Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIV číslo 6

Termín odeslání: 2. 6. 2008

Milé čtenářky a čtenáři,

jak jste si již jistě všimli, tak už definitivně nastalo jaro, a to značí, že pomalu bude končit škola. Ovšem s koncem školy přichází i konec tohoto ročníku M&M. Proto v tomto čísle naleznete poslední letošní úlohy. Zároveň s posledními úlohami přichází také poslední možnost v tomto ročníku získat body a pomoci si tak na podzimní soustředění.

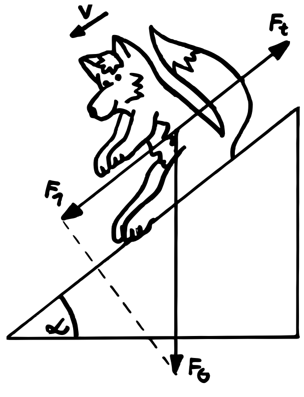
Plno májového sluníčka Vám přeje

Redakce

Zadání úloh

Úloha 6.1 – Rozhoupání lodě (4b)

Když Irigi sledoval poslední díl série Piráti z Karibiku, zaujala ho scéna, kdy posádka rozhoupává loď ve snaze ji převrhnout. Námořníci přebíhají z jedné strany lodi na druhou.



a) Jakým způsobem musí námořníci běhat, aby loď rozhoupali?
b) V jistém momentě padl povel kapitána Barbossy uvolnit náklad, aby se mohl volně hýbat podpalubím. Pomohl tím Barbossa posádce, nebo bylo naopak těžší loď převrhnout? (odůvodněte)

Úloha 6.2 – Mauritánská měna (3b)

V Mauritánii mají zajímavý způsob obchodu. Ceny nejsou pevně stanoveny (smlouvá se). Když se cena usmlouvá a jsou s ní spokojeny obě strany, přejde se k platbě. Ta se časem stala jistým rituálem, který se dochoval až do dnešních dní.

Platba probíhá tak, že nejdříve kupující dá mince prodejci, a ten mu pak vrátí zpátky. To nezní překvapivě, ovšem při platbě a vracení peněz se ustálil zajímavý zvyk. Nikdy se nepoužijí dvě mince stejné hodnoty.

Zajímalo by nás, jaké hodnoty by měly mít Mauritánské mince, aby bylo možné používat co nejméně druhů mincí, a přitom bylo možné zaplatit libovolnou usmlouvanou částku a zachovat historický zvyk.

V Mauritánii se smlouvá pouze s kladnými celými částkami. Nejmenší hodnota, kterou můžete usmlouvat je 1 MRU (mauritánská ukíjá) a nejdražší věc, kterou v Mauritánii prodávají, se dá usmlouvat na 242 MRU.

U svých výběrů hodnot mincí nezapomeňte zdůvodnit, proč fungují a proč nejdou vymyslet lepší.

Úloha 6.3 – Divné člověče nezlob se (5b)

Představte si člověče nezlob se, které se hraje s n figurkami. Figurky jsou umístěny na n různých polích herního plánu, který je tvořen políčky označenými čísly jedna, dva, tři atd. V každém tahu hráč přesune jednu z figurek na libovolné políčko s nižším číslem. Figurka však nesmí přeskočit žádnou jinou figurku, tj. všechna políčka mezi novou a starou pozicí musí být prázdná. Navíc na žádném políčku nesmí být zároveň dvě figurky.

Hra skončí, pokud figurky stojí na políčkách s čísly 1 až n. Vyhrál ten hráč, který udělal poslední tah. Za jakých podmínek a jak si dokážete zajistit výhru, budete-li začínat?

Nebojte se poslat i jen částečné řešení.

Úloha 6.4 – Vězni a výhled z okna (3b)

Před dávnými lety existovala jedna věznice. Tato věznice měla problém s útěky vězňů, neboť stále někdo přepilovával mříže v oknech pilníkem. Proto se rozhodli všechna okna zazdít. To se však zase nelíbilo vězňům, a tak vznikla jedna místnost, kde bylo okno.

Jednou se do věznice dostala skupinka vězňů, a protože ředitel byl již rozmrzen monotónní prací (od doby zazdění oken se nestalo nic zajímavého), rozhodl se, že propustí vězně, pokud si s ním zahrají jednu hru.

