M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník XIV číslo 4

Termín odeslání: 29. 2. 2008

Ahoj kamarádi a kamarádky,

Máme tu potenciálně nejchladnější období v roce, statisticky … Letošní zima nám ukazuje, že opravdu jen statisticky. Teplo je asi jako v březnu, kvítka raší, o zimních sportech si můžeme leda nechat zdát, nebo jet do Alp. Snad vám toto období alespoň trochu zpříjemníme dalším číslem časopisu M&M.

Vaše redakce

Zadání úloh

Úloha 4.1 – Nedotýkajte sa drôtov ani na zem padlých (3b)

Výstražné cedule s týmto textom vidíme všade okolo. Čo by sa ale stalo, ak by drôt vysokého napätia spadol na zem? Predstavte si, že na veľmi dlhom úseku (teda tvorí prakticky priamku) leží drôt s napätím 100 kV. Ako sa môžeme okolo neho pohybovať, ak nechceme, aby našim telom prechádzal väčší striedavý prúd ako povoľuje norma ČSN 33 2000-4-41, čo je 3,5 mA? Všetky ďalšie potrebné údaje odmerajte, odhadnite, či inak zistite. (Za dobré prevedenie tejto časti úlohy môžete rozhodne očakávať nejaké tie body naviac.)

Úloha 4.2 – Koberec do pokoje pro matfyzáky (5b)

Martin s (R)adimem by si chtěli vylepšit svůj pokoj na koleji kobercem.

Dlouhodobým pečlivým pozorováním zjistili, že nejčastěji chodí od počítače v jednom rohu k lednici v protějším rohu a odtud nazpět (pochopitelně tou nejkratší cestou – po uhlopříčce).

A protože to jsou pohodlní matfyzáci, kterým se nechce vysávat velký koberec, rozhodli se, že kobercem pokryjí jen metr široký pás, kterým chodí nejčastěji.

Když ale přišli do obchodu a řekli, že mají pokoj veliký $3\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ a že chtějí koberec $1\,\mathrm{m}$ široký a dlouhý tak akorát, aby se jim do pokoje vešel (a nemuseli uřezávat rohy), prodavač zbledl, zavřel obchod, vytáhl tužku, papír a začal počítat. Ať se prý pánové za 2 měsíce zastaví.

Pomůžete mu zjistit délku koberce?

Úloha 4.3 – Funkce špulec (4b)

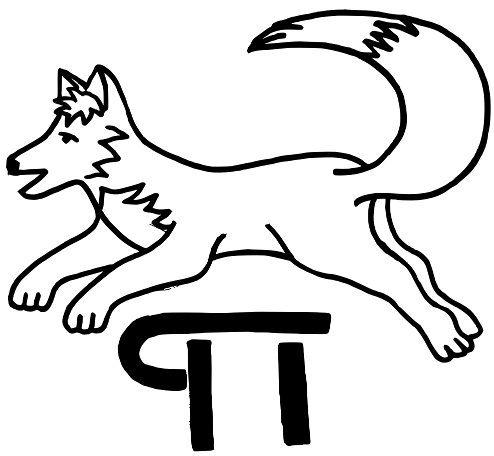
Funkce špulec (řecky *ksí*) je definována takto:

$$\xi(1) = 1$$
$$\xi(n+1) = (2^{\xi(n)} + \xi(n)^2 + \xi(n)) \,\mathbf{mod}\, 17$$

Zjistěte, kolik je $\xi(2^{3628800})$.

Úloha 4.4 – Zkumavky s jedy (3b)

Lišáček Riki se zatoulal do laboratoře šíleného chemika, který vynalezl dokonalý jed. Tento jed nelze pohledem ani čichem rozeznat od obyčejné vody. Riki zaslechl, že chemik má v úmyslu otrávit tímto jedem všechny jeho kamarády z M&M, a proto se rozhodl, že mu jed musí za každou cenu sebrat.



Našel 19 zkumavek, které jsou nerozlišitelné až na to, že ve dvou z nich je zmíněný jed, a ve zbylých voda. Jediný způsob, jakým jde zjistit, jestli je ve zkumavce jed, nebo voda, je pokusit se jejím obsahem něco otrávit. Tak začal Riki lovit místní myši. Pokud se myši podá jed, zmodrají jí oči. Pokud se myši podá voda, uteče, a už ji také nelze použít.

