/s je jen slabý vítr.

do celého kruhu). Zaujíma nás – samozrejme – aký minimálny výsek stačí a pre aké hodnoty konštánt má táto úloha zmysel.

Řešení:
Položme bod A do súradníc $(0,\,0)$, bod B do súradníc $(r,\,0)$. Kružnica so stredom v bode A a polomerom $v_a t$ má rovnicu

$$x^2 + y^2 = v_a^2 t^2\,, \tag{r2.3.1}$$

kružnica so stredom v bode B a polomerom $v_b(t-\tau)$ zas

$$(x-r)^2 + y^2 = v_b^2 (t-\tau)^2\,. \tag{r2.3.2}$$

Keďže hľadáme nejaké pekné vyjadrenie krivky (napríklad parametrické), vyjadríme z rovnice (r2.3.1) y^2, dosadíme do rovnice (r2.3.2) a po jednoduchej úprave dostávame

$$x = \frac{r^2 - v_b^2(t-\tau)^2 + v_a^2 t^2}{2r}\,. \tag{r2.3.3}$$

Dosadením tohto výsledku do vzťahu pre jednu z kružníc a úpravou dostaneme aj vzťah pre hodnotu súradnice y

$$y = \frac{\sqrt{4r^2 v_a^2 t^2 - (r^2 - v_b^2(t-\tau)^2 + v_a^2 t^2)^2}}{2r}\,. \tag{r2.3.4}$$

K tomuto výsledku dospel každý, kto sa aspoň trochu snažil a čo-to už o analytickej geometrii počul.

Tým máme krivku popísanú pomocou parametra t. Ak chceme dôjsť k explicitnému vyjadreniu krivky, vyjadríme t z jednej z rovníc (r2.3.3) alebo (r2.3.4). Nech pre jednoduchosť vyjadrujeme t z rovnice (r2.3.3), potom dostaneme $t = t(x)$:

$$t(x) = \frac{-v_b^2 \tau^2 \pm \sqrt{v_a^2 v_b^2 \tau^2 + (v_a^2 - v_b^2)(2rx - r^2)}}{v_a^2 - v_b^2}\,. \tag{r2.3.5}$$

Teraz stačí takto vyjadrený čas dosadiť do (r2.3.4) a dostaneme explicitné vyjadrenie tejto krivky. Otázkou je, ktoré z dvoch znamienok v (r2.3.5) je správne. Je zrejmé, že pokiaľ $v_a > v_b$, dobré správy nikdy nedobehú zlé (jedinou šancou pre dobré správy je pokryť zdroj zlých správ ešte predtým, ako sa tieto začnú šíriť, teda τ musí mať zápornú hodnotu). Preto uvažujme $v_b > v_a$ (tým dostaneme uzavretú krivku). Vďaka tejto voľbe v_a a v_b je menovateľ (r2.3.5) záporný. Aby sme dostali kladný celkový čas (riešenie so záporným časom, alebo menším z kladných časov je dôsledkom toho, že sa všetky členy v (r2.3.1) a (r2.3.2) vyskytujú iba v druhých mocninách a teda sa kružnice šíria do záporného času rovnako dobre ako do kladného), zvolíme teda aj pred odmocninou záporné znamienko. Teraz už „nie je najmenší problém“ dosadiť (r2.3.5) do (r2.3.4) a výsledok upraviť na explicitnú rovnicu krivky. Úvodzovky sú však na mieste, pretože vyjadrovanie takýchto vzorcov sa nehodí snaď ani na dlhé zimné večery.

Pre zjednodušenie položme $v_a = v_b = 1$. Vzťahy (r2.3.3) a (r2.3.4) sa takto zjednodušia na:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r^2 - \tau^2 + 2t\tau}{2r}\,, \\ y(t) &= \frac{\sqrt{4r^2t^2 - (r^2 - \tau^2 + 2t\tau)^2}}{2r}\,. \end{aligned} \tag{r2.3.6}$$

Dôležitejšie ale je, že čas sa vo vzťahu pre $x(t)$ vyskytuje iba v prvej mocnine a tak jeho vyjadrenie nie je problém. Dosadením do $y(t)$ z (r2.3.6) takto dostávame explicitnú rovnicu:

$$4(\tau^2 - r^2)x^2 + 4\tau^2y^2 + 4r(r^2 - \tau^2)x + (r^2 - \tau^2)^2 = 0\,. \tag{r2.3.7}$$

Toto je rovnica krivky 2. stupňa – bude sa teda jednať o nejakú kužeľosečku! Rozhodujúce pre určenie typu kužeľosečky sú koeficienty pred členmi x^2 (a), y^2 (b) a xy (c), teda pred členmi druhého rádu. Druh kužeľosečky určíme podľa hodnoty $D = c^2 - 4ab$ (kde v našom prípade $a = 4(\tau^2 - r^2)$, $b = 4\tau^2$ a $c = 0$). Máme teda $D = -64\tau^2(\tau^2 - r^2)$.[3] Ak je $D < 0$, teda v našom prípade $\tau^2 v_a^2 > r^2$ (a ak pokladáme časy, rýchlosti a vzdialenosti za kladné, tak aj $\tau v_a > r$),[4] alebo ak je čas τ menší ako 0 a $\tau v_a < -r$,[5] bude výsledkom prázdna množina. Ak je $D = 0$, teda $\tau v_a = r$, je hľadaným výsledkom polpriamka vychádzajúca z bodu B v smere kladnej osi x. V prípade, že $D > 0$, alebo $\tau v_a < r$,[6] je krivkou hyperbola. Pokiaľ si rovnicu kužeľosečky (r2.3.6) upravíme na nasledujúci tvar (znovu píšeme aj hodnotu rýchlosti v_a):

$$4(v_a^2\tau^2 - r^2)\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + 4v_a^2\tau^2y^2 = v_a^2\tau^2(v_a^2\tau^2 - r^2)\,, \tag{r2.3.8}$$

vidíme, že stred tejto hyperboly bude vždy uprostred medzi bodmi A a B.

