Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIV číslo 5

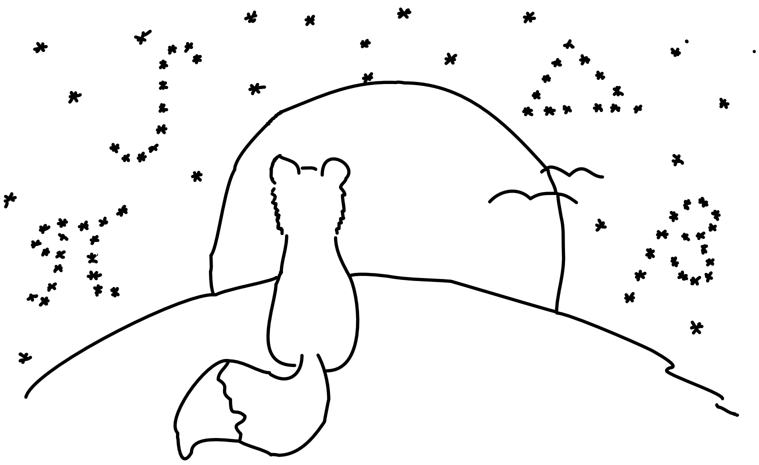
Termín odeslání: 28. 4. 2008

Milý čtenáři,

před pár dny nám začalo jaro, alespoň podle kalendáře. A to přináší nejen probouzející se přírodu, ale také probouzející se organizátory, kteří pro Vás začali pilně připravovat soustředění, jenž se uskuteční v době od 19. do 27. dubna nedaleko Uherského Hradiště. Proto někteří z Vás s tímto číslem dostali i pozvánku.

Ti kteří pozvánku nedostali nemusí smutnit, protože už teď můžou začít sbírat body na podzimní soustředění. Doufáme, že se Vám úlohy v tomto čísle budou líbit.

Vaše redakce



Zadání úloh

Úloha 5.1 – Tenis (3b)

Riki se Zikim hrají tenis. Hraje se tak, že vyhrává ten, kdo dosáhne pěti bodů s rozdílem alespoň dva. Riki má pravděpodobnost p_1, že vyhraje jeden set, Ziki $(1 - p_1)$. Najděte nejlepší odhad pro pravděpodobnost výhry Rikiho za stavu 2:3, pokud

a) znáte p_1

b) neznáte p_1

Úloha 5.2 – Martin s kulometem (4b)

Martin dostal od maminky za úkol zasadit hrách do jejich kulatého záhonu. Jako člověk, který využívá svůj čas maximálně efektivně, se rozhodl řešit úlohu těžkou mechanizací, a naládoval hrách do svého kuličkového kulometu. Postavil se doprostřed záhonu a za hlasitého ďábelského smíchu „Muhehehe!“ spustil palbu a začal se otáčet. Maminka mu ale přikázala zasít hrách rovnoměrně. Jak má Martin měnit úhel hlavně kulometu a rychlost svého otáčení, aby zasel rovnoměrně?

Martin si to musel pořádně rozmyslet dopředu – má pevný počet hrášků, které chce zasadit, a zná kadenci svého kulometu. Na tak malou vzdálenost je možné zanedbat odstředivou sílu i odpor vzduchu a uvažovat, že hrách létá po přímce. Rovnoměrné rozmístění znamená, že v každém čtverci $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ je skoro stejně hrachu a že vzdálenost každého hrášku ke třem k němu nejbližším je skoro stejná. Úhel a rychlost otáčení zkuste vyjádřit co nejpřesněji (například jako funkce času).

Úloha 5.3 – Loydova 63 (5b)

Jistě znáte hru Loydova patnáctka. Máte k dispozici hrací pole velikosti 4×4 a na něm rozmístěno patnáct čísel, na jednom místě je volné místo. Vaším úkolem je pomocí přesouvání čísel (přesunutí čísel znamená posunutí čísla na sousední volné políčko) přeuspořádat čísla tak, aby šly postupně od 1 do 15. Ve své době byl o tuto hru veliký zájem, neboť sám Loyd nabídl $1000 tomu, kdo vyřeší patnáctku, která je seřazena, až na dvě poslední číslice, které jsou prohozeny (čísla šly v pořadí 1, 2 . . . 13, 15, 14). O své peníze se nemusel bát, protože tato situace je neřešitelná.

Co kdybychom řešili podobný problém, a to 3D verzi tohoto hlavolamu. Měli bychom krychli o velikosti $4 \times 4 \times 4$ hracích kamenů. Uvnitř bychom měli 63 očíslovaných krychliček. Kameny bychom mohli opět přesouvat pouze na sousední volné místo a to ve 3 (respektive 6) směrech. Je tato verze tohoto hlavolamu řešitelná ve všech případech? Nebo i zde může být nabídnuta poutavá odměna za něco, co nejde vyřešit? Své řešení nezapomeňte patřičně zdůvodnit.

Úloha 5.4 – Prasečí hra (3b)

Na tabuli jsou napsaná čísla 1, 2, 3, . . . , 2007. Dva hráči střídavě mažou libovolná dvě čísla a a b. Poté místo nich na tabuli napíšou číslo $\|a - b\|$. Hra končí ve chvíli, kdy na tabuli zbude jedno jediné poslední číslo. První hráč je vítězem, pokud je zbylé číslo sudé. Pokud je liché, vyhrává druhý hráč.