Každý den ředitel náhodně rovnoměrně vybral jednoho z vězňů, který mohl strávit hodinu v místnosti a kochat se výhledem z okna. Pokud si daný vězeň byl jistý, že už před ním v místnosti byli všichni jeho kolegové, mohl to oznámit bachaři. V případě, že měl pravdu, byli všichni propuštěni. Pokud by se mýlil, zůstali by nebozí vězni zavřeni do konce života.

Navrhněte co nejrychlejší strategii pro vězně tak, aby byli jistě propuštěni (pravděpodobnostní řešení nepřijímáme). Pár informací k úloze. Místnost s oknem je ideální, to znamená, že pobýváním uvnitř ji nijak neovlivníte. Okno je vybavena okenicemi, které můžou vězni buď otevřít, nebo je zavřít podle libosti (opatření pro vězně, kteří nemají rádi slunce). Okenice jsou ideální, takže jsou buď otevřené nebo zavřené. Krajina za oknem je nudná a ideální, takže z ní také nic nezjistíte.

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Nedotýkejte sa drôtov ani na zem padlých (3b)

Zadání:

Výstražné cedule s týmto textom vidíme všade okolo. Čo by sa ale stalo, ak by drôt vedenia vysokeho napätia spadol na zem? Predstavme si, že na velmi dlhom úseku (teda tvori prakticky priamku) leží drôt s napätím 100 kV*. Ako sa môžeme okolo něho pohybovať, ak nechceme, aby našim tělom prechádzal väčši striedavý prúd ako povoľuje norma* ČSN 33 2000–4–41*, čo je*

3,5 mA? *Všetky dalšie potrebné údaje odmerajte, odhadnite, či jinak zjistite. (Za dobré provedenie tejto časti úlohy môžte očekávať nejaké tie body naviac.)*

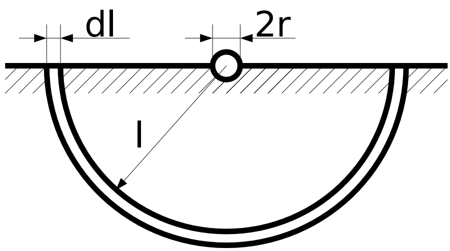
Řešení:

Tato úloha je obecně poměrně složitá, proto rozebereme různé situace, pro které se pokusíme najít nejméně bezpečné případy.

Předpokládejme, že vodičem protéká stejnosměrný elektrický proud a že vodič má na délce v řádech metrů zanedbatelný odpor, proto v pevné vzdálenosti od vodiče je vždy stejné napětí. To znamená, že se můžeme libovolně pohybovat rovnoběžně s vodičem.

Jak by to ale vypadalo, pokud bychom se chtěli pohybovat směrem k drátu? Je zřejmé, že napětí závisí pouze na poloze. Pokud uděláme libovolný krok, můžeme si jej představit jako vektor. Tento vektor si můžeme rozdělit na složku rovnoběžnou s drátem a na složku kolmou. Jak jsme si již ukázali, složku rovnoběžnou s drátem můžeme zanedbat. Proto se nyní zkusme podívat, co se bude dít, pokud se budeme přibližovat kolmo k vodiči.

V tomto případě si představme rovinu ve které se pohybujeme a která je kolmá na náš nekonečný vodič. Pro zjednodušení předpokládejme, že hlína v okolí vodiče má konstantní měrný elektrický odpor. Tato situace je vyjádřena na obrázku r4.1.1.



Obr. r4.1.1 – Rovina kolmá na vodič.

Měrný elektrický odpor vzduchu je řádově větší než měrný elektrický odpor hlíny, proto poloprostor se vzduchem zanedbáme. Jak je naznačeno na obrázku, ekvipotenciální plochy (to jsou plochy, na kterých bude konstantní napětí vzhledem k vodiči) kolem vodiče mají válcový tvar. To vyplývá ze symetrie problému.

Ekvipotenciální plochu si můžeme představit jako slupku s minimální tloušťkou $\mathrm{d}l$. Plocha této slupky ve vzdálenosti l a s jednotkovou délkou ve směru vodiče je $(1/2)\, 2\pi l$. Pokud si označíme měrný elektrický odpor hlíny ϱ, můžeme vyjádřit elektrický odpor $\mathrm{d}R_l$ slupky jednotkové délky ležící ve vzdálenosti l vztahem

$$\mathrm{d}R_l = \varrho \frac{\mathrm{d}l}{\pi l} \,. \qquad \text{(r4.1.1)}$$

Elektrický odpor R_L mezi ekvipotenciální plochou ve vzdálenosti L a vodičem (stále uvažujeme odpor příslušející k jednotkové délce vodiče) získáme zintegrováním vztahu (r4.1.1). Musíme však předpokládat nenulovou tloušťku drátu (poloměr drátu si označme r).