Zámerne vynechávame prípad, keď by sa nule rovnalo τ^2. Dosaďme totiž tento predpoklad do (r2.3.6):

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r}{2}\,, \\ y(t) &= \frac{\sqrt{r^2 + 4t^2}}{4}\,, \end{aligned} \tag{r2.3.9}$$

---

[3] *Pozn. red.: Ak sa niektorému prítomnému fyzikovi nezdajú jednotky, nech si spomenie, že sa tam niekde ešte potuluje rýchlosť v_a.*

[4] *Pozn. red.: Inak povedané: Zlá správa už prefrčala miestom, kde sa baníci vyhrabú.*

[5] *Pozn. red.: Teda dobrá správa prešla miestom odkiaľ začnú hlásiť zával skôr ako ho začali hlásiť.*

[6] *Pozn. red.: Zlá správa nestihne doraziť k miestu, kde sa baníci vyhrabú.*

a dostaneme výsledok, kde x na čase vôbec nezávisí! Výsledkom je teda priamka rovnobežná s osou y uprostred medzi bodmi A a B. K tomuto výsledku dospel jedine Doc.[MM] Petr Pecha, ostatne nikto iný sa podrobne špeciálnymi prípadmi nezaoberal.

Dr.[MM] Jakub Klemsa v riešení použil zaujímavú metódu: Čas t nahradil súradnicou z. Tým dostal jasnú predstavu, čo hľadá – priesečnicu dvoch kužeľov s rovnobežnými osami (jej priemet do roviny $z = 0$).

Pozrime sa ešte na podúlohu o minimálnom výseku. Je zrejmé, že táto úloha má zmysel len v prípade, že $v_a\tau < r$ a $v_b > v_a$. Pracujme v hornej polrovine – situácia je symetrická podľa osi x. Tangens uhlu je rovný pomeru $y/(x - r)$ (pozeráme sa z bodu B). Keďže tangens uhlu je v intervale $(-\pi/2, \pi/2)$ prostý a rastúci, bude uhol dosahovať maximálnu hodnotu tam, kde jeho tangens. Hľadanie maxima, to je úloha pre deriváciu. A tak derivujeme tangens podľa času a hľadáme, kde dostaneme nulu. No ale dosaďme do vzťahu pre tangens $\tan\alpha = y/(x - r)$ z (r2.3.3) a (r2.3.4). Zisťujeme, že derivujeme zlomok nad mieru nepríjemný, a že, hoc sa obmädzíme na vynulovanie čitateľa, dostávame polynóm piateho stupňa. Tu teda úlohu prenecháme nejakému znudenému počítaču.

Čo ale v prípade, že $v_a = v_b$? Za istých okolností dostávame hyperbolu a tá má asymptoty (teda priamky ku ktorým sa jej ramená blížia s rastúcou vzdialenosťou od vrcholu). Kde leží stred hyperboly sme si ukázali vzorcom (r2.3.8), je to bod $(r/2\,, 0)$. Asymptota je priamka, prechádzajúca týmto stredom a majúca rovnakú smernicu, ako hyperbola v nekonečne. To znamená, že hľadáme (vieme, že $x = k\cdot t$ teda, že keď pošleme do nekonečna x, posielame tam zároveň t):

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{y(t)}{x(t) - \frac{r}{2}}\right) = \sqrt{\frac{r^2}{v_a^2\tau^2} - 1}\,. \tag{r2.3.10}$$

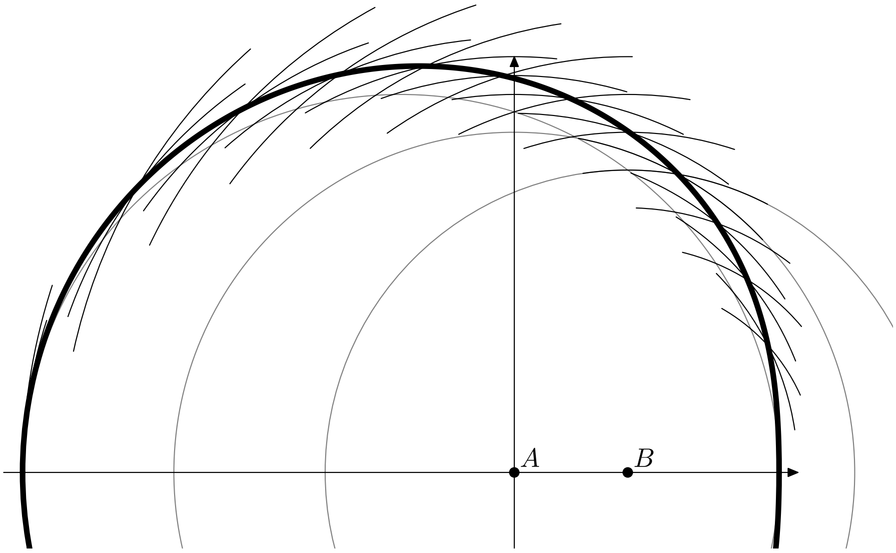
Rovnica príslušnej priamky je

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{v_a^2\tau^2} - 1}\left(x - \frac{r}{2}\right)\,, \tag{r2.3.11}$$

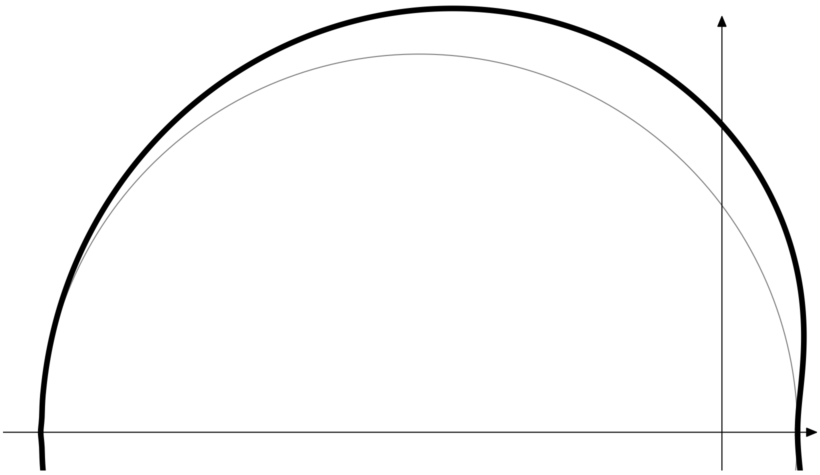
a spočítať zo smernice (r2.3.10) uhol dokáže každý – stačí zobrať

$$\alpha = 360\,^\circ - 2\arctan\sqrt{\frac{r^2}{v_a^2\tau^2} - 1}\,. \tag{r2.3.12}$$