Řešení témat

Téma 2 – Opilý hasič

K tejto téme prišli od tretieho čísla len 2 príspevky, v ktorých sa ich autori (Mgr.MM Alena Bušáková a Dr.MM Petr Pecha) snažia dokázať nemožnosť kríženia čiary. Obe tieto riešenia ale obsahujú závažné chyby, takže v skutočnosti nedokazujú nič. Mimochodom, obvykle je ľahšie dokázať, že sa niečo dá, ako že sa niečo nedá. ;-)

Stále otvorený teda ostáva problém kríženia čiary – je kríženie možné? A ak áno, aké sú nutné podmienky, aby k tomu došlo? Jeffer

Téma 6 – Samopopisující věty

Překvapilo nás, kolik věcí Vás napadne popsat větou na větě. Některé Vaše konstrukce byly dosti kostrbaté a některé bylo potřeba chápat trochu oklikou, ale většina jasně demonstrovala, co o sobě věta může říci.

Zaslali jste nám věty popisující například přibližný počet slov ve větě,

Já jsem souvětí, které obsahuje tři věty, které postupně navyšují počet slov.

Bc.MM Lenka Havelková

svůj začátek a konec,

Ani tato věta není dost krátká, aby si na svém konci nezasloužila tečku a na začátku velké písmeno.

Bc.MM Lenka Havelková

počet písmen všech slov,

Nečekanou vlastnost tohoto článku lze chápati, jestli nějaký člověk vydělí číslem tři všecky slůvka těch vět.

Mgr.[MM] František Steinhauser

obsah konkrétních písmen,

Tato věta má ráda samohlásku a, a tak všechna slova obsahují danou samohlásku.

Bc.[MM] Lenka Havelková

počet konkrétních písmen,

Tato věta obsahuje pět t.

Doc.[MM] Alžběta Pechová

počet písmen ze skupiny,

Tato věta má stejně „a“ a „e“.

Toto mé sdělení má stejný počet čárek jako háčků a jako teček a kroužků dohromady.

Mgr.[MM] Alena Bušáková

počet diakritických znamének

Tato věta obsahuje tři háčky.

Tato věta obsahuje čtyři háčky.

Doc.[MM] Alžběta Pechová

a spoustu dalších vět s velmi jednoduše splnitelnými vlastnostmi.

Tato věta neobsahuje žádnou číslici.

Tato věta je tu jednou.

Mgr.[MM] František Steinhauser

Ačkoli některé z nich není vždy lehké dodržet.

Tato věta je tu poslední.

Mgr.[MM] František Steinhauser

Popisované vlastnosti dávají větám různý stupeň volnosti, některé z popisovaných vlastností, jako například „obsahovat a v každém slově“ či „neobsahovat konkrétní typ znaků“, je možné splnit velmi lehce téměř jakoukoli větou a nebo je možné splňující větu téměř libovolně upravovat.

Naopak vlastnost „obsahovat právě k t“ nebo „mít délky všech slov dělitelné třemi“ již není tak lehké splnit. Stále však platí, že je možné vkládat a vypouštět některá slova beze změny zbytku věty.

Nejtěžší vlastností, kterou je „obsahovat právě x_1-krát písmeno p_1, x_2-krát p_2, …“ pro co nejvíce písmen, se hlouběji zabývali Doc.[MM] Alžběta Pechová a Mgr.[MM] Miroslav Koblížek. Oběma se podařilo vytvořit věty popisující počet výskytů samohlásek. Jejich řešení budeme publikovat později. Zatím Vám dáme možnost je překonat svou vlastní větou. Klíčovým pozorováním většiny z Vás bylo, že je potřeba mít pro velkou část slov připravena synonyma.

Mgr.[MM] Josef Tkadlec řešil podobný problém, když popisoval počet výskytů číslic právě číslicemi. Jeho větu vytvořil podle pevné šablony a řešil pak trochu podivnou soustavu o deseti neznámých. Jeho výsledek sice není až tak překvapující, ale podobný postup je možná možno uplatnit i pro počty písmen.

Jednou z možných otázek k tomuto tématu je, kolik má tato soustava řešení. Mgr.^M Josef Tkadlec ve své větě vytvořil jeden pevný výskyt každé cifry, co kdyby ale bylo pevných výskytů více? Jak by bylo možné řešit případnou vícecifernost počtu? I toto je oblast, ve které lze řešit složitější úlohy. A navíc můžete přidat třeba počet či součet všech cifer.

A takto vypadá výsledná věta Mgr.^M Josefa Tkadlece:

Tato věta obsahuje 1-krát 0, 7-krát 1, 3-krát 2, 2-krát 3, 1-krát 4, 1-krát 5, 1-krát 6, 2-krát 7, 1-krát 8 a 1-krát 9.

Netradiční, vskutku sebepopisující, větu nám poslal Mgr.^M Tomáš Bartoněk:

Tato věta zní takto: "Tato věta zní takto: "Tato věta zní takto: "Tato věta zní takto...

Těšíme se na Vaše další řešení!

Gavento

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Perioda kyvadla (5b)

Zadání:

Změřte, jak závisí frekvence kyvů kyvadla (kyvadlo je jakýkoliv pevný předmět zavěšený otočně mimo své těžiště) na amplitudě kyvů. Jak vypadá výsledek pro různé tvary a hmotnosti kyvadla?

Můžete také zkusit najít vhodnou analytickou závislost, která vystihuje naměřená data.

