M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník XV číslo 3

Termín odeslání: pondělí, 12. 1. 2009

Milí čtenáři,
opět se k vám vracíme s dalším číslem časopisu M&M. Toto číslo se trochu opozdilo oproti původnímu plánu, neboť nám příprava soustředění a dne otevřených věcí zabrala více času, než jsme čekali.

A tak se z tohoto čísla stalo číslo předvánoční. Naleznete zde první řešení letošních tématek. Zajímavostí může být, že nejmenším nevybraným číslem v tématu jedna se stala trochu nečekaně jednička. Více se dočtete v článku. Také zde naleznete novinku. Je to příspěvek od Mgr.[MM] Štěpána Šimsy a Barbory Šmídové na téma hry NIM.

Příští číslo tohoto časopisu vyjde až v příštím roce, proto vám přejeme pěkný zbytek roku a tak trochu tradičně šťastné a veselé …

Redakce M&M

Zadání úloh

Úloha 3.1 – Sety (3b)

Ve hře Sety je 81 kartiček, na kterých jsou různé symboly. Každá kartička má jiný obrázek. Obrázky se liší ve čtyřech věcech – barva (modrá, červená, žlutá), počet útvarů (jeden až tři), tvar útvarů (čverce, trojúhelníky, kolečka) a výplní útvarů (prázdné, plné, šrafované). Pokud si vybereme libovolnou kombinaci těchto čtyř vlastností, máme právě jednu kartičku.

Hraje se tak, že se postupně vykládájí kartičky lícem vzhůru. Cílem hráčů je najít trojici karet, které se v každé vlastnosti buď všechny shodují, nebo všechny navzájem liší. Takovéto trojici říkáme set a když ji někdo najde, vezme si ji k sobě.

Často se stává, že na konci zbyde šest karet, které už k sobě nepasují, někdy se stane, že nezbude žádná karta. Zatím se mi ale nestalo, že by zbyly právě tři karty. Je to pravidlo, nebo jen náhoda?

Úloha 3.2 – Pokažená propiska (4b)

Když jednou Riki seděl ve škole a nudil se (zrovna probírali rozklad na parciální zlomky, který už znal), tak si hrál s propiskou. Zapínal ji a vypínal ji, až se mu najednou rozletěla. Našel všechny kousky až na pružinku.

Bylo mu líto propisku vyhodit a tak se rozhodl, že použije jinou pružinku. Doma našel jen n menších, které za sebe naskládal místo té ztracené. Když propisku zkusil zapnout, zjistil, že jde nějak víc ztuha.

Pružinky, které Riki použil místo té ztrcené, mají tuhosti k_1, k_2, …, k_n. Jakou mají pružinky výslednou tuhost?

Úloha 3.3 – Zatracené jedničky (5b)

Najděte součet čtyřiceti nejmenších prvočíselných dělitelů čísla

$$\underbrace{1111111111\ldots111111}_{10^9\text{ jedniček}}.$$

Úloha 3.4 – Problém s promocí (2b)

MatFyzák Eduard se po dlouhých letech dočkal promoce. Protože ví, že se jedná o významnou společenskou událost, vypůjčil si knihu o etiketě. Zde se dozvěděl, že by na promoci měl pozvat: otce, matku, bratra, sestru, syna, dceru, strýce, tetu, bratrance[1] a sestřenici.

Eduard si nebyl jist některými pojmy. Nakonec se na wikipedii dozvěděl následující informace:

- otec: muž, který vás zplodil spolu s jinou ženou,
- matka: žena, která vás zplodila spolu s jiným mužem,
- syn: muž, kterého jste zplodil s jinou osobou opačného pohlaví,
- dcera: žena, kterou jste zplodil s jinou osobou opačného pohlaví,
- bratr: syn vaší matky nebo vašeho otce a zároveň to nejste vy,
- sestra: dcera vaší matky nebo vašeho otce a zároveň to nejste vy,
- strýc: bratr vaší matky nebo vašeho otce,
- teta : sestra vaší matky nebo vašeho otce,
- bratranec: syn vaší tety a vašeho strýce.
- sestřenice: dcera vaší tety a vašeho strýce.

Eduarda tento problém celkem zaujal. Víte, kolik nejméně lidí by teoreticky mohl Eduard pozvat na promoci, aby pozval všechny rodinné příslušníky zmíněné v knize o etice?

[1] Tento tvar slova by mohl být trochu nejasný. Proto dodáváme, že se jedná o jednotné číslo

Řešení úloh

Úloha 1.0 – Vzorec (1b)

Zadání:
Do prvního čísla jsme se rozhodli připravit pro Vás speciální úlohu. Na úvodní straně (prvního čísla tohoto ročníku) můžete najít zvláštní rovnice. Tyto rovnice popisují odvození jednoho známého fyzikálního vztahu. Poznáte, o který vztah jde?

Řešení:
Musíme se přiznat, že jsme vám jako úplně první úlohu tohoto ročníku připravili poměrně složitý problém. Na první straně prvního čísla tohoto ročníku bylo totiž odvození Gaussova zákona elektrostatiky.

Tento zákon popisuje vztah mezi elektrickou indukcí $\vec{D}$ a hustotou náboje ϱ. Zákon se odvozuje tak, že si v elektrostatickém poli vytvoříme myšlenou kouli o poloměru R. Tok elektrické intenzity $\vec{E}$ plochou této koule je dán vztahem:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{R}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\oint_S \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho(\vec{R})\mathrm{d}V;$$

$\vec{E}\left(\vec{R}\right)$ je intenzita elektrického pole v místě $\vec{R}$, ε_0 je permitivita vakua a Q je celkový náboj uvnitř myšlené kuličky.

Nyní jsme udělali to, že jsme odvodili, jak závisí tok plochou kuličky na náboji, který je uvnitř. A teď se na tok podíváme ještě trochu jinak. Použijeme tzv. Gaussovu větu integrálního počtu, jejíž znění je možné zapsat vztahem:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{R}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{R})\mathrm{d}V,$$

kde $\nabla\cdot$ je tzv. divergence. Jedná se o součet parciálních derivací funkce, na kterou tento operátor působí.

Nyní jsme jen krůček od hledaného výsledku. Neboť dáme do rovnosti tyto vztahy a dostáváme:

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{\varrho(\vec{R})}{\varepsilon_0}.$$

Uvážením vztahu $\varepsilon_0\vec{E}(\vec{R}) = \vec{D}(\vec{R})$ dostáváme klasický tvar, který můžeme najít i v Maxwellových rovnicích:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{R}) = \varrho(\vec{R}).$$

Tato úloha byla poměrně složitá, až se však s Maxwellovými rovnicemi setkáte, snad budete alespoň trochu vědět, o čem se mluví.

(R)adim

Úloha 1.1 – Kardanův závěs (4b)

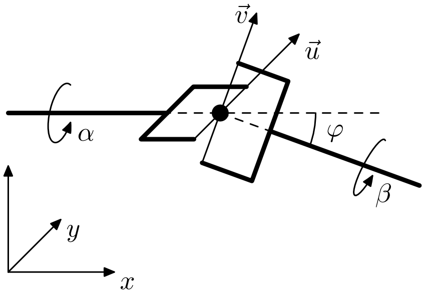
Zadání:

Kardan (kardanův závěs) je spoj dvou hřídelí, který umožňuje přenos otáčivého pohybu z jedné hřídele na druhou i tehdy, když spolu svírají libovolný úhel. Středem kardanu jsou dvě vzájemně kolmé osy ležící v jedné rovině, které jsou spolu pevně spojeny, ale celý díl je volný. K jedné z těchto os je otočně připojena jedna hřídel, k druhé ose druhá hřídel.

Předpokládejte, že hřídele jsou ve výchozí poloze. První hřídel se otočí o úhel α. Jak závisí velikost úhlu, o který se otočí druhá hřídel, na velikosti úhlu, který svírají osy hřídelí? Pro hřídele ležící v jedné přímce bude úhel natočení shodný. Změní se to nějak, pokud v jedné přímce ležet nebudou? Jak? (Připomínám, že nás zajímá nejen výsledek, ale i jeho odvození.)

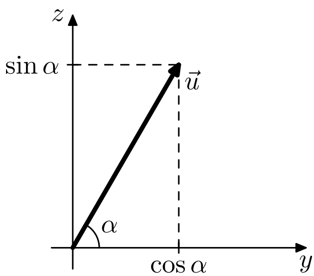
Řešení:

Jak ve svém řešení pěkně poznamenal Mgr.[M] Filip Štědronský, pokud uvěříme, že tento spoj umí nějakým způsobem skutečně otáčení přenášet, máme tím fyziku vyřešenou a zbývá jen geometrie. Pokud bychom chtěli řešit fyziku, byla by tu navíc otázka působících sil a podobné věci, které jsou poněkud nad rámec zadání. Takže zůstaňme u geometrie.



Obr. r1.1.1

K analýze situace je vhodné si nejprve nadefinovat souřadnice a označení. Počátek soustavy souřadnic budiž v místě středu kardanu (černé kolečko na obrázku), směry os definujme podle obr. r1.1.1. Úhel hnací hřídele označme α a úhel hnané β. Směr hnací hřídele[2] je $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$. Směrnici krátké osky spojené s hnanou hřídelí budeme označovat vektorem $\boldsymbol{u}$. Obdobně směr hnané hřídele bude $\boldsymbol{b}$ a směr osky spojené s hnanou hřídelí pak $\boldsymbol{v}$. Odklon hnané hřídele od hnací označíme φ.



Obr. r1.1.2

Začněme vyjádřením směru osky $\boldsymbol{u}$. V základní poloze podle obrázku má směr $(0, 1, 0)$, který se ale mění s úhlem α. Jednoduchou trigonometrií lze ukázat (viz obrázek r1.1.2, který je řezem v rovině yz), že směrnice této osky je $\boldsymbol{u} = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$. Obdobným způsobem můžeme určit směrnici hnané hřídele, která leží stále v rovině xz. Její směr je $\boldsymbol{b} = (\cos\varphi, 0, -\sin\varphi)$.

Určit směr osky $\boldsymbol{v}$ je poněkud složitější. Oska se stále pohybuje jen v rovině kolmé k hřídeli $\boldsymbol{b}$. Pokud si v této rovině najdeme dva kolmé jednotkové vektory $\boldsymbol{k_0}$ a $\boldsymbol{l_0}$, můžeme směr osky $\boldsymbol{v}$ zapsat výrazem $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{k_0} + l\boldsymbol{l_0}$,

[2] Směr přímky či úsečky budeme popisovat jednotkovým vektorem, jehož směr je stejný jako směr popisované přímky. Exaktněji řečeno, pokud k určitému bodu přímky budeme přičítat různé násobky tohoto vektoru, dostaneme tak postupně všechny body přímky.

kde reálná čísla k a l mají význam klasických složek vektoru $\boldsymbol{v}$, ovšem už ne v původní souřadné soustavě s osami x, y, z, ale právě v soustavě s osami $\boldsymbol{k_0}$ a $\boldsymbol{l_0}$.

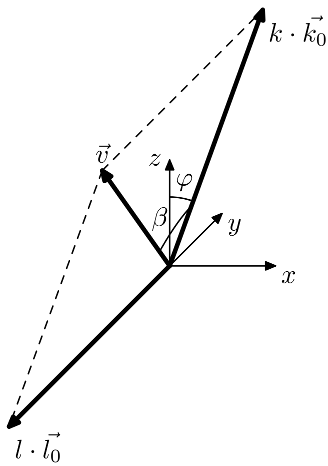
Pro pohodlnější počítání si první z jednotkových vektorů zvolíme v počátečním směru osky $\boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{k_0} = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$. Druhý, k němu kolmý, vektor bude $\boldsymbol{l_0} = (0, 1, 0)$. Triviálně lze ověřit, že jsou oba jednotkové a zároveň kolmé k sobě navzájem i k $\boldsymbol{b}$. Počáteční směr osky vyjádřený ve složkách k a l je tedy $(1, 0)$. Analogicky k předchozím úvahám můžeme zapsat vektor $\boldsymbol{v}$ po otočení o úhel β ve složkách k, l jako $(\cos\beta, -\sin\beta)$. (Záporné znaménko souvisí se směrem otáčení a volbou směru $\boldsymbol{l_0}$.)