Kolik myší musí ulovit, aby mohl s jistotou zjistit, ve kterých zkumavkách je jed?

Řešení témat

Téma 4 – Barevná skla

K tomuto tématu zatím nepřišlo dost materiálů, které bychom mohli zveřejnit. Nevíte, jak na to? Nepochopili jste zadání a co máte zkoumat? Nebojte se napsat, pokud vám je něco nejasné.

Jindra

Téma 5 – Dysonova sféra

K tomuto tématku se nám sešlo několik zajímavých příspěvků. Mgr.^M^M František Steinhauser ve svém příspěvku zmínil několik zajímavých podnětů na další diskusi: Jednak udává, že atmosféra může stabilně být jen z vnější strany, protože zevnitř by padala na hvězdu a musela by být držená pomocí nějakých „skleníků“[1]. Také píše, že Dysonovu sféru by bylo dobré vybudovat jen tak tenkou, že by měla vůči hvězdě zanedbatelnou hmotnost.[2] Zároveň si autor myslí, že by sféra měla rotovat, což by snížilo její mechanické namáhání, atmosféra by pak byla u rovníku řidší a širší a u pólů hustší. Další možností je pak, že Dysonova sféra bude tvořit elipsoid tak, aby bylo gravitační pole všude na povrchu zhruba stejné.[3] Na závěr František uvádí, že velkým problémem by mohl být přebytek energie, Dysonova sféra by se nestíhala chladit a roztavila se.

Silové poměry v Dysonově sféře a její atmosféra

Mgr.^M^M Marek Nečada

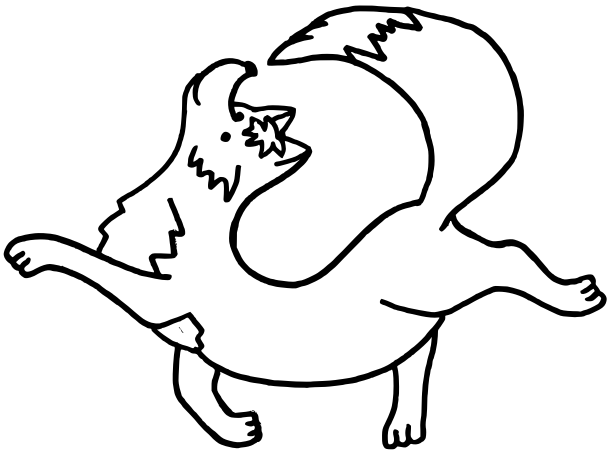
Silové poměry

Nejprve se podívejme, jak silově působí hvězda na Dysonovu sféru (DS). Co se týče gravitačního působení, za předpokladu, že se bude jednat o sféru s rovnoměrným rozložením hmotnosti, celková gravitační síla působená hvězdou na DS

[1] Vyplatí se to? Pokud je mnohem větší riziko úniku materiálu dovnitř oproti směru ven, není lepší mít naopak vnitřek co nejpevnější, aby se „neodlamoval“ a nehrozil únik hmoty směrem dovnitř?

[2] Pak bychom se ale museli nějak smířit s tím, že by gravitační zrychlení na ní bylo poměrně nízké. Třeba pro Slunce a DS ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky by činilo $0{,}00596\,\mathrm{ms}^{-2}$.

[3] Je to skutečně stav, kdy je sféra namáhána nejméně? Jak to, že např. Země má na rovníku jiné gravitační zrychlení než na pólu, i když hladina moře je na stejné hladině potenciálu? Co je podmínkou pro nejmenší namáhání? Aby byla sféra co nejníže ve svém gravitačním potenciálu, nebo aby měla konstantní gravitaci?