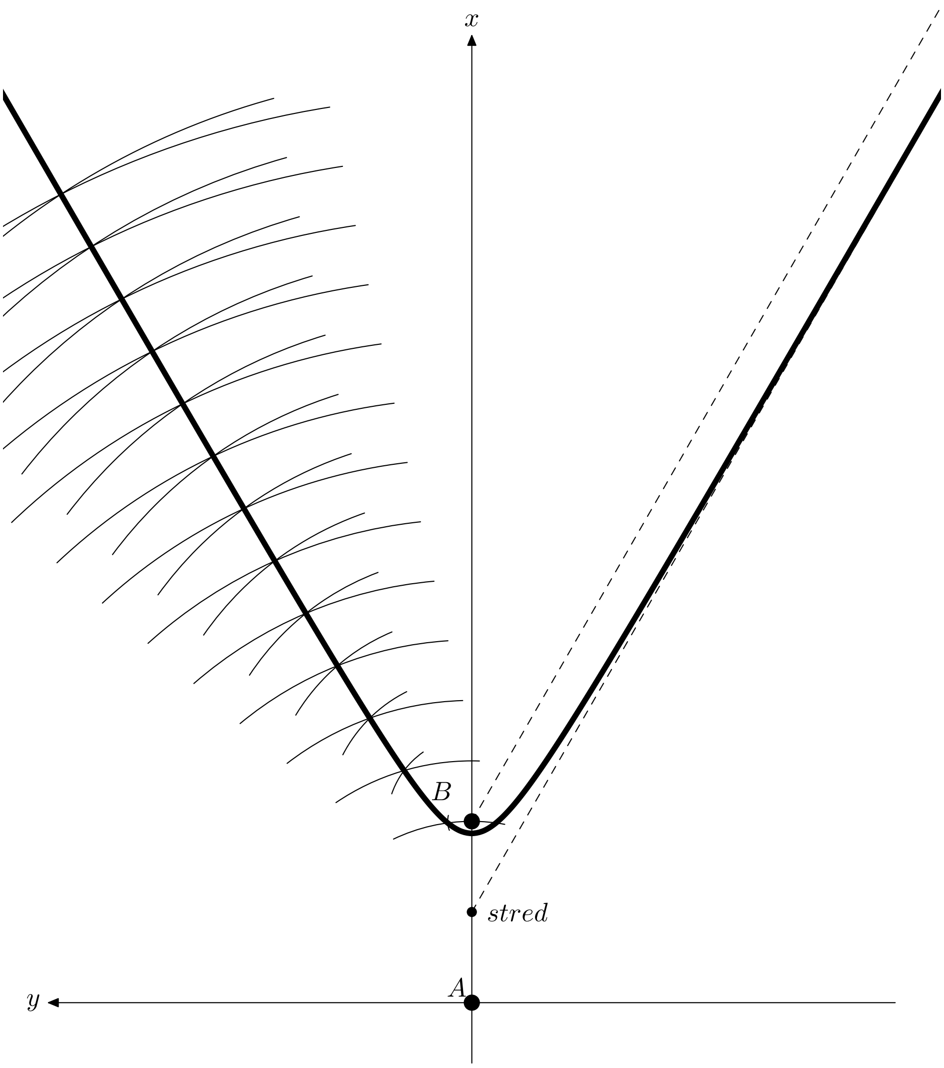
Od $360\,^\circ$ odpočítavme, lebo v tomto prípade hľadáme vonkajší uhol (musíme pokryť celý priestor okrem toho medzi asymptotami).



Obr. r2.3.1 – Úloha zo zadania s prevodom km → 0,5 cm.



Obr. r2.3.2 – Úloha s malým rozdielom medzi rýchlosťami.



Obr. r2.3.3 – Príklad hyperboly aj s asymptotami.

Na obrázku r2.3.1 vidíme jednak výslednú krivku (hrubou čiarou), úseky kružníc (tenké čierne čiary), celé kružnice v čase $t = 18\,\mathrm{h}$ a kružnicu spájajúcu krajné hodnoty výslednej krivky na x-ovej osi pre porovnanie s výslednou krivkou (všetky tri kružnice sivé). Na obrázku r2.3.2 vidíme časť krivky s modifikovaným zadaním: $v_a = 0{,}20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, $v_b = 0{,}25\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, $r = 3\,\mathrm{km}$ a $\tau = 6\,\mathrm{h}$. Napokon na obrázku r2.3.3 vidíme hraničnú hyperbolu aj s asymptotami a úsekmi kružníc pre zadanie: $v_a = v_b = 1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, $r = 3\,\mathrm{km}$, $\tau = 2{,}4\,\mathrm{h}$. Tento obrázok je kôli rozmeru stránky otočený o $90\,°$.

Jeffer

Úloha 2.4 – Věž z mincí (2b)

Zadání:

Riki si šel koupit čokoládu za 42 Kč. Připravil si dvě desetikoruny, čtyři pětikoruny a jednu dvoukorunu a postavil se do fronty k pokladně. Jak tak čekal, všiml si zajímavé věci. Pokud k sobě přiložil dvě mince nejbližší hodnoty (např. pětikorunu a desetikorunu nebo pětikorunu a dvoukorunu), mince do sebe díky vyvýšenému okraji zapadly. A tak Riki sestavil věž z mincí, tak, že na sebe postupně kladl pětikorunu, desetikorunu, pětikorunu, desetikorunu, pětikorunu, dvoukorunu a pětikorunu.