Pojďme nyní vyjádřit směr $\boldsymbol{v}$ ve složkách x, y a z. Využijeme k tomu fakt, že $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{k_0} + l\boldsymbol{l_0}$, tedy po dosazení z předchozího odstavce

$$\boldsymbol{v} = \cos\beta \cdot (\sin\varphi, 0, \cos\varphi) - \sin\beta \cdot (0, 1, 0)$$

už ve složkách x, y, z. Po jednoduché úpravě

$$\boldsymbol{v} = (\cos\beta \sin\varphi, -\sin\beta, \cos\beta\cos\varphi)\,.$$



Obr. r1.1.3

Zbývá spojit otočení hnací a hnané hřídele. Ze zadání víme, že obě osky na sebe musí být kolmé, což lze vektorovými operacemi vyjádřit tím, že skalární součin jejich směrových vektorů musí být nulový: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$. Dosazením výše odvozených výrazů pro vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (0, \cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta\sin\varphi, -\sin\beta, \cos\beta\cos\varphi)\,,\\ 0 &= -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi\,,\\ \cos\alpha\sin\beta &= \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

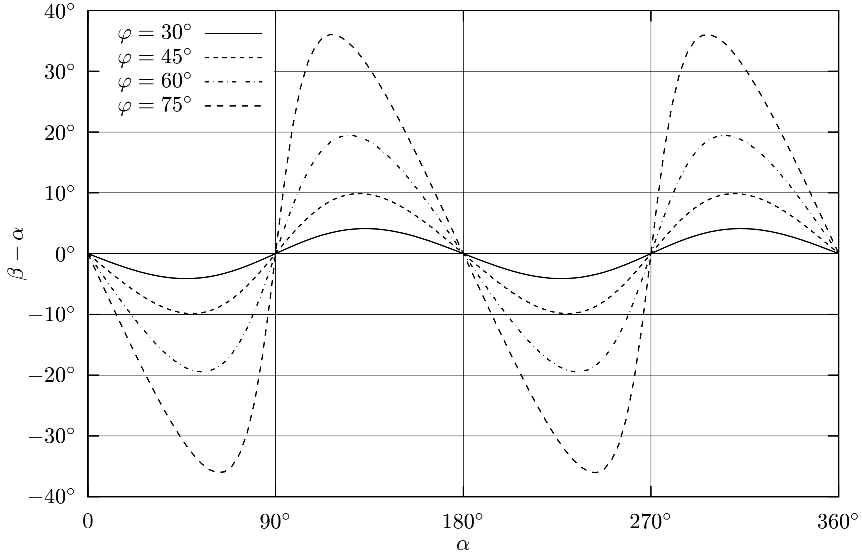
tedy

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi \qquad \text{pro } \alpha \neq (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$$

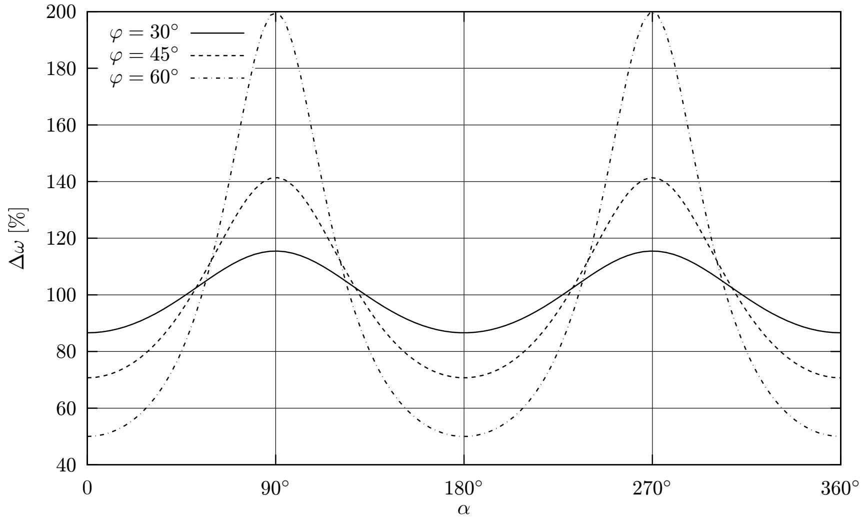
a

$$\beta = \alpha \qquad \text{pro } \alpha = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Vidíme, že pro nenulový odklon hřídelí ($\cos\varphi \neq 1$) se bude úhel natočení hnací a hnané hřídele lišit. Odchylka úhlu hnací a hnané hřídele během celé otočky je nakreslena v grafu r1.1.4. Graf r1.1.5 pak zobrazuje odchylku rychlostí hřídelí v závislosti na úhlu otáčení. Vidíme, že pro úhly natočení rovné celočíselným násobkům $\pi/2$ jsou obě hřídele natočeny stejně, ale mezi těmito polohami se liší. Zároveň čím je větší úhel φ, tím jsou odchylky větší. Pokud bychom spočetli i přenos síly, zjistíme, že s rostoucím odkloněním hřídelí narůstají i odchylky v tomto a pro kolmé hřídele už není otáčení možné.



Obr. r1.1.4 – Rozdíl úhlů natočení hnací a hnané hřídele v závislosti na natočení hnací hřídele.



Obr. r1.1.5 – Odchylka úhlové rychlosti hnané hřídele od rychlosti hnací hřídele v závislosti na úhlu natočení hnací hřídele.

Úloha 1.2 – Podivný most (5b)

Zadání:

James Bond je právě na jedné ze svých misí. Podařilo se mu najít hledané zařízení na zničení světa a nyní se snaží s ním uniknout. Při svém úprku před nepřáteli se dostal na okraj propasti, přes kterou nevede žádný most, ale pouze dva rovnoběžné vodiče.

Jedním z těchto vodičů protéká střídavý proud i o frekvenci f. Druhý vodič je uzemněn. James Bond by rád po jednom z těchto vodičů přeručkoval, ale není si jist, zda se mu nic nestane. Nemá k dispozici nic, čím by mohl rozhodnout, který vodič je který. I on může zemřít při zásahu elektrickým proudem.

James má málo času. Jeho pronásledovatelé se blíží, proto by rád dával ruce při ručkování co nejdál od sebe (maximální rozpětí jeho rukou je s). Chce si být ovšem jistý, že se mu nic nestane, to znamená, že rozdíl potenciálů míst, kterých se drží, musí být menší než U. Jak nejdál od sebe může dávat ruce?

Předpokládejte,

a) že má speciální agentské tabulky, kde může najít jakou rychlostí se šíří střídavý signál daným vedením;
b) že tyto tabulky nemá, ale ví, že se jedná o nekonečně dlouhé vedení dvou vodičů vzdálených l.

Vodiče jsou vyrobeny z mědi s měrným elektrickým odporem ϱ a průřezem S. Vše se odehrává ve vzduchu s permitivitou ε a permeabilitou μ.

Řešení:

Tato úloha se ukázala pro vás složitější než jsme čekali. A to i v první (o dost lehčí) části. Jak tedy postupovat?

Měli bychom vyjádřit napětí v závislost na poloze a na čase. Víme, že vodičem protéká střídavý proud, který můžeme pro dané místo obecně popsat vztahem:

$$i = I_{max} \cos\left(\omega t + \varphi\right), \tag{r1.2.1}$$

kde I_{max} je maximální hodnota proudu, φ udává počáteční fázi proudu (hodnotou φ je dána hodnota proudu v čase $t = 0$) a ω je úhlová frekvence proudu daná vztahem:

$$\omega = 2\pi \cdot f, \tag{r1.2.2}$$

kde f je frekvence proudu.

Nyní se může zdát, že máme skoro vyhráno. James Bond se drží dvou bodů na vodiče vzdálenosti x. Odpor mezi těmito místy je

$$R = \varrho \frac{x}{S}\,. \tag{r1.2.3}$$

Z Ohmova zákona víme, že

$$u = i \cdot R\,. \tag{r1.2.4}$$

A tedy známe napětí mezi těmito body. Ovšem zdání klame. Proud se v tomto úseku mění, a proto musíme postupovat opatrněji.

Proto budeme zkoumat napětí na velmi malém kousku vodiče délky $\mathrm{d}x$. Předpokládejme, že tento kousek je tak malinkatý, že se v jeho délce mění proud jen zanedbatelně.

Abychom určili napětí v tomto místě, musíme ještě trochu prozkoumat vztah (r1.2.1). Zadefinujme si, že v místě, které si označím $x = 0$, bude počáteční fáze proudu $\varphi = 0$.

V místě vzdáleném x od tohoto místa bude proud jiný. Neboť po zapnutí proudu zde poteče proud I_{max} ne v čase $t = 0$, ale v čase $\widetilde{t}$. To je čas, který trvá, než vlnění, které se pohybuje rychlostí v, překoná vzdálenost x. Odtud tak můžeme určit počáteční fázi proudu ve vzdálenosti x:

$$\varphi = -\omega \frac{x}{v} \,. \tag{r1.2.5}$$

Nyní můžeme postupně dosazovat vztahy do rovnice (r1.2.1) a následně do Ohmova zákona (vztah (r1.2.4)). Získáme tak závislost napětí v úseku délky $\mathrm{d}x$ v závislosti na čase a na vzdálenosti od místa $x = 0$:

$$u\,(t, x) = I_{max} \cos\left(2\pi f \cdot t - 2\pi f \frac{x}{v}\right) \cdot \varrho \frac{\mathrm{d}x}{S} \,. \tag{r1.2.6}$$

Tímto jsme získali napětí na malinkatém kousku vodiče $\mathrm{d}x$. Pokud bychom ale chtěli vědět, jaké je napětí mezi dvěma body ve vzdálenost x, musíme postupně sčítat napětí na těchto kouscích vodiče. K sčítání malinkatých kousků (nekonečně malých) se používá operace zvaná integrování.

Chceme tedy vypočítat:

$$\int_0^x I_{max} \cos\left(2\pi f \cdot t - 2\pi f \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{\varrho}{S} \mathrm{d}x \,. \tag{r1.2.7}$$

K výpočtu tohoto integrálu je nutno použít substituci $2\pi f \cdot t - 2\pi f \frac{x}{v} = y$, $\mathrm{d}x = -\frac{v}{2\pi f}\mathrm{d}y$. Dosadíme tuto substituci a konstanty vytkneme před integrál.

$$u = -I_{max} \frac{\varrho}{S} \frac{v}{2\pi f} \int_0^A \cos\,(y)\,\mathrm{d}y \,. \tag{r1.2.8}$$

Dostaneme tak tabulkový integrál $\int \cos(y)\mathrm{d}y = -\sin(y)$. Po vypočtení vrátíme zpět substituci a dostaneme:

$$u = I_{max} \frac{\varrho}{S} \frac{v}{2\pi f} \left[\sin\left(2\pi f \cdot t - 2\pi f \frac{x}{v}\right)\right]_0^x \,, \tag{r1.2.9}$$

což můžeme dále upravit na:

$$u = I_{max} \frac{\varrho}{S} \frac{v}{2\pi f} \left(\sin\left(2\pi f \cdot t - 2\pi f \frac{x}{v}\right) - \sin\,(2\pi f \cdot t)\right) \,. \tag{r1.2.10}$$

Užitím vztahu pro rozdíl funkcí sinus

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \,, \tag{r1.2.11}$$

můžeme upravit vztah (r1.2.10):

$$u = 2 \cdot I_{max} \frac{\varrho}{S} \frac{v}{2\pi f} \sin\left(-2\pi f \frac{x}{2v}\right) \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{x}{2v}\right)\right) . \qquad \text{(r1.2.12)}$$

Nás zajímá, kdy tento vztah v závislosti na čase nabývá maxima. To nastane, pokud hodnota funkce cosinus bude rovna 1. Tedy

$$U_{max} = I_{max} \frac{\varrho}{S} \frac{v}{\pi f} \sin\left(-\pi f \frac{x}{v}\right) . \qquad \text{(r1.2.13)}$$

Hledáme tedy taková x_{max}, pro které platí, že $U_{max} < U$. (U je hodnota napětí, která Jamesovi neublíží). Najdeme mezní případ x_{max}, kdy $U_{max} = U$:

$$\frac{U_{max}}{I_{max}} \frac{S}{\varrho} \frac{\pi f}{v} = \sin\left(-\pi f \frac{x}{v}\right) . \qquad \text{(r1.2.14)}$$

Je třeba se ale ještě chvilku zastavit, protože funkce sinus je periodická. Proto když k jejímu argumentu přičteme $K \cdot 2\pi$, kde K je celé číslo, tak se nic nezmění.

$$\arcsin\left(\frac{U_{max}}{I_{max}} \frac{S}{\varrho} \frac{\pi f}{v}\right) = -\pi f \frac{x}{v} + K \cdot 2\pi ; \qquad \text{(r1.2.15)}$$

$$x = \frac{-v}{\pi f} \left(\arcsin\left(\frac{U_{max}}{I_{max}} \frac{S}{\varrho} \frac{\pi f}{v}\right) - K \cdot 2\pi\right) . \qquad \text{(r1.2.16)}$$

Čímž jsme konečně dostali podmínku. Pokud bychom znali konkrétní hodnoty, tak nejdelší vzdálenost, kam by James mohl dát ruce, je dána vztahem (r1.2.16). Ovšem nebylo by to tak jednoduché, museli bychom najít takové celé K, pro které by platilo, že x je co největší a zároveň $x < l$, kde l je maximální rozpětí rukou Jamese Bonda, které máme zadané.