Řešení:

Venujme sa najprv teoretickému riešeniu problému. Využijeme druhú vetu impulzovú, ktorá stručne hovorí:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\,, \tag{r3.1.1}$$

čo v preklade znamená, že časová derivácia momentu hybnosti je rovná pôsobiacemu momentu sily[1]. Pre moment hybnosti platí, že je súčinom momentu zotrvačnosti telesa $\boldsymbol{I}$ (čo je obecne symetrický tenzor) a jeho uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\Omega}$ (čo je obecne (pseudo)vektor). V našom prípade sa tento inak zložitý vzťah redukuje na jedinú zložku. (Os otáčania máme pevne uchytenú, teda žiadne ďalšie pohyby (precesiu a nutáciu) nemôže vykonávať.) Za uhlovú rýchlosť teraz dosadíme časovú zmenu uhlu výchylky ($\Omega = \dot{\psi}$), kde ako obvykle značíme

[1] Podobne znie aj prvá veta impulzová, ktorá je ale určená pre netočivý pohyb: časová zmena hybnosti je rovná pôsobiacej sile ($\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$).

bodkou časovú deriváciu premennej. Ostáva nám dosadiť za moment pôsobiacej sily $\boldsymbol{M}$. Kyvadlo kmitá v našom dobre známom gravitačnom poli, kde sila je $F = mg$ (m je hmotnosť kyvadla, g tiažové zrýchlenie). Moment sily je síce obecne $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, ale to v našom prípade (zaujíma nás veľkosť) dáva $M = mgl \sin\psi$ (kde l je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania). Dosaďme teraz do (r3.1.1):

$$\ddot{\psi} + \frac{mgl}{I} \sin\psi = 0\,. \qquad \text{(r3.1.2)}$$

Riešenie tejto rovnice je vďaka členu $\sin\psi$ veľmi zložité. Obvykle sa preto vezmú kmity s malou výchylkou, pre ktorú platí $\sin\psi \approx \psi$. Rovnica ktorá vznikne

$$\ddot{\psi} + \frac{mgl}{I} \psi = 0\,, \qquad \text{(r3.1.3)}$$

je už jednoduchá diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorej riešenie môžeme vyjadriť ako

$$\psi = A \sin\sqrt{\frac{mgl}{I}} t\,. \qquad \text{(r3.1.4)}$$

Z tejto rovnice už jednoducho určíme periódu – stačí aby sa argument sínu zmenil o 2π, čo sa stane vždy po dobe

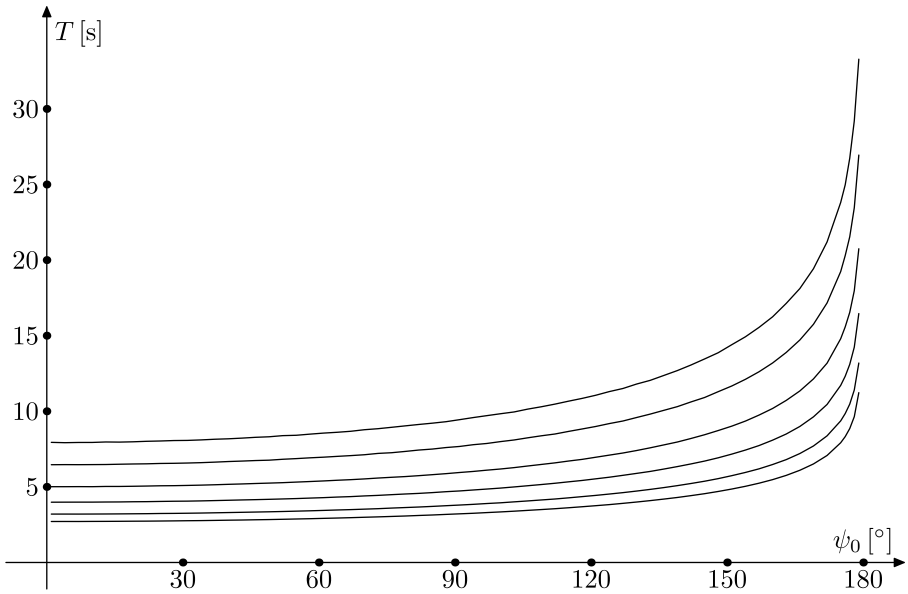
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}\,. \qquad \text{(r3.1.5)}$$

Ako vidíme, perióda (a teda ani frekvencia) nijak nezávisí na amplitúde A. Naviac, ak použijeme matematické kyvadlo (pre ktoré $I = ml^2$), dostaneme jednoduchým dosadením $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, čiže perióda nezávisí ani na hmotnosti! K podobnému záveru dospel aj Mgr.[MM] Miroslav Koblížek, keďže použil fľašu s vodou na lane, čo sa matematickému kyvadlu celkom podobá.

Nechali by sme Vás ale merať niečo, čo neexistuje? Nie! Odpoveď hľadajme v zjednodušení, ktoré sme urobili medzi rovnicami (r3.1.2) a (r3.1.3). Riešme teda rovnicu v presnom tvare (r3.1.2). Ako som už spomenul, analytické riešenie je zložité a tak si pomôžeme riešením numerickým[2]. Výsledok teoretického riešenia si môžete pozrieť v grafe r3.1.1.

Na osi x je počiatočná výchylka, teda amplitúda, na osi y je perióda kyvadla (chyba je tak malá, že vynášať chybové úsečky sa nevyplatí). Kyvadlo je pre potrebu výpočtu tvorené homogénnym diskom s polomerom 30 cm a hmotnosťou 1 kg, na ktorom je v jednom mieste pripevnené závažie s hmotnosťou 100 g. Jednotlivé krivky na grafe tak zodpovedajú rôznym polohám závažia — postupne zvrchu je to 0,1, 0,15, 0,25, 0,4, 0,65 a 1 násobok polomeru disku. Najspodnejšia krivka teda zodpovedá závažiu na obvode disku. Pre matematické

[2] Pre záujemcov: používam metódu Runge-Kutta riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc s premenlivou dĺžkou krokov, tak ako je spracovaná v [NR].



Obr. r3.1.1 – Závislosť amplitúda-perióda, teoretický výpočet.

kyvadlo je táto závislosť prakticky rovnaká a tak až po veľké uhly výchylky (minimálne 50°) nie je žiadna zmena pozorovateľná a skutočne výrazný rast periódy nastáva až nad 100° (kam už závažie na lanku nevychýlime).