$$R_L = \int_r^L \mathrm{d}R_l = \int_r^L \varrho \frac{\mathrm{d}l}{\pi l} = \frac{\varrho}{\pi} \Big[\ln l\Big]_r^L = \frac{\varrho}{\pi} \ln \frac{L}{r} \,. \qquad \text{(r4.1.2)}$$

Předpokládejme, že zemí protéká na jednotku délky spadlého drátu proud I. Ve vzdálenosti L bude vzhledem k vodiči napětí U_L:

$$U_L = I \frac{\varrho}{\pi} \ln \frac{L}{r} \,. \qquad \text{(r4.1.3)}$$

Nyní nastává otázka jakou má hodnotu proud I. Aby zemí protékal vůbec nějaký proud, musí být uzavřený pomyslný obvod, čili ve vzdálenosti x se musí země dotýkat druhý drát, tzv. nulák. Takové místo určitě najdeme u nejbližšího stavení, neboť obvykle se nulák, který máme třeba i v zásuvce, spojuje s tzv. zemním vodičem. Napětí mezi tímto místem a drátem je rovno „nominálnímu“ napětí spadlého drátu U, tedy podle (r4.1.3)

$$I = \frac{U}{(\varrho/\pi) \ln x/r} \,. \qquad \text{(r4.1.4)}$$

Potenciál ve vzdálenosti L od spadlého vodiče (za místo s nulovým potenciálem určíme nulák) je podle (r4.1.3) a (r4.1.4)

$$\varphi_L = U \left(1 - \frac{\ln L/r}{\ln x/r}\right) = U \frac{\ln x/L}{\ln x/r} \,. \qquad \text{(r4.1.5)}$$

Je vidět, že potenciál nezávisí na měrném elektrickém odporu hlíny.

Nyní tedy víme jak daleký krok můžeme udělat, pokud stojíme ve vzdálenosti L od vodiče. Neboť vždy musí platit, že nesmíme mít napětí mezi jednotlivými chodidly větší než $U_\mathrm{k} = R_\mathrm{t} \cdot I_\mathrm{b}$, kde R_t je odpor lidského těla a přechodový odpor mezi naším tělem a zemí, I_b je bezpečný proud, který nám nezpůsobí úraz. (Jak si již možná někteří všimli, zajímá nás rychlost změny potenciálu, čili derivace průběhu potenciálu podle vzdálenosti od drátu.)

Pokud bychom předpokládali, že vodičem protéká střídavý proud, stal by se problém trochu komplikovanějším, ale to si raději necháme na samostatnou úlohu. Zároveň jsme zanedbali vliv odporu lidského těla na danou situaci, neboť bychom měli předpokládat, že v okamžiku kdy vstoupíme do nebezpečného místa, protéká část proudu námi a část zemí. Ovšem v tomto řešení jsme se snažili najít horní odhad podmínek za kterých se můžeme bezpečně pohybovat v blízkosti drátu.

Z řešení je zřejmé, že také závisí na tom, kde drát spadl. Pokud na spadlý drát narazíme někde v poli daleko od lidských stavení, tak jsme teoreticky ve větším bezpečí, než pokud by drát spadl třeba ve městě. Neboť zde bychom měli (vlivem menšího x) větší rychlost změny potenciálu. Někteří z vás také ve svých řešeních bystře poznamenali, že nejbezpečnější je v blízkosti vodiče poskakovat po jedné noze.

(R)adim

Úloha 4.2 – Koberec do pokoje pro matfyzáky (5b)

Zadání:

Martin s (R)adimem by si chtěli vylepšit svůj pokoj na koleji kobercem.

Dlouhodobým pečlivým pozorováním zjistili, že nejčastěji chodí od počítače v jednom rohu k lednici v protějším rohu a odtud nazpět (pochopitelně tou nejkratší cestou – po uhlopříčce).