Vzhledem k tomu, že se varianta zadání a) ukázala takto složitá, variantu zadání b), kdy neznáme rychlost šíření, si zjednodušíme tak,že pro určení rychlosti šíření nebudeme uvažovat ztráty. Rychlost šíření pak dostaneme vztahem:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} . \qquad \text{(r1.2.17)}$$

Jedná se o veliké zjednodušení, ale pro tentokrát se s ním spokojíme, abychom vás uplně neumořili. Jen pro zajímavost, vztah (r1.2.17) jde odvodit z Maxwellových rovnic. Z nich je možné odvodit tzv. vlnovou rovnici, ze které plyne výše zmiňovaný vztah (r1.2.17).

(R)adim

Úloha 1.3 – Přičíst, či vynásobit (4b)

Zadání:

Uvažte následující hru pro dva hráče: Začínáte s číslem 1 a hráč na tahu buď k tomuto číslu přičte 1 nebo ho vynásobí dvěma. Takto se střídají, dokud nedosáhnou předem daného čísla k. Kdo ho dosáhne nebo překročí, prohrál. Pro která k byste chtěli začínat a jak byste hráli?

Řešení:

Pokud je k sudé, má úloha dosti jednoduché řešení: kdybychom začínali, a tedy řekli číslo 2, soupeř může říct 3, a protože ať uděláme cokoli, z lichého čísla zase liché nevyrobíme, musíme se spokojit s nějakým sudým a soupeř může celou dobu pouze přičítat jedničky a říkat tak samá lichá čísla. Takže ten, kdo první dosáhne nebo překročí k, budeme určitě my.

Úlohu pro lichá k budeme řešit od konce. Nejprv si uvědomíme, jak budou vypadat poslední tahy – pro čísla větší než $\frac{k}{2}$ by hráč, který vynásobí číslo dvěma okamžitě prohrál, oba se tedy mohou nanejvýš střídat v přičítání jedničky – jeden tedy bude mít samá sudá, jeden samá lichá čísla. A ten, kdo bude mít lichá dosáhne k a prohraje. Cílem je tedy jako první získat sudé číslo větší než $\frac{k}{2}$. To může pomocí násobení dvěma udělat ten, komu soupeř přihraje číslo větší než $\frac{k}{4}$. Nemusíme tedy hrát o to, kdo první překročí k, stačí hrát o to kdo překročí $\frac{k}{4}$, neboli dosáhne alespoň $\lceil\frac{k}{4}\rceil$. Pokud je $\lceil\frac{k}{4}\rceil$ sudé, už víme, jak hra dopadne – ten kdo začal, prohraje. Je-li $\lceil\frac{k}{4}\rceil$ liché, zopakujeme předchozí úvahu a dojdeme k tomu, že nemusíme hrát do $\frac{k}{4}$, ale stačí do $\frac{k}{16}$. Takto hru můžeme zmenšovat a zmenšovat, dokud nenarazíme na nějaké $\lceil\frac{k}{4^n}\rceil$, které je sudé, v tom případě začínající hráč prohraje, nebo dojdeme k $\lceil\frac{k}{4^n}\rceil = 3$, v tom případě určitě prohraje ten, kdo je druhý v pořadí.

Teď už umíme pro každé číslo vcelku pohodlně rozhodnout, zda chceme nebo nechceme začínat. Představme si ovšem, že bychom chtěli třeba sestavit seznam sta různých k, pro která chceme začínat. K popisu takových k nám chybí jen krůček – zapsání k do dvojkové soustavy. V té je dělení čtyřmi velice jednoduché – posuneme desetinnou čárku o dvě cifry doleva. Protože čtyřmi dělíme vždy lichá čísla, tj. ta s jedničkou na konci, horní celou část ze čtvrtiny k spočteme tak, že smažeme poslední dvě cifry k a k získanému číslu přičteme jedničku. Po tomhle výsledku chceme aby byl lichý, takže před přičtením jedničky musel mít na konci 0. Tím už jsme dostali popis čísel, pro která se vyplatí začínat – jsou to ta, která jsou lichá (tj. jejich poslední cifra je 1) a když postupně umazáváme dvojice cifer z jejich dvojkového zápisu, dostáváme na konci 0 – tedy jejich třetí, pátá, sedmá, devátá… cifra zprava musí být 0. Například $3 = (011)_2$, $9 = (1001)_2, 11 = (1011)_2, 33 = (100001)_2, 35 = (100011)_2, 41 = (101001)_2$, $43 = (101011)_2 \ldots$

Tereza

Úloha 1.4 – Kytička pro MatFyzačku (2b)

Zadání:

Říká se, že MatFyzáci jsou občas zvláštní. Jedna z legend praví, že pokud chcete vyjevit MatFyzačce svou přízeň, tak je nejlepší jí místo zamilované SMS poslat papírek se vzorcem

$$y = \sqrt{|x|} \pm \sqrt{1 - |x|}$$

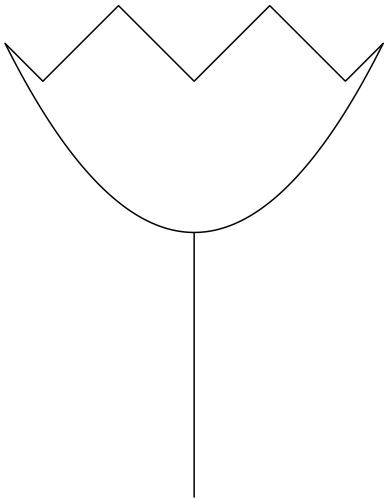
Jak postupovat dál při získávání přízně? Je romantické Vaší dívce věnovat květiny. Proto se pokuste navrhnout vzorec křivky, která by vykreslila obrys některé květiny.

Řešení:

Úloha byla tak obtížná, jak jste chtěli. Kdo s funkcemi není moc kamarád, vymyslel něco jednoduššího, popřípadě použil i zadání.

Hodně důležitá byla představivost. Také se hodila zručnost při práci s funkcemi, jenž dost často nebyly ani funkce, ale jen nějaká zobrazení, protože jste dost často přiřazovali jednomu x i více y.

Šlo o to, vymyslet nějaké zobrazení, jehož graf vykresluje něco zajímavého, udat mu správný definiční obor a poskládat několik takových zobrazení dohromady a dost často jsem od vás dostala krásnou kytičku. Děkuju. :-)



Obr. r1.4.1

Poměrně hodně se objevovaly tulipány, tady je na ukázku jeden takový možný tulipán i se stonkem – Obr. r1.4.1. Autorkou je Mgr.[MM] Eliška Nekvapilová, která použila následující vztahy:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{5}x^2 + 15\,; && D(x) = \langle -5; 5\rangle\ , \\ x &= 0\,; && D(y) = \langle 0; 15\rangle\ , \\ y &= |||||x| - 6| - 4| - 6| - 4| + 19\,; && D(x) = \langle -5; 5\rangle\ . \end{aligned}$$

Další kytičky, které se často objevovaly, byly různé kopretiny apod. Daly se použít běžné kartézské souřadnice, nebo třeba také polární. Záleželo zcela na vás. Úloha byla prostě tvůrčí.

Pokud se mi vaše kytička líbila moc, rozdávala jsem i 3 body i přesto, že původně byla úloha pouze za 2 body.

Klár(k)a

Řešení témat

Téma 1 – Nejmeší nevybrané

Řešitelé a řešitelky! Máme zde prvního výherce naší velkolepé soutěže! Velkým vítězem je hned v prvním kole ono nepravděpodobné

ČÍSLO 1

Vítězství je o to překvapivější, že sám výherce Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Bartoněk ve svém kratičkém příspěvku píše, že sám ve výhru ani nedoufá, ale velmi nerad by nechal jedničku vyhrát. Šťastnému výherci gratulujeme a krom odměny za tématický příspěvek od nás získává slíbených 3000 M&M milibodů!

POZOR! POZOR! POZOR!

Zároveň s vyhodnocením prvního kola vyhlašujeme **druhé kolo** naší velkolepé soutěže! Hrajeme podle stejných pravidel, výhercem se může stát kdokoliv, odměna je tentokrát celých **5000 M&M milibodů**!

Výsledky 1. kola

Celkem se prvního kola soutěže zúčastnilo 18 hráčů. Nejmenší číslo vybrané pouze jedním hráčem bylo číslo 1. Tipovaná čísla byla:

$$1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 37, 2508.$$

Střední hodnota hádaných čísel je 147,17. Střední kvadratická odchylka vyšla 572,64 a medián je 6.

Shrnutí dosavadních poznatků

Celkem nám přišlo 10 vědeckých prací podrobněji rozebírajících tématiku této hry. Úvahy lze rozdělit na úvahy psychologické, popisující vnitřní dialogy hráčů a z něho plynoucí volby, na statistické, které se zaměřují spíše na reálná pozorování a z nich plynoucí důsledky, a na obecné, které se snaží zjistit vlastnosti hry a strategií bez ohledu na konkrétní hráče.

Psychologických rozborů chování hráčů přišlo hodně, ale málokterý obsahoval pro svá tvrzení jakékoliv zdůvodnění. Nepodložené byly jak odhady o intervalu hádaných čísel, tak důvody, proč si různé skupiny hráčů vyberou či nevyberou čísla speciálních vlastností (např. prvočísla).

Někteří řešitelé se při rozhodování takovýchto dilemat (např. vzít si „hezké“ číslo?) a rozborech možných her zamotali do nekonečných úvah typu „Ale já vím, že oni ví, že já vím, že oni ví, že …“. To se ukázalo plodné jen v případě hry dvou hráčů, jinak šlo spíše o hádání.

Další nedostatky úvah byly v použití „náhodného výběru“ – mnoho řešitelů porovnávalo varianty podle počtu kombinací bez ohledu na jejich pravděpodobnost, případně s předpokladem rovnoměrného rozložení v nějakém intervalu (bez zdůvodnění horní meze). Tyto chyby jsou sice zčásti odpustitelné zjednodušení, ale často se kumulují a vedou občas i k nelogickým závěrům.

Statistické rozbory většinou prováděly více měření na malé skupině (např. 3 hráčů) či jen málo (1–2) měření na větší skupině. Z odhadů i měření se některým podařilo odhadnout nějakou závislost, ale většinou jen velmi hrubým odhadem. Bohužel není jasné, jak velký by musel být statistický soubor pro odvození skutečných závislostí.

Větší sadu výsledků z řádově 40 her poskytla a analyzovala velmi dobře Mgr.$^{\text{M}}$ Eliška Nekvapilová ve svém článku *Nikdy nehraj sám*, bohužel se jí ani z nich nepodařilo vyvodit spolehlivé závěry.

Nezodpovězené otázky

Ačkoliv bylo o psychologickém aspektu hry napsáno již mnoho, o jejím matematicko-statistickém základu se toho ví jen velmi málo. Navrhujeme proto zkoumat dva druhy strategií – pravděpodobnostní a kooperační.

Jak by to vypadalo, pokud by se hráči rozhodovali náhodně s pevným pravděpodobnostním rozdělením? Jaké rozdělení se vyskytuje ve velké skupině? Jak závisí na počtu hráčů a jak by šlo popsat matematicky? Pokud byste chtěli zjišťovat, jak se „nejvýhodnější“ rozložení mění s počtem her, můžete pro tento účel třeba zkusit napsat nějakou simulaci adaptující, či křížící se populace hrající tuto hru.