(a naopak) bude nulová. (Homogenní kulová slupka působí na tělesa kdekoliv v ní umístěná nulovou gravitační silou.[4])

Gravitační síla však bude v DS způsobovat tlak. Předpokládejme, že materiál tvořící sféru má konstantní hustotu ϱ, vnitřní poloměr DS budiž r_1, vnější poloměr r_2. Dejme tomu, že hvězda o hmotnosti M je kulatá a je uzavřena přesně uprostřed DS. Na nekonečně tenkou vrstvu o hmotnosti $\mathrm{d}m$ připadá přírůstek tlaku o velikosti

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{g}} = \frac{g(x) \cdot \mathrm{d}m}{S(x)},$$

kde x je poloměr vrstvy, $S(x) = 4\pi x^2$ její povrch a $g(x)$ je velikost tíhového zrychlení ve vzdálenosti x od středu hvězdy. Hmotnost vrstvičky lze vyjádřit jako $\mathrm{d}m = \varrho S(x)\mathrm{d}x$.

Na hmotu DS působí tíhová síla hvězdy a sféry samotné; pro $r_1 \leq x \leq r_2$ platí:

$$g(x) = \kappa \frac{M}{x^2} + \kappa \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho(x^3 - r_1^3)}{x^2}$$

[4] Tento velice důležitý výsledek (který autor oprávněně považuje za dobře známý) se přímo z gravitačního zákona ukazuje poměrně těžko – pro lepší představu je zajímavé uvažovat takto: pokud jsem uvnitř homogenní sféry, působí na mne každý kousek jejího povrchu silou, která je přímo úměrná jeho velikosti a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Pokud si vezmu fixní prostorový úhel Φ a podívám se do libovolného směru, bude hmotnost, kterou pod tímto úhlem vidím úměrná čtverci vzdálenosti povrchu sféry (stejně jako podstava kužele vyťatého prostorovým úhlem Φ) – jenže stejně tolikrát (úměrně čtverci vzdálenosti) se mi síla snižuje kvůli tomu, že je hmota dál. Proto z každého směru působí síla se stejnou hustotou na daný prostorový úhel a síly ze všech stran se vyruší. Stejný problém se dá velice jednoduše vyřešit z tzv. Gaussovy věty, což je jedna ze základních vět vektorového diferenciálního počtu.

Velikost gravitací působeného tlaku na vnitřní povrch Dysonovy sféry je tedy

$$p_\mathrm{g} = \int_{r_1}^{r_2} \varrho\kappa \left(\frac{M}{x^2} + \frac{4}{3}\pi\varrho \frac{x^3 - r_1^3}{x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$p_\mathrm{g} = \varrho\kappa M(r_1^{-1} - r_2^{-1}) + \varrho^2\kappa \cdot \frac{2}{3}\pi(r_2^2 - r_1^2) + \varrho^2\kappa \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) ,$$

pro tenkou DS o poloměru r a tloušťce d lze užít příjemné aproximace:

$$p_\mathrm{g} \approx \frac{\kappa M \varrho d}{r^2}$$

Dalším způsobem, jakým hvězda silově působí na DS, je záření. Tlak záření bude působit opačným směrem než tlak způsobený gravitací. Pro energii fotonu platí známý vztah $E_\varphi = hf$. Pro jeho hybnost je pak

$$p_\varphi = hf/c = E_\varphi/c\,.$$

Předpokládejme, že každý foton je vnitřní stěnou zcela pohlcen a přeměněn na nějaký jiný druh energie. Stěně pak předá právě celou svou hybnost. (V případě, že dojde k odrazu, impuls síly působící na stěnu bude vyšší.) Odtud pak lze jednoduše odvodit velikost tlaku záření na vnitřní povrch sféry:

$$p_\mathrm{z} = \frac{P}{c} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2} ,$$

kde P je zářivý výkon hvězdy.

Mohlo by se zdát, že za určitých podmínek, pokud bychom užili dostatečně tenkého a lehkého materiálu, by tlak záření mohl vyvážit gravitační působení tak, aby neměl materiál tendenci hroutit se do hvězdy. Muselo by platit, že

$$\frac{\rho d\kappa M}{r^2} = \frac{P}{c} \cdot \frac{1}{\pi r^2} .$$

Pokud však dosadíme nějaké reálné hodnoty, uvažujme např. naše Slunce ($P = 3{,}85 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$, $M = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$) a hustotu materiálu 2000 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, zjistíme, že DS by musela býti tenká příliš:

$$d = \frac{P}{4\pi c\kappa M \varrho} \doteq 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Vyrobit tak tenkou strukturu, která by zároveň vydržela kosmické „povětrnostní vlivy," by byl asi nadmíru obtížný úkol i pro civilizaci velice vyspělou. „Uskutečnitelnější" se tedy jeví stavba tlusté, robustní struktury, která odolá gravitačnímu zhroucení díky své mechanické odolnosti a jež s sebou nese nepříjemně vysokou spotřebu materiálu.