Venujme sa ale tomu, že s rastúcou vzdialenosťou závažia klesá perióda — to sa nepodobá tomu, na čo sme zvyknutý pri matematickom kyvadle. Ak však vo vzťahu (r3.1.5) dosadíme v menovateli za vzdialenosť ťažiska $l = rm/(m+M)$ (kde r je vzdialenosť závažia, m je jeho hmotnosť a M je hmotnosť disku) a za moment zotrvačnosti v čitateli $I = I_0 + mr^2$ (kde I_0 je moment zotrvačnosti disku), dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mr^2}{rmg}}\,. \tag{r3.1.6}$$

Keď nájdeme minimum tejto funkcie, zistíme, že nastáva pre $r_{\min} = \sqrt{I_0/m}$, teda v našom prípade keď $I_0 = 45\cdot 10^{-3}\,\mathrm{J\cdot s^{-2}}$ a $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ je $r_{\min} = 0{,}67\,\mathrm{m}$, čo je vyše dvojnásobok polomeru kolesa — v celom prepočítanom intervale perióda klesá so vzdialenosťou závažia.

Vyzbrojený týmito teoretickými predpokladmi, vydal som sa merať. Prvý problém bol nájsť vhodné kyvadlo a tak som sa rozhodol pre ten druh, ktorý teoreticky počítam — koleso na bicykli je predsa uchytené na pomerne hladko idúcich ložiskách, je (temer) vyvážené a na špice nie je problém prichytiť závažie (krabičku od celaskónov plnenú olovenými brokmi). Na meranie času som použil video na svojom fotoaparáte s frekvenciou 30 fps, teda chyba odčítania z videa je nanajýš $\pm 1/30\,\mathrm{s}$. (Pozor! Normálne je chyba odčítania pol dielika stupnice, čiže v tomto prípade by mala byť $\pm 1/60\,\mathrm{s}$. Ja však zohľadňujem aj neistotu

ψ_0 [°]	T [s]	ψ_0 [°]	T [s]
$157{,}5 \pm 9{,}0$	$6{,}47 \pm 0{,}62$	$60{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}53 \pm 0{,}16$
$142{,}5 \pm 5{,}9$	$5{,}40 \pm 0{,}16$	$57{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}53 \pm 0{,}08$
$133{,}0 \pm 6{,}1$	$5{,}00 \pm 0{,}16$	$55{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}53 \pm 0{,}08$
$126{,}0 \pm 5{,}2$	$4{,}73 \pm 0{,}08$	$52{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}47 \pm 0{,}12$
$120{,}0 \pm 5{,}7$	$4{,}47 \pm 0{,}16$	$49{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}47 \pm 0{,}12$
$114{,}0 \pm 5{,}2$	$4{,}40 \pm 0{,}07$	$46{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}47 \pm 0{,}12$
$108{,}0 \pm 5{,}7$	$4{,}20 \pm 0{,}08$	$44{,}5 \pm 5{,}0$	$3{,}40 \pm 0{,}16$
$102{,}5 \pm 5{,}1$	$4{,}07 \pm 0{,}08$	$42{,}0 \pm 5{,}2$	$3{,}47 \pm 0{,}12$
$97{,}5 \pm 5{,}6$	$4{,}00 \pm 0{,}20$	$39{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}40 \pm 0{,}16$
$93{,}0 \pm 5{,}0$	$4{,}00 \pm 0{,}07$	$36{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}40 \pm 0{,}16$
$89{,}0 \pm 5{,}4$	$3{,}87 \pm 0{,}12$	$34{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}33 \pm 0{,}12$
$85{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}80 \pm 0{,}08$	$31{,}0 \pm 5{,}2$	$3{,}40 \pm 0{,}16$
$81{,}5 \pm 5{,}3$	$3{,}80 \pm 0{,}16$	$29{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}33 \pm 0{,}12$
$78{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}73 \pm 0{,}12$	$26{,}5 \pm 5{,}3$	$3{,}27 \pm 0{,}16$
$74{,}5 \pm 5{,}3$	$3{,}67 \pm 0{,}08$	$23{,}5 \pm 5{,}0$	$3{,}47 \pm 0{,}20$
$70{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}67 \pm 0{,}08$	$21{,}0 \pm 5{,}2$	$3{,}20 \pm 0{,}20$
$67{,}0 \pm 5{,}2$	$3{,}60 \pm 0{,}12$	$19{,}0 \pm 5{,}0$	$3{,}33 \pm 0{,}20$
$63{,}5 \pm 5{,}1$	$3{,}60 \pm 0{,}12$	$17{,}0 \pm 5{,}2$	$3{,}27 \pm 0{,}24$

Tabuľka r3.1.1 – Závislosť amplitúda-perióda, merané hodnoty.

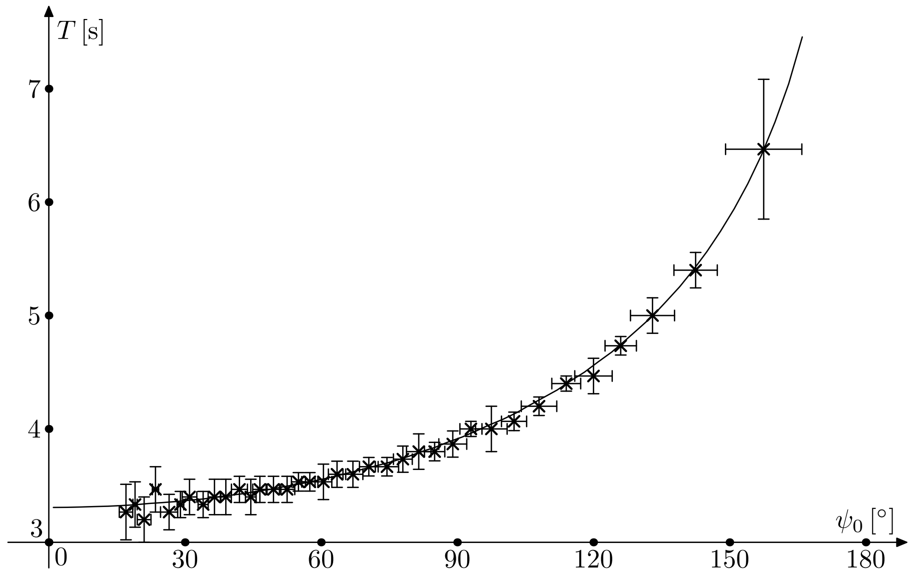
na ktorom obrázku k dosiahnutiu danej hodnoty naozaj došlo.) Odčítaval som prechody nulou a obe krajné polohy (kvôli získaniu čo najväčšieho množstva dát), naviac som v krajných polohách odčítaval aj uhol výchylky.