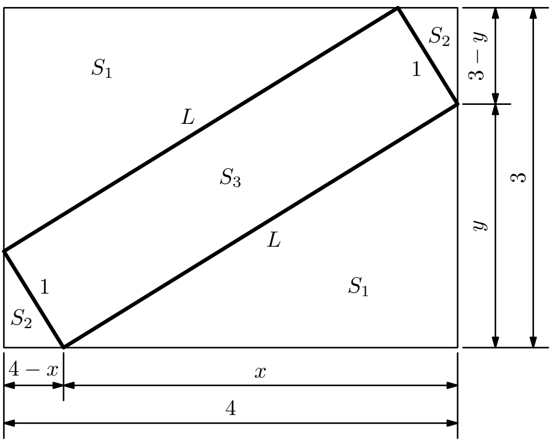
A protože to jsou pohodlní matfyzáci, kterým se nechce vysávat velký koberec, rozhodli se, že kobercem pokryjí jen metr široký pás, kterým chodí nejčastěji.

Když ale přišli do obchodu a řekli, že mají pokoj veliký $3\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ *a že chtějí koberec* $1\,\mathrm{m}$ *široký a dlouhý tak akorát, aby se jim do pokoje vešel (a nemuseli uřezávat rohy), prodavač zbledl, zavřel obchod, vytáhl tužku, papír a začal počítat. Ať se prý pánové za 2 měsíce zastaví.*

Pomůžete mu zjistit délku koberce?

Řešení:

Nejprve si označme jednotlivé rozměry pokoje podle obrázku r4.2.1. Jak na obrázku vidíte, delší stranu pokoje jsme si rozdělili na úseky délky x a $4 - x$, kratší stranu pak y a $3 - y$. Délku koberce, kterou hledáme, budeme značit L.



Obr. r4.2.1 – Rozměry pokoje a koberce.

Teď se nám naskýtá několik možností, jak délku koberce vyjádřit. První možnost je využít obsahů jednotlivých útvarů v obdélníku. Víme, že obsah pokoje je

$$S = 3 \cdot 4\,, \tag{r4.2.1}$$

zároveň ale

$$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + S_3\,, \tag{r4.2.2}$$

$$S_1 = \frac{x \cdot y}{2}\,, \tag{r4.2.3}$$

$$S_2 = \frac{(4-x)(3-y)}{2}\,, \tag{r4.2.4}$$

$$S_3 = 1 \cdot L\,. \tag{r4.2.5}$$

Z Pythagorovy věty plyne, že

$$x^2 + y^2 = L^2\,, \tag{r4.2.6}$$

$$(4-x)^2 + (3-y)^2 = 1\,. \tag{r4.2.7}$$

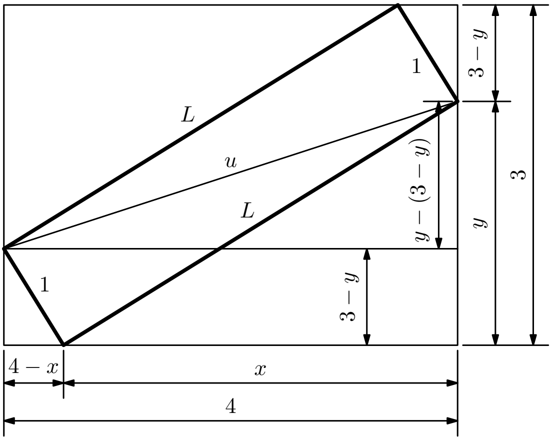
Sedm rovnic pro sedm neznámých, stačí jen vyřešit.

Druhá možnost, jak sestavit soustavu rovnic je všimnout si podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{L}{1} = \frac{y}{4-x}\,, \tag{r4.2.8}$$

$$\frac{y}{4-x} = \frac{x}{3-y}\,. \tag{r4.2.9}$$

Pokud dodáme ještě (r4.2.7), dostáváme tři rovnice o třech neznámých, které opět budeme řešit.



Obr. r4.2.2 – Pokoj s úhlopříčkou.

Další možností je zavést si ještě úhlopříčku u podle obrázku r4.2.2 a použít rovnice

$$u^2 = 1 + L^2 \cdot [y - (3-y)]^2 + 4^2 \tag{r4.2.10}$$

spolu s rovnicemi (r4.2.6) a (r4.2.7). Dostaneme čtyři rovnice o čtyřech neznámých.

Zdá se to jednoduché, ale pozor. Všechny použité rovnice musí být navzájem nezávislé. Pokud bychom chtěli použít (r4.2.6), (r4.2.7), (r4.2.8) a (r4.2.9), tak jedna rovnice už je zbytečná, protože si ji můžeme odvodit z ostatních tří (zkuste si).