Atmosféra

Atmosféra z vnitřní strany zřejmě býti nemůže, neb nebude u vnitřního povrchu sféry udržována gravitací[5]; nějaká hmota sice může být tlačena slunečním větrem, ale takto vzniklá „atmosféra“ bude *velice* řídká.

Vně sféry by se dala atmosféra uskutečnit. Řekněme, že bude tvořena ideálním plynem, pro nějž platí stavová rovnice $p \cdot \mathrm{d}V = RT \cdot \mathrm{d}n$ a teplota se s výškou nebude příliš měnit. Pro zjednodušení považujme gravitační intenzitu, jež plyn tlačí ke sféře, za nepříliš měnící se s výškou (dá se očekávat, že v poměru k poloměru DS je množství plynu v atmosféře malé).

Stavovou rovnici plynu je lze zapsat též jako

$$p \cdot \mathrm{d}V = RT \frac{\varrho \mathrm{d}V}{M} ,$$

kde M je pro změnu molární hmotnost plynu a ϱ jeho hustota.

Přírůstek tlaku v závislosti na rostoucí výšce h je

$$\mathrm{d}p = -\varrho g \mathrm{d}h ,$$

kde g je velikost (momentálně konstantní) gravitačního zrychlení. Hustotu lze ze stavové rovnice vyjádřit jako $\varrho = pM/RT$, takže můžeme psáti

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= -g\frac{pM}{RT}\mathrm{d}h \\ \int \frac{\mathrm{d}p}{p} &= \int -g\frac{M}{RT}\mathrm{d}h \\ p &= C \cdot \exp\left(\frac{-hgM}{RT}\right) , \end{aligned}$$

kde C je nějaká konstanta přímo úměrná množství dostupného plynu.

[5] Viz předchozí poznámka.

K úniku hmoty atmosféry nepochybně docházet bude, poněvadž je pravděpodobné, že některé částice dosáhnou únikové rychlosti následkem tepelných srážek, avšak nebude jich mnoho.

Na závěr uvádím několik námětů k dalšímu přemýšlení:

- *Mgr.*[MM] *František Steinhauser ve svém příspěvku podal mnoho návrhů, které by bylo potřeba prozkoumat detailněji. Pokud se rozhodneme, že na povrchu DS chceme mít jen takové gravitační pole, jaké tvoří hvězda (třeba kvůli úspoře materiálu), nevyplatí se ji přiblížit víc ke Slunci? Jak moc můžeme DS přiblížit ke Slunci, aby se nezačala tavit? Umíte odhadnout, jaká bude teplota na povrchu? Můžeme ji nějak ovlivnit volbou materiálu vnitřního a vnějšího povrchu sféry?*
- *Poměrně těžším oříškem je rotující sféra: má Fanda pravdu, že atmosféra bude u rovníku řidší a u pólu hustší? Jak se rozloží tlak ve sféře, pokud bude sféra rotující elipsoid? Vyplatí se, aby byla na některých místech širší a někde tenčí? (Uvažujte, že v tomto modelu je sféra tenká a nemusíte počítat její vlastní gravitační pole.)*
- *Jak na závěr Marek píše, k úniku částic do vnějšího kosmu dochází, ale mnohem pomaleji, než např. na Zemi. Umíte spočíst kolikrát pomaleji?*
- *Co kdybychom chtěli na povrch sféry instalovat zařízení, které přeměňuje sluneční záření na práci? Na jakém principu jej navrhnout? Jakou účinnost jsme schopni dosáhnout? Kolik energie za rok vyrobíme?*

Hlavně se nebojte na sebe navzájem reagovat, piště s čím souhlasíte a s čím ne. Jaká by byla vaše koncepce DS?