hmotnosť kolesa:	3 kg
polomer kolesa:	30 cm
hmotnosť závažia:	580 g
vzdialenosť závažia:	9 cm

Tabuľka r3.1.2 – hodnoty konštánt pre fit meraných údajov.

Otáčanie kolesa bolo dosť brzdené trením, teda amplitúda pomerne rýchlo klesala. Preto som sa rozhodol určiť amplitúdu vždy ako priemer dvoch po sebe zmeraných maximálnych výchylok a periódu ako štvornásobok priemeru rozdielov medzi krajnou a strednou polohou. K takto určeným premenným patria aj zodpovedajúce štatistické chyby obohatené o chyby systematické. Výsledok Vám predkladám v tabuľke r3.1.1 a grafe r3.1.2.

Fit v grafe je robený numerickým výpočtom pre hodnoty podľa tabuľky r3.1.2. Tieto hodnoty síce úplne nezodpovedajú skutočnému usporiadaniu ex-



Obr. r3.1.2 – Závislosť amplitúda-perióda, merané hodnoty.

perimentu, lenže tomu nezodpovedá ani predpoklad hmotného disku a na ňom prichyteného bodového závažia. Inak ale vidíme, že tvar krivky veľmi dobre zodpovedá nameraným hodnotám.

Literatúra:

[NR] *Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.: Numeric Recipes in Fortran 77, Second edition, Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge 2001* (viď tiež `http://www.nrbook.com/`).

Jeffer

Úloha 3.2 – Ovečky v kruhu (4b)

Zadání:

Máme uzavřený kruh s 13ti (n) pozicemi (každá sousedí se dvěma sousedníma `:-)`*). Na každé sedí jedna ovečka kromě jedné, kde je hladový vlk, který v každém kroku udělá náhodně pohyb o jednu pozici doprava nebo doleva. Pokud je ještě na pozici nějaká ovečka, vlk ji sežere. Jakmile vlk zbaští 11 (n-2) ovcí, nabaží se a pojde. Která ovečka má největší šanci na přežití? (respektive jaká je její vzdálenost od vlka).*

Řešení:

Až na řešení Mgr.$^{\mathrm{M}}$ Marka Nečady se nikomu nepovedlo najít zcela správný myšlenkový postup jak tento příklad řešit. Řešitelé se velmi často snažili spočítat provděpodobnost, s jakou vlk sní danou ovečku po n krocích. To byla hlavní chyba. V zadání byl definován konec jako doba, kdy zůstane poslední ovce a ne doba, kdy udělá vlk nějaký konkrétní počet kroků. Správné řešení je toto.

Začneme úmluvou, že vzdáleností ovečky od vlka budu vždy myslet počet pozic, o které je vlk vzdálený od ovečky ve směru hodinových ručiček. Označím si $F(a,b)$ jako funkci, která mi říká jaká je pravděpodobnost, že ovečka vzdálená a pozic od vlka bude snědena dříve, než ovečka vzdálená od vlka b pozic. (Použít právě takovou funkci napadlo Mgr.[MM] Marka Nečadu, což byl skvělý nápad. Pracoval s ní však příliš složitě tím, jak se ji snažil vyjádřit). Pro $F(a,b)$ zjevně platí následující vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
F(a,b) + F(b,a) &= 1\,, \\
F(a,b) &= F(n-a, n-b)\,.
\end{aligned}
\tag{r3.2.1}
$$

První vztah je jasný. Buď je sežrána napřed a a nebo b. To nastane vždy. Druhý vztah jen ukazuje přeorientování směru, ve kterém počítáme vzdálenosti ovcí od vlka. Nyní si vyjádříme pravděpodonost, s jakou vyhraje ovečka vzdálená K pozic od vlka. Vlk musí sníst oba její sousedy. Tedy ovečky na pozicích $k+1$ a $k-1$. Jsou dva možné postupy k výhře k-té ovčky. První nastane s pravděpodobností:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= F(k+1, k-1)F(n-2, n-1)\,, \\
&= F(k+1, k-1)F(2,1)\,.
\end{aligned}
\tag{r3.2.2}
$$

Řečeno slovy nastává sežrání prvního souseda před druhým a poté sežrání druhého souseda před k-tou ovcí, která je však po sežrání souseda vzdálena n od vlka. Poslední úpravou v prvním ze vztahů (r3.2.1) je pak použití druhého ze vztahů (r3.2.1) na druhý člen. Druhý případ výhry k-té ovce má pravděpodobnost

$$
p_2 = F(k-1, k+1)F(2,1)
\tag{r3.2.3}
$$

Neboli nejdříve je sežrán druhý soused před prvním a poté sežrání prvního souseda před k-tou ovcí. Výsledná pravděpodbnost výhry k-té ovce je tedy rovna součtu těchto dvou pravděpodbností.

$$
\begin{aligned}
p &= p_1 + p_2\,, \\
&= F(k+1, k-1)F(2,1) + F(k+1, k+1)F(2,1)\,, \\
&= \left[F(k+1, k-1) + F(k-1, k+1)\right] F(2,1)\,, \\
&= F(2,1)\,.
\end{aligned}
\tag{r3.2.4}
$$

Poslední úpravou, kterou jsme získali vztah (r3.2.4) bylo použití vztahu (r3.2.1) na členy v závorce. Docházíme tedy k výsledku, že pravděpodobnost výhry k-té ovce není nijak závislá na poloze této ovce. Pro každou ovci výjde výsledná pravděpodnost rovna $F(2,1)$ a tedy každá ovce má stejnou šanci na přežití. Můžete si všimnout, že jsme v řešení nikde nepotřebovali vědět, jaký má funkce F tvar. Čili nás vůbec nezajímalo, jak závisí na svých parametrech a vycházeli jsme pouze ze dvou zřejmých vlastností.

