M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIV číslo 7–8

Milí kamarádi,
toto je poslední číslo časopisu M&M v tomto ročníku. Naleznete zde vzorová řešení úloh, poslední příspěvky a shrnutí jednotlivých tématek. Také zde nesmí chybět konečná výsledková listina. Na prvním místě se umístil Doc.^{MM} Petr Pecha. K tomuto úspěchu gratulujeme.

Toto číslo vychází s mírným zpožděním, neboť ta trochu volného času, která se nám naskytla, jsme investovali do prvního a druhého čísla následujícího 15. ročníku. Za toto zpoždění se omlouváme.

Mnoho sil do dalšího ročníku přejí

Organizátoři M&M

Řešení úloh

Úloha 5.1 – Tenis (3b)

Zadání:
Riki se Zikim hrají tenis. Hraje se tak, že vyhrává ten, kdo dosáhne pěti bodů s rozdílem alespoň dva. Riki má pravděpodobnost p_1, že vyhraje jeden set, Ziki $(1 - p_1)$. Najděte nejlepší odhad pro pravděpodobnost výhry Rikiho za stavu 2:3, pokud

a) znáte p_1
b) neznáte p_1

Řešení:
Úlohu budeme řešit rovnou obecně – pro neznáme p_1. Jelikož p_1 značí pravděpodobnost, uvažujeme pouze $0 \leq p_1 \leq 1$.

Nyní rozebereme všechny možnosti, které můžou nastat:

- Riki 3× za sebou vyhraje, pravděpodobnost této možnosti je $p(5:3) = p_1 \cdot p_1 \cdot p_1$ tedy p_1^3.
- Riki vyhraje 2× a Ziki jednou a dostaneme se do stavu 4:4 – $p(4:4) = p_1 \cdot p_1 \cdot (1-p_1) + p_1 \cdot (1-p_1) \cdot p_1 + (1-p_1) \cdot p_1 \cdot p_1 = 3 \cdot p_1^2 \cdot (1-p_1)$. Tuto variantu budeme ještě analyzovat dále.
- Ziki vyhraje 2× – $p(2:5) = (1-p_1)^2$
- Riki vyhraje 1× a Ziki 2× – $p(3:5) = 2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)^2$,

protože nemůžeme zahrnout výraz $(1-p_1) \cdot (1-p_1) \cdot p_1$, kde by Ziki vyhrál už po druhém kole.

Nyní si rozebereme, co se stane, když soupeři dospějí do stavu 4:4. Připomínám, že k výhře je potřeba rozdíl dvou bodů. Po dvou setech můžou nastat tyto tři varianty:

- vyhraje Riki – $p(6:4) = p(4:4) \cdot p_1 \cdot p_1$
- zase bude remíza – $p(5:5) = p(4:4) \cdot 2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)$
- vyhraje Ziki – $p(4:6) = p(4:4) \cdot (1-p_1) \cdot (1-p_1)$

Ze stavu 5:5 bychom mohli udělat stejný rozbor s podobnými výsledky.

Pokud nyní sečteme pravděpodobnosti, že vyhraje Riki, dostaneme

$$p(R) = p(5:3) + p(6:4) + p(7:5) + \ldots = p(5:3) + \sum_{k=4}^{\infty} p(k+2,k)$$

$$p(R) = p_1^3 + \sum_{l=0}^{\infty} p(4:4) \cdot [2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)]^l \cdot p_1^2,$$

což můžeme upravit na

$$p(4:4) \cdot p_1^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} [2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)]^l$$

Index l zde odpovídá tomu, kolikrát se soupeři po stavu 4:4 dostali zpátky do remízového stavu, člen p_1^2 je pravděpodobnost posunu z remízy k výhře Rikiho.

Mnozí už zde vidí vzorec pro součet geometrické řady, ostatním poslouží toto odvození:

Mějme řadu $s_n = \sum_{l=0}^{n} q^l = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Vynásobme tuto řadu q:

$$q \cdot s_n = \sum_{l=1}^{n+1} q^l = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}.$$

Nyní první řadu odečtěme od druhé:

$$q \cdot s_n - s_n = (q-1) \cdot s_n = q^{(n+1)} - 1.$$

Ostatní členy se odečtou. Dostáváme tedy $s_n = (q^{n+1} - 1)/(q-1)$.

V okamžiku, kdy n bude dostatečně velké a $|q| < 1$, tak člen q^{n+1} půjde k nule a výsledkem bude $s_\infty = \sum_{l=1}^{\infty} q^l = 1/(1-q)$.

Tento postup zkusíme použít na naši řadu. Musíme samozřejmě ověřit, že $|2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)| < 1$, tedy že $p_1 \cdot (1-p_1) < 1/2$ pro $0 \leq p_1 \leq 1$, jak jsme si určili. Tuto část necháme na vás.

Výsledná pravděpodobnost výhry Rikiho bude tedy:

$$p(R) = p(5:3) + p(4:4) \cdot p_1^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} [2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)]^l$$

$$p(R) = p_1^3 + 3 \cdot p_1^2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1^2 \cdot \frac{1}{1 - 2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)}$$

$$p(R) = p_1^3 \cdot \left(1 + 3 \cdot p_1 \cdot \frac{1 - p_1 \cdot 1}{1 - 2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)}\right)$$

$$p(R) = p_1^3 \cdot \left(1 + 3 \cdot p_1 \cdot \left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{1 - 2 \cdot p_1 + 2 \cdot p_1^2}\right)\right)$$

$$p(R) = p_1^3 \cdot \frac{1 + p_1 - p_1^2}{1 - 2 \cdot p_1 + 2 \cdot p_1^2}$$

Pravděpodobnost, že vyhraje Ziki je pak:

$$p(Z) = p(2:5) + p(3:5) + p(4:4) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} [2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)]^l \cdot (1 - p_1)^2$$

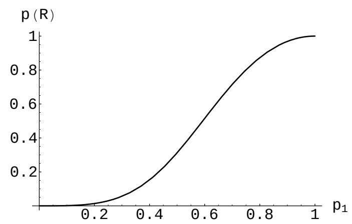
$$p(Z) = p(2:5) + p(3:5) + p(4:4) \cdot (1 - p_1)^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} [2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)]^l$$

$$p(Z) = (1-p_1)^2 + 2 \cdot p_1 \cdot (1-p_1)^2 + 3 \cdot p_1^2 \cdot (1-p_1) \cdot (1-p_1)^2 \cdot \frac{1}{1 - 2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)},$$

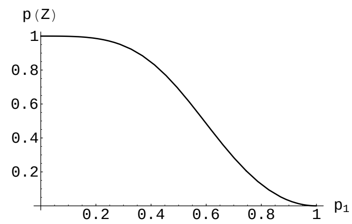
což se po úpravě rovná:

$$p(Z) = (1 - p_1)^2 \cdot \frac{1 + p_1^2 + p_1^3}{1 - 2 \cdot p_1 + 2 \cdot p_1^2}$$

Abychom se přesvědčili, že jsme počítali správně, můžeme obě pravděpodobnosti sečíst. Součet bude 1, jak jsme předpokládali. Na závěr si ještě můžete prohlédnout, jak závisí pravděpodobnost výhry obou soupeřů na p_1.



Obr. r5.1.1 – Závislost výhry Rikiho $p(R)$ na p_1



Obr. r5.1.2 – Závislost výhry Zikiho $p(Z)$ na p_1

Jindra

Úloha 5.2 – Martin s kulometem (4b)

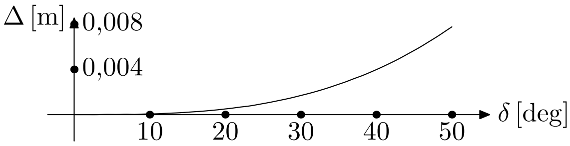
Zadání:

Martin dostal od maminky za úkol zasadit hrách do jejich kulatého záhonu. Jako člověk, který využívá svůj čas maximálně efektivně, se rozhodl řešit úlohu těžkou mechanizací, a naládoval hrách do svého kuličkového kulometu. Postavil se doprostřed záhonu a za hlasitého ďábelského smíchu „Muhehehe!“ spustil palbu a začal se otáčet. Maminka mu ale přikázala zasít hrách rovnoměrně. Jak má Martin měnit úhel hlavně kulometu a rychlost svého otáčení, aby zasel rovnoměrně?