Irigi

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Trojice (4b)

Zadání:

Na vámi uspořádaný turnaj v Halmě (varianta skákané pro 3 hráče) se přihlásilo nečekaných 13 hráčů, což vám vše trochu zkomplikovalo. Chcete to zařídit tak, aby si spolu každí dva hráči zahráli alespoň jednou, ale zase nechcete žádné zbytečné partie – už takhle jich bude až až. Jak tedy vytvořit z 13 hráčů (neuspořádané) trojice tak, aby každá dvojice hráčů byla právě v jedné trojici?

Pro 7 hráčů jste to měli vymyšleno dopředu – rozlosovali byste jim čísla $1, 2, \ldots 7$ *a nechali byste je hrát takto:* $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 7)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 5, 6)$.

Bonusová otázka: dokážete pro oněch 13 najít i další schémata turnajů? Pokud u schématu turnaje jen přečíslujete hráče, bereme to jako stejné schéma. Schémata A a B se liší, pokud pouhým přečíslováním hráčů z A nelze vyrobit B.

Řešení:
Nejprve si spočítáme, kolik zápasů v Halmě musí hráči odehrát, aby byly splněny podmínky zadání. Nejprve si spočítáme počet všech dvojic ze vzorce

$$\binom{13}{2} = 78\,.$$

V jedné trojici spolu během jednoho kola hrají 3 dvojice $\binom{3}{2}$ Máme-li během turnaje použít všechny dvojice, budeme potřebovat 26 zápasů ($78/3 = 26$). Nyní musíme vytvořit trojice pro turnaj. Hráče si očíslujeme 1 až 13 a trojice začneme psát tak, že utvoříme trojice s hráčem 1 a všemi ostatními hráči, poté trojice s hráčem 2 a všemi ostatními, se kterými ještě nehrál. Takto pokračujeme až k poslednímu hráči. Výsledkem našeho snažení bude oněch 26 trojic, konkrétně například takto:

1	2	8	1	3	9	1	4	10	1	5	11
1	6	12	1	7	13	2	3	13	2	4	9
2	5	10	2	6	11	2	7	12	3	4	8
3	5	12	3	6	10	3	7	12	4	5	13
4	6	7	4	11	12	5	6	8	5	7	9
6	9	13	7	8	10	8	9	11	8	12	13
9	10	12	10	11	13						

Ostatní řešení dostaneme, když zpermutujeme čísla hráčů. Protože tím použijeme všechny možnosti, nelze utvořit jiné rozlosování, které by nevzniklo pouhým přečíslováním hráčů

Fíďa

Úloha 2.2 – Čerpadlo (4b)

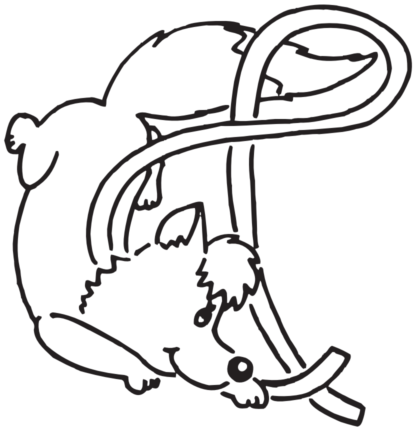
Zadání:
Máme čerpadlo s tlakovou nádobou. To funguje tak, že čerpá vodu do zásobníku tak dlouho, dokud tlak nedosáhne zvoleného vypínacího tlaku p_1. Poté se čerpadlo zastaví a odebíraná voda odtéká z tlakové nádoby. Ve chvíli, kdy tlak klesne na hodnotu p_2 ($p_2 < p_1$), zapne se opět motor čerpadla.

Tlaková nádoba je nádoba o nějakém objemu rozdělená pohyblivou přepážkou na část, do které se čerpá voda, a na část, ve které je uzavřeno nějaké množství vzduchu.

Máme teď takové čerpadlo, ve kterém není zatím žádná voda. Otázkou je, jaký tlak vzduchu zvolit v tlakové nádobě (bez vody), aby čerpadlo po dosažení tlaku p_1 dodalo co nejvíce vody, než se bude muset motor opět zapnout. Hodnoty zapínacího a vypínacího tlaku a objem tlakové nádoby jsou předem pevně dané.