Na závěr bych chtěl poukázat na řešení Dr.[MM] Ladislava Bači. Příklad řešil numericky pomocí metody Monte Carlo. Jednoduše nechal počítač celou hru s ovečkami milionkrát sehrát. Vlk se vždy rozhodoval pomocí generátoru náhody, kterým směrem se vydat a došel k závěru, že pravděpodobnost na přežití byla pro všechny ovečky z počtu 19 stejná. Ačkoli se nejedná o důkaz problému, z pohledu numeriky bylo vše zcela v pořádku. Řada velkých problémů z matematiky se v praxi řeší právě podobným způsobem.

Irigi & Mára

Úloha 3.3 – 1 proti 100 (3b)

Zadání:

Není to tak dávno, co běžela v televizi vědomostní soutěž 1 proti 100. Hráč a zároveň 100 jeho soupeřů/diváků dostalo v každém kole jednu vědomostní otázku s odpověďmi a až c (stejnou otázku pro všechny hrající hráče v tom kole).

Hráč mohl přemýšlet nad odpovědí, jak dlouho chtěl, měl několik možností záchrany, a také volil, zda další otázka bude snadná nebo obtížná. Každý jeho soupeř/divák měl na odpověď jen asi 10 s*, a první špatná odpověď jej vyřadila definitivně ze hry.*

Hráč, poté, co řekl správnou odpověď na otázku daného kola, dostal finanční odměnu rovnou počtu soupeřů v tomto kole vyřazených vydělenou počtem všech hrajících soupeřů na začátku kola vynásobenou částkou půl milionu. Takže, pokud hned na začátku vyřadil kompletně všech 100 hráčů, dostal odměnu $100/100 \cdot 500\,000$ Kč.

Pokud v prvním kole hráč vyřadil 42 soupeřů, získal $42/100 \cdot 500\,000\,\text{Kč} = 210\,000\,\text{Kč}$ *a do dalšího kola „přežilo" 48 soupeřů, takže pokud jich v dalším kole vyřadil třeba 15, získal k částce kterou již měl dalších* $15/48 \cdot 500\,000\,\text{Kč} = 156\,250\,\text{Kč}$.

Hrálo se do doby, než hráč vyřadil všechny své soupeře nebo odpověděl špatně (v tom případě odcházel bez koruny). Jednou za hru mohl hráč využít bonusu a zařídit, aby se v příštím kole jeho zisk za poražené soupeře násobil dvěma.

Vaším úkolem bude zjistit, jakou maximální hotovost musela mít televize připravenu pro hráče, a v jakém případě mohlo nastat, že si ji hráč odnese.

Řešení:

Nejvyšší částka, kterou by si mohl hráč ze hry odnést, je 3 093 688,76 Kč, a hráč by si ji odnesl, pokud by v každém herním kole vyřadil právě jednoho protihráče a v posledním kole (kdy mu zbývá jediný soupeř) použil bonus.

Všechna přišlá řešení navrhovala strategii „vyrubat protihráče hezky jednoho po druhém" – v každém kole jednoho, také jste správně určili, že okamžik, kdy zbývá jediný protihráč, je správnou chvílí k použití bonusu.

Málokdo ale dovedl ukázat, že navrhovaný postup vyřazování hráčů je nejlepší možný.

Teoreticky by bylo možné použít důkaz rozborem všech případů. (Hrubou silou spočítat zisk pro každou posloupnost vyřazování hráčů.) My si ale uvědomíme, že v úloze záleží na pořadí počtu vyhazovaných hráčů v jednotlivých kolech. (Pokud vyřadím jednoho, dva a poté tři hráče, získám jinou částku, než když vyřadím nejprve dva, poté tři a nakonec jednoho.)

Na každou takovou posloupnost se můžeme dívat jako na způsob, jak pomocí sčítání získat číslo 100. (Přesněji – pomocí sčítání kladných přirozených čísel, různých od nuly.) Dá se dokázat, že by takový postup vyžadoval provést výpočet pro 2^{99} možností – což je naprosto „mimo dostřel" dnešních počítačů. A kdo zde tuší „problém batohu", tuší správně.

Hrubá síla zde nic nezmůže, bude potřeba uvažovat.

Částka získaná nějakým vyřazovací postupem je rovna součtu

$$500\,000\,\text{Kč} \cdot (v_1/100 + v_2/p_2 + v_3/p_3 + ... + v_n/p_n)\,, \tag{r3.3.1}$$

kde v_k je počet hráčů vyřazených v k-tém kole a p_k je počet hráčů, kteří přežili do k-tého kola.

Pro další výpočet si nebudeme všímat násobení půl-milionem (nejlepší řešení přece zůstane nejlepším i po vynásobení 500 000 Kč) a budeme pracovat jen s řadou (r3.3.1).

Předpokládejme, že jsme už v k-tém kole, a z minulých kol nám přežilo p_k protihráčů. Nyní se rozhodujeme, kolik protihráčů vyřadit v tomto kole. Podíváme se, jak bude vypadat situace, když vyhodíme nejprve jednoho hráče, a v dalším kole všechny zbývající.