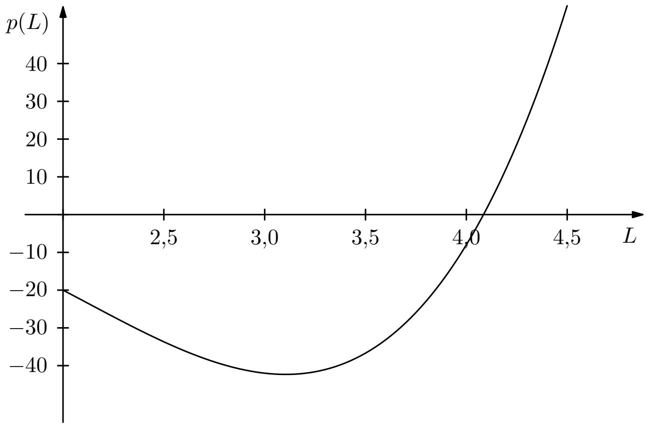
Pokračujme dál. Naším cílem bude v této fázi zredukovat počet rovnic. Pomocí různých úprav můžeme dostat tyto tři:

$$L^4 - 27 \cdot L^2 + 48 \cdot L - 24 = 0\,, \tag{r4.2.11}$$

$$4 \cdot y^4 - 36 \cdot y^3 + 129 \cdot y^2 - 240 \cdot y + 192 = 0\,, \tag{r4.2.12}$$

$$4 \cdot x^4 - 48 \cdot x^3 + 213 \cdot x^2 - 432 \cdot x + 360 = 0\,. \tag{r4.2.13}$$

Co nám tyto rovnice říkají? Délka koberce L je řešením polynomu (r4.2.11), a tedy jedním z jeho kořenů. Polynom ve vzorci (r4.2.11) si označíme $p(L) = L^4 - 27 \cdot L^2 + 48 \cdot L - 24$. (V následujících odstavcích budeme písmeno L brát jako proměnnou polynomu. (Obvykle se proměnná polynomu označuje jako x, ale to by se nám pletlo s polynomem ve vzorci (r4.2.13).) Část průběhu funkce $p(L)$ můžete vidět na obrázku r4.2.3.



Obr. r4.2.3 – Průběh funkce $p(L)$.

Jak hledat kořeny polynomu 4. stupně? V tomto případě lze najít i přesné řešení vyjádřitelné pomocí $+$, $-$, $\cdot$, $/$ a odmocnin, ale je to obtížné a nám stačí přibližně řešení. (Prodavač stejně není schopen ustřihnout koberec přesněji, než na jeden milimetr.) Použijeme tedy numerické metody.

Numerických metod, jak počítat kořeny našeho polynomu, je hned několik. Každá má svoje plusy a mínusy. Já vám zde ukážu dvě základní.

První, nejjednodušší, je metoda půlení intervalů. Postup je následující: Nejprve si najdeme nějaké L_1. Chceme, aby hodnota polynomu v tomto bodě byla menší než nula, $p(L_1) < 0$, a L_2, kde $p(L_2) > 0$. (Předpokládáme, že mezi L_1 a L_2 existuje pouze jeden kořen polynomu.) V našem případě si zvolíme například $L_1 = 4$ a $L_2 = 5$. Nyní se podíváme doprostřed mezi body L_1 a L_2, tedy do bodu $L_3 = (L_1 + L_2)/2$ a spočítáme hodnotu $p(L_3)$. Zajímá nás, jestli je $p(L_3)$ větší nebo menší než nula (pokud by bylo rovno 0, tak jsme skončili a máme kořen). Pokud je $p(L_3) < 0$, tak víme, že kořen je mezi L_3 a L_2, pokud je $p(L_3) > 0$, tak víme, že kořen je mezi L_1 a L_3. Zmenšili jsme si oblast, kde by mohl být kořen na polovinu. Tento postup můžeme provádět tak dlouho, dokud se netrefíme přesně do kořenu nebo dokud nám nebude stačit přesnost, které jsme dosáhli.

Metoda půlení intervalů je spolehlivá a kořen vám najde vždy. (Vždy, když máme spojitou funkci a interval (L_1, L_2), kde je určitě kořen.). Bohužel konverguje pomalu.

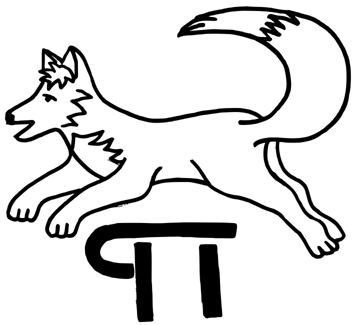
Jedna z rychlejších metod je Newtonova metoda tečen. Ta konverguje (přibližuje se k řešení) rychleji, ale někdy nemusí fungovat. Musíme také umět funkci analyticky (a dostatečně rychle) zderivovat. Jak metoda tečen funguje?