Paní prodavačka si sice elegantního způsobu platby nevšimla, ale Rikiho by zajímalo, zda je možné podobně elegantně zaplatit libovolnou částku.

Řešení:

Jak si někteří z vás bystře všimli, v zadání se nehovořilo nic o počtu mincí, které byste měli použít. Proč tedy nepoužívat pouze koruny a dvoukoruny? Pokud postavíme korunu na dvoukorunu, dostaneme „základní stavební prvek“. Má hodnotu 3 a jednotlivé základní stavební prvky na sebe můžeme pokládat. Jak tedy zaplatit obecnou částku N?

Snadno, pokud je N dělitelné třemi ($N \bmod 3 = 0$), tak budeme na sebe postupně pokládat základní stavební prvky až do té doby, než dostaneme požadovanou hodnotu.

Pokud $N \bmod 3 = 1$ tak budeme postupovat obdobně. Řešíme podobný problém jako v předchozím případě. Pouze musíme navíc v okamžiku, kdy jsme dosáhli největšího násobku tří, který je menší než N, položit na věž korunu.

Zbývá nám případ, kdy $N \bmod 3 = 2$. Ale to je přeci velmi snadné. Stačí začít stavět na dvoukoruně a požadované hodnoty určitě dosáhneme.

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti. Můžeme tedy zaplatit všechny částky, i když nevím, jak by se v obchodě dívali na to, kdyby někdo platil 42 korun pomocí dvaceti osmi mincí.

(R)adim

Řešení témat

Téma 4 – Divný svět

Měření g pomocí kyvadla

Prof.MM Alžběta Pechová

Popis experimentu

Navrhla bych experiment k měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla.

To vyrobím z provázku a menší hmotnější kuličky (tím pak mohu zanedbat jeho rozměry nebo moment setrvačnosti), kterou budu považovat za hmotný bod. Kyvadlo upevním na dané místo, malou počáteční výchylkou ho uvedu do kmitavého pohybu, pak změřím periodu kmitu T. Periodu budu měřit na hodinkách, předpokládám přesnost na sekundy. Proto budu měřit čas deseti period a jednu periodu poté vypočítám.

Měření budu opakovat na různých místech, vždy se stejnou délkou závěsu, protože mne zajímá hlavně jak se gravitační zrychlení mění a ne jeho přesná velikost, mohu měřit jen poměr doby kmitu (čímž se vyhnu nepřesnostem kvůli délce závěsu). Pro kontrolu bych provedla veškerá měření ještě jednou s polovičním závěsem (opět nepotřebuji znát přesnou délku závěsu, vím, že je $l/2$).

Měření bych provedla na ose x a na ose z na několika místech (např. 10) pokud možno rovnoměrně (nevím, jestli to umožňuje terén). Poté mohu orientačně určit i hodnotu gravitačního zrychlení. Naměřím si metrový závěs (předpokládám, že je k dispozici metr), počítám s odchylkou $\pm 1\,\mathrm{mm}$.

Pro periodu kmitu kyvadla platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Gravitační zrychlení g je nepřímo úměrné druhé mocnině periody T.

Výsledky měření

Následují výsledky Bětčina měření. Vzdálenost podél os je odhadnutá, délky závěsu jsou $1\,\mathrm{m}$ a $0,5\,\mathrm{m}$ a měří se deset period. Kyvadlo sestává z ocelové kuličky a tenké nitě. Je upevněno na trojnožce, kterou bylo, zvláště v místech s nízkým zrychlením, potřeba řádně upevnit. Pro příliš nízké hodnoty zrychlení měření nešlo provést, protože kyvadlo se kývá příliš pomalu, takže různé vlivy okolí experiment znatelně ruší a výsledek by nebyl průkazný. (Týká se měření podél osy z blízká středu.)

-600 m	20,18	21,57	19,74	20,12	20,09	19,06	20,30	20,01	20,38	20,32
-450 m	23,85	24,05	24,27	23,79	24,12	24,89	23,22	23,40	24,41	23,53
-300 m	29,99	30,26	30,16	29,61	30,64	29,90	30,15	29,42	28,78	30,28
-150 m	42,37	41,88	41,19	41,88	42,13	41,87	41,91	41,73	42,39	41,75
150 m	42,59	40,91	41,16	41,82	41,44	41,19	42,38	40,90	42,09	41,18
300 m	31,23	31,78	31,55	30,64	30,47	30,75	31,29	31,45	31,35	31,68
450 m	24,74	25,75	25,28	26,49	24,80	25,25	25,29	25,71	25,45	25,28
600 m	21,50	22,44	21,42	21,61	21,79	21,56	21,91	21,92	21,32	21,25
750 m	19,61	20,63	20,59	19,69	19,85	19,02	19,84	20,20	19,96	19,40
900 m	17,91	18,15	18,73	18,00	18,77	17,63	17,65	17,28	17,83	18,57

Tabulka t4.1: Perioda T pro nit dlouhou $l = 1$ m, měřeno ve směru osy x

−900 m	29,24	29,06	28,96	28,74	29,70	29,26	28,37	29,73	28,27	29,39
−750 m	31,14	31,90	30,95	31,60	32,39	31,85	32,21	31,72	32,01	32,38
−600 m	36,47	36,11	36,55	36,33	35,33	35,17	35,64	36,02	35,98	35,12
−450 m	41,07	41,44	40,84	41,79	41,16	41,50	41,49	41,01	41,05	41,41
−300 m	51,54	51,58	52,44	49,97	50,98	50,85	51,61	51,43	51,32	51,69
300 m	55,20	54,85	54,48	54,74	54,89	55,23	54,61	54,48	55,69	55,45
450 m	44,64	45,10	45,79	44,08	44,49	44,87	44,90	44,81	44,78	44,33
600 m	38,76	38,39	37,83	37,71	38,36	38,26	38,42	38,78	38,32	38,65
750 m	33,60	34,45	34,34	33,86	33,76	33,71	33,69	32,91	34,26	33,12
900 m	31,71	31,36	30,72	31,07	30,62	30,55	30,86	31,13	31,28	30,43

Tabulka t4.2: Perioda T pro nit dlouhou $l = 1$ m, měřeno ve směru osy z

Bětka ovšem při provedení pokusu zjistila zajímavou věc – je–li měření prováděno podél osy x, nezůstává kyvadlo v jedné rovině – naopak se stáčí a trochu motá. Stáčení je ale téměř neznatelné oproti kyvadlu zavěšenému podél osy z, takže jsme mu nevěnovali příliš pozornost a periodu kyvadla normálně změřili. Nejlépe se měřilo když rovina kyvu byla orientována podél osy z, kulička pak nejlépe „seděla“ na dané dráze.