Tuto situaci modeluje nerovnost:

$$\left(\frac{v_k - 1}{p_k - 1} + \frac{1}{p_k}\right) > \frac{v_k}{p_k}\,, \tag{r3.3.2}$$

kde $v_k > 1$, $p_k > 1$. Říká nám, že bude výhodnější vyřadit jednoho hráče, a poté všechny zbývající, proti možnosti vyřadit hned všechny naráz. Úvahu mohu použít pro libovolný počet zbývajících hráčů (pokud je větší než 1) a zjistím tak, že v každém kole bude výhodnější vyřadit právě jednoho hráče proti možnosti vyřadit více hráčů v tomtéž kole.

Tedy nejvyššího zisku dosáhneme, pokud budeme vyhazovat v každém kole právě jednoho hráče (tj. také se na to můžeme dívat jako na snahu co nejvíce hru „protáhnout“ a vyrobit do řady (r3.3.1) co nejvíce různých členů). Zisk bude v takovém případě roven

$$500\,000\,\text{Kč} \cdot \left(\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}\right)\,. \tag{r3.3.3}$$

Řada v závorce není jen tak ledajaká – často se objevuje v teorii čísel a analýze. Matematici jí říkají harmonická.

Součet prvních n-členů harmonické řady se nazývá n-té harmonické číslo a na rozdíl od aritmetické nebo geometrické řady, pro harmonickou řadu neexistuje žádný vztah udávající přesnou hodnotu takového součtu.

Sté harmonické číslo je možno najít v tabulkách a jeho hodnota je $H_{100} = 5{,}187\,377\,517\,639\,621\,.$

$$H_{100} \cdot 500\,000\,\text{Kč} = 2\,593\,688{,}76\,\text{Kč (po zaokrouhlení)}$$

Pěkný způsob jak ukázat, že jakýkoli jiný postup vyřazování hráčů vždy povede k nižšímu zisku, ukázala Mgr.[MM] Bětka Prokopová. Navrhuje porovnat s optimálním způsobem (r3.3.3) členy posloupností všech postupů vyřazování hráčů, zapsané stejně jako jsme zapsali (r3.3.1).

Tedy např. situaci pro 6 hráčů – pokud vyhodíme v prvním kole jednoho, ve druhém dva a ve třetím kole tři, bude $1/6 + 2/5 + 3/3$. Řekněme, že v jednom kole vypadne právě n hráčů ($n > 1$). Pak bude v zápise člen n/k ($n > 1$), který je možno rozepsat jako $1/k + 1/k + \ldots + 1/k$ (n-krát se opakující člen $1/k$). V našem příkladě $1/6 + 1/5 + 1/5 + 1/3 + 1/3 + 1/3$. Postup, o kterém se domníváme, že je optimální, je $1/6 + 1/5 + 1/4 + 1/3 + 1/2 + 1/1$.

Obě řady mají zřejmě vždy stejný počet členů. Uvědomíme si, že $1/a > 1/b$, pokud $a < b$, dále že naše řada je vždy rostoucí (tj. předchůdce každého členu je menší než kterýkoli jeho následník) a vyřazení n protihráčů v k-tém kole nutně znamená existenci n-členů tvaru $1/k$ ($n > 1$).

Nyní srovnáme velikosti členů obou řad. Dokud řada přikazuje vyhazovat hráče po jednom, budou se členy obou řad shodovat. Jakmile ale narazíme na vyhození n-hráčů ($n > 1$), tedy n stejných členů $1/k$, proti kterým budou stát členy $1/k$, $1/(k-1)$, $\ldots$, $1/(k-n+1)$ o kterých už víme, že jsou nutně větší (od členu $1/(k-1)$), bude součet členů druhé řady větší než součet řady první.

Z uvedeného plyne, že ať namícháme počty vyhazovaných hráčů jakkoli, nikdy nedostaneme lepší výsledek, než při vyhazování hráčů po jednom. Q.E.D. `:)`

Na závěr bych se ještě vrátil k výpočtu maximální výherní částky. V mnoha řešeních se projevila zaokrouhlovací chyba (případně interní počítání na nedostatečné množství platných cifer) způsobená použitým výpočetním prostředkem (kalkulačka, programovací jazyk, Excel ...). Někde tyto chyby činily až 5 Kč, tedy asi desetitisícinu procenta! `;-)`

ZlyMartin

Úloha 3.4 – Cestování po Zemi (5b)

Zadání:

Mějme místo na Zemi, ze kterého vyrazíme, půjdeme přesně 100 km na jih, potom přesně 100 km na východ a nakonec 100 km na sever, a dorazíme zpět na původní místo. Odkud jsme vyrazili? (Upozorňujeme, že jedno řešení nám nestačí. Najděte všechna!)

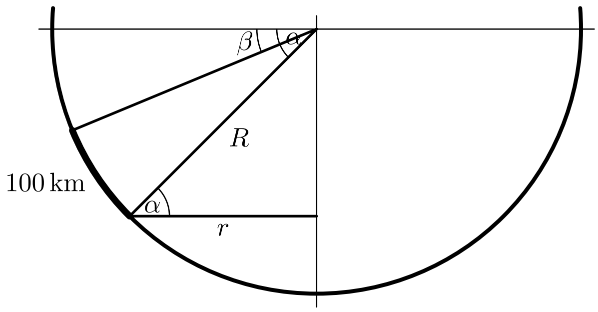
Poznámka: Zemi můžete považovat za dokonalou kouli s poloměrem odpovídajícím skutečné Zemi. Jít na jih, resp. sever znamená jít po poledníku, na kterém se vyskytuji směrem k jižnímu, resp. severnímu pólu. Jít na východ znamená jít východním směrem po rovnoběžce, na které se právě vyskytuji. Ze severního pólu se dá jít pouze na jih, z jižního pouze na sever.