Martin si to musel pořádně rozmyslet dopředu – má pevný počet hrášků, které chce zasadit, a zná kadenci svého kulometu. Na tak malou vzdálenost je možné zanedbat odstředivou sílu i odpor vzduchu a uvažovat, že hrách létá po přímce. Rovnoměrné rozmístění znamená, že v každém čtverci $1\,\mathrm{m}\times 1\,\mathrm{m}$ *je skoro stejně hrachu a že vzdálenost každého hrášku ke třem k němu nejbližším je skoro stejná. Úhel a rychlost otáčení zkuste vyjádřit co nejpřesněji (například jako funkce času).*

Řešení:

Označme kadenciu (teda počet rán za sekundu) k (udané v Hertzoch) a medzihráškovú vzdialenosť (teda priemernú vzdialenosť najbližších hráškov) d. Polomer záhonu je R. Ak Martin strieľa hrášky na kružnicu o polomere r, uhlová vzdialenosť medzi dvoma hráškami je $\delta(r) = d/r$ radiánov. Toto je ale vzdialenosť po kružnici. Skutočná vzdialenosť hráškov je menšia a správne by sa mala vypočítať z rovnoramenného trojuholníka s vrcholmi v strede kružnice a dvoch susedných hráškoch. Správny vzťah pre uhol teda je: $\delta(r) = 2\arcsin(d/2r)$. V grafe r5.2.1 je vynesený rozdiel vzdialeností priamej a po kružnici s polomerom $r = 1\,\mathrm{m}$ v závislosti na uhle δ vyjadrenom v stupňoch. Je vidieť, že aj pre pomerne veľký uhol (50°) je tento rozdiel maličký (asi 1 cm pri dĺžke oblúku 1 m, teda odchylka je asi 1%) a tak na základe tvrdenia zo zadania, že „vzdálenost každého hrášku ke třem k němu nejbližším je *skoro* stejná“ môže Martin použiť jednoduchší vzťah.



Obr. r5.2.1 – Rozdiel vzdialeností po kružnici a priamo.

Pri známej kadencii k, polomere r a medzihráškovej vzdialenosti d sa teda musí otočiť o $\delta(r) = d/r$ za $1/k$ sekúnd a teda uhlová rýchlosť otáčania bude $\omega(\delta) = \delta k$, čiže

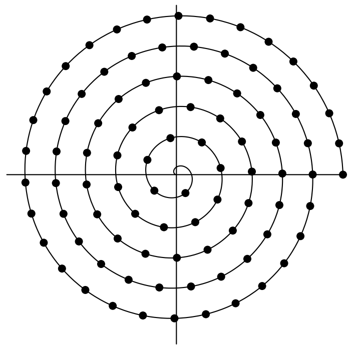
$$\omega(r) = \frac{dk}{r}\,. \qquad \text{(r5.2.1)}$$

Je vidieť, že so zmenšujúcim sa polomerom sa Martin bude musieť otáčať stále rýchlejšie, pričom nemá zmysel voliť kružnicu o menšom priemere, ako je medzihrášková vzdialenosť.

Rýchlosť otáčania teda máme ako funkciu polomeru. Ako ale voliť polomer? Jedna možnosť je vystrieľať celú kružnicu (teda otočiť sa o 2π), potom zmenšiť polomer a tieto dva kroky opakovať, kým sa polomer príliš nezmenší. Otázka je, o koľko by sa mal polomer v každom kroku zmenšiť. Ak by bol tento rozdiel d, potom by bola vzdialenosť hráškov rovná d iba v prípade, že ležia na tom istom lúči (v tom istom uhle). Bude teda vhodnejšie zvoliť rozdiel polomerov kružníc tak, aby sa stredná hodnota vzdialeností najbližších hráškov na susedných kružniciach rovnala d. Pre jednoduchosť výpočtu je možné predpokladať veľký polomer kružníc a je teda možné problém na sústredných kružniciach nahradiť problémom na rovnobežných priamkach. Tento zjednodušený výpočet už nie je náročný a výsledkom je, že rozdiel polomerov dvoch susedných kružníc by mal byť približne $c = 0{,}956 \cdot d$.

Martin nie je robot, takéto prudké hýbanie hlavňou mu nesedí. Preto by asi ocenil, keby mohol polomer meniť plynulejšie. Na základe minulého odstavca môže zvoliť polomer r ako funkciu uhla natočenia týmto spôsobom:

$$r(\alpha) = R - c\frac{\alpha}{2\pi}\,. \tag{r5.2.2}$$



Obr. r5.2.2

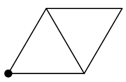
Je vidieť, že po obehnutí o 2π sa pôvodný polomer R zmenší práve o c a tým pádom tento vzťah spĺňa všetky predchádzajúce body. Využitím vzťahov (r5.2.1) a (r5.2.2) je teraz možné nakresliť špirálu tak ako ju s nastrieľanými hrachmi vidíte na obrázku r5.2.2.

Aj keď by bolo možné napísať, že

$$\alpha(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau\,, \tag{r5.2.3}$$

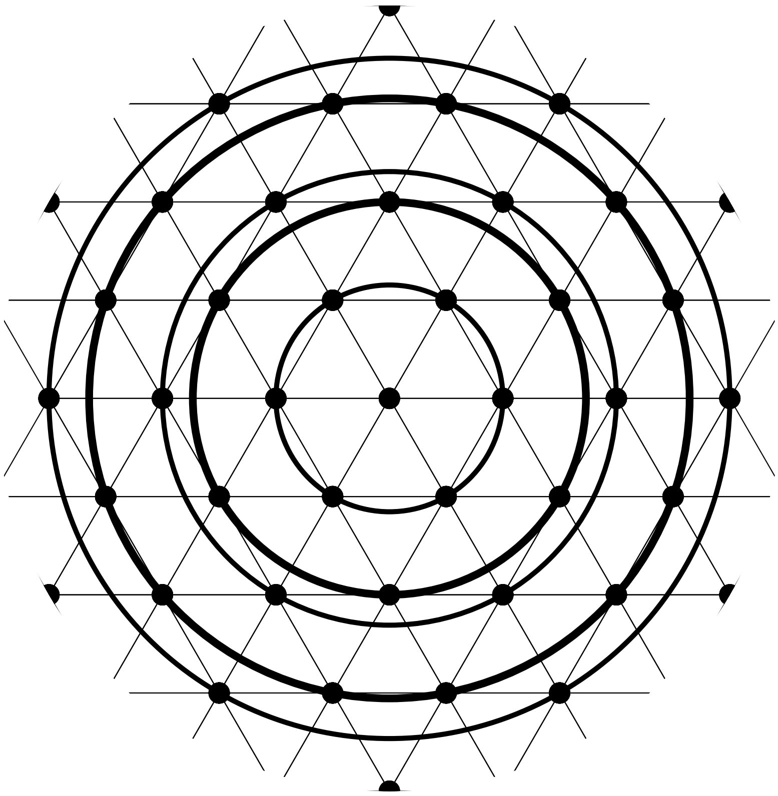
z (r5.2.3) dosadiť do (r5.2.2), prederivovať obe strany rovnice podľa času a snažiť sa riešiť výslednú diferenciálnu rovnicu, myslím, že pre vás bude jednoduchšie postupovať po krokoch (čo je vlastne jedna z numerických metód riešenia diferenciálnych rovníc). Teda, na začiatku $\alpha_{t=0\,\mathrm{s}} = 0$ nastaviť $\omega(r) = dk/R$, teda $\delta(r) = d/R$, a po vystrelení hrášku v čase $t = 1/k$ prepočítať nové hodnoty pre ďalší hrášok ako

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \frac{dk}{r(\alpha + 0{,}5\delta)}\,, \\ \delta(\omega) &= \frac{\omega}{k}\,. \end{aligned} \tag{r5.2.4}$$



Obr. r5.2.3

Inak povedané, na spočítanie rýchlosti otáčania k ďalšiemu hrášku použijem polomer $r(\alpha + 0{,}5\delta)$, čo je polomer podľa vzťahu (r5.2.2) v polovici intervalu medzi týmto a nasledujúcim hráškom, pričom polovicu odhadujem podľa dĺžky predchádzajúceho intervalu. Týmto spôsobom je nakrelsená aj ohráškovaná špirála na obrázku r5.2.2.