Vezmeme si nějaký počáteční bod L_0 a spočítáme si v tomto bodě hodnotu $p(L_0)$ a $p'(L_0)$ (funkční hodnotu a velikost derivace v tomto bodě). Následně si najdeme další bod pomocí formulky $L_1 = L_0 - p(L_0)/p'(L_0)$. Pokud bychom si to nakreslili, tak bodem L_0 prokládáme tečnu a bod L_1 je bod, kde tečna protne osu x (zde osu L). Následně si spočítáme $p(L_1)$ a $p'(L_1)$, z toho si vypočítáme L_2 a budeme pokračovat tak dlouho, jak budeme chtít (do té doby, dokud se nám výsledek neustálí). U této metody bohužel nemůžeme odhadnout chybu výsledku, na rozdíl od metody půlení intervalů.

Počáteční bod zvolíme co nejblíže předpokládanému řešení. Omezíme tak riziko, že metoda nebude konvergovat, nebo že dokonverguje k jinému kořenu, než chceme. Vezmeme $L_0 = 4$. Potom $p(4) = -8$ a $p'(4) = 88$. Z toho $L_1 = 4 - (-8)/88 = 45/11$. Ve druhém kroku $p(L_1) \doteq 0{,}582$, $p'(L_1) \doteq 101$ atd.

Pokud si zkusíte pár dalších kroků, dostanete se velmi rychle k „přesnému“ řešení. K jakému výsledku nakonec dojdeme? $L \doteq 4{,}08512$, $x \doteq 3{,}47379$ a $y \doteq 2{,}14965$. Prodavač tedy musí uříznout z role koberce pás dlouhý 408,5 cm.

Jindra



Úloha 4.3 – Funkce špulec (4b)

Zadání:

Funkce špulec (řecky ksí) je definována takto:

$$\xi(1) = 1$$
$$\xi(n+1) = (2^{\xi(n)} + \xi(n)^2 + \xi(n)) \bmod 17$$

Zjistěte, kolik je $\xi(2^{3628800})$.

Řešení:

Tato úloha byla velmi jednoduchá, chtělo to jen nepokazit žádnou ze tří fází.

Tou první je myšlenka, že posloupnost $\xi(1), \xi(2), \xi(3), \ldots$, která může nabývat pouze 17 hodnot a závisí vždy pouze na předchozím prvku, se musí nutně periodicky opakovat, a to s periodou nanejvýš 17.

Najděme tedy tuto periodu: $\xi(1) = 1$, $\xi(2) = 4$, $\xi(3) = 2$, $\xi(4) = 10$, $\xi(5) = 12$, $\xi(6) = 2$, $\xi(7) = 10$, ... Z uvedené úvahy plyne, že $\xi(3k + 3) = 2$, $\xi(3k + 4) = 10$ a $\xi(3k + 5) = 12$. Kdo nevěří úvaze, může si to ověřit matematickou indukcí.

Třetím a posledním krokem je zjistit, kolik je $2^{3628800} \mathbin{\mathbf{mod}} 3$. Posloupnost zbytků $2^i \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ může nabývat pouze dvou hodnot (nikdy 0) a závisí jen na předchozím členu posloupnosti, tedy je periodické: $2^0 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 1$, $2^1 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 2$, $2^2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 1, \ldots$

Protože je $3628800 = 10!$ sudé, $2^{3628800} \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 1$ a $\xi(2^{3628800}) = 10$.

Na to, jak byla tato úložka dobře bodovaná, byla docela jednoduchá. Vyřešila ji většina z těch, co se o to alespoň pokusili.

Tomáš

Úloha 4.4 – Zkumavky s jedy (3b)

Zadání:

Lišáček Riki se zatoulal do laboratoře šíleného chemika, který vynalezl dokonalý jed. Tento jed nelze pohledem ani čichem rozeznat od obyčejné vody. Riki zaslechl, že chemik má v úmyslu otrávit tímto jedem všechny jeho kamarády z M&M, a proto se rozhodl, že mu jed musí za každou cenu sebrat.

Našel 19 zkumavek, které jsou nerozlišitelné až na to, že ve dvou z nich je zmíněný jed, a ve zbylých voda. Jediný způsob, jakým jde zjistit, jestli je ve zkumavce jed, nebo voda, je pokusit se jejím obsahem něco otrávit. Tak začal Riki lovit místní myši. Pokud se myši podá jed, zmodrají jí oči. Pokud se myši podá voda, uteče, a už ji také nelze použít.