Řešení:

První místo, které člověka napadne, je to, kde můžete zaslechnout ono Cimrmanovské: „Podívejte se – jdu na sever, a teď jdu na jih! A zpátky: na sever, a na jih.“ Jak jste jistě poznali, tak se nejedná o divadelní prkna, ale o severní pól. Pokud vyjdeme ze severního pólu na jih a ujdeme 100 km, pak se posuneme po rovnoběžce o libovolnou vzdálenost. Při návratu 100 km na sever, se opět dostaneme na severní pól.

Při hledání dalších vhodných míst je největší obtíží se vypořádat s chůzí na východ. S tou se můžeme vypořádat tak, že nalezneme rovnoběžku u které po 100 km chůze na východ dojdeme na původní místo ze kterého jsme vyšli. Tomuto místu odpovídá rovnoběžka s obvodem 100 km, ovšem také rovnoběžka s obvodem 50 km, kterou můžeme obejít vícekrát. Obecně tedy zadání vyhovuje jakékoliv místo na rovnoběžce, která je vzdálena 100 km severně od rovnoběžky, která má obvod $\frac{100}{n}$ km ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud bychom chtěli zjistit zeměpisnou šířku vhodných rovnoběžek, musíme se chopit sférických souřadnic (ty se používají k popisu zeměpisné šířky a délky). Považujme Zemi za dokonalou kouli, potom si můžeme situaci představit jako na obrázku.



Rovnoběžky

Odtud pak snadno spočítáme zeměpisnou šířku rovnoběžky, která je na obrázku označená úhlem β:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \alpha - \frac{100}{2\pi R} \cdot 360\,, \\
\alpha &= arccos\frac{r}{R}\,, \\
r &= \frac{\frac{100}{n}}{2\pi}\,, \\
\beta &= arccos\frac{100}{2n\pi R} - \frac{100}{2\pi R} \cdot 360\,,
\end{aligned}
$$

Po dosazení poloměru Země $R = 6378$ km a $n = 1\,,\ 2\ldots$ zjišťujeme, že nejsevernější rovnoběžky, které splňují zadání, jsou na $88°57'31''$, $89°1'48''\ldots$ Rovnoběžky jsou velmi blízko pólu. Pokud by nás zajímala nejjižnější rovnoběžka, tak můžeme předpokládat, že n je dostatečně vysoké aby $arccos\frac{100}{2n\pi R} \approx 90°$. Potom dostáváme jižní šířku $89°6'6''$.

(R)adim

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.^{MM} Ladislav Bačo	2.	79		4	3	1					2	10	41
2.	Mgr.^{MM} Miroslav Koblížek	1.	34	3		3	2					3	11	34
3.	Mgr.^{MM} Alena Bušáková	1.	33		1	3	1	5	1	2		1	14	33
4.	Doc.^{MM} Alžběta Pechová	3.	171		1	3	1					0	5	32
5–6.	Mgr.^{MM} František Steinhauser	2.	31											31
	Mgr.^{MM} Josef Tkadlec	3.	31											31
7–9.	Dr.^{MM} Petr Pecha	1.	77		1	3	2	2	1			2	11	27
	Mgr.^{MM} Marek Nečada	4.	35		4	3	2					0	9	27
	Mgr.^{MM} Jakub Klemsa	2.	27		0	3	2					0	5	27
10.	Mgr.^{MM} Tomáš Bartoněk	1.	25	2	0	3	2			4		2	13	25
11.	Mgr.^{MM} Lada Peksová	2.	24	1		3	2					1	7	24
12–15.	Mgr.^{MM} Jakub Töpfer	3.	35											21
	Mgr.^{MM} Tomáš Kubelka	1.	21	4	2	2	2					3	13	21
	Mgr.^{MM} Jitka Novotná	3.	21											21
	Mgr.^{MM} Lukáš Zavřel	1.	21		3	2	2					2	9	21
16.	Mgr.^{MM} Alžběta Prokopová	3.	34			3	2					0	5	18
17–18.	Dr.^{MM} Miroslav Klimoš	3.	53											16
	Bc.^{MM} Filip Lux	1.	16		1		1					0	2	16
19–21.	Mgr.^{MM} Ján Bogár	2.	24											15
	Bc.^{MM} Lenka Havelková	1.	15			2	1			3		1	7	15
	Bc.^{MM} Eliška Nekvapilová	3.	15											15
22.	Bc.^{MM} Hana Bílková	3.	14											14
23.	Bc.^{MM} Milan Bartoš	3.	13											13
24.	Mgr.^{MM} Jan Vaňhara	3.	26											12
25–26.	Bc.^{MM} Vlastimil Dort	2.	11											11
	Bc.^{MM} Dávid Vendel	3.	11											11
27–28.	Bc.^{MM} Klára Holková	3.	10											10
	Bc.^{MM} Zuzana Terešková	1.	10		0	2	0					0	2	10
29.	Prof.^{MM} Jan Musílek	4.	225											9
30–31.	Dr.^{MM} Martin Výška	3.	69		1	3	1				3	0	8	8
	Mgr.^{MM} Jakub Marian	4.	26											8
32–34.	Dr.^{MM} Marek Pecha	2.	55											7
	Mgr.^{MM} Klára Krejčíčková	4.	23											7
	Stanislav Fořt	1.	7											7
35–36.	Mgr.^{MM} Pavla Zárubová	3.	26	2			1					0	3	6
	Tomáš Volf	1.	6											6
37–39.	Bc.^{MM} Martin Volf	1.	15											5
	Jiří Harasim	4.	5											5
	Martina Vaváčková	2.	5											5

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
40–42.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10											4
	Jana Břízová	2.	4			3	1					0	4	4
	Kateřina Honzáková	2.	4		0	3	1					0	4	4
43–44.	David Bambušek	2.	3											3
	Petra Zahajská	1.	3		1		0					0	1	3
45.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	2.	17											1
46.	Aleš Růžička	4.	0											0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.