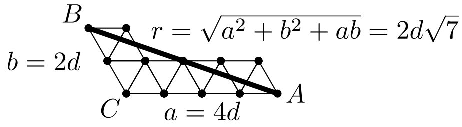


Obr. r5.2.4

Je ale možné, že by Martina takáto čiastočná pravidelnosť neuspokojila a chcel by byť lepší ako zadanie a teda úplne pravidelný. Vhodným pravidelným útvarom na pokrytie roviny je napríklad pravidelný šesťuholník (mimo iné sa skladá zo šiestich rovnoramenných trojuholníkov). Pritom stačí jeden hrášok na každé dva trojuholníky (teda tri hrášky do šesťuholníka), napríklad tak, ako je to naznačené na obrázku r5.2.3. Sami si môžete vyskúšať pokrytie roviny takýmito útvarmi a to, že až na nejaké vrcholy na hranici sú vo všetkých vrcholoch hrášky. Taktiež si sami odvodíte, že v takto pokrytej rovine bude medzihrášková vzdialenosť

$$d = \sqrt{\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}N}}\,, \qquad \text{(r5.2.5)}$$

kde R je polomer záhonu a N celkový počet hráškov. Pre jednoduchosť povedzme, že Martin môže pár hráškov stratiť tak, aby mu ich na strieľanie zostalo $6n+1$. Rýchlosť otáčania bude v tomto prípade $\omega = k\cdot 60^\circ$ a tak Martin nastrelí pri otočení o 360° práve 6 hráškov do pravidelného šesťuholníka (na kružnicu jemu opísanú). Kružnica je označená dvojicou čísel (a, b), $a, b \in \mathbb{N}_0$, potom jej polomer je podľa kosínusovej vety $r = d\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ (viz. obrázok r5.2.5). Na každej takejto kružnici leži práve šesť hráškov, avšak v niektorých prípadoch sa dve takéto kružnice prekrývajú. Dochádza k tomu v prípade, že a a b sú dve rôzne nenulové čísla (pretože keď ideme najprv o a doprava a potom o b šikmo nahor, dostaneme sa ku hrášku ležiacemu na inej kružnici ako keď ideme o b doprava a o a šikmo nahor, ale polomer týchto kružníc je rovnaký).



Obr. r5.2.5

Hľadiac teraz na obrázok r5.2.4 je už jasné, že Martin začne s kružnicou (0, 1) (prvá tenká), potom prejde na (1, 1) (prvá hrubá), potom (0, 2) (druhá tenká), následne nastrieľa kružnicu (1, 2) a po malom pootoční (o uhlovú vzdialenosť susedných hráškov $+l \cdot 60°$, $l \in \mathbb{Z}$) aj kružnicu (2, 1) a pokračuje ďalej, kým sa vlezie do polomeru záhradky. Napokon vyberie z rozpáleného guľometu $6n+1$-tý hrášok a vrazí ho do diery, ktorú vyhĺbil svojimi nohami pri otáčaní.

Jeffer

Úloha 5.3 – Loydova 63 (5b)

Zadání:

Jistě znáte hru Loydova patnáctka. Máte k dispozici hrací pole velikosti 4×4 a na něm rozmístěno patnáct čísel, na jednom místě je volné místo. Vaším úkolem je pomocí přesouvání čísel (přesunutí čísel znamená posunutí čísla na sousední volné políčko) přeuspořádat čísla tak, aby šly postupně od 1 do 15. Ve své době byl o tuto hru veliký zájem, neboť sám Loyd nabídl £1000 tomu, kdo vyřeší patnáctku, která je seřazena, až na dvě poslední číslice, které jsou prohozeny (čísla šly v pořadí 1, 2 … 13, 15, 14). O své peníze se nemusel bát, protože tato situace je neřešitelná.

Co kdybychom řešili podobný problém, a to 3D verzi tohoto hlavolamu. Měli bychom krychli o velikosti $4 \times 4 \times 4$ hracích kamenů. Uvnitř bychom měli 63 očíslovaných krychliček. Kameny bychom mohli opět přesouvat pouze na sousední volné místo a to ve 3 (respektive 6) směrech. Je tato verze tohoto hlavolamu řešitelná ve všech případech? Nebo i zde může být nabídnuta poutavá odměna za něco, co nejde vyřešit? Své řešení nezapomeňte patřičně zdůvodnit.

Řešení:

Zkusme se nejdříve zamyslet nad tím, proč některá rozložení u „klasické“ patnáctky nejdou uspořádat. Začneme tím, že si (možná trochu podivně) očíslujeme políčka.

4	3	2	1
5	6	7	8
12	11	10	9
13	14	15	

Každé rozložení pak budeme chápat jako permutaci hracích kostek s danými čísly vůči těmto políčkům. Toto očíslování míst má jednu výhodu. Pokud máme někde prázdné políčko, můžeme kostky posunout tak, že prázdné políčko se přesune na konec a nezmění se pořadí číslic (pokud tomu úplně nerozumíte, tak zkuste číst dál, pak vám to snad bude jasnější).

Vezměme si nyní „základní“ rozestavení patnáctky, neboli situaci, kdy jsou kameny seřazeny postupně od 1 po 15. Dostaneme tak „základní“ permutaci kostek s políčky (v horním řádku máme čísla políček a v dolním čísla kamenů na těchto políčkách):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	2	1	5	6	7	8	12	11	10	9	13	14	15

Budeme zkoumat znaménko permutace. Nejdříve zjistíme počet inverzí (přehození sousedních políček), který je potřeba, abychom získali původní tvar. V našem případě je to $n = 12$: $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 3$, $10 \leftrightarrow 9$, $11 \leftrightarrow 9$, $12 \leftrightarrow 9$, $11 \leftrightarrow 10$, $12 \leftrightarrow 10$, $12 \leftrightarrow 11$. Znakem $\leftrightarrow$ značíme inverzi.

V případě, že přehodíme poslední dvě kostičky (kostičku 14 a kostičku 15), dostaneme permutaci

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	2	1	5	6	7	8	12	11	10	9	13	15	14

U této permutace přibyla inverze $15 \leftrightarrow 14$. $n = 13$, tudíž permutace má znaménko -1. Pokud najdeme způsob, jak posunout kostičky tak, aby se změnilo znaménko permutace, tak jdou poskládat všechna počáteční rozestavení, pokud je tomu naopak, tak nikoliv. (Jak už asi tušíte, tak to nepůjde a my si ukážeme proč.)

Zároveň si povšimněte, že naše volba očíslování políček nám zajistí, že prázdné políčko můžeme vždy posunout na „16.“ pozici tak, že nezměníme pořadí číslic, a tudíž ani znaménko dané permutace.

Dále si všimněte další zajímavé věci. Vedle každého políčka s lichým číslem jsou políčka pouze se sudými čísly. To se nám bude hodit.

Zkusme nyní provést nějaký tah. Řekněme, že jsme kostičky s čísly 13, 14 a 15 na políčkách 13, 14 a 15 posunuli o jedno políčko „doprava“. A kostičku 9 jsme posunuli z políčka 12 na políčko 13. Nyní kostičku 5 z políčka 5 přesuneme na políčko 12 a vše vrátíme tak, aby prázdné políčko bylo zpět na „16.“ políčku.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
	13	14	15

1	2	3	4
	6	7	8
5	10	11	12
9	13	14	15

1	2	3	4
6	7	8	
5	10	11	12
9	13	14	15

1	2	3	4
6	7	8	12
9	5	10	11
13	14	15	

A opět se podíváme na to, jaká permutace nám vznikla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	2	1	6	7	8	12	11	10	5	9	13	15	14

Stalo se „pouze“ to, že kostička s číslem 5 se posunula o 6 míst dozadu. Pokud opět spočteme znaménko permutace, tak zjistíme, že $n = 18$. Tedy znaménko permutace je 1. Což ale není zase až tak překvapivé, protože posunem libovolné kostičky o sudý počet míst v permutaci přibude zase sudý počet permutací. Pokud si uvědomíme, že kolem každého lichého čísla jsou pouze sudá čísla a kolem sudého čísla jsou zase pouze lichá čísla, tak vždy číslo posuneme o sudý počet pozic, a tedy, že se nikdy nezmění znaménko permutace.