U pokusů podél osy z je to složitější. Ať už zavěsíme kyvadlo jakkoliv natočené, rovina kyvu se stáčí o (přibližně) konstantní úhel. Proto je měření provedeno zkrátka tak, že se počítají periody a po deseti periodách je odečten čas, nehledě na to, že se kyvadlo mezitím stočilo. Zároveň uvádíme dodatečné měření stočení roviny kyvu po deseti periodách.

-600 m	14,08	15,11	14,51	14,42	14,80	14,50	14,26	13,61	14,86	14,86
-450 m	17,31	17,07	16,79	17,13	16,86	17,21	17,30	17,73	16,68	16,43
-300 m	20,69	21,23	21,18	21,32	21,53	21,27	21,57	22,34	20,44	20,47
-150 m	28,97	30,11	29,89	29,80	29,68	29,61	28,82	29,20	29,29	29,93
150 m	29,79	29,04	29,30	30,17	29,51	29,00	29,65	29,60	29,05	29,68
300 m	21,73	21,80	22,18	21,96	20,14	21,92	22,04	21,97	22,13	21,03
450 m	18,31	17,21	17,14	18,17	17,92	17,74	17,57	17,63	18,05	19,39
600 m	15,51	15,30	15,46	14,66	15,25	15,03	15,59	16,22	14,76	15,79
750 m	13,66	13,82	13,44	14,22	13,75	13,52	14,34	13,96	13,81	13,43
900 m	13,04	12,60	12,78	12,17	12,53	12,81	12,48	12,03	12,73	12,91

Tabulka t4.3: Perioda T pro nit dlouhou $l = 1/2$ m, měřeno ve směru osy x

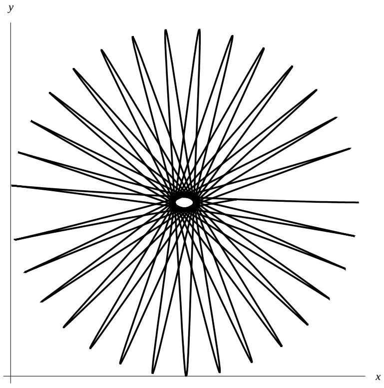
-900 m	21,43	20,42	20,72	20,45	21,17	20,17	20,36	20,72	20,93	20,54
-750 m	22,86	22,47	22,46	23,01	22,52	23,42	22,04	22,84	22,65	22,83
-600 m	24,86	25,74	25,53	25,11	25,01	25,81	25,27	25,78	25,24	25,04
-450 m	28,72	28,95	29,80	29,25	29,22	29,07	29,37	29,56	28,41	29,02
-300 m	36,59	36,88	35,69	36,19	36,26	36,73	37,21	35,29	36,14	35,84
300 m	38,66	38,61	39,12	38,72	38,20	38,05	37,86	39,28	39,45	38,86
450 m	31,70	31,40	32,46	31,38	31,74	32,40	31,80	31,87	31,75	32,05
600 m	27,85	28,71	26,56	27,35	28,16	27,12	27,28	27,04	27,79	27,73
750 m	23,29	23,85	23,52	23,76	24,06	24,31	24,40	23,38	23,98	23,77
900 m	22,11	22,66	22,12	21,48	22,21	20,70	21,82	22,06	22,12	21,72

Tabulka t4.4: Perioda T pro nit dlouhou $l = 1/2$ m, měřeno ve směru osy z

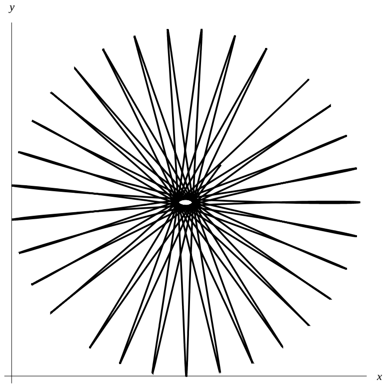
z [m]	-900	-750	-600	-450	-300	300	450	600	750	900
φ_1 [°]	-115	-128	-143	-165	-205	219	180	154	133	124
$\varphi_{0,5}$ [°]	-82	-91	-100	-118	-144	153	126	110	95	85

Tabulka t4.5: Úhel natočení po 10 periodách.

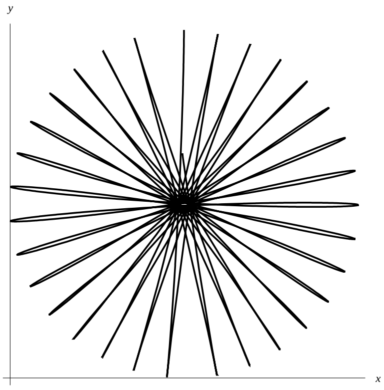
Hodnoty úhlů jsou měřeny kyvadly délky 1 m (úhel φ_1) a 0,5 m (úhel $\varphi_{0,5}$) na stejných místech jako jejich periody. Kladné znaménko znamená, že se rovina kyvu stáčí v kladném smyslu kolem směru úchyt – kulička. (Tj. kolem osy z je směr vždy stejný – záporný.)