Kooperační strategie je variace na pravděpodobnostní, kdy se skupina dohodne na nějaké strategii a snaží se dosáhnout lepšího výsledku než by dosáhli jako součet jedinců hrajících jednotlivě. Používat k tomu smějí jak deterministické, tak pravděpodobnostní rozhodování.

Třetí, snad nejlépe matematicky definovaný, směr je hledání takového rozložení, že pokud podle něj bude hrát celá populace $n-1$ jedinců, nemá jeden vetřelec šanci získat v průměru víc než $1/n$, ať hraje jakkoliv. Existuje vůbec takové rozložení nebo má vetřelec vždy strategii, jak vytěžit více?

Účastnické příspěvky

Z účastnických příspěvků vybíráme jen několik málo pro ilustraci různých směrů, kterými se výzkumy badatelů ubíraly.

Mgr.$^{\text{M}}$ Filip Štědronský ve svém velice odborném článku podrobně formalizoval pravděpodobnostní variantu úlohy a rozebral hru proti jednomu typu náhodně hrajících protihráčů.

Článek Mgr.$^{\text{M}}$ Jana Vaňhary uvádíme jako příklad článku popisující psychologické aspekty hry.

Tomáš

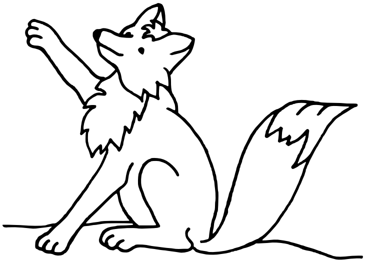
Téma 1: Nejmenší Nevybrané

Mgr.[MM] Filip Štědronský

Abstrakt

Článek rozebírá po krátkém shrnutí problém z čistě obecného pravděpodobnostního hlediska na základě obecných statistických dat, protože analytické úvahy by v tomto případě byly příliš komplikované a příliš mimo hranice matematiky. Mimo jiné ukazuje, že pokud hrajeme s nemyslícími tvory, vyplatí se dát jedničku, ale v reálné hře je to sebevražda.

Úvod do problému



Tato úloha představuje na první pohled zajímavý matematický problém, ale záhy zjistíme, že se jedná spíše o otázku psychologie než matematiky. Jedná se o zvláštní aplikaci vzájemného ovlivňování (něco na způsob východní filozofie, jen na trochu jiné úrovni), kdy ostatní a jejich úspěch neovlivňujeme jen svými rozhodnutími, ale i tím, jaká rozhodnutí od nás očekávají. V takovém případě je téměř nemožné určit rozumné pravidlo.

Kdybychom například z nějakého důvodu hypoteticky došli k závěru, že je dobré zvolit jedničku, všimneme si, že ostatní nejspíš budou uvažovat podobně a vyberou si jedničku, ale v takovém případě bude výhodnější si zvolit dvojku. Jenže i to může ostatní hráče napadnout, a mohou si taktéž zvolit dvojku. Hezké na tom je, že by se takhle dalo pokračovat do nekonečna.

Z čehož je vidět, že čistě analytické úvahy nemohou mít příliš valný smysl ani pro malá n, protože těžko odhadnete rozhodování ostatních hráčů, obzvlášť když jsou to myslící tvorové. Rozlišení na matematiky a nematematiky také není moc přesné, protože i nematematikové budou o problému přemýšlet a i matematikové musí uvažovat o ryze nematematických záležitostech (například kolik lidí si tipne jedničku jen tak z recese). Možná nakonec o úspěchu budou rozhodovat zcela odlišné kvality než matematická zdatnost …

Pravděpodobnostní přístup

Takže zůstaneme u zcela obecného a čistě statistického řešení. Ovšem než se pokusíme dělat nějaké teoretické či statistické úvahy o rozložení tipů ostatních, popřemýšlíme, jak této informace využít, až ji budeme v nějaké (byť mlhavé) podobě mít, čili jak si podle známého rozložení tipů vybrat vlastní.

V celé této matematice si dovolím jediný předpoklad: že budou tipy (tedy většina) menší nebo rovny n. Je to přirozená tendence, protože n tipů se do n vejde a je nepravděpodobné, že by všechny skončily v kolizi, takže nejspíš někdo z nich vyhraje. Tato šance by se ještě zmenšila, kdyby se někteří odebrali nad n a tam marně čekali na to, že *všichni* pod nimi skončí v kolizi.

Naším zdrojovým údajem bude seznam čísel p_i pro $i = 1\ ,\ \dots\ ,\ n$, která udávají pravděpodobnost, že si to či ono číslo hráč zvolí (bez ohledu na to, jak složitou úvahou a s kolika úrovněmi, „předpokládejme, že ostatní budou předpokládat“).

Pravděpodobnost, že si určité číslo i zvolí alespoň jeden hráč bude $p^+{}_i = 1 - (1 - p_i)^{n-1}$ (pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů je opačná k pravděpodobnosti, že nenastane žádný z nich; uvažujeme $n-1$ hráčů, protože těžko můžeme statisticky zpracovávat vlastní rozhodnutí, která chceme teprve na základě této statistiky učinit).

Pravděpodobnost, že si jej zvolí právě jeden hráč, odpovídá pravděpodobnosti, že si jej zvolí alespoň jeden hráč a současně si jej nezvolí žádný jiný. Tedy $p^!_i = p_i \cdot (1 - p_i)^{n-2}$.

A to už se blížíme k závěru. Pravděpodobnost, že vyhrajeme, pokud zvolíme číslo i, odpovídá pravděpodobnosti, že toto číslo nezvolil nikdo jiný a současně žádné z nižších čísel nebylo zvoleno právě jedním hráčem.

Tedy

$$p^{\cdot}{}_i = (1 - p^+{}_i)\left(\prod_{j=1}^{i-1}(1 - p^!_j)\right)$$

a po úpravě

$$p^{\cdot}{}_i = (1 - p_i)^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}(1 - p_j(1 - p_j)^{n-2})\right).$$

Pak jen stačí najít i takové, pro které má $p^{\cdot}{}_i$ největší hodnotu. Ale pracovat s takovýmto výrazem by již vyžadovalo trochu složitější matematiku, takže otázku efektivního výpočtu ponechávám otevřenou.

Hrajeme s randomery

Jako randomera označíme teoretický model bytosti, jejíž rozhodnutí jsou čistě náhodná. Pokud hrajeme hru s $n - 1$ randomery (nebo podobně uvažujícími lidmi), je pravděpodobnost každého čísla stejná, $\frac{1}{n}$.

První činitel $p^{\cdot}{}_i$ bude tedy vždy stejný: $(1 - \frac{1}{n})^{n-1}$. O výsledku tedy bude rozhodovat produkt v druhém činiteli. Ale jelikož pravděpodobnost, že si dané číslo nevybere právě jeden hráč, bude vždy menší než 1 (předpokládáme, že pravděpodobnost žádného čísla není úplně nulová, což u takto náhodného procesu lze očekávat; není zde žádné číslo, které by měl člověk nějaký zvláštní důvod si nikdy nevybrat). Potom se ale se zvyšujícím počtem činitelů bude hodnota produktu snižovat – takže v důsledku je nevýhodnější zvolit si **jedničku**.

Trocha statistiky

Četnosti čísel:

Číslo	1	2	4	6	7	8	9	10	11	12	13
Četnost	8	3	4	5	1	5	1	2	3	3	1
Číslo	14	15	16	17	18	19	20	22	27	31	34
Četnost	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1
Číslo	35	36	41	44	50	99	100				
Četnost	2	1	1	1	1	1	1				

Na relativně nepředvídatelné skupině šedesáti lidí jsem provedl jednoduchou studii. Všichni věděli, kolik jich bude. Původní nezpracovaná statistická data jsou vypsána výše. Mimo jiné se potvrdilo, že tipů nad n je zanedbatelné minimum.

Zajímavé také je, že nejčetnějším číslem je jednička. Dále si myslím, že by se výsledky statistiky daly přibližně vztáhnout k n (tj. pro větší n si lidé budou volit větší čísla), ale jen velmi hrubě, protože tím ztratíme informaci o případných specifických číslech, která si mohou lidé vybírat ze specifických důvodů. Pokud tento faktor zanedbáme (opět, těžko s ním lze pracovat), stačí „roztáhnout“ nebo „smrsknout“ náš interval na požadovaný počet hráčů nějakou jednoduchou interpolací.

Zhruba v souladu s tím, co by se dalo očekávat, je i to, že se ve výsledku objevilo zhruba 50% čísel rozsahu. To nemusí nutně znamenat, že zbylá polovina má výrazně nižší pravděpodobnost …vždyť je to taky náhoda. Ale to bohužel nezjistíme.

Ovšem počítat s tím, že nějaké číslo má nulovou pravděpodobnost, je dost nereálné, takže bude třeba pár umělých machinací, abychom z těchto výsledků něco dostali.

Předpokládejme, že každé číslo má nějakou základní pravděpodobnost a každé si někdo může vybrat a existují spíše určité výkyvy v této funkci. To přímo volá po nějaké aditivní konstantě na vytvoření jakéhosi základu. Její hodnota by mohlo být prosté číslo (například jednička), nebo ji lze odvodit od rozložení hodnot – například odmocnina z aritmetického průměru nenulových četností.

Tuto neobvyklou variantu jsem použil já. Výsledné četnosti už přepočteme na pravděpodobnosti p_i tak, že každou z nich vydělíme jejich součtem. Výsledek bude trochu dlouhý a každý si jej dokáže spočítat sám.

Nyní již můžeme pro každé i otrocky spočítat $p^{\cdot}_{i}$ a dozvíme se, že mezi šedesáti hráči s takovýmto rozložením se vyplatí zvolit číslo 3. To proto, že si ho nikdo nevybral a leží docela nízko. Ale v tomhle případě lze spíš očekávat, že to bude spíš náhoda, protože lidé, kteří volí jedničky, dvojky, čtyřky, nemají žádný významný důvod nevybrat si trojku. Ale takovéto úvahy jsou nad rámec článku. A naše jednička skončila tragicky poslední.

Ovšem očekávaný počet řešitelů M&M je kolem čtyřiceti (alespoň podle poslední výsledkové listiny), takže provedu ten nejprimitivnější přepočet: rozsekám interval na trojice čísel a z každé údělám dvojici průměrováním sousedních členů. Metodou postupného průměrování či nahrazení rozložení nějakou funkcí by to možná šlo čistěji, ale přišli bychom o ještě více výpovědní hodnoty.

Tady je ovšem problém, že prostřední číslo každé trojice by se ve výsledku projevilo dvakrát, zatímco ostatní jen jednou. Proto provedu rozdělení třikrát, ve všech možných posunutích, a výsledky zprůměruji (u krajních dvojic si vystačím s jedním výsledkem).

Po této úpravě a novém přepočítání vítězí číslo 17 s neuvěřitelnou pravděpodobností 0,48, následované 20 a 16.

Závěr

Nalezli jsme vcelku obecné řešení úlohy, i když za trochu uměle idealizovaných podmínek. Pro reálné použití by to asi vyžadovalo lepší statistický soubor a systematičtější práci s ním, každopádně zavedený pravděpodobnostní mechanismus by mohl být užitečný při dalších úvahách.

Psychologický rozbor skupiny hráčů

Mgr.[MM] Jan Vaňhara

Abstrakt

Tento článek se zabývá tím, jak bude toto první kolo hry vypadat, jaké bude rozpoložení čísel i jaké myšlenky budou proudit v hlavách účastníků této hry. Je zde také uvedeno pár důsledků her hraných s podobnými skupinami hráčů na Pikomatu. Ale hlavně se zde zabývám tipy a chaotičností tipů jednotlivých hráčů.

Úvodem bych asi měl říct nějaké číslo, tak zkusím třeba 4, jenže já si nedovolím jen předpovědět, které číslo bude nejmenší nevybrané, já dokonce zkusím předpovědět i počet hráčů a jejich tipy. Předem ale musím říct, že zde použité odhady budou jen přibližné, protože si nechci hrát na jasnovidce a ani ty odhady dost dobře nepůjdou, ale to nebrání člověku pokusit se psychologicky rozdělit, kolik hráčů bude tipovat jaké číslo.