Jak nám to pomohlo při řešení Loydovy 63? Velmi, protože si stačí pouze vhodně očíslovat políčka tak, aby s každým sudým políčkem sousedilo pouze liché políčko a naopak.

Pro snazší představivost rozřežeme krychli na jednotlivá patra a očíslujeme políčka:

13	14	15	16
12	11	10	9
5	6	7	8
4	3	2	1

20	19	18	17
21	22	23	24
28	27	26	25
29	30	31	32

45	46	47	48
44	43	42	41
37	38	39	40
36	35	34	33

52	51	50	49
53	54	55	56
60	59	58	57
61	62	63	

A ještě pro úplné utvrzení si krychli rozřežme na jednotlivé stěny. Při stejném očíslování dostaneme:

4	3	2	1
29	30	31	32
36	35	34	33
61	62	63	

5	6	7	8
28	27	26	25
37	38	39	40
60	59	58	57

12	11	10	9
21	22	23	24
44	43	42	41
53	54	55	56

13	14	15	16
20	19	18	17
45	46	47	48
52	51	50	49

Jak se ukázalo, tak řešení neexistuje. Proto můžeme škodolibě vyhlásit soutěž o 42 M&M bodů pro toho, kdo najde způsob jak poskládat Loydovu 63. :-)

(R)adim

Úloha 5.4 – Prasečí hra (3b)

Zadání:

Na tabuli jsou napsaná čísla 1, 2, 3, ..., 2007. Dva hráči střídavě mažou libovolná dvě čísla a a b. Poté místo nich na tabuli napíšou číslo $\|a - b\|$. Hra končí ve chvíli, kdy na tabuli zbude jedno jediné poslední číslo. První hráč je vítězem, pokud je zbylé číslo sudé. Pokud je liché, vyhrává druhý hráč.

Řešení:

Jak si oba řešitelé správně povšimli, ve hře nezáleží na konkrétních hodnotách čísel, ale jenom na tom, jestli jsou sudá nebo lichá. Sudá čísla označíme S, lichá L:

$$S - S = S$$

$$L - L = S$$

$$S - L = L$$

Tedy celková bilance v jednotlivých případech je:

$$-2S + S = -S$$

$$-2L + S = -2L + S$$

$$-S - L + L = -S$$

Jak vidíme, lichá čísla můžou pouze ubývat, a to po dvou. Vzhledem k tomu, že první hráč vyhraje, když je na konci sudé číslo, vyhraje právě tehdy, když je na začátku na tabuli sudý počet lichých čísel. Pokud je jich lichý počet, vyhraje druhý hráč.

V posloupnosti $1, 2, 3, \ldots, 2007$ je 1004 lichých čísel, takže hru vždy vyhraje první hráč (bez ohledu na použitou strategii).

Honza

Úloha 6.1 – Rozhoupání lodě (4b)

Zadání:

Když Irigi sledoval poslední díl série Piráti z Karibiku, zaujala ho scéna, kdy posádka rozhoupává loď ve snaze ji převrhnout. Námořníci přebíhají z jedné strany lodi na druhou.

a) Jakým způsobem musí námořníci běhat, aby loď rozhoupali?

b) V jistém momentě padl povel kapitána Barbossy uvolnit náklad, aby se mohl volně hýbat podpalubím. Pomohl tím Barbossa posádce, nebo bylo naopak těžší loď převrhnout? (odůvodněte)

Řešení:

První část rozřešili správně téměř všichni, správné řešení napíši slovy Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáše Bartoňka:

Aby bylo dosaženo maximální efektivity, musí dle mého názoru námořníci běhat takto:

1. Z centrální paluby všichni na jednu stranu – loď dostane prvotní impuls a začne se naklánět.
2. Ve chvíli, kdy se loď přestane naklánět(dostane se do maximálně vychýlené polohy odpovídající váze námořníků na jejím okraji) a dostane se do mrtvého bodu, musí námořníci běžet na druhý bok lodi co nejrychleji tak, aby maximálně umocnili její zhoupnutí na druhou stranu.
3. Loď se přehupuje a námořníci běží na druhou stranu. Loď se dostane opět do krajní polohy, námořníci jsou na místě. A musí se otočit na druhou stranu a běžet co nejrychleji na bok lodi.

Opakovat body 2 a 3 dokud se loď nepřeváží. Za zmínku také stojí, že je nejlepší běhat v co největší vzdálenosti od podélné osy lodi – rameno síly je kolmé k síle, kterou působíme na dno lodi (která je kolmá k hladině – působíme vlastní vahou).

Druhá část úlohy už není tak jednoduchá, možná jsme ji i trochu podcenili. Jdou zde proti sobě dva vlivy. Uvolněný náklad se v podpalubí pohybuje, což vyžaduje energii. Tento vliv převracení námořníkům znesnadňuje. Druhý vliv lze popsat tak, že loď, ve které se náklad pohybuje, je proti převrácení méně stabilní, náklad není třeba zvedat spolu s lodí, proto je převracení snazší. Většina z vás si vsadila na jeden z vlivů a slovy ho popsala. Osobně mne nenapadla žádná hezká „finta“, jak ukázat, který vliv převáží, takže popíši způsob, jak se příklad spočítat dal. Pokud něčemu nebudete rozumět, klidně to přeskočte, matematika to není lehká, přesto chceme dodat správný výsledek.

Model

Abychom celý problém mohli řešit precizněji, sestavíme si model, který bude dost jednoduchý, aby se dal zapsat matematicky. Považujme loď za mističku ve tvaru polokoule poloměru R ponořenou ve vodě (jde nám koneckonců o podpalubí, je dobré si zvolit tvar jednoduchý). Loď dělá stabilnější těžké podpalubí, proto předpokládejme, že naspodu polokoule je závaží hmotnosti M. Náklad budeme reprezentovat kuličkou hmotnosti m svrchu položenou na dno polokoule – ta se buďto může, nebo nemůže volně hýbat. Mističku budeme rozhoupávat silou s průběhem sinusovky $F = F_0 \sin \omega t$. (Tady předpokládáme trochu hloupé námořníky, protože síla by se měla měnit podle aktuální výchylky lodě.) Výchylku lodě budeme značit úhlem $\varphi(t)$, jakmile dosáhne $\pi/4$, loď je převrácena. Polohu nákladu budeme značit úhlem $\chi(t)$. Tření mezi lodí a vodou i mezi lodí a nákladem budeme považovat za úměrné jejich vzájemné rychlosti, konstanty úměrnosti nazveme μ, ν.

Získání rovnic

Pohybové diferenciální rovnice získáme pomocí tzv. Lagrangeova formalismu.

Lagrangeův formalismus je velice užitečný nástroj, který člověku usnadňuje získání pohybových rovnic daného systému bez toho, aby bylo nutné dělat složitý rozbor silového působení. Je ekvivalentní Newtonovým zákonům a v podstatě říká, že pokud umíme zapsat kinetickou energii T a potenciální energii V v libovolných souřadnicích $q_i(t)$ a zobecněných rychlostech $\dot{q}_i(t)$ (tečka značí derivování podle času), pak pohybové rovnice mají tvar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} = 0\,.$$

My ve skutečnosti potřebujeme ještě obecnější tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t) = 0\,,$$

kde Q_i jsou zobecněné síly, které se od normálních sil liší tím, že působí přímo na souřadnice q_i, zatímco D závisí na rychlostech a představuje třecí síly.