Řešení:
Objem celé tlakové nádoby budiž V. Na začátku celý tento prostor naplníme vzduchem o hledaném tlaku p. Tento tlak musí být samozřejmě menší nebo

rovný tlaku p_2, jinak by čerpadlo mělo problém zapnout. Po načerpání nějaké vody do tlakové nádoby se tlak vzduchu za přepážkou (a tedy i tlak vody v nádobě – voda je nestlačitelná a jen přenáší tlak vzduchu na čidlo[6]) zvedne na hodnotu p_1 a motor se vypne. V tu dobu bude objem vzduchu V_1. Po vypuštění části vody vzroste objem vzduchu na hodnotu V_2 a jeho tlak klesne na p_2. V tu chvíli se motor opět zapne.



Naším cílem je maximalizovat rozdíl $(V_2 - V_1)$. Stlačování vzduchu se děje poměrně pomalu a navíc je vzduch v kontaktu s vodou a kovovými, dobře tepelně vodivými, stěnami nádoby. Budeme proto stlačování považovat za izotermické. Pokud navíc předpokládáme, že vzduch je ideální plyn, což je v tomto případě dostatečně dobré přiblížení, platí, že součin tlaku a objemu je konstantní. Tedy

$$pV = p_1V_1 = p_2V_2$$

a hledaný rozdíl bude

$$V_2 - V_1 = pV\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) .$$

Rozdíl v závorce je pevně daný, stejně tak objem V. Zbývá hodnota p, kterou bychom chtěli co největší. Jediným omezením bude zapínací tlak čerpadla.

Můžeme tedy říct, že je vhodné zvolit tlak co nejbližší zapínacímu tlaku čerpadla p_2 (ale menší, než tento tlak). S ohledem na možné zvýšení tlaku vzduchu při vyšší okolní teplotě bychom v reálném případě ještě měli nechat nějakou rezervu, ale i tak budeme volit tlak blízký zapínacímu.

Marble

Úloha 2.3 – Lentilky (5b)

Zadání:

Riki dostal k svátku hromadu (N) lentilek, a rozhodl se s nimi hrát následující hru: narovná lentilky do řady a hrozně dlouhým rozpočítadlem, ve kterém vždycky udělá nějakou chybu, si jednu vybere (tj. vybere náhodně). Sní pak všechny lentilky, které jsou za tou, kterou vybral (pokud to bude ta poslední v řadě, nesní žádnou). A pak pokračuje znovu, dokud mu nezbude jediná lentilka. Tu hodí někomu do kofoly. `:-)` *Kolikrát bude Riki průměrně rozpočítávat v závislosti na N?*

Řešení:

Nechť a_n je průměrný počet rozpočítání při počátečním počtu n lentilek. Mějme tedy n lentilek. Může nastat celkem n různých jevů. Každý tento jev odpovídá

[6] Předpokládejme, že tlakové čidlo je ve stejné výškové úrovni jako zásobník, případně že tlaky jsou již přepočítány na tlak v zásobníku.

stejné úloze, jako jsme měli na začátku, akorát s jiným počtem lentilek. Po prvním rozpočítání může zůstat 1 až n lentilek. Průměrný počet rozpočítání je tedy

$$a_n = \frac{1}{n}\left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1\right) + 1\,.$$

(Jedničku jsme přičetli za to, že jsme právě provedli jedno rozpočítání.) Tento výraz upravíme na normální tvar

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)\,.$$

Dostaneme:

$$a_n = \frac{1}{n-1}\left(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{n}{n-1}$$

Dosazením za a_{n-1} dostáváme:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n-1}\left(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-2}\left(a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{n-1}{n-2} + a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n-2}\left(a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{n-1}{n-2}\right) + \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-2}\left(a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Opakovaným dosazováním za $a_{n-2}, \ldots, a_2$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n-3}\left(a_{n-3} + \ldots + a_1\right) + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + 1 \\ &\ \vdots \\ &= \frac{1}{1}a_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + 1 \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$(a_1 = 0)$

Angwin

Úloha 2.4 – Přednáška (2b)

Zadání:

Když jsem si jednou v menze sedal ke stolu, slyšel jsem, jak se mí kamarádi Adam, Bohuš, Cyril, Dalimil a Eduard bavili. Zaslechl jsem však pouze konec rozhovoru.