Předem tohoto rozboru si zavzpomínám na dobu, kdy se tato hra hrála na Pikomatu jako jedenáctý bod desetibodové ranní duševní rozcvičky. Co si pamatuju, tak jednou vyhrála jednička, jednou ani jeden člověk nedal 2, párkrát vyhrála čísla 7 a vyšší, parkrát právě 1 a samozřejmě párkrát nikdo. Prostě zvolená čísla byla velice náhodná a závisela na konkrétní povaze a rozpoložení toho kterého hráče a té které skupiny. A samozřejmě také na tom, jaké číslo vyhrálo předchozí den a kolik lidí hlasovalo pro ta předchozí.

A teď už můj samotný rozbor. Odhadem jde o hru 20–30 hráčů, přičemž hráčů bude spíše méně než více. Což je menší počet než při hrách Pikomatu, což znamená, že zde bude větší šance výhry na číslech 1–4, popř. ještě číslech 5 a 6, protože každý hráč se náhodně (z hlediska neznalosti tipů ostatních hráčů (jejichž počet taky nezná)) rozhodne. 1 bude všem připadat téměř jako ztracený tip, jenže pak si řeknou, že to napadne i těch n hráčů, co to hrají také, a tak to spousta hráčů právě proto nedá, ale pak si řeknou, že tohle napadne taky spoustu hráčů a už se cyklíme, takže bude záležet na tom, kolika hráčům se bude zdát ten cyklus natolik děsivý, že ji (*1 – pozn. red.*) nikdo nedá, popř. že ji dá jen málo hráčů.

Jenže tam, kde hráče ztrácí 1, tam získává číslo 2, protože 2 je méně beznadějné číslo než 1, ale díky tomu je právě beznadějnější (jak jsem mluvil o té 2, kterou jednou na Pikomatu nikdo nedal, tak to bylo už po několikáté hře), protože ji téměř vždy dá více hráčů než číslo jedna. Tady odhaduju 3–5–10. Vysvětlím svoje zapsání odhadu: 3–5 ve skupině okolo 20 a 5–10 ve skupině okolo 30 hráčů.

V beznadějnosti za číslem 2 je hned číslo 3 (poté následuje jednička a pak zbytek čísel), protože i to se tváří tak, že ho nikdo nedá, a ejhle ono na něho myslí spousta hráčů, tady to bude z mého hlediska 2–6 hráčů.

Další čísla 4,5,6 jsou v podstatě na tom stejně, ať už je to v beznadějnosti, tak v počtu tipů na ně, jen ta 4 je z nich nejvíc výherní, pak samozřejmě 5 a pak 6 (proto u 6 odhaduju jen 0–2 hráči). A nakonec je 7 a více. Tato čísla dávají totální pesimisté, anebo totální optimisté – optimisté věří, že do nějakého (ne nutně všech čísel) se trefí vždy aspoň dva hráči (ale jak vychytat tu díru (číslo, které nikdo netipoval), když dám třeba 4, tak 5 může být díra a 4 plně obsazená, nebo naopak a tak dám nějaké vyšší a budu mít jistotu, že se trefím do volného pole). Pesimisté zase věří, že rozložení tipů bude rovnoměrné tzn., že do každého čísla se trefí dva hráči, a tak vyhraje vysoké číslo. Rámcově jsou na tom podobně, ale má to své rozdíly. Celkově ta tabulka vypadá dost volně, ale je to přizpůsobeno různým excesům typu 6 tipne 5 hráčů a 5 nikdo apod. Navíc tento odhad je závislý téměř jen na odhadech – žádná data o počtu hráčů, o jejich průměrných tipech, o pravděpodobnosti, že ten a ten tip opět udělají, o náhodnosti jejich chování.

Číslo	1	2	3	4	5	6	≥ 7
Počet hráčů	1–4	3–5–10	2–6	0–3	0–3	0–2	0–2

Odhad počtu tipů.

Mohl bych zde také logicky osvětlit, proč si vybírám právě 4, ale je to téměř zjevné, protože mými důvody jsou *primo* náhodný, ne-úplně beznadějný tip (původně jsem tipoval 6), *secundo* stejně jak jsem uvažoval nad rozvržením tipů, tak jsem uvažoval nad svým tipem a 4, 5 nebo 6 byly docela jasná volba. A tak jsem zvolil z nich to nejbeznadějnější, ale také nejbližší. Uvidíme, co to přinese ...

Celkově je tento článek opravdu založený na mých odhadech dané situace, ale rámcově ze zkušeností odpovídá skutečnosti, ale každá volba každého hráče je stejně chaotická a stejně náhodná jako všech ostatních a tak jsou na tom všichni úplně stejně, ať už uvažují jak chtějí, a o jejich výhře rozhodne náhodnost dalších hráčů.

Dovětek: Taky se může stát, že se vám na to skoro všichni, až na pár jedinců, vykašlou a vyhraje ten, co dá nejnižší číslo, ale to nechci zažít, protože pak bych tento článek psal zbytečně.

Téma 2 – Netradiční teploměry

K tomuto tématu nám přišly dva větší příspěvky. Jeden je od Bc.[MM] Zuzany Dočekalové a druhý je od Mgr.[MM] Tomáše Kubelky. V tomto čísle jsme se rozhodli uveřejnit pouze článek Bc.[MM] Zuzany Dočekalové, kde se poměrně podrobně věnuje měření teploty pomocí elektronických součástek.

Ve svých příspěvcích jste se obvykle zabývali měřením teploty pomocí měření elektrických veličin. Časté bylo také používání teplotní roztažnosti látek. Teorii, kterou jste popisovali ve svých článcích, bylo vhodné doplnit také o vlastní měření. Tyto články byly ohodnoceny mnohem více.

Velice zajímavým tématem by bylo věnovat se plynným teploměrům. Uměli byste změřit teplotu v mrazničce pomocí mikrotenového sáčku? Zkuste tuto metodu vyzkoušet a odvodit k ní teorii.

Na závěr zde máme ještě jeden problém k zamyšlení. K popisu závislosti elektrického odporu na teplotě se obvykle používá vztah

$$R = R_0\left(1 + \alpha_R \Delta t\right),$$

kde α_R je teplotní součinitel elektrického odporu, Δt je změna teploty. Ovšem při práci s tímto vztahem musíme být opatrní. Předpokládejme, že máme rezistor s odporem $R_0 = 100\,\Omega$. V tabulkách jsme si našli $\alpha_R = 0{,}02\,\Omega\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Rezistor jsme zahřáli na $10\,^\circ\mathrm{C}$. Rezistor má nyní odpor $R = 100\cdot(1+0{,}02\cdot 10) = 120\,\Omega$. A nyní zkusíme rezistor zase zchladit o $10\,^\circ\mathrm{C}$. Ovšem podle výpočtu má nyní rezistor odpor $R = 120\cdot(1-0{,}02\cdot 10) = 96\,\Omega$. Jak je možné, že nám nyní vyšel jiný odpor rezistoru? Udělali jsme ve výpočtu chybu? Kde? Uměli byste upravit zmíněný vzorec abychom chybu neudělali?

Měření teploty v dílně elektronika

Bc.[MM] Zuzana Dočekalová

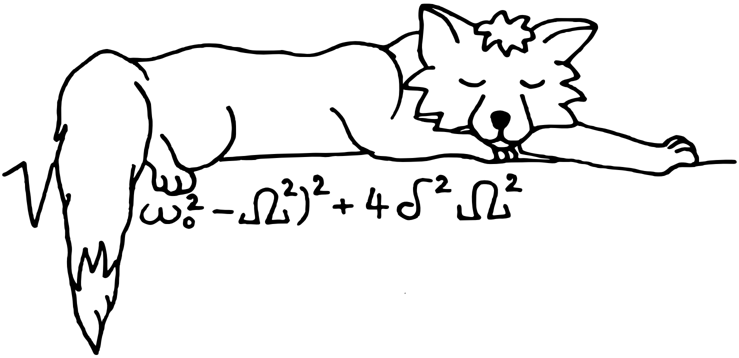
Abstrakt

Nejprve se seznámíme s historií teploměrů, dále pak teoreticky uvádím různé způsoby měření teploty, které se dnes běžně používají v praxi. Jedná se například o použití termistorů, teploměrů, optických pyrometrů či integrovaných obvodů. Prakticky jsem se pak zabývala měřením teploty pomocí platinového teploměru a odporového čidla.

Zaměřila jsem se na metody měření teploty s využitím elektromagnetických vlastností materiálů. Podíváme se na to, jak se měřila teplota kdysi a jak se tyto postupy zdokonalily. Kde se měření teploty nejvíce uplatňují a kde jsou nezbytná? Taktéž uvádím vlastní měření, při kterém jsem použila platinový teploměr ve srovnání s odporovým čidlem.

Z historie teploměrů

Dnes jsou teploměry jedním z nejrozšířenějších fyzikálních přístrojů. Ale ještě před několika staletími byly lidem úplně neznámé. O prvních krůčcích a později i velkých skocích v oblasti měření teploty se dozvíme na následujících řádcích.



V době, kdy ještě teploměry neexistovaly, se teplota určovala podle tělesných pocitů, při výrobě například kovů či keramiky se lidé řídili barvou rozžhavených předmětů apod.

Počátekm 17. století napadlo Galilea Galilei použít teplotní roztažnosti vzduchu k měření teploty. Zhotovil primitivní teploměr byl tvořen tenkou skleněnou trubičkou dlouhou asi 30 cm a zakončenou baňkou. Měřil tak, že baňku zahřál rukou a tento teploměr (nazýván jako vzduchový termoskop) vložil otevřeným koncem trubičky do nádobky s obarvenou vodou. Chládnoucí vzduch se smršťoval a vlivem tlaku okolního vzduchu na hladinu voda vnikala do trubičky. Po vychladnutí přejímala baňka teplotu okolního vzduchu a výška vodního sloupce v trubičce se měnila podle změn objemu vzduchu v baňce, který se zase měnil podle teploty vzduchu. Na rozdíl od dnešních teploměrů s rostoucí teplotou hladina klesala a při ochlazení stoupala. Tento jednoduchý přístroj ještě neměl stupnici.

Galileo zřejmě inspiroval ostatní a s podobnými nápady přišli např. Otto von Guericke a Gaspar Schott. Ti zkokonalili termoskop tím, že použili uzavřený systém se dvěma baňkami a na koncích byla spojovací trubička ve tvaru U, v níž se nacházela tekutina.

V témže století se objevují kapalinové teploměry. Jako první použil jako teploměrnou látku vodu francouzský lékař Jean Rey (1631). Protože voda má malou roztažnost, hledaly se jiné vhodné tekutiny. Jako nejvhodnější se experimenty ukázaly líh a rtuť. První lihový teploměr byl sestrojen roku 1641 toskánským vévodou Ferdinandem II. V této době již měly teploměry stupnice, ale ty nebyly jednotné, takže se údaje nedaly porovnávat. Teploměry s normalizovanou stupnicí byly sestrojeny kolem roku 1650.

Roku 1664 anglický fyzik Robert Boyle stanovil počátek stupnice na teplotu tajícího ledu. V roce 1665 určil holandský vědec Christian Huygens další stálý bod a to teplotu varu vody při normálním tlaku ovzduší.

Asi o padesát let později začal v Holandsku Daniel Gabriel Fahrenheit vyrábět lihové a posléze i rtuťové teploměry, avšak jako počátek stupnice svých teploměrů si svérázně vybral směs ledu, vody a salmiaku. Horní základní teplotu stanovil teplotu zdravého člověka a označil ji číslem 96. Vzdálenost mezi oběma teplotami rozdělil na 24 dílů a každý z nich pak ještě na další 4, a tak konečně dostal stupně. Teplota tání ledu je na této stupnici označena číslem 32 a teplota varu vody 212. Je s podivem, že takto komplikovaně zkonstruovanou a zcela nelogickou stupnici dodnes používají v např. v USA. Například pařížský zoolog René de Réamur navrhl stupnici s nulou při teplotě tání ledu a s hodnotou 80 při teplotě varu lihu.

V roce 1742 navrhl Andres Celsius teplotní stupnici v desítkové soustavě. Ta se ukázala v praxi velmi výhodná a dnes je běžně používaná. Celsius tehdy stanovil pro var vody 0 °C a pro tání ledu 100 °C. Stupnici v roce 1745 otočil do dnešní podoby botanik Linné.