Nejdříve si vyjádříme vztahy, které známe.

$$V = R(-m\cos\chi(t) - M\cos\varphi(t) + \gamma\left(\chi(t) - \varphi(t)\right)^2\,,$$

$$T = MR\dot{\varphi}(t)^2 + mR\dot{\chi}(t)^2 \,,$$
$$D = \nu\left(\dot{\varphi}(t) - \dot{\chi}(t)\right)^2 + \mu\dot{\varphi}(t)^2 \,,$$
$$Q_\phi = F_0 \sin\omega t \,,$$
$$Q_\chi = 0 \,.$$

V je potenciální energie zapsaná v úhlech, kterými systém popisujeme (členy obsahující mínus kosinus úhlu zaručují, že v čase $t = 0$ jsou závaží M i m vespod lodi, podivný člen $\gamma\left(\chi(t) - \varphi(t)\right)^2$ je jenom způsob, jak ukotvit náklad lodi – pokud γ není nula, ale je rozumně velké, pak si můžeme představit, že je to dostatečně silná síla lan držících náklad.) T je kinetická energie zapsaná pomocí derivací úhlů podle času, tedy pomocí úhlových rychlostí. V členu reprezentujícím tření, D, vidíme, že tření nákladu a lodi je úměrné konstantě ν a závisí na rozdílu úhlových rychlostí lodi a nákladu, zatímco tření lodi o vodu závisí jen na její rychlosti. Síla Q_χ je nulová, protože náklad nic nerozhoupává, zatímco Q_φ je předpisová sinusovka.

Dosazením do Lagrangeových rovnic získáme pohybové rovnice

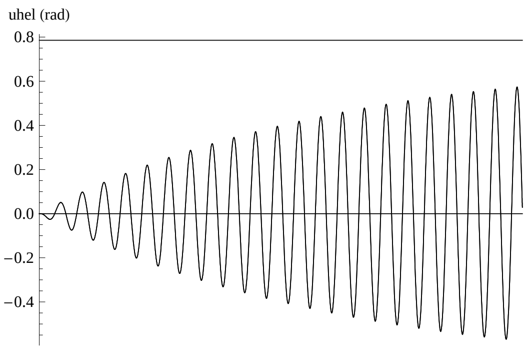
$$mR\sin\chi(t) + 2\gamma(\chi(t) - \varphi(t)) - 2\nu(\dot{\varphi}(t) - \dot{\chi}(t)) + 2mR\ddot{\chi}(t) = 0 \,,$$

$$F_0 \sin\omega t + MR\sin\varphi(t) - 2\gamma(\chi(t) - \varphi(t)) + 2\mu\dot{\varphi}(t) + 2\nu(\dot{\varphi}(t) - \dot{\chi}(t)) + 2MR\ddot{\varphi}(t) \,,$$

které můžeme řešit třeba na počítači. [1]

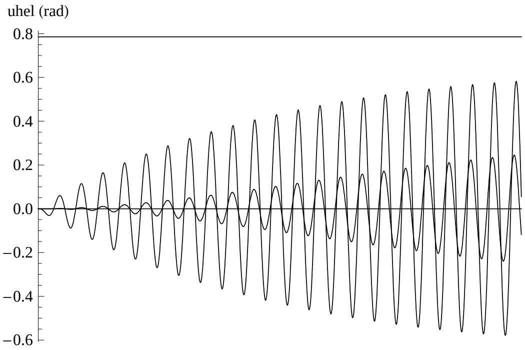
Závěr

Pokud zadáme třeba $R = 1$; $m = 1$; $F_0 = 0{,}10$; $\nu = 0{,}01$; $M = 5$; $\mu = 0{,}1$; $\gamma = 100$ pro uvázaný náklad, resp. 0 pro volný a najdeme (vlastní) frekvenci $\omega \approx 0{,}7$, na které se loď rozhoupává nejvíc, získáme následující časové průběhy rozhoupávání:



Obr. r6.1.1 – Rozhoupávání lodi při uvázaném nákladu.

[1] Pokud máte zájem experimentovat a namodelovat si rozhoupávání lodě, nebo třeba dráhy planet nebo cokoliv, co se popisuje diferenciálními rovnicemi, najděte si tzv. Runge–Kuttovy vzorce, které jsou poměrně hodně přesné a upočítáte jimi numericky i rovnice, které přesně třeba ani řešit nelze.



Obr. r6.1.2 – Rozhoupávání lodi při uvázaném a odvázaném nákladu.

Na grafech vidíme rozhoupání nákladu (menší „sinusovka“) a lodi (větší „sinusovka“). První vyznačuje uvázaný náklad, druhý volný náklad se třením. Porovnáme-li maximální výchylky, zjistíme, že pokud je mezi lodí a nákladem nulové tření (náklad zůstává stále v nejspodnějším bodě), je při daném poměru hmotnosti nákladu a lodi největší výchylka lodi asi o 5 % vyšší, než kdyby byl náklad uvázaný. Zvyšujeme–li tření mezi nákladem a lodí, tato výchylka se zmenšuje (v grafech je asi 0,7 %). Při hodně silném tření se náklad téměř nehýbe a mezi volným a uvázaným nákladem přestává být rozdíl. (To ovšem není úplně správné, je to spíše chyba modelu – náklad by se měl rychle převrhnout naspod a zůstat tam ležet – neměl by pomalu synchronně s lodí klouzat po povrchu, ale rychle spadnout. Tento vliv ale pomáhá ve směru získaného výsledku – pokud by to tak bylo, volný náklad by ještě více přispíval k nestabilitě lodi a ta by se i při větším tření mezi nákladem a lodí převrhla snáz.) Při vyšší hmotnosti nákladu je vliv silnější. Za zmínku také stojí, že při té správné frekvenci se náklad a loď dostanou časem do synchronní rotace, tj. náklad se pohybuje se stejnou frekvencí i fází, jako loď. Vypadá to tak, že když se loď pohybuje vpravo, náklad se setrvačností pohybuje také vpravo. (To je právě dáno tím, že v našem modelu klouže, nepadá.) Zdá se tedy, že důležitější je vliv znestabilnění lodě, to, že pohyb nákladu znesnadňuje námořníkům práci, nehraje tak podstatnou roli.

Irigi

Úloha 6.2 – Mauritánská měna (3b)

Zadání:

V Mauritánii mají zajímavý způsob obchodu. Ceny nejsou pevně stanoveny (smlouvá se). Když se cena usmlouvá a jsou s ní spokojeny obě strany, přejde se k platbě. Ta se časem stala jistým rituálem, který se dochoval až do dnešních dní.

Platba probíhá tak, že nejdříve kupující dá mince prodejci, a ten mu pak vrátí zpátky. To nezní překvapivě, ovšem při platbě a vrácení peněz se ustálil zajímavý zvyk. Nikdy se nepoužijí dvě mince stejné hodnoty.

Zajímalo by nás, jaké hodnoty by měly mít Mauritánské mince, aby bylo možné používat co nejméně druhů mincí, a přitom bylo možné zaplatit libovolnou usmlouvanou částku a zachovat historický zvyk.

V Mauritánii se smlouvá pouze s kladnými celými částkami. Nejmenší hodnota, kterou můžete usmlouvat je 1 MRU *(mauritánská ukíjá) a nejdražší věc, kterou v Mauritánii prodávají, se dá usmlouvat na* 242 MRU.

U svých výběrů hodnot mincí nezapomeňte zdůvodnit, proč fungují a proč nejdou vymyslet lepší.

Řešení:

Pro následující řádky se domluvme, že placením budeme chápat to, kdy kupující dá peníze obchodníkovi, a vrácením rozumějme to, že obchodník dá danou částku nakupujícímu. Tak, a nyní se pusťme do řešení problému.

Nejdříve se zamyslíme, kolik nejméně druhů mincí bude potřeba. Předpokládejme, že máme n různých mincí, které se při platbě mohou použít. Každá mince se může použít právě jedním z těchto způsobů: je s ni zaplaceno, je vrácena a nebo není použita vůbec. Pokud bychom si rozepsali všechny možnosti, dostali bychom uspořádané n-tice tří prvků. Počet všech možností N je pak dán vztahem $N = 3^n$ (pokud tomu nevěříte, tak se podívejte do nějaké středoškolské učebnice na variaci s opakováním).

Pokud tedy banka vydá 5 mincí, tak s nimi jde zaplatit 243 možných částek. Mohlo by se zdát, že je to hledané číslo, ovšem v tomto odhadu jsou započítány také případy, kdy by byla zaplacena záporná částka (např. varianta, kdy jsou všechny mince vráceny) což není korektní platba podle zadání. Proto 5 mincí určitě není dostatečných, a bude jich potřeba více.

Nyní zkusíme nalézt systém mincí, kterými by se daly zaplatit všechny hodnoty od 1 do 242 MRU jen šesti mincemi.