Obr. t4.1 – Kyvadlo na počátku vychýlené ve směru osy x.



Obr. t4.2 – Kyvadlo na počátku vychýlené ve směru osy úhlu sevřeného osami x a y.



Obr. t4.3 – Kyvadlo na počátku vychýlené ve směru osy y.

Také jsme rovnou nechali Bětku nechat kyvadlo zavěšené podél osy z vykreslit obrazce kreslené kyvadlem do písku, pro lepší představu, jak stáčení probíhá. Jsou vykresleny kyvadlem asi 500 m podél kladné osy z.

Náměty na přemýšlení

Co způsobuje stáčení roviny kyvu kyvadel? Jaký je vztah úhlu otočení k periodě kyvadla a délce závěsu? Nevyskytuje se zde nějaká podezřelá „magická konstanta“? Ovlivňuje stáčení nějak periodu kmitu oproti matematickému kyvadlu? Co umíte usoudit z měření úhlu stočení kyvadla? Dala by se takto měřit Alčina síla?

Všimněte si, že Bětčiny obrazce mají vždy uprostřed elipsu. Zkuste z uvedených obrázků usoudit, jestli její osy míří vždy v jednom směru, nebo jestli závisí i na směru počáteční výchylky. Rovněž si všimněte, jak vypadají body obratu kyvadla v bodech největší amplitudy. V bodech, kde bylo kyvadlo vypuštěno jsou ostré, když se kyvadlo stočí kolmo na tento směr jsou oblejší a když se kyvadlo vrátí do původního směru, opět jsou ostré. Přijdete na to, proč?

K jakému měření by se daly využít nulové roviny, kde se zrychlení vyruší?

Irigi & Mára

Téma 5 – Deratizace

Do redakce dorazilo jediné řešení od Prof.[M] Alžběty Pechové. Zabývala se hned několika druhy sklepení a zaslala nám algoritmy na jejich deratizaci pomocí zvoleného počtu krysařů. Tvrdí, že navrhovaný počet je nejmenší možný, ale nezaslala nám důkazy a v alespoň jednom případě se domníváme, že se autorka mýlí. Tyto hypotézy zde zveřejňujeme pro inspiraci ostatních badatelů, s nadějí, že je v brzké době někdo dokáže (a my je budeme moci předat hammelnské městské radě), nebo vyvrátí.

- **mřížky o rozměru** $n \times m$: $\min(m, n) + 1$ krysařů
  Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $n < m$. Použijeme tedy $n + 1$ krysařů, kteří deratizují sklepení tak, že n z nich bude procházet mřížkou rovnoběžně, každý jedním z n řádků (resp. sloupců) mřížky, zatímco zbylý jeden bude průběžně deratizovat sloupce (resp. řádky).
- **sklepy bez cyklů**: počet krysařů=maximální počet křižovatek na jedné cestě.
  Jeden vždy zůstane stát na křižovatce a ostatní postupně deratizují jednotlivé větve.
- **loukoťové kolo**: 4 krysaři pro kolo s $n > 2$ loukotěmi
  První krysař bude celou dobu stát ve středu kola, druhý zderatizuje cestu ze středu na obvod a tam zůstane stát. Třetí a čtvrtý krysař od druhého krysaře pokračují společně po obvodu kola, na každé křižovatce se třetí zastaví, zatímco čtvrtý zderatizuje cestu do středu. Takto obejdou celé kolo až ke druhému krysaři.
  Pro kolo s jednou loukotí zřejmé postačí dva krysaři, pro dvouloukoťové kolo tři.

Autorka se také zabývala určováním počtu krysařů pro sklep pod radnicí, toto téma ale zatím necháme zcela otevřené.

Tereza

Konference Mlýn 2008

Přinášíme vám další příspěvek z konference M&M Mlýn 2008, který nám zaslal Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Husek. Ve své práci se zaobíral různými způsoby zjišťování čísla π.

π na 100 způsobů

Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Husek

Moje konfera na podzimním soustředění byla o určení čísla π. Metody, které jsem použil, budou popsány níže.

Číslo π můžeme například určit ze vztahu pro obvod kruhu:

$$o = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{o}{2r} = \frac{o}{d}\,.$$

Můžete si to zkusit i vy. Vezměte si nějaký provázek, pokud nemáte provázek, tkaničku od bot určitě máte. Změříte si délku provázku nebo tkaničky, uděláte si kruh a změříte jeho průměr, a pak si můžete vypočítat π.

Pomocí obsahů čtverce kružnici vepsané a opsané můžeme odhadnout, ve kterém intervalu leží π. Pro zjednodušení si zvolíme, že poloměr $r = 1$. Porovnáním obsahů čtverců se vztahem pro obsah kruhu, dostaneme, že π je mezi 2 a 4. Podobně můžeme postupovat u šestiúhelníků a dostáváme přesnější odhad π, to je mezi 2,598 a 3,464.

K určení π jsem použil vlastností mnohoúhelníků. Zde jsem využil obvodů mnohoúhelníku vepsaného a opsaného. Následně jsem dostal tento vztah pro hodnotu 2π:

$$2nr \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n} < 2\pi < 2nr \cdot \tan\frac{360^\circ}{2n}\,,$$

kde n je počet stran mnohoúhelníku a $360^\circ/(2n)$ je úhel, který dostaneme, když mnohoúhelník rozdělíme na stejné rovnoramenné trojúhelníky, ty rozpůlíme na pravoúhlé trojúhelníčky a v nich je to úhel, který svírá přepona s odvěsnou bližší středu kruhu.

Další metoda je, že si nakreslíme pouze čtvrtkruh do soustavy souřadnic x, y. Tento čtvrtkruh je popsán funkcí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Do něj můžeme vepisovat obdélníčky, tato metoda určení π je, ale 100× horší než metoda, při které se obdélníky konstruují tak, aby část byla vně a část uvnitř čtvrtkruhu. Počítač určil π správně na 10 desetinných míst při 1 000 000 000 pokusů. Tento výsledek můžeme srovnat i s metodou Monte Carlo, která určuje pravděpodobnost, když máme kruh vepsaný čtverci a budeme střílet do čtverce pistolí, že se trefíme do kruhu. Pravděpodobnost je $\pi/4$. Počítač u této metody napsal π správně na 4 desetinná místa při 100 000 000 pokusů.