Moderní způsoby měření

Měření teploty termistorem

Termistor je vyroben z keramické hmoty složené z oxidů kovů Mn, Fe, Co, Ni a dalších příměsí a pojiv. Jeho teplotní závislost je výrazně nelineární a používá se pro měření teploty nejčastěji v rozmezí od 150 °C do 300 °C. Jeho velkou nevýhodou je již zmíněná nelineárnost stupnice, ale taktéž nepřestnost, která je zaviněna při výrobě – nikdy nelze při výrobě zaručit opakované definované parametry, a proto pro přesná měření není příliš vhodný. Naopak je výhodný ve srovnání s odporovými teploměry svou vysokou závislostí odporu na teplotě, malými rozměry a tím i rychlou odezvou.

Existují dva typy termistorů:

a) typ NTC – záporný teplotní součinitel (s rostoucí teplotou klesá odpor)
b) typ PTC – kladný teplotní součinitel (s rostoucí teplotou roste odpor)

Nejčastější využití: K ochraně elektrosoučástek (např. transformátor, výkonový polovodičový prvek) před zvýšenou teplotou.

Měření teploty termočlánkem

Termočlánek vzniká spojením dvou materiálů o různých vlastnostech. Používají se například kombinace Cr a Ni, Pt a Pt-Rh (příměsi 10% – 30% Rh) či Ni-Cr-Si. Výběr závisí na měřené teplotě: Pt a Pt-Rh se používá k měření teplot až do 1800 °C, naopak článek Ni-Cr-Si se dá využít k měření až do -270 °C.

Princip termočlánku je, že napětí mezi teplým a studeným koncem záleží na rozdílu teplot mezi teplým a studeným článkem termočlánku. Teplotní charakteristika není lineární, ale je přesně charakterizována tabulkami.

Výhodou termočlánků je jejich jednoduchost, snadná zhotovitelnost a rychlá odezva. Nepotřebují napájecí zdroj a při měření nevykazují ohřev měřeným proudem tak, jako odporové teploměry. Nevýhodou je pak nižší přesnost.

Nejčastější využití: Při extrémních teplotách.

Měření teploty teploměry

O běžně používaných teploměřech jako jsou kapalinové se zde nebudu rozepisovat, protože jsou každému dobře známé.

Kapalinový teploměr.

Bimetalový teploměr.

Je to takový teploměr, který k měření teploty využívá bimetalový (dvojkovový) pásek složený ze dvou kovů s různými činiteli teplotní roztažnosti. Při změně teploty se pásek ohývá a tento pohyb se přenáší na ručičku přístroje.

Nejčastější využití: V žehličkách, jako elektrický jistič nebo časovač.

Platinový teploměr.

Jedná se dnes o nejrozšířenější teploměr, neboť má velmi široký rozsah teplot. Mimo jiné se jím dají změřit i běžné teploty nebo jim blízké. Platinové teploměry se používají pro přesná měření v laboratořích i v průmyslu.

Jde o velmi kvalitní teploměr, jehož přesnost závisí na čistotě použité platiny a dále na kvalitě zapouštění.

Závislost odporu na teplotě je vyjádřena pomocí teplotního koeficientu, který je definovaný jako:

$$\alpha = \frac{1}{100} \cdot (R_{100} - R_0)\,,$$

kde R_0 a R_{100} jsou odpory při teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$ a $100\,^\circ\mathrm{C}$.

Průběh závislosti odporu na teplotě se považuje za lineární. Koeficient se liší v Evropě, Rusku a USA[3].

Nepříjemnou vlastností platiny je, že její odpor závisí i na mechanickém napětí. Tato napětí vznikají především deformacemi při výrobě. Odstraňují se žíháním hotového teploměru při teplotě minimálně $450\,^\circ\mathrm{C}$.

Měření teploty odporovými teplotními čidly

Odporové teploměry využívají změny elektrického odporu s teplotou. Závislost odporu na teplotě je pro malé rozsahy teplot téměř lineární, zatímco pro větší je značně nelineární. Teplota je dána přesně definovanou tabulkou podobně jako u termočlánků.

[3] *Pozn. red.: Neznamená to, že by se teploměr změnil po převozu na druhou polokouli, ale autorka se zde snažila říci, že různí výrobci vyrábějí různé platinové teploměry.*

Používá se například typ `KTY 81/210`. Rozsah měřené teploty je pro různé typy čidel různý, největší je $-55\,^\circ\mathrm{C}$ až $+150\,^\circ\mathrm{C}$.

Měření teploty optickými pyrometry

Jedná se o bezdotykové teploměry, které určují teplotu z teplotního záření. Fungují na takovém principu, že barva žhaveného vlákna se shoduje s barvou měřeného prostředí. Hlavní výhodou je krátká doba měření.

Využívá se jich při měření pohybujících se nebo nestabilních objektů například roztavené, tekoucí kovy; dále pak v provozech s agresivním prostředím (tepelné sálání, prach, vibrace, odletující kapky kovu, atd.) nebo při měřeních, které jsou silně ovlivněny měnícím se prostředím mezi měřeným objektem a pyrometrem.

Měření teploty integrovanými obvody

Typ `DALLAS DS18S20`
Jedná se o jednovodičovou komunikaci s řídícím mikroprocesorem, a každý z těchto obvodů má svou unikátní adresu. Je použitelný pro teploty $-55\,^\circ\mathrm{C}$ až $+125\,^\circ\mathrm{C}$.
Typ `DALLAS DS1920`
Používá šestnácti bitové rozlišení. Přesnost je $0{,}5\,^\circ\mathrm{C}$. Je určen pro teploty od $-55\,^\circ\mathrm{C}$ do $+100\,^\circ\mathrm{C}$.

Typ přístroje	P. T.	P. T.	P. T.	O. Č.	O. Č.	T	σ_T
	[Ω]	[°C]	[°C]	[kΩ]	[°C]	[°C]	[°C]
Korigováno	ne	ne	ano				
Mražák	89,5	−27,3	−27,5	1,320	−24	−25,75	1,75
Lednička	102	5,2	4,9	1,676	3,2	4,05	0,85
Trouba (na 100C)	135,1	91,2	90,9	3,209	91,3	91,1	0,2
Teplota venku na slunci	111,4	29,6	29,4	2,05	28,1	28,75	0,65
Teplota venku ve stínu	107,6	19,7	19,5	1,887	17,7	18,6	0,9
Moje teplota	113,9	36,1	35,8	2,151	34,3	35,05	0,75

Tabulka t2.1: Naměřené hodnoty odporu, vypočtené hodnoty teploty.

Vlastní měření

Měřila jsem platinovým teploměrem již neexistující firmy ZPA k.p. Trutnov, závod Ústí nad Labem. Koeficient $\alpha = 0{,}385\,\Omega\cdot{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Dále platí $100\,\Omega = 0\,^\circ\mathrm{C}$. Druhé měření bylo odporovým čidlem `KTY 81/210` (viz katalog GMe). Použitý měřící přístroj: `METEX M-3270D`, přesnost měřidla: $1{,}5\,\%$.

Měřila jsem běžné domácí teploty (Ostrava, 28. 9. 2008, 12.30–12.45). V lednici, mražáku a v troubě jsem měřila 5×, uvedené výsledky v tabulce t2.1 jsou již průměrné hodnoty. Teplotu venku jsem měřila pouze jednou a to ve výše uvedeném čase.

Užité zkratky:

P. T. — platinový teploměr

O. Č. — odporové čidlo

T — střední hodnota teploty

σ_T — chyba měření

nast. — nastavení

Celková odchyla ±0,85 °C.

Průměrná odchylka $\Delta t = 0,85\,°\mathrm{C}$.

Přívodné vodiče měly odpor 0,1 Ω shodně při měření platinovým i odporovým teploměrem. Celkový odpor odporového teploměru byl v řádu kilohmů, a proto nebylo potřebné naměřené hodnoty korigovat (odchylka je desetitisícinásobně menší nežli měřená hodnota). U platinového teploměru však měla korekce po přepočtu hodnotu 0,2 °C až 0,7 °C a tudíž jsem ji do výpočtu teploty zahrnula.

Závěr

Z výsledků v tabulce je patrné, že hodnoty naměřené platinovým teploměrem a odporovým čidlem se značně liší. Průměrná odchylka všech měření je $\Delta t = 0{,}85\,°\mathrm{C}$, ale pokud zde zahrneme chybu způsobenou měřícím přístrojem, výsledek se opět o něco pozmění.

Během pěti měření, ze kterých jsem později sestavila tabulku, se mi nejvíce lišily hodnoty naměřené odporovým čidlem v mražáku. Nejsem schopna říci, čím to bylo způsobeno, ale je zřejmé, že právě tam vznikl největší rozdíl při porovnávání P. T. a O. Č.

Dále si můžeme povšimnout, že až na teploty v mražáku (které nepovažuji za úplně objektivní) a v troubě, naměřilo odporové čidlo vždy o něco nižší teplotu než platinový teploměr. Jedná se o rozdíl až 1,8 °C.

Co se týče mého názoru, myslím si, že měření platinovým teploměrem jsou přesnější. Například při měření mojí teploty byly hodnoty naměřené platinovým teploměrem shodné s lékařským rtuťovým teploměrem, což se rozhodně o odporovém čidle říci nedá.

Zdroje informací

Nejvíce jsem čerpala z praktických zkušeností mého otce, který mi velmi názorně dokázal vysvětlit, jak fungují přístroje pro měření teplot.

Dále jsem čerpala z internetu:

- Wikipedia: `www.wikipedia.org`
- Studijní text FO: `http://fo.cuni.cz/texty/teplota.pdf`
- O historii měření teploty: `http://www.quido.cz/Objevy/teplomer.htm`

- Studijní text pro studenty VŠCHT:
  http://www.vscht.cz/fch/cz/pomucky/FCHV_all_7.pdf
- Měřící technika:
  http://www.tequipment.net/MetexM-3270D.html
- Katalog firmy GM Electronic: http://www.gme.cz/

Pozn. red.: Tento článek měl možná až zbytečně mnoho historie a málo vlastního pozorování. Přesto mi přišlo, že byl vhodným úvodem pro toto tématko.
(R)adim

Téma 3 – Stavebnice

K tomuto tématu přišla celkem čtyři řešení. Problémem se zabývali Dr.[MM] Jakub Töpfer, Mgr.[MM] Štěpán Šimsa, Doc.[MM] Alžběta Pechová a Barbora Böhmová.

Dr.[MM] Jakub Töpfer se ve svém článku zabýval především kostkami ve tvaru kvádru. Navrhl taky způsob, jak umisťovat do krabice mnohostěny a určil, se kterými to jde beze zbytku. Otiskujeme jeho článek o zajímavých kvádrech.

Kvádry všech tvarů, spojte se!

Dr.[MM] Jakub Töpfer

V tomto příspěvku bych se chtěl zabývat situací, kdy všechny kostky v Rikiho stavebnici jsou kvádry. Budu přitom předpokládat, že stavebnice je natolik zajímavá, že se v ní nevyskytují dva stejné kvádříky a tak hezká a přesná, že všechny kvádry mají celočíselné strany. Nabízím rozebrání několika situací a na závěr i jeden námět k zamyšlení.

Všecky kvádry světa

Jako první se budu zabývat situací, kdy se ve stavebnici vyskytují všechny možné kvádry, jejichž délka žádné strany nepřesahuje nějaké pevně zvolené přirozené n.

Vezměme nejdříve dvourozměrnou situaci, kdy máme obdélníky s každým možným poměrem stran (opět žádná ze stran nepřevyšuje n). Rozlišujeme přitom poměr $a : b$ a $b : a$ (např. $1 : 2$ není to samé jako $2 : 1$). Pokud si vezmeme všechny obdélníky, jejichž první strana je 1 a umístíme je za sebe, dostaneme jeden „velký obdélník“ s jednou stranou 1 a druhou $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Stejně to můžeme udělat pro každé k ($1 \leq k \leq n$). Celkově tedy všechny obdélníky zaberou čtverec se stranou $\frac{n(n+1)}{2}$[4].