Zkusme prozkoumat systém, kdy bychom měli mince s hodnotami $1, 3, 9, 27, 81$... tedy k-tá mince má trojnásobek hodnoty $k - 1$ mince.

Mincí s hodnotou 1 MRU můžeme zaplatit hodnotu 1 MRU.

Mincemi s hodnotami 1 a 3 MRU můžeme zaplatit hodnoty 1, $3 - 1 = 2$, 3, $3 + 1 = 4$ MRU.

Nyní použijeme matematickou indukci. Jak jsme ukázali, můžeme najít n takových hodnot že jsou splněny podmínky hledaného systému. Označme si P jejich součet a $q = 3 \cdot x_n$, kde x_n je hodnota nejcennější mince. Zkusme se nyní zamyslet, jak spolu souvisí P a x_n. Víme, že $P = x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + ...$ a že $x_{n-1} = \frac{1}{3}x_n$, $x_{n-2} = \frac{1}{9}x_n, \ldots$ Takže $P = x_n\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...\right)$. Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{3}$. Součet této řady pro $n \to \infty$ je 1,5, takže $P = 1{,}5 \cdot x_n$. Pokud pracujeme s přirozenými čísly, tak musíme uvažovat pouze celočíselnou část čísla.

Hodnoty 1 až P zřejmě jsme schopní sestavit. Pokud začneme od hodnoty q odečítat (to znamená, že vrácení nahradíme platbou a naopak) hodnoty 1 až P tak dostaneme hodnoty $q - 1$ až $q - P$ ale jak již víme, tak $q = 3 \cdot x_n$ a $P = 1{,}5 \cdot x_n$. Takže jsme odečítáním obsáhli hodnoty $P + 1$ až q. Jak bylo již zmíněno, tak jsme schopni sestavit hodnoty 1 až P. Pokud zároveň budeme platit mincí s hodnotou q, tak jsme schopni sestavit hodnoty $q + 1$ až $P + q$.

Snadno již nahlédneme, že jsme schopni sestavit hodnoty 1 až $P+q$. Pokud si uvědomíme, že pro k mincí můžeme napsat $q = 3^{k-1}$, tak dostáváme vztah $x + 3^{k-1}$ kde x je počet možností pro $k-1$ mincí zmíněný výše. Pomocí indukce jsme tak ukázali, že umíme sestavit systém, kterým dokážeme k mincemi zaplatit hodnoty 1 až $x + 3^{k-1}$, což je systém, který používá nejméně mincí.

Počet mincí na zaplacení hodnoty 242 je asi nejrychlejší získat hrubou silou, a to vypočítáním jednotlivých hodnot mincí. Ty jsou $1, 3, 9, 27, 81$ a 243. S těmito mincemi bychom dokázali dokonce zaplatit až hodnotu 364 MRU.

(R)adim

Úloha 6.3 – Divné člověče nezlob se (5b)

Zadání:

Představte si člověče nezlob se, které se hraje s n figurkami. Figurky jsou umístěny na n různých polích herního plánu, který je tvořen políčky označenými čísly jedna, dva, tři atd. V každém tahu hráč přesune jednu z figurek na libovolné políčko s nižším číslem. Figurka však nesmí přeskočit žádnou jinou figurku, tj. všechna políčka mezi novou a starou pozicí musí být prázdná. Navíc na žádném políčku nesmí být zároveň dvě figurky.

Hra skončí, pokud figurky stojí na políčkách s čísly 1 až n. Vyhrál ten hráč, který udělal poslední tah. Za jakých podmínek a jak si dokážete zajistit výhru, budete-li začínat?

Nebojte se poslat i jen částečné řešení.

Řešení:

Tato úloha byla i na 5bodovou docela těžká. K řešení bylo potřeba několik netriviálních myšlenkových skoků. (Ale o to zajímavější úloha to samozřejmě je. :-)) Tím spíš nás moc potěšilo, jak blízko se někteří z vás přiblížili ke správnému řešení.

Zaměřme se nejprve na jednodušší případ – sudý počet figurek ($2k$).

První důležité pozorování je to, že pokud jsou už figurky po dvojicích u sebe (1. vedle 2., 3. vedle 4., …), potom první hráč na tahu prohrál. Jakkoliv totiž první hráč pohne s „lichou" figurkou, druhý hráč táhne s příslušnou sudou, a tu lichou dožene. Takto se dostanou až do stavu, kdy už jsou figurky na polích $1-n$, a druhý hráč vyhraje.

Co když ale nejsou figurky v párech vedle sebe? Zkusíme se soustředit na figurky v jednotlivých párech a snažíme se být ten, kdo první potáhne tak, že po jeho tahu budou už figurky v párech sousedit (potom už vyhrajeme).

Skoro bychom se na to mohli dívat jako na hru, kdy jen snižujeme vzdálenosti mezi figurkami ve dvojicích. Problém je, že by protihráč mohl táhnout i první figurkou z nějakého páru, a tak tuto vzdálenost zvětšit. To ale není problém, protože druhý hráč může o stejnou vzdálenost pohnout i druhou figurkou a výsledná vzdálenost bude stejná. Protihráč toto navíc může udělat jen párkrát, pak mu dojdou mezery mezi jednotlivými páry.

Zredukovali jsme tedy tuto hru na jinou: Máme k nezáporných celých čísel a v jednom tahu můžeme libovolné jedno z nich snížit (tak aby stále bylo celé a nezáporné). Ten, kdo nemůže táhnout, prohrál. Tato hra už je známá –

prohrávající pro hráče na tahu jsou všechny stavy (k-tice čísel), které mají celkový XOR[2] roven 0[3].

Jak tedy budeme hrát? Zajímat se budeme jen o vzdálenosti figurek v jednotlivých dvojicích. Pokud jsme na tahu a XOR těchto vzdáleností je různý od 0, zmenšíme jednu tuto vzdálenost tak, aby byl XOR roven 0 (to je vždy možné, zkuste si to rozmyslet). Takto se soupeř vždy ocitne v situaci se XORem 0 a jakkoliv táhne, my budeme mít XOR nenulový.

Mohli bychom ještě rozlišovat mezi tím, kdy soupeř táhl s první figurkou a dotahovat ho tou druhou, to už je ale zahrnuto v pravidle, že naším cílem je XOR 0.

Pokud jsme sami v situaci, kdy XOR je 0, nemáme jinou možnost, než táhnout tak, že XOR vyjde nenulový a naši strategii může pro své vítězství použít soupeř.

Ještě je potřeba vyřešit, jak to udělat pro lichý počet figurek. Toto lze převést na předchozí případ tím, že si představíme, že na poli číslo 0 též stojí figurka. Touto nelze pohnout a nezmění proto hru, můžeme tak ale figurky napárovat a použít předchozí úvahu pro sudý počet.

Tomáš

Úloha 6.4 – Vězni a výhled z okna (3b)

Zadání:

Před dávnými lety existovala jedna věznice. Tato věznice měla problém s útěky vězňů, neboť stále někdo přepilovával mříže v oknech pilníkem. Proto se rozhodli všechna okna zazdít. To se však zase nelíbilo vězňům, a tak vznikla jedna místnost, kde bylo okno.

Jednou se do věznice dostala skupinka vězňů, a protože ředitel byl již rozmrzen monotónní prací (od doby zazdění oken se nestalo nic zajímavého), rozhodl se, že propustí vězně, pokud si s ním zahrají jednu hru.

Každý den ředitel náhodně rovnoměrně vybral jednoho z vězňů, který mohl strávit hodinu v místnosti a kochat se výhledem z okna. Pokud si daný vězeň byl jistý, že už před ním v místnosti byli všichni jeho kolegové, mohl to oznámit bachaři. V případě, že měl pravdu, byli všichni propuštěni. Pokud by se mýlil, zůstali by nebozí vězni zavřeni do konce života.

Řešení:

Jak si naši kriminálníci poradili? Inu, jsou to lumpové všemi mastmi mazaní a ještě k tomu každé ráno snídají vtipnou kaši.

Vědí, že je jich přesně N.

Na začátku mezi sebou vyberou toho nejzlotřilejšího a jmenují jej velikým „otvírákem“ – může okenice jen otvírat. Ostatní vězní budou „zavíráky“ – můžou okenice jen zavírat.