Také si můžete zkusit udělat nějaký experiment – například pomocí homogenní jehly, kterou házíte na papír, na kterém jsou tužkou narýsovány rovnoběžné linky a pro zjednodušení jsou od sebe vzdáleny stejně jako je délka jehly. A počítáte poměr všech pokusů a případů, kdy jehla protla čáru. Tento pokus se nazývá Buffonova jehla a je pojmenovaný podle hraběte Buffona. Pravděpodobnost, že jehla protne linku, je rovna $\pi/2$. Při mých 20 pokusech jehla protla některou z čar 13×. A π mi vyšlo, že je 3,0769.

Další pokus můžete provést s válcem. Někdo už změřil objem válce a udělal na něm čáry označující objem. Změříte si výšku mezi 2 čárami, dále vnitřní průměr válce, ten vydělíte 2 a získáváte poloměr. Nyní využijete vzorce

$$V = \pi r^2 v \Rightarrow \pi = \frac{V}{r^2 v}\,.$$

Mé hodnoty byly: $d = 14{,}7\,\mathrm{mm}$, $r = 7{,}35\,\mathrm{mm}$, $v = 115{,}8\,\mathrm{mm}$, $V = 20\,\mathrm{ml} = 20\,\mathrm{cm}^3 = 20\,000\,\mathrm{mm}^3$. Pro π jsem získal hodnotu 3,197.

Nejpřesnější z metod byla ta, při které se čtvrtkruh rozdělil na obdélníky, které částečně přesahovaly čtvrtkruh. Na druhou stranu, než se počítač dostane k číslu 1 000 000 000, chvíli mu to trvá, proto bude možná rychlejší si změřit provázek.

Sloupeček $\sum_{-1}$ ve výsledkové listině je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t1	t3	t4	t5	k	+	$\sum_0$	$\sum_1$
			Úlohy											
1.	Dr.^{MM} Josef Tkadlec	63					10	7		15			32	32
2.	Mgr.^{MM} Štěpán Šimsa	31	0			2				5		0	7	31
3.	Dr.^{MM} Tomáš Kubelka	57	1	3	1	2						2	9	30
4.	Mgr.^{MM} Filip Štědronský	26				2						0	2	26
5.	Prof.^{MM} Alžběta Pechová	205	1	0	4	2			3	8		0	18	25
6.	Mgr.^{MM} Eliška Nekvapilová	44												22
7.	Dr.^{MM} Jakub Töpfer	55												20
8.	Bc.^{MM} Zuzana Dočekalová	19												19
9.	Bc.^{MM} Michal Husek	16	1	0	1	1					4	0	7	16
10–11.	Dr.^{MM} Tomáš Bartoněk	55	1		0	2				2		0	5	14
	Mgr.^{MM} Lukáš Zavřel	48	3	0		2						0	5	14
12.	Dr.^{MM} Jakub Klemsa	51		1	4	2						0	7	13
13–14.	Doc.^{MM} Petr Pecha	132	0		2	2						0	4	10
	Dr.^{MM} Alena Bušáková	57	2		3	1			3			1	10	10
15–17.	Dr.^{MM} Miroslav Koblížek	52												9
	Dr.^{MM} Alžběta Prokopová	52												9
	Filip Hlásek	9	3			2						0	5	9
18–19.	Vojtěch Miloš	8	3			2						0	5	8
	Barbora Šmídová	8												8
20–24.	Dr.^{MM} Miroslav Klimoš	60												7
	Mgr.^{MM} Jan Vaňhara	33												7
	Mgr.^{MM} Jitka Novotná	32												7
	Mgr.^{MM} Hana Bílková	34				2						0	2	7
	Alena Jurásková	7		1		2						1	4	7
25–28.	Dr.^{MM} Ladislav Bačo	89	3	1		2						0	6	6
	Bc.^{MM} Martina Vaváčková	11												6
	Vojtěch Dziewicki	6												6
	Pavel Novotný	6	0	2								0	2	6
29.	Anna Chejnovská	5				1						0	1	5
30–33.	Mgr.^{MM} Peter Smolárik	28	3	0		1						0	4	4
	Bc.^{MM} Zuzana Tirešková	18		0		1						0	1	4
	Martina Bekrová	4	0	3								0	3	4
	Tereza Zábojníková	4												4
34–35.	Pavel Kratochvíl	3												3
	Libor Plucnar	3												3
36.	Barbora Böhmová	2	0	0	0							0	0	2
37.	Michaela Kochmanová	0	0	0								0	0	0