Vraťme se ke kvádrům. Pro třetí rozměr máme n možností, můžeme si tedy kvádry rozdělit do n skupin podle třetího rozměru. Každou skupinu umíme naskládat do výše zmíněného čtverce. Celkem tedy jistě dokážeme naskládat

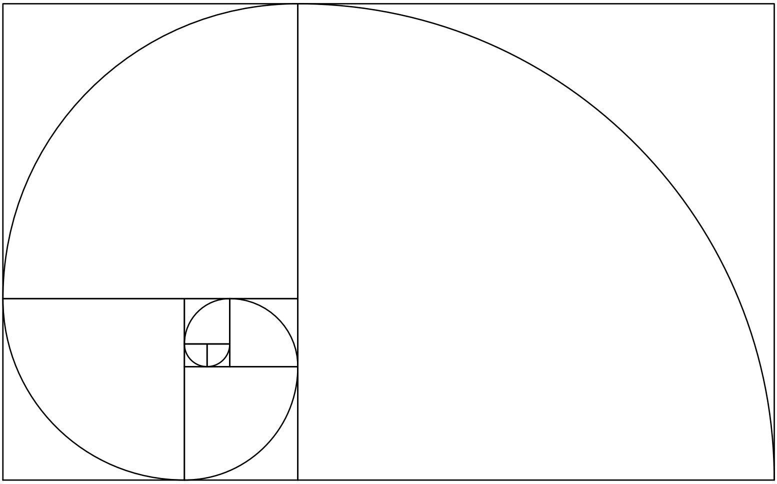
[4] *Pozn. red.: Tento čtverec pak bude vypadat tak, že se první řádek opakuje pod sebou n-krát a pokaždé je o jeden řádek „širší“*

kvádry do krabice se stranami $\frac{n^2(n+1)}{2}$ a $\frac{n(n+1)}{2}$ tak, aby nezbylo žádné volné místo.

Fibonacciho kvádry

Ještě rozeberu jeden speciální případ. Co kdyby měly všechny kvádry čtvercové podstavy a délky stran podstavných čtverců by byla Fibonacciho čísla (až do určitého n-tého)? Přitom jednička se v Fibonacciho posloupnosti vyskytuje dvakrát, proto i kvádry s podstavou čtverce 1×1 budou dva.

Je zajímavé, že vždy dokážeme vytvořit takovou krabici, aby ji kvádry přesně zaplnily. Schéma zaplňování je na následujícím obrázku:



Z rekurentního vztahu pro posloupnost je zřejmé, že způsob bude stále fungovat[5]. Pokud máme navíc estetické cítění, můžeme jednotlivými obdélníky postupně proložit spirálu a dostaneme tvar dobře známý z hlemýždích ulit.

Přemýšlíte rádi?

A nyní přichází asi hlavní důvod, proč jsem tento článek psal. Když jsem si poprvé přečetl zadání tohoto tématu, zformuloval jsem problém, který bych chtěl vyřešit. Bohužel se mi to ale stále nedaří, proto se obracím i na ostatní, jestli by se na něj nechtěli podívat. Řešení by mě opravdu zajímalo.

Předpokládejme, že máme kvádry s podstavami tvořenými obdélníky. Tyto obdélníky ale nejsou jen tak ledajaké. Strany obdélníka vždy tvoří dvě po sobě jdoucí přirozená čísla. Máme tedy n obdélníků se stranami $1 \times 2, 2 \times 3, \ldots,$ $n \times (n+1)$ a hledáme, jak je umístit do krabice (tedy obdélníku) s co nejmenším

[5] *Pozn. red.: Protože Fibonacciho posloupnost je definována jako $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, je vidět, že další (větší) čtverec vždy můžeme přilepit ke dvěma dosud největším*

obsahem. Zajímavá může být i varianta, že se jedná o čtverce $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, n \times n$.

To by bylo pro začátek všechno. Jestli budu mít trochu času, tak se ještě nad svým problémem zamyslím. Doufám však, že zaujal i někoho jiného a zkusí ho třeba vyřešit.

„Pěkné krabice“

Mgr.[M] Štěpán Šimsa se ve svém článku zabýval skládáním do „pěkných krabic“, tj. takových, které mají co nejpodobnější poměry stran a dobře se skládají na sebe. Kromě toho se zabýval kostkami netradičních tvarů, jako jsou kužely, jehlany a mosty. Taky si všiml toho, že ačkoliv krabice samotná může zaujímat malý objem, nemusí to znamenat, že budou takové „optimální krabice“ zabírat co nejméně místa společně (např. ve skříni nás většinou ani tak netrápí objem, jako spíš maximální rozměr).

Otevřené problémy

Pokud nemáte žádný nápad, co dalšího by se ještě dalo zkoumat, zde je pár příkladů na inspiraci:

- Problém Dr.[M] Jakuba Töpfera, který formuloval ve svém článku.
- Jakým nejlepším způsobem se dají umístit kostky ve tvaru válce do krabice tvaru kvádru?
- Existují tvary, pro které by byla optimálnější krabice s kruhovým či elipsovým průřezem?
- Co kdyby měly kostky nekonvexní průřez? Např. ve tvaru n-cípé hvězdy?
- Kolik různých rozestavění kostek můžeme nastrkat do krabice velikosti $n \times m$, pokud jsou hrany kostek přirozená čísla?
- Kolik najdeme rozestavění z předchozí úlohy, když můžeme použít maximálně k různých tvarů kostek?

Případně (pokud by vám předchozí úlohy připadaly triviální):

- Zobecnění stavebnice do n-rozměrného prostoru (např. kolik můžu naskládat n-rozměrných krychliček o straně k do n-rozměrné krychle o straně l, $l > k$ a jiné).
- a další :-)…

Honza

Téma 4 – Divný svět

Mgr.[M] Alena Bušáková jako první uskutečnila následující experimenty:

Popis experimentů

1. pokus: Vezmu nádobou o objemu 1 litr a příklopím jí hořící svíčku. Budu pozorovat, za jak dlouho plamínek zhasne (mám hodinky s vteřinovou ručičkou). Radši to udělám víckrát s různými svíčkami, aby byla chyba měření menší.

2. pokus: Pustím kuličku postupně ve všech osmi směrech do středu a měřím, jak dlouho jí trvá urazit jeden metr (jestli nemají, tak si odměřím deset mých loktů).
3. pokus: Postavím se doprostřed krychle a uvážu kuličku na špagátek, budu jí točit dokola a budu sledovat, na jakou stranu zrychluje a na jakou zpomaluje. Popřípadě můžu vyrobit sofistikovanější zařízení, třeba k ose ve středu připevním tyčku, která bude hladce klouzat po nějakém předmětu (třeba naolejuju podložku) a budu ji sledovat, kdy zrychlí, kdy zpomalí a jakým směrem. Teda poté, co do ní mírně šťouchnu, jedním i druhým směrem.

Výsledky měření

1. pokus

Svíčka v lahvi vždy zhasne. Se třemi různými svíčkami Alča naměřila následující časy zhasnutí svíčky (v sekundách):

svíčka 1	18,63	19,80	18,58	18,44	18,90	19,59	18,49	19,10	19,20	18,91
svíčka 2	21,56	20,45	21,33	21,03	21,34	21,47	19,93	21,73	21,55	20,56
svíčka 3	17,90	18,14	18,26	18,67	19,03	19,21	18,68	19,92	18,15	17,80

Tabulka t4.1: Doba hoření svíce v uzavřené nádobě.

2. pokus

Alča nespecifikovala, kde a v jaké vzdálenosti od středu chce zrychlení měřit a jak je chce odhadnout. Takže jsme ji nechali měřit podél každé osy krychle ve třech bodech ve vzdálenostech $\sim 300\,\mathrm{m}$, $\sim 500\,\mathrm{m}$ a $\sim 700\,\mathrm{m}$ od středu (kromě stěny ve směru záporné osy x, kde je v této vzdálenosti již moc horko, takže se tam nedá jít). Krychle je protkaná tunely, proto se pouhým odhadem vzdálenost určuje celkem špatně (takže kromě chyby měření stopek může být chyba i v určení vzdálenosti.) Jednotlivé hodnoty jsou ale měřené vždy z daného místa.

Alča pouští kuličku z výšky $1{,}7\,\mathrm{m}$ odměřené metrem. Časy dopadů naměřené na stopkách jsou (v sekundách):

$-500\,\mathrm{m}$	0,71	0,66	0,65	0,59	0,52	0,68	0,57	0,78	0,71	0,66
$-300\,\mathrm{m}$	0,83	0,78	0,68	0,86	1,00	0,87	0,82	0,86	0,91	0,69
$300\,\mathrm{m}$	0,88	0,87	0,88	1,01	0,98	0,96	0,91	0,81	0,80	1,02
$500\,\mathrm{m}$	0,63	0,78	0,66	0,76	0,87	0,76	0,56	0,55	0,70	0,67
$700\,\mathrm{m}$	0,59	0,55	0,58	0,61	0,56	0,65	0,67	0,67	0,63	0,48

Tabulka t4.2: Pouštění z míst ve směru osy x

Při pouštění z míst podél osy x padá kulička vždy směrem od středu. Podél osy y kulička nepadá, stejně jako ve dvou rovinách uvnitř krychle, které se v ose y protínají.

−700 m	0,93	1,04	1,02	0,91	1,06	1,02	0,92	1,12	1,12	0,98
−500 m	1,03	1,16	1,20	1,17	1,13	1,18	1,14	1,16	1,14	1,07
−300 m	1,64	1,42	1,47	1,58	1,60	1,47	1,39	1,46	1,36	1,50
300 m	1,58	1,82	1,63	1,57	1,66	1,48	1,60	1,64	1,80	1,69
500 m	1,09	1,09	1,39	1,20	1,18	1,11	1,26	1,15	1,30	1,27
700 m	0,90	1,14	1,17	0,93	1,02	1,03	0,85	1,15	1,10	0,81

Tabulka t4.3: Pouštění z míst ve směru osy z

Tentokrát padá kulička vždy směrem ke středu. Při provádění pokusu si lze všimnout, že kulička nepadá úplně kolmo, ale mírně zahýbá.

3. pokus

Při točení kuličkou na provázku má kulička tendenci zahýbat. Toto zahýbání je silnější, pokud se s kuličkou točí rychleji, a záleží na směru, kterým s kuličkou točíme. Pokud Alča točí kolem osy x Jiného světa v kladném smyslu, rovina otáčení kuličky se má tendenci stáčet v záporném smyslu kolem osy y. Pokud točí kuličkou v kladném smyslu kolem osy y, rovina oběhu kuličky se stáčí v kladném smyslu kolem osy x. Při otáčení kolem osy z kulička necuká vůbec. Zahýbání kuličky vypadá jako poměrně intenzivní jev, ale bez přesnějšího měření se dá jen těžko odhadnout, jak přesně velká síla působící na kuličku je. Stáčení roviny rotace je otáčivý pohyb a vyvolává zpětně rotaci kolem původní osy, což je rovněž znát.

Pokud Alča roztočí tyčku po naolejované podložce tak, že tyč na ní zůstává ležet, tyčka se normálně roztočí (po chvíli se zastaví vlivem tření), nikam znatelně neklouže. Ale nejde přehlédnout, že na roztočenou tyčku působí stáčející síla stejným směrem, jako na roztočenou kuličku. (Pokud je například podložka špatně upevněná, moment, který otáčí tyčku, ji občas převrhne.)

Náměty

Co je Alčina síla[6], která stáčí rovinu otáčení kuličky? Jak by se její vlastnosti daly proměřit přesněji? Na čem a jak závisí?

Co všechno můžete usoudit z měření časů dopadů kuličky podél os krychle? Jak přesná budou, pokud jsou vzdálenost od středu a výška (1,7 m) jenom odhadnuté a stopky (nejlepší, co se daly sehnat) mají speciální ciferník, který ručička obkrouží za vteřinu? Jaký je poměr tíhy podél os x a z? Jak by se dalo měření zpřesnit, aby se z nich dalo usoudit více? Jaké jiné pokusy se odhodláte provést?

Pozn. red.: Z technických důvodů budou autorce body za její příspěvek k tématu připsány až ve čtvrtém čísle.

Irigi & Mára

[6] *Pozn. red.: Držíme se běžného zvyku a pojmenováváme fyzikální jev po jeho objeviteli.* :-)

Konference Mlýn 2008

Na soustředění M&M Mlýn 2008 proběhla tradiční konference, která se skládala z příspěvků účastníků soustředění. Pro tento rok jsme se rozhodli odprezentované příspěvky, které byly svými autory zpracovány a zaslány naší redakci průběžně uveřejňovat a přidělovat za ně body. Článek hodnotíme nejen po stránce odborné, ale také po stránce formální a stylistické.

NIM

Mgr.[MM] *Štěpán Šimsa, Barbora Šmídová*

Naším úkolem bylo zjistit výherní strategie nejdřív pro nějaké určité hry a poté se pokusit přijít na univerzální výherní strategii.