Když přijde do místnosti veliký otvírák a uvidí zavřené okenice, tak je otevře a přičte si jedničku k počtu vězňů, o kterých ví, že už byli v místnosti. Sám sebe

[2] součet ve dvojkové soustavě bez přenosů

[3] Pokud tuto hru neznáte, vězte, že této hře se říká *nim* a její popis spolu s vysvětlením vyhrávající strategie najdete například na anglické Wikipedii.

započítá při svém prvním pobytu v místnosti s oknem. Pokud otvírák kdykoli uvidí otevřené okenice, ponechá je otevřené.

Ostatní vězni, zavíráci, budou z úvodní domluvy vědět, že mají okenice zavřít, pokud je uvidí otevřené, ale pouze jedenkrát. Tím dá každý zavírák signál velkému otvírákovi, že už v místnosti byl.

Jakmile otvírák napočítá N, může oznámit bachaři, že už se všichni vystřídali.

Toto řešení mlčky předpokládá, že na počátku jsou okenice otevřené. Pokud by vězni neznali stav okenic na začátku, mohou se domluvit, že zavíráci zavřou okenice 2×, a otvírák že půjde oznámit bachaři konec až napočítá $2N - 1$.

Na závěr ještě prozradím výsledky simulace. Při stovce vězňů a rovnoměrně náhodném vybírání jednoho vězně denně by k propuštění všech došlo v průměrném případě asi za 27,5 roku (více jak 10000 dní).

Martin

Řešení témat

Téma 1 – Střed Evropy

Když se vezmou v úvahu poslaná řešení, je střed Evropy mnohem relativnější místo, než by člověk čekal. Nápadů na definici bylo mnoho a spousta z vás to pojala metodou čím víc, tím líp. :) A to nejen co se středu týče, ale i toho, co ještě brát za Evropu. Všeobecně byla oblíbenější evropská část Ruska než Turecka a prakticky nikomu se nelíbily ostrůvky.

Řešení samotná měla zajímavý vývoj. Zpočátku jste se zaměřili na prohledávání internetu a zjišťování, co si o tom myslí jiní. Potom přišla vlastní měření a výpočty. Nejčastěji objevujícím se jevem bylo hledání těžiště papírové mapy nebo hledání místa, který je nejblíže extrémním výběžkům Evropy na všech světových stranách nebo ze kterého to bude nejblíž ke všem mořím.

Velmi pěkný nápad byl i zjišťování těžiště podle nějaké své oblíbené věci, Doc.$^{\text{M}}$ Petr Pecha zjišťoval střed Evropy podle větších železničních nádraží. Nikdo se bohužel nepokusil o analýzu podle továren na dobré čokolády…

Souhrnem by se dalo říct, že většina středů vycházela do oblasti ČR, Slovenska, Litvy, Maďarska, ale našly se i výjimky ve východním Německu a na jižněji Balkáně.

Hanka

Téma 3 – Samopopisující věty

K tomuto tématu nám po hromadě výsledků zveřejněných v pátém čísle přišel už jen příspěvek Mgr.$^{\text{M}}$ Aleny Bušákové, ve kterém zkoušela najít začátek a konec věty typu

„Tato věta má 4×t, 5×a, 2×o, 2×v, 2×e, 2×m, 8×2, 2×4, 2×5 a 2×8.“

Toto je ale nejspíše velmi těžké, neboť se jí další možné příklady začátků a konců najít nepodařilo.

Tomáš

Téma 6 – Protokol

Svůj příspěvek k tématu Protokol nám poslal pouze Doc.[MM] Petr Pecha. Uvažoval o zapojení, kdy mezi jednotlivými stanicemi vedou dvě linky – jedna komunikační (datová) a druhá obslužná. Komunikaci předpokládal v podrobněji nespecifikovaném binárním kódu, avšak s lidskými bytostmi na obou stranách.

Při propojení více stanic do sítě by měla volající stanice začít po všech obslužných linkách vysílat stálý proud jedniček, který specifikuje, že této stanici by se nikdo neměl pokoušet dovolat, jelikož právě sama hovoří. Po obdržení prvních dat by měla taktéž začít po všech svých obslužných linkách vysílat obsazující signál i volaná stanice.

Petr nezmínil, jak by měly být řešeny konflikty, když např. dvě stanice začnou volat jedné v tutéž chvíli, když volaná stanice právě také začíná volat apod. Také konkrétní konstrukci stanice nezmínil, ačkoliv předpokládal, že nějakým způsobem lze oběma směry vysílat po jedné lince a v případě nevysílání z této linky přijímat data.

Při spojení přes více stanic, tedy když neexistuje přímé spojení, by měla volaná stanice sama vyhodnotit, kudy má komunikace probíhat (resp. pro každého možného volaného uživatele si pamatovat cestu) a postupně volat na další stanice v cestě, aby fungovaly jako propojení (při kterém vysílají obsazující signál). Petr upozornil na nebezpečí odposlechu hovoru v této stanici a rozhodl se tento problém řešit zřízením tzv. ústředen, které by byly důvěryhodné a samy sloužily pouze k propojení uživatelů. Jakákoliv nepřímá komunikace by se tak děla pouze přes ústředny.

Tento systém však není příliš vhodný pro složitější zapojení sítě, kdy mezi volajícím a volaným existuje více možných cest. Pokud by pro toto spojení byla napevno určena trasa, mohlo by se stát, že tato by byla obsazena, ale ačkoliv by existovala jiná, komunikace by se neuskutečnila. To není řešení, které chceme. Také zde nastává problém se změnou topologie sítě. Pokud se provozovatel rozhodne přestavět síť, musí informovat všechny její uživatele o této změně.

Vhodnější by bylo v případě obsazení předdefinované trasy (či informování o změně topologie) pokusit se najít jinou cestu, např. algoritmem prohledávání do šířky (anglicky „breadth–first search“, zkráceně BFS). Zavolat všem okolním ústřednám, aby se pokusily najít cestu k volanému, které by opět obvolávaly všechny své sousedy atd.

Petr navrhl několik typů zapojení stanic a ukázal jejich složitosti. Počet kabelů, který je nutný pro toto zapojení. Jedno z možných zapojení je lineární (bez použití ústředen), pro které sice stačí malé množství kabelů, ale často bude potřebné spojení nedostupné. Se stejným množstvím kabelů by bylo možné vytvořit i zapojení typu strom, pro které platí, že mezi každými dvěma uživateli vede právě jedna cesta. V průměru však pro jeden hovor bude tato cesta kratší, proto je větší šance, že půjde uskutečnit více hovorů naráz.

Další zapojení jsou Dvojice, což je úplný graf – mezi každými dvěma uživateli sítě vede kabel. Toto zapojení garantuje jednoduché a existující spojení mezi uživateli, kteří zrovna nekomunikují, avšak jeho velkou nevýhodou je kvadratický počet kabelů vůči počtu uživatelů sítě.

Jako nejvýhodnější zapojení se Petrovi jeví hvězdicová topologie, kdy ve středu sítě je ústředna a ta je spojena se všemi uživateli. Žádné další kabely zde nevedou. Výhodou je opět nízký počet kabelů (lineární vůči počtu uživatelů), hovory budou rychle navázány a nebudou odposloucháványy. Ovšem pokud toto řešení srovnáme s lineárním či stromovitým zapojením, zjistíme, že zde může vždy probíhat nanejvýš jeden hovor, zatímco v dalších zapojeních jich může naráz probíhat více. Jelikož uživatelé můžou nad komunikačním protokolem používat nějaké „šifrování“ (tedy např. hovořit spolu maďarsky, když jsou si jisti, že nikdo jiný maďarsky neumí). Riziko odposlechu nám pak odpadá. Zvažme proto sami, která topologie nám přijde výhodnější.

V předchozích úvahách jsme se dopustili hrubé nepřesnosti v tom, že jsme neuvažovali nad délkou jednotlivých kabelů. Proto bychom, jak Petr podotkl, měli vymezit určité oblasti (nejspíše jen na základě zdravého rozumu, konkrétní algoritmus dělení na oblasti Petr nenavrhl), ve kterých bude centrální ústředna spojená s centrálními ústřednami jiných oblastí. V dalším kroku tak můžeme centrální ústředny považovat opět pouze za uživatele a rozvrhovat síť stejným způsobem. Těchto kroků může být i více. Oblasti tak budou mít jistou hierarchii, na jejímž vrcholu budou stát páteřní linky pro celý svět a na nejnižším patře zapojení od místních ústředen do jednotlivých domácností. Takovéto hierarchické uspořádání se opravdu používá. Zajímavé je, že nejdražší je vybudovat právě to poslední patro, tzv. přístupovou síť. Toto se nazývá problémem poslední míle, nebo také první míle (z opačného pohledu).