Adam: „Na Karlově.“
Bohouš: „Ale ne, v Karlíně.“
Cyril: „Rozhodně v Tróji.“
Dalimil: „Já si jsem jistý, že na Malé Straně.“

Eduard: „Jste padlí na hlavu? Jedině v Hostivaři!“

Když jsem se jich zeptal, kde máme následující přednášku, dostal jsem tyto odpovědi:

Adam: „Já nebo Bohouš jsme to před chvilkou říkali.“

Bohouš: „Pokud Cyril mluví pravdu, tak minimálně tři z nás mluví pravdu.“

Cyril: „Adam a Bohouš lžou.“

Dalimil: „Místo příští přednášky říkal někdo, kdo mluví pravdu.“

Eduard: „Cyril mluví pravdu.“

I když tomu možná nevěříte, jsou dva druhy matfyzáků. Jedni mluví pořád pravdu a jedni pořád lžou.

Já už své spolužáky znám a díky tomu můžu jednoznačně určit, kam mám jít na příští přednášku. Víte to i vy?

Malé upozornění: U tvrzení typu „Na MatFyzu“ nemůžeme určit, zda je pravdivé či nikoliv, pokud přesně neznáme souvislosti se kterými bylo zmíněno.

Řešení:

Prvním důležitým krokem bylo, uvědomit si, že konec rozhovoru, který vypravěč této úlohy zaslechl na začátku, může popisovat cokoliv, třeba to, kde mají pohodlné židle. Proto nemůžeme rozhodnout o pravdivosti výroků (i když by se o pohodlnosti židlí dalo dlouze diskutovat `:-)`) a proto neplatí, jak se někteří z vás domnívali, že pravdu může mluvit pouze jeden.

Pokud jste prohlédli tuto podlost, můžete směle přejít k řešení. Nejdříve zkusíme odhadnout kdo je pravdomluvec a kdo je lhář. Z tvrzení Adama nemůžeme zatím o pravdomluvnosti ostatních nic určit. Bohouš nám říká, že Cyril $\Rightarrow$ alespoň tři mluví pravdu. Cyril tvrdí, že $\neg$ Adam $\wedge$ $\neg$ Bohouš. O Dalimilovi nemůžeme zatím říci nic bližšího. Pokud Eduard říká, že Cyril mluví pravdu, znamená to, že Eduard $\Leftrightarrow$ Cyril.

Nyní zkusíme rozebrat jak úloha závisí na tom, zda Cyril mluví pravdu. (Pokusíme se najít takové kombinace pravdomluvnosti a lhaní jednotlivých zúčastněných tak, aby to nebylo v rozporu s tím, co říkali.)

Pokud Cyril mluví pravdu, tak i Eduard mluví pravdu. Adam a Bohouš potom musí být lháři, což z Bohoušova výroku značí, že pravdu můžou mluvit nanejvýš dva a proto Dalimil musí lhát. Jinou možnost zde již nenajdeme.

Pokud by Cyril lhal, tak je situace trochu složitější. Eduard taky lže (stejně jako Cyril). Bohoušova implikace, která vychází z nepravdy musí být vždy pravdivá[7], Bohouš tedy mluví pravdu, ale z jeho výroku nemůžeme dále nic vyvodit. O tom, zda Adam a Dalimil jsou pravdomluvci či lháři zatím nemůžeme rozhodnout. Vnímavý čtenář si možná všiml, že pokud Cyril lže, tak máme pevně zafixovaného Bohouše, Cyrila a Eduarda. O tom, jak je to s Adamem a Dalimilem nic nevíme a musíme tak vyzkoušet všechny možnosti.

[7] Pravdivostní tabulka pro implikaci je

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \Rightarrow B$	1	0	1	1

Nyní nám vyhovuje 5 rozdělení lhářů a těch, kteří mluví pravdu. Pro přehlednost si to zapíšeme do tabulky („1“ budeme značit, že dotyčný mluví pravdu, a „0“ budeme značit, že lže).