Nim, logická hra například s kaštany. Kaštany jsou v několika hromádkách. Každé kolo odebereme nějaký počet kaštanů dle zadání.

Cíl hry

Sebrat poslední kaštan, nebo dostat protihráče do takového stavu, že už nemůže sebrat žádný kaštan.

Pravidla

2 hráči se střídají po tahu. V každém kole může hráč, který je na tahu sebrat nějaký počet kaštanů (jeden z předem určených počtů).
Příklad: *1 hromádka, v každém kole může hráč, který je na tahu, odebrat 1, 2 nebo 3 kaštany*

Rozbor pro několik kaštanů s různým počtem kaštanů na začátku

- 0 kaštanů: pokud není v hromádce žádný kaštan, hráč na tahu nemá co sebrat, hráč na tahu je v prohrávajícím stavu.
- 1 kaštan: hráč na tahu sebere 1 kaštan, tím pádem 2. hráč už nemá v hromádce žádný kaštan a jak je vidět výše tak v tom případě je 2. hráč v prohrávajícím stavu a první hráč ve stavu vyhrávajícím.
- 2 kaštany: 1. hráč může sebrat buď 1 kaštan, čímž 2. hráč je ve vyhrávajícím stavu, nebo 2 kaštany, pak je 2. hráč v prohrávajícím stavu; 1. hráč je ve vyhrávajícím stavu.
- 3 kaštany: 1. hráč může sebrat buď 1 kaštan, 2. hráč je ve vyhrávajícím stavu, nebo 2 kaštany pak je 2. hráč taktéž ve vyhrávajícím stavu, nebo 3 kaštany a pak je 2. hráč v prohrávajícím stavu; 1. je ve vyhrávajícím stavu
- 4 kaštany: 1. hráč může sebrat buď 1 kaštan, 2 kaštany nebo 3 kaštany; 2. hráč bude vždy ve vyhrávajícím stavu – 1. hráč je v prohrávajícím stavu

Nyní vidíme, že v prohrávajícím stavu je hráč na tahu nejen, když zbývá 0 kaštanů, ale i když zbývají 4 kaštany. Snažíme se tedy dostat 2. hráče do situace, kdy jsou v hromádce před jeho tahem 4 kaštany (pro počet kaštanů původně větší než 4) a to stejným způsobem, jako když jsme se ho snažili dostat do situace, kdy nebyl v hromádce před jeho tahem žádný kaštan. Tím pádem je hráč na tahu ve vyhrávajícím stavu, pokud má před tahem v hromádce 5, 6 nebo 7 kaštanů. Pro 8 kaštanů pošle 2. hráče do vyhrávajícího stavu, nezávisle na tom, jestli sebere 1, 2 nebo 3 kaštany. Pro 8 kaštanů je tedy znovu v prohrávajícím stavu. Je vidět, že hráč na tahu prohraje, pokud má před tahem v hromádce $4 \cdot k$ kaštanů. Snažíme se tedy, aby bylo v hromádce po našem tahu $4 \cdot k$ kaštanů.

Univerzální strategie pro jednu hromádku

$f(x) : 1, 2, 4$ je funkce, která říká, kolik můžeme odebrat v každém tahu kaštanů;
$g(x)$: Mex$g(x)$ vrací minimální číslo, které se nevyskutuje při počtu kaštanů, na které se můžeme dostat po odebrání kaštanů
Příklad: *1 hromádka, lze odebírat 1,2 nebo 4 kaštany*

- pro 0 je $g(x) = 0$
- pro 1 je $g(x) = 1$ (odkážeme se na 0, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0 je číslo 1)
- pro 2 je $g(x) = 2$ (odkážeme se na 0 a 1, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0; 1 je 2)
- pro 3 je $g(x) = 0$ (odkážeme se na 1 a 2, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 1; 2 je 0)
- pro 4 je $g(x) = 1$ (odkážeme se na 0, 2 a 3, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0; 2 je 2) ...

Vidíme, že v hromádce, kde jsou 3 kaštany, vrátila funkce $g(x)$ číslo 0 a se zvyšujícím se počtem kaštanů v hromádce se čísla periodicky opakují. Jelikož v prohrávajícím stavu je hráč na tahu tehdy, když je $g(x) = 0$, tak prohrávající stav je v tomto případě tehdy, když je v hromádce $3 \cdot k$ kaštanů.

V této hře se tedy snažíme, aby bylo po našem tahu v hromádce $3 \cdot k$ kaštanů.

1 hromádka, jdou odebírat 3 kaštany nebo 5 kaštanů

- pro 0 je $g(x) = 0$ (nemůžeme nic odebrat)
- pro 1 je $g(x) = 0$ (nemůžeme nic odebrat)
- pro 2 je $g(x) = 0$ (nemůžeme nic odebrat)
- pro 3 je $g(x) = 1$ (odkážeme se na 0, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0 je 1)
- pro 4 je $g(x) = 1$ (odkážeme se na 1, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0 je 1)
- pro 5 je g(x)=1 (odkážeme se na 0 a 2, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0 je 1)
- pro 6 je g(x)=2 (odkážeme se na 1 a 3, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0;1 je 2)

- pro 7 je g(x)=2 (odkážeme se na 2 a 4, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0;1 je 2)
- pro 8 je g(x)=0 (odkážeme se na 3 a 5, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 1 je 0)
- pro 9 je g(x)=0 (odkážeme se na 4 a 6, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 1;2 je 0)
- pro 10 je g(x)=0 (odkážeme se na 5 a 7, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 1;2 je 0)
- pro 11 je g(x)=1 (odkážeme se na 6 a 8, nejmenší číslo, které se nevyskytuje v množině 0;2 je 1) ...

Vidíme, že v hromádce, kde je 8 kaštanů, 9 kaštanů nebo 10 kaštanů vrátila funkce $g(x)$ číslo 0 a se zvyšujícím se počtem kaštanů v hromádce se čísla periodicky opakují. Jelikož v prohrávajícím stavu je hráč na tahu tehdy, když je $g(x) = 0$, tak prohrávající stav je v tomto případě, když je v hromádce $8 \cdot k$, $8 \cdot k + 1$ nebo $8 \cdot k + 2$ kaštanů.

V této hře se tedy snažíme, aby bylo po našem tahu v hromádce $8 \cdot k$ kaštanů, $8 \cdot k + 1$ kaštanů nebo $8 \cdot k + 2$ kaštanů ($n \geq 0$).

1 hromádka, lze odebírat 2^n kaštanů; $n \geq 0$

Nejdříve si vypíšeme prvních několik počtů kaštanů, které můžeme odebírat: 1, 2, 4, 8, 16...

Postupujeme stejně jako předtím: vypočítáváme $g(x)$ pro pár nejmenších možných počtů kaštanů v hromádce a zjistíme, kde je perioda. V tomto případě je prohrávající stav, když je v hromádce $3 \cdot k$ kaštanů.

1 hromádka, jde odebírat 2^i, 3^j, 5^k; $i, j, k \geq 0$

Znovu si vypíšeme několik nejmenších počtů kaštanů, které můžeme odebírat: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 25...

s Postupujeme úplně stejně jako minule a zjistíme že prohrávající stav je v tomto případě tehdy, když je v hromádce $6 \cdot k$ kaštanů.

Univerzální strategie pro k hromádek:

Nejdřív zjistíme $g(x)$ pro každou hromádku zvlášť a výsledná čísla převedeme do dvojkové soustavy. Poté použijeme funkci XOR pro všechny hromádky dohromady (např. pro 3 hromádky uděláme XOR(a, b, c) jako XOR(XOR(a, b), c). Pokud vyjde 0, jsme v prohrávajícím stavu, pokud vyjde číslo jiné, jsme ve vyhrávajícím stavu a musíme odebrat v nějaké hromádce tolik kaštanů, aby výsledný XOR byl roven 0.

Příklad: *3 hromádky, dají se odebírat 1, 2, 3 kaštany, v hromádkách 4, 6, 7 kaštanů* Nejdříve si napíšeme tabulku:

1.hromádka (A)	4 K	$g(x) = 0$	00	$\text{XOR}(A, B) = D, \text{XOR}(00, 10) = 10$
2.hromádka (B)	6 K	$g(x) = 2$	10	$\text{XOR}(D, C) = E, \text{XOR}(10, 11) = 01$
3.hromádka (C)	7 K	$g(x) = 3$	11	

$E = 01 \rightarrow$ vyhrávající stav.

Nyní už jen musíme propočítávat, jak máme hrát, aby byl XOR po našem tahu 00 a druhý hráč byl v prohrávajícím stavu.

2 hromádky, lze odebírat jakýkoliv počet kaštanů z jedné hromádky nebo stejný počet z obou hromádek najednou
Potřebujeme zjistit, pro kolik kaštanů v jednotlivých hromádkách jsme v prohrávajícím stavu. Určitě jsme v prohrávajícím stavu, když v obou hromádkách není ani jeden kaštan. Poté když je v jedné hromádce 1 kaštan a v druhé 2 kaštany. V tomto případě ho totiž nemůžeme dostat do stavu, kde by v obou hromádkách nebyl ani jeden kaštan.

Když chceme zjistit další nejmenší prohrávající stav, budeme postupovat následovně: v jedné hromádce bude nejmenší číslo, které se ještě ve všech předchozích stavech nevyskytovalo ani jednou. V našem případě číslo 3. Kdybychom vybrali číslo, které už se v předchozích prohrávajících stavech vyskytovalo, stačilo by pak odebrat nějaký počet kaštanů z hromádky druhé a v prohrávajícím stavu by byl druhý.

Nejednalo by se tedy o prohrávající stav. V druhé hromádce pak bude číslo větší o $x+1$ než číslo v první hromádce, kde x je rozdíl počtu kaštanů v druhé a první hromádce předchozího prohrávajícího stavu. V našem případě bude tedy v druhé hromádce číslo 5.

Tady je začátek tabulky s prohrávajícím stavy:

0	1	3	4	6	8	9	11	12	...
0	2	5	7	10	13	15	18	20	...

Nyní se jen budeme snažit, aby se protihráč dostal do jednoho z těchto prohrávajících stavů.

Závěr

Jak jsme zmínili na začátku, naším hlavním úkolem bylo zjistit univerzální strategii, kterou jsme se dozvěděli a prezentovali ji. Je ale dost zdlouhavé počítat, jak hrát, zvlášť pro více hromádek s vysokými počty kaštanů na začátku. A navíc by nebylo tolik zábavné hrát hru a vědět, že vyhraju. Mnohem lepší je tedy výherní strategii použít jen párkrát, pak jí prozradit protihráči a vykašlat se na to, aby měla hra nějakou cenu.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r0	r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	k	+	$\sum_0$
1–2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpán Šimsa	1.	24				4		6		7	6	1	24
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Štědronský	2.	24		4		4	3	11				2	24
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	4.	44	1		5	3	3	10				0	22
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	48		3		2		5	10			1	21
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	4.	55					3	1		16		0	20
6.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Dočekalová	3.	19	0		2	3	2	2	10			0	19
7–11.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	2.	52				4		0	5			0	9
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	4.	52		2		4	2	1				0	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	2.	43		0		2	3	4				0	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	2.	43				4		5				0	9
	Michal Husek	3.	9		1	1	1	2	1	3			0	9
12.	Barbora Šmídová	1.	8						2			6		8
13–16.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	4.	185				1	2			4		0	7
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	4.	60				4	3					0	7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	4.	33						7					7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	4.	32					2	5				0	7
17–20.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	2.	101		0	2	1		3				0	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	3.	44		4			2					0	6
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Vaváčková	3.	11					2	4				0	6
	Vojtěch Dziewicki	3.	6		0		4	2					0	6
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	4.	29				1	2	2				0	5
22–25.	Anna Chejnovská	2.	4	1	0		1	2					0	4
	Filip Hlásek	2.	4				3		1				0	4
	Pavel Novotný	3.	4							4				4
	Tereza Zábojníková	4.	4				4						0	4
26–30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	17					2	1				0	3
	Alena Jurásková	1.	3	1			2						0	3
	Pavel Kratochvíl	1.	3					3					0	3
	Vojtěch Miloš	3.	3				3						0	3
	Libor Plucnar	4.	3		0			3					0	3
31.	Barbora Böhmová	1.	2	0				1			1		0	2
32.	Martina Bekrová	4.	1	0			1						0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ ve výsledkové listině je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů získaných v aktuální sérii.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.