Kolik myší musí ulovit, aby mohl s jistotou zjistit, ve kterých zkumavkách je jed?

Řešení:

Lišáček Riki brzo přišel na to, že pokud by zkoušel jednu zkumavku po druhé, tak by potřeboval 18 myší (u poslední zbylé zkumavky už lze snadno dopočítat, jestli obsahuje jed nebo vodu). Ovšem Riki je velice kreativní a tak jej napadlo tekutiny ve zkumavkách míchat a teprve potom je podávat myším. Takto jeho spotřeba myší značně klesne – postačí mu jich 8, aby správně určil zkumavky s jedy.

Je třeba si rozmyslet, jak šikovně zvolit počty slévaných zkumavek. Sléváním rozuměj „odkapu na nějaké místo z každé míněné zkumavky vzorek“. Pokud bychom měli jen jednu zkumavku s jedem, nejúčinnější by bylo vzít vždy polovinu skupiny zkumavek, slít je a podat myši. Pokud by se otrávila, jed je v dané části zkumavek a zbylé můžeme už navždy zanedbat, jinak zanedbáme ty zkumavky, které jsme slili. Takovýmto postupem, máme-li obecně n zkumavek, nám stačí $\log_2 n$ myší. Ještě je dobré si povšimnout, že počet spotřebovaných myší bude stejný jako kdybychom měli zkumavek m, kde m je rovno n „zakulacenému“ nahoru na nejbližší mocninu dvojky.

Jenže my chceme najít jedy dva a to nám situaci ještě trochu komplikuje. Při výše popsaném půlení nám nestačí testovat jednu část zkumavek, protože pokud by se myš otrávila, tak nevíme, jestli jsou v dané skupině oba jedy nebo jen jeden. Takže do doby, než budeme mít jistotu, že jsou jedy v různých skupinách, musíme testovat obě skupiny. Při takovém to postupu by to, že hledáme dva jedy, zvýšilo počet potřebných myší na dvojnásobek, což by v našem případě znamenalo 10 potřebných myší.

Nám se povede tento výsledek ještě krapet vylepšit. Použijeme k tomu zmíněnou znalost o „zakulacování“, kterým nevzroste počet potřebných myší. Nejbližší vyšší mocnina dvojky k devatenáctce je 32. Pokud 19 zkumavek rozdělíme na dva přibližně stejné díly, dostaneme 9 a 10 zkumavek. K devítce i desítce je nejbližší vyšší mocnina dvojky 16. S takovou potřebujeme dvě myši na určení jestli jsou jedy každý ve skupině zvlášť anebo oba v jedné a které. A pak dalších 8 na přesné určení. Kdybychom ale místo toho na začátku rozdělili zkumavky na tři skupiny, tak aby každá sestávala z nejvýše 8 zkumavek, tak sice budeme na počáteční zjištění potřebovat o myš více, ale pak na přesné určení nám budou stačit na každou zkumavky myši tři. Tedy celkem jich budeme potřebovat 9. Devět myší by nám stačilo i v případě, kdy bychom zkumavky na začátku dělili do pěti skupin, tak aby v každé byly nejvýše 4. V tomto případě bychom potřebovali 5 myší na určení skupin a pak 2 a 2 na přesné určení ve kterých zkumavkách jsou jedy. Dále se zdá, že počet potřebných myší už snížit nejde.

Avšak to není pravda, počet potřebných myší jde ještě snížit. Je třeba si uvědomit, že v momentě, kdy Riki podá myši směs a zjistí její reakci na ni, tak se může rozhodnout, jak bude dál postupovat.

Riki bude postupovat následovně: Pro přehlednost si zkumavky označíme čísly 1 až 19. Zkumavky rozdělí na skupiny 1–7 a 8–19. Vzorek smíchaných tekutin z první skupiny podá první myši. Rozlišíme dva případy:

(1) Myš se neotrávila – víme tedy, že oba jedy jsou ve zkumavkách 8–19. Druhé myši podáme směs ze zkumavek 8–11.

  (a) Neotrávila se. Pak ve zkumavkách 12–19 najdeme oba jedy pomocí půlení na šest pokusů (každý na 3).
  (b) Druhá myš se otrávila. V tomto případě najdeme jeden jed ve skupině zkumavek 8–11 na dva dotazy a druhý jed ve zkumavkách 8–19 kromě jedné zkumavky s jedem, která už je odhalena, půlením na 4 dotazy.