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550
58223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034
86104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
33057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395
22473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343
01465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950
24459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353
78759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362
25994138912497217752834791315155748572424541506959508295331168617278558890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583
61603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966024058
03815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858
69269956909272107975093029553211653449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938000816470
60016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184
27255025425688767179049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608412848862694
56042419652850222106611863067442786220391949450471237137869609563643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900994657640
78951269468398352595709825822620522489407726719478268482601476990902640136394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221
69646151570985838741059788595977297549893016175392846813826868386894277415599185592524595395943104997252468084598727364469584865383673
62226260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894416948685558484063534220722258284886481584560285060168427394
52267467678895252138522549954666727823986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893145669
13686722874894056010150330861792868092087476091782493858900971490967598526136554978189312978482168299894872265880485756401427047755513
23796414515237462343645428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344037420073105
78539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191048481005370614680674919278191197939952061419663428754440643745123718192
17999839101591956181467514269123974894090718649423196156794520809514655022523160388193014209376213785595663893778708303906979207734672
21825625996615014215030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881907104863317346496514539057962685610055081066587
96998163574736384052571459102897064140110971206280439039759515677157700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125
86732157919841484882916447060957527069572209175671167229109816909152801735067127485832228718352093539657251210835791513698820914442100
67510334671103141267111369908658516398315019701651511685171437657618351556508849099898599823873455283316355076479185358932261854896321
32933089857064204675259070915481416549859461637180270981994309924488957571282890592323326097299712084433573265489382391193259746366730
58360414281388303203824903758985243744170291327656180937734440307074692112019130203303801976211011004492932151608424448596376698389522
86847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189154411010446823252716201052652272111660396665573092547110557
85376346682065310989652691862056476931257058635662018558100729360659876486117910453348850346113657686753249441668039626579787718556084
55296541266540853061434443185867697514566140680070023787765913440171274947042056223053899456131407112700040785473326993908145466464588
07972708266830634328587856983052358089330657574067954571637752542021149557615814002501262285941302164715509792592309907965473761255176
56751357517829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480
10941214722131794764777262241425485454033215718530614228813758504306332175182979866223717215916077166925474873898665494945011465406284
33663937900397692656721463853067360965712091807638327166416274888800786925602902284721040317211860820419000422966171196377921337575114
95950156604963186294726547364252308177036751590673502350728354056704038674351362222477158915049530984448933309634087807693259939780541
93414473774418426312986080998886874132604721569516239658645730216315981931951673538129741677294786724229246543668009806769282382806899
64004824354037014163149658979409243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881617557829735233446042815126
27203734314653197777416031990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927777103863877343177207545654532207770
92120190516609628049092636019759882816133231666365286193266863360627356763035447762803504507772355471058595487027908143562401451718062
46436267945612753181340783303362542327839449753824372058353114771199260638133467768796959703098339130771098704085913374641442822772634
65947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788
51852909285452011658393419656213491434159562586586557055269049652098580338507224264829397285847831630577775606888764462482468579260395
35277348030480290058760758251047470916439613626760449256274204208320856611906254543372131535958450687724602901618766795240616342522577
19542916299193064553779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135711136941091193932519107602082520261879853188770
58429725916778131496990090192116971737278476847268608490033770242429165130050051683233643503895170298939223345172201381280696501178440
87451960121228599371623130171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187407866808818338510228334508504860825039302133219
71551843063545500766828294930413776552793975175461395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087112328278921250771
26294632295639898989358211674562701021835646220134967151881909730381198004973407239610368540664319395097901906996395524530054505806855
01956730229219139339185680344903982059551002263535361920419947455385938102343955449597783779023742161727111723643435439478221818528624
08514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141595781119
63583300594087306812160287649628674460477464915995054973742562690104903778198683593814657412680492564879855614537234786733039046883834
36346553794986419270563872931748723320837601123029911367938627089438799362016295154133714248928307220126901475466847653576164773794675
20049075715552781965362132392640616013635815590742202020318727760527721900556148425551879253034351398442532234157623361064250639049750
08656271095359194658975141310348227693062474353632569160781547818115284366795706110861533150445212747392454494542368288606134084148637
76700961207151249140430272538607648236341433462351897576645216413767969031495019108575984423919862916421939949072362346468441173940326
59184044378051333894525742399508296591228508555821572503107125701266830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101
00299607838690929160302884002691041407928862150784245167090870006992821206604183718065355672525325675328612910424877618258297651579598
47035622262934860034158722980534989650226291748788202734209222245339856264766914905562842503912757710284027998066365825488926488025456
61017296702664076559042909945681506526530537182941270336931378517860904070866711496558343434769338578171138645587367812301458768712660
34891390956200993936103102916161528813843790990423174733639480457593149314052976347574811935670911013775172100803155902485309066920376
71922033229094334676851422144773793937517034436619910403375111735471918550464490263655128162288244625759163330391072253837421821408835
08657391771509682887478265699599574490661758344137522397096834080053559849175417381883999446974867626551658276584835884531427756879002
90951702835297163445621296404352311760066510124120065975585127617858382920419748442360800719304576189323492292796501987518721272675079
81255470958904556357921221033346697499235630254947802490114195212382815309114079073860251522742995818072471625916685451333123948049470
79119153267343028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327131425170296923488962766844032326092752496035799646925650
49368183609003238092934595889706953653494060340216654437558900456328822505452556405644824651518754711962184439658253375438856909411303
15095261793780029741207665147939425902989695946995565761218656196733786236256125216320862869222103274889218654364802296780705765615144
63204692790682120738837781423356282360896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279839400415297002878307
66709444745601345564172543709069793961225714298946715435784687886144458123145935719849225284716050492212424701412147805734551050080190
86996033027634787081081754501193071412233908663938339529425786905076431006383519834389341596131854347546495569781038293097164651438407
00707360411237359984345225161050702705623526601276484830840761183013052793205427462865403603674532865105706587488225698157936789766974
22057505968344086973502014102067235850200724522563265134105592401902742162484391403599895353945909440704691209140938700126456001623742
88021092764579310657922955249887275846101264836999892256959688159205600101655256375678566722796619885782794848855834397518744545512965
63443480396642055798293680435220277098429423253302257634180703947699415979159453006975214829336655566156787364005366656416547321704390
35213295435291694145990416087532018683793702348886894791510716378529023452924407736594956305100742108714261349745956151384987137570471
01787957310422969066670214498637464595280824369445789772330048764765241339075920434019634039114732023380715095222010682563427471646024
33544005152126693249341967397704159568375355516673027390074972973635496453328886984406119649616277344951827369558822075735517665158985
51909866653935494810688732068599075407923424023009259007017319603622547564789406475483466477604114632339056513433068449539790709030234
60461470961696886885014083470405460742958699138296682468185710318879065287036650832431974404771855678934823089431068287027228097362480
93996270607472645539925399442808113736943388729406307926159599546262462970706259484556903471197299640908941805953439325123623550813494
90043642785271383159125689892951964272875739469142725343669415323610045373048819855170659412173524625895487301676002988659257866285612
49665523533829428785425340483083307016537228563559152534784459818313411290019992059813522051173365856407826484942764411376393866924...

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz
WWW: http://mam.mff.cuni.cz