Situace:	„a“	„b“	„c“	„d“	„e“
Adam	0	0	1	0	1
Bohouš	0	1	1	1	1
Cyril	1	0	0	0	0
Dalimil	0	0	0	1	1
Eduard	1	0	0	0	0

Nyní si rozebereme jednotlivé situace. V tuto chvíli pro nás již budou hlavně zajímavé výroky Adama a Dalimila. Také bychom neměli zapomínat na „omezení“ ze zadání, že místo umíme určit jednoznačně.

Situace „a“: Dalimil lže, tudíž místo musel říkat někdo, kdo lže. Adam a Bohouš to být nemůžou, protože o Adamovi předpokládáme, že lže a takhle by mluvil pravdu, což by byl spor. Takže místo říkal Dalimil a přednáška tedy bude na Malé straně.

Situace „b“: Dalimil lže, místo říkal někdo, kdo lže. Ale to může být Cyril, Dalimil a Eduard. (Adam, to být nemůže, protože by mluvil pravdu.) V tomto případě tedy nemůžeme rozhodnout, kde bude přednáška a proto tuto situaci už nemusíme uvažovat.

Situace „c“: V této situaci snadno dospějeme ke sporu, protože podle Adama místo říkal on, nebo Bohouš, ale Dalimil nám zase říká, že místo označil lhář. Což je spor a proto tuto situaci taky nebudeme dále uvažovat.

Situace „d“: Budeme se řídit opět Dalimilem, který nám říká, že místo označil on, nebo Bohouš. Kdyby však místo označil Bohouš, nemohl by Adam lhát. Takže místo označil Dalimil a opět dostáváme, že přednáška bude na Malé Straně.

Situace „e“: Jak možná již tušíte i zde zjistíme, že nemůžeme jednoznačně určit, kde se má přednáška konat. Dalimil nám napoví, že místo říkal on, Adam nebo Bohouš. Adam nám pak pomůže pouze tím, že nám zmenší okruh potenciálních míst na dvě (Karlov, jak říkal on, nebo Karlín, jak říkal Bohouš).

A protože bychom nezvládali být najednou na Karlíně a na Karlově, tak tuto situaci také vyloučíme.

Konečně tak zjišťujeme, že jednoznačně musí být přednáška na Malé Straně.

(R)adim

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t3	t4	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy									
1–3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	2.	69		4		2				1	7	31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Steinhauser	2.	31		2	5	2		1	3	2	15	31
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec	3.	31										31
4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	3.	166	3	0	1	2				0	6	27
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek	1.	23										23
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa	2.	22		4		2				1	7	22
7–8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	3.	35										21
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná	3.	21	3		1	0				0	4	21
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková	1.	19										19
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	4.	26		4	5	1			8	0	18	18
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lada Peksová	2.	17										17
12–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	66	3		1	2				2	8	16
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	3.	53			5					0	5	16
14–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Bogár	2.	24										15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová	3.	15										15
16–17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Bílková	3.	14			5	2				0	7	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Lux	1.	14										14
18–19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	3.	29	2	1						0	3	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Milan Bartoš	3.	13		0		2				0	2	13
20–22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	3.	26	2	3	2	0				0	7	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Bartoněk	1.	12	2	0	1	2				1	6	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel	1.	12										12
23–24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlastimil Dort	2.	11										11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dávid Vendel	3.	11										11
25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Holková	3.	10	3	3	1					0	7	10
26.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	4.	225										9
27–30.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	4.	26										8
	Lenka Havelková	1.	8	2							0	2	8
	Tomáš Kubelka	1.	8										8
	Zuzana Terešková	1.	8	0			0				0	0	8
31–33.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	2.	55										7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	4.	23										7
	Stanislav Fořt	1.	7			2					0	2	7
34.	Tomáš Volf	1.	6										6
35–37.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	15										5
	Jiří Harasim	4.	5	3			2				0	5	5
	Martina Vaváčková	2.	5	3			2				0	5	5
38.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Baxová	2.	10					4				4	4

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t3	t4	t5	+	$\sum_0$	$\sum_1$
39–40.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Pavla Zárubová	3.	23	0			1				0	1	3
	David Bambušek	2.	3										3
41.	Petra Zahajská	1.	2										2
42.	Bc.$^{\text{MM}}$ Peter Smolárik	2.	17										1
43.	Aleš Růžička	4.	0										0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R." je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+" značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.