Petrovo řešení je sice funkční, ale má několik nedostatků. Především je zde problém exkluzivity kabelu – pokud po něm komunikují dva uživatelé, již nemohou další. V reálu se používají řešení, kdy se data přenáší po blocích – pokud chce po daném kabelu komunikovat více uživatelů naráz, sice jsou zpomaleni, avšak nikdo nebude úplně odříznut. Takové sdílení se nazývá agregace a například poskytovatelé internetového připojení uvádějí její maximální možnou míru. Pokud si zařídíte připojení s rychlostí 10 Mbps a s agregací 1:10, máte zaručeno, že rychlostí 1 Mbps se vždy připojíte.

Radim

Výsledková listina 5. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r4	t3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	104	1	1	3		1	6	54
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	2.	83							45
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	1.	43							43
4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	3.	178							39
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	2.	38							38
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	1.	37				4		4	37
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	1.	34							34
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	1.	33							33
9–10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Steinhauser	2.	31							31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec	3.	31							31
11–13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	4.	35							27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	27							27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lada Peksová	2.	27							27
14–16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	3.	41							25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	3.	25							25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	3.	25							25
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	3.	24							24
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	3.	35							21
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Havelková	1.	17							17
20–22.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	3.	77							16
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	3.	53							16
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Lux	1.	16							16
23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Bogár	2.	24							15
24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	14							14
25–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Milan Bartoš	3.	13							13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková	2.	13							13
27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	3.	26							12
28–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlastimil Dort	2.	11							11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dávid Vendel	3.	11							11
30–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	3.	30							10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Holková	3.	10							10
32.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	4.	225							9
33–34.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	4.	26							8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	2.	24	2	1	3		1	7	8
35–38.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	2.	55							7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	4.	23							7
	Stanislav Fořt	1.	7							7
	Mojmír Majdiš	2.	7							7

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r4	t3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
39–41.	David Bambušek	2.	6							6
	Jana Břízová	2.	6							6
	Tomáš Volf	1.	6							6
42–44.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	15							5
	Jiří Harasim	4.	5							5
	Martina Vaváčková	2.	5							5
45.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10							4
46.	Petra Zahajská	1.	3							3
47.	Simona Laňková	2.	1							1
48.	Aleš Růžička	4.	0							0

Výsledková listina 6. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	122	2	2	4	3	4	3	18	72
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	1.	47	2	3		3		2	10	47
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	2.	83								45
4–5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	1.	43								43
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Steinhauser	2.	43	3	2	5	0		2	12	43
6–7.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	3.	180		2				0	2	41
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	1.	41	2	1	2	1		2	8	41
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	2.	38								38
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	1.	34								34
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec	3.	31								31

				Úlohy							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t4**	**+**	$\sum_0$	$\sum_1$
11–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	3.	43		2				0	2	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	4.	35								27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	3.	27		3				0	3	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	27								27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lada Peksová	2.	27								27
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	3.	25								25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	3.	25								25
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	3.	35								21
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Havelková	1.	17								17
20–22.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	3.	77								16
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	3.	53								16
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Lux	1.	16								16
23–24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Bogár	2.	24								15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlastimil Dort	2.	15	2		2			0	4	15
25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	14								14
26–27.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Milan Bartoš	3.	13								13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková	2.	13								13
28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	3.	26								12
29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dávid Vendel	3.	11								11
30–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	3.	30								10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Holková	3.	10								10
32.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	4.	225								9
33–34.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	4.	26								8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	2.	24								8
35–39.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	2.	55								7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	4.	23								7
	Stanislav Fořt	1.	7								7
	Mojmír Majdiš	2.	7								7
	Petra Zahajská	1.	7	3					1	4	7
40–42.	David Bambušek	2.	6								6
	Jana Břízová	2.	6								6
	Tomáš Volf	1.	6								6
43–45.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	15								5
	Jiří Harasim	4.	5								5
	Martina Vaváčková	2.	5								5
46.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10								4
47.	Simona Laňková	2.	1								1
48.	Aleš Růžička	4.	0								0

Výsledková listina XIV. ročníku

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo 1	2	3	4	5	6	$\sum_1$
1.	Doc.^{MM} Petr Pecha	1.	122	8	8	11	21	6	18	72
2.	Mgr.^{MM} Alena Bušáková	1.	47	19		14		4	10	47
3.	Dr.^{MM} Ladislav Bačo	2.	83	24	7	10	4			45
4–5.	Mgr.^{MM} Miroslav Koblížek	1.	43	23		11	9			43
	Mgr.^{MM} František Steinhauser	2.	43	16	15				12	43
6–7.	Doc.^{MM} Alžběta Pechová	3.	180	21	6	5	7		2	41
	Mgr.^{MM} Tomáš Bartoněk	1.	41	6	6	13	8		8	41
8.	Mgr.^{MM} Jakub Klemsa	2.	38	15	7	5	11			38
9.	Mgr.^{MM} Lukáš Zavřel	1.	34	12		9	13			34
10.	Mgr.^{MM} Josef Tkadlec	3.	31	31						31
11–15.	Mgr.^{MM} Alžběta Prokopová	3.	43	10	3	5	7		2	27
	Mgr.^{MM} Marek Nečada	4.	35		18	9				27
	Mgr.^{MM} Hana Bílková	3.	27	7	7		10		3	27
	Mgr.^{MM} Tomáš Kubelka	1.	27	8		13	6			27
	Mgr.^{MM} Lada Peksová	2.	27	17		7	3			27
16–17.	Mgr.^{MM} Eliška Nekvapilová	3.	25	15			10			25
	Mgr.^{MM} Jitka Novotná	3.	25	17	4		4			25
18.	Mgr.^{MM} Jakub Töpfer	3.	35	21						21
19.	Bc.^{MM} Lenka Havelková	1.	17	6	2	7	2			17
20–22.	Dr.^{MM} Martin Výška	3.	77			8	8			16
	Dr.^{MM} Miroslav Klimoš	3.	53	11	5					16
	Bc.^{MM} Filip Lux	1.	16	14		2				16
23–24.	Mgr.^{MM} Ján Bogár	2.	24	15						15
	Bc.^{MM} Vlastimil Dort	2.	15	11					4	15
25.	Bc.^{MM} Zuzana Terešková	1.	14	8	0	2	4			14
26–27.	Bc.^{MM} Milan Bartoš	3.	13	11	2					13
	Bc.^{MM} Kateřina Honzáková	2.	13			4	9			13
28.	Mgr.^{MM} Jan Vaňhara	3.	26	5	7					12
29.	Bc.^{MM} Dávid Vendel	3.	11	11						11
30–31.	Mgr.^{MM} Pavla Zárubová	3.	30	2	1	3	4			10
	Bc.^{MM} Klára Holková	3.	10	3	7					10
32.	Prof.^{MM} Jan Musílek	4.	225	9						9
33–34.	Mgr.^{MM} Jakub Marian	4.	26	8						8
	Mgr.^{MM} Peter Smolárik	2.	24	1				7		8
35–39.	Dr.^{MM} Marek Pecha	2.	55	7						7
	Mgr.^{MM} Klára Krejčíčková	4.	23	7						7
	Stanislav Fořt	1.	7	5	2					7
	Mojmír Majdiš	2.	7				7			7
	Petra Zahajská	1.	7	2		1			4	7

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo 1	2	3	4	5	6	$\sum_1$
40–42.	David Bambušek	2.	6	3			3			6
	Jana Břízová	2.	6			4	2			6
	Tomáš Volf	1.	6	6						6
43–45.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	15	5						5
	Jiří Harasim	4.	5		5					5
	Martina Vaváčková	2.	5		5					5
46.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10	0	4					4
47.	Simona Laňková	2.	1				1			1
48.	Aleš Růžička	4.	0	0						0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.