  Tedy případ (a) i (b) umíme vyřešit celkem pomocí osmi dotazů.

(2) Pokud se první myš otrávila, tak víme, že někde mezi zkumavkami 1–7 je jed. Druhé myši podáme vzorek ze skupiny 1–3.

  (a) Neotrávila se. Pak alespoň v jedné ze zkumavek 4–7 je jed a ten najdeme na 2 dotazy. Druhý jed najdeme v jedné ze zkumavek 4–19 vyjma té ve které už jsme jed odhalili. Použijeme k tomu další 4 myši. I tentokrát jich tedy spotřebujeme 8.
  (b) Druhá myš se otrávila. V tomto případě podáme třetí myši trochu tekutiny ze zkumavek 1 a 4.

    (α) Neotrávila se. Pak je jed v jedné ze zkumavek 2–3. Čtvrté myši podáme tekutinu ze zkumavky 2. (Pokud se neotráví, je jistě jed ve zkumavce 3.) Další čtyři myši použijeme pro najití jedu ve skupině zkumavek 3 a 5–19, celkem tedy opět 8 myší.

(β) Třetí myš se otrávila. Víme tedy, že ve zkumavce 1 nebo 4 je jed. Čtvrté myši podáme směs ze zkumavek 2–4.

(i) Neotrávila se. Pak již víme jistě, že je jed ve zkumavce 1. Druhý jed najdeme ve zkumavkách 5–19 s pomocí 4 myší. Celkem tedy 8 myší.

(ii) Čtvrtá myš se otrávila. Pak víme, že je jed ve skupině zkumavek 1–3, ve zkumavkách 1 a 4, ale i ve zkumavkách 2–4. Taková situace ale může nastat, jen pokud jsou ve zkumavkách 1–4 oba dva jedy. Na najití dvou jedů ve čtyřech zkumavkách nám další čtyři myši jistě postačí. Celkem budeme potřebovat zase 8 myší.

S pomocí osmi myší tedy oba jedy umíme najít. Sedm myší určitě stačit nebude. Možných umístění jedu je $\binom{19}{2} = 171$. Ale pomocí sedmi myší umím rozlišit jen $2^7 = 128$ možností.

Aby Riki našel dva jedy v devatenácti zkumavkách, bude potřebovat nalovit 8 myší.

Katka

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	2.	83			4		0	4	45
2–3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	93	2	3	4	3	4	16	43
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	1.	43			4	3	2	9	43
4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	3.	178		1	3	3	0	7	39
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	2.	38		3	4	2	2	11	38
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	1.	34		3	4	3	3	13	34
7–8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	1.	33		1	4	1	2	8	33
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	1.	33							33
9–10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Steinhauser	2.	31							31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec	3.	31							31
11–13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	4.	35							27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Kubelka	1.	27		3		2	1	6	27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lada Peksová	2.	27				3	0	3	27
14–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	3.	41	3	1		3	0	7	25
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	3.	25			3	1	0	4	25
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	3.	24		4	4	1	1	10	24
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	3.	22	3	3		1	0	7	22
18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	3.	35							21
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Havelková	1.	17		1	0	1	0	2	17
20–22.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	3.	77		2	4	2	0	8	16
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	3.	53							16
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Lux	1.	16							16
23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Bogár	2.	24							15
24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Terešková	1.	14		1		2	1	4	14
25–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Milan Bartoš	3.	13							13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Honzáková	2.	13		4	4		1	9	13
27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	3.	26							12
28–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlastimil Dort	2.	11							11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dávid Vendel	3.	11							11
30–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	3.	30	1	1		2	0	4	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Holková	3.	10							10
32.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	4.	225							9
33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	4.	26							8
34–37.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	2.	55							7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	4.	23							7
	Stanislav Fořt	1.	7							7
	Mojmír Majdiš	2.	7	0	1	4	1	1	7	7

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	+	$\sum_0$	$\sum_1$
38–40.	David Bambušek	2.	6	2	1		0	0	3	6
	Jana Břízová	2.	6				2	0	2	6
	Tomáš Volf	1.	6							6
41–43.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	15							5
	Jiří Harasim	4.	5							5
	Martina Vaváčková	2.	5							5
44.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10							4
45.	Petra Zahajská	1.	3							3
46–47.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	2.	17							1
	Simona Laňková	2.	1		1			0	1	1
48.	Aleš Růžička	4.	0							0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.