Studentský matematicko-fyzikální časopis
**ročník XIV číslo 3**

**Termín odeslání: 31. 12. 2007**

Ahoj kamarádi a kamarádky,

konečně jste se dočkali třetího čísla našeho časopisu, a s ním i prvních řešení témátek. Než se pustíte do čtení a řešení, rádi bychom vás pozvali na den otevřených dveří na MFF UK, který se bude konat v úterý 27. listopadu. Tam můžete vyslechnout různé zajímavé přednášky, podívat se na všemožné fyzikální aparatury a setkat se se spoustou zajímavých lidí.

*Vaši organizátoři*

# Zadání úloh

## Úloha 3.1 – Perioda kyvadla (5b)

Změřte, jak závisí frekvence kyvů kyvadla (kyvadlo je jakýkoliv pevný předmět upevněný tak, že se může otáčet kolem osy, která neprochází jeho těžištěm) na amplitudě kyvů. Jak vypadá výsledek pro různé tvary, hmotnosti a upevnění kyvadla.

Zkuste také najít vhodnou analytickou závislost, která vystihuje naměřená data.

## Úloha 3.2 – Ovečky v kruhu (4b)

Máme uzavřený kruh s 13 (případně obecně $n$) pozicemi.[1] Na každé z pozic kromě jedné sedí jedna ovečka. Na poslední je hladový vlk, který v každém kroku udělá náhodně pohyb o jednu pozici doprava nebo doleva. Pokud je ještě na pozici nějaká ovečka, vlk ji sežere. Jakmile vlk zbaští 11 (resp. $(n-2)$) ovcí, nabaží se, a pojde. Která ovečka má největší šanci na přežití? (Respektive jaká je její vzdálenost od vlka.)

## Úloha 3.3 – 1 proti 100 (3b)

Není to tak dávno, co běžela v televizi vědomostní soutěž 1 proti 100. Hráč a zároveň 100 jeho soupeřů/diváků dostalo v každém kole jednu vědomostní otázku s odpověďmi a až c (stejnou otázku pro všechny hrající hráče v tom kole).

[1] Každá sousedí se dvěma sousedními `:-)`.

Hráč mohl přemýšlet nad odpovědí, jak dlouho chtěl, měl několik možností záchrany, a také volil, zda další otázka bude snadná nebo obtížná. Každý jeho soupeř/divák měl na odpověď jen asi 10 s, a první špatná odpověď jej vyřadila definitivně ze hry.

Hráč, poté, co řekl správnou odpověď na otázku daného kola, dostal finanční odměnu rovnou počtu soupeřů v tomto kole vyřazených vydělenou počtem všech hrajících soupeřů na začátku kola vynásobenou částkou půl milionu. Takže, pokud hned na začátku vyřadil kompletně všech 100 hráčů, dostal odměnu $100/100 \cdot 500\,000$ Kč.

Pokud v prvním kole hráč vyřadil řekneme 42 soupeřů, získal $42/100 \cdot \cdot 500\,000$ Kč $= 210\,000$ Kč a do dalšího kola „přežilo" 48 soupeřů, takže pokud jich v dalším kole vyřadil třeba 15, získal k částce kterou již měl dalších $15/48 \cdot 500\,000$ Kč $= 156\,250$ Kč.

Hrálo se do doby, než hráč vyřadil všechny své soupeře nebo odpověděl špatně (v tom případě odcházel bez koruny). Jednou za hru mohl hráč využít bonusu, a zařídit to, aby se v příštím kole jeho zisk za poražené soupeře v tom kole násobil dvěma.

Vaším úkolem bude zjistit, jakou maximální hotovost musela mít televize připravenu pro hráče, a v jakém případě mohlo nastat, že si ji hráč odnese.


## Úloha 3.4 – Cestování po Zemi (2b)

Mějme místo na Zemi, ze kterého vyrazíme, půjdeme přesně 100 km na jih, potom přesně 100 km na východ a nakonec 100 km na sever, a dorazíme zpět na původní místo. Odkud jsme vyrazili? (Upozorňujeme, že jedno řešení nám nestačí. Najděte všechna!)

Poznámka: Zemi můžete považovat za dokonalou kouli s poloměrem odpovídajícím skutečné Zemi. Jít na jih, resp. sever znamená jít po poledníku, na kterém se vyskytuji směrem k jižnímu, resp. severnímu pólu. Jít na východ znamená jít východním směrem po rovnoběžce, na které se právě vyskytuji. Ze severního pólu se dá jít pouze na jih, z jižního pouze na sever.

# Řešení témat

## Téma 1 – Střed Evropy

K tomuto tématku nám přišly zatím čtyři příspěvky. Ve třech z nich autorky (Bc.[MM] Alena Bušáková, Lenka Havelková a Zuzana Terešková) shrnují informace, které nalezly na internetu a v literatuře, ve dvou Zuzana Terešková a Bc.[MM] Lukáš Zavřel přímo počítali polohu středů Evropy podle jednotlivých definic.

Lukáš dospěl k tomu, že střed Evropy, jakožto bod, který má nejmenší vzdálenost od bodů, které jsou v Evropě nejvíce na severu, jihu, východě a západě, leží v Lotyšsku blízko Barentsova moře. Rovněž proměřoval těžiště Evropy jako desky pomocí olovnice a mapy vystřižené z papíru. Podle tohoto měření střed leží na hranici Běloruska a Litvy, velmi blízko Polska. V jaké je mapa projekci bohužel neuvádí.

Kromě toho také počítal „politický" střed Evropy, kterým je podle něj Německo: sousedí s nejvíce, tj. devíti, Evropskými státy. Dále dodává, že Maďarsko vyhrává zase z toho hlediska, že součet jeho vzdáleností od ostatních států Evropy je minimální.

Bc.[MM] Alena Bušáková zapátrala na internetu a nezávisle na autorce příspěvku níže zjistila, že jako průsečík přímek daných nejsevernějším a nejjižnějším a nejvýchodnějším a nejzápadnějším bodem Evropy vychází ukrajinské město Rachiv. Dále uvádí, že podle Francouzského geografického institutu je aktuálním „geografickým středem" Evropské unie (po vstupu Bulharska a Rumunska) město Gelnhausen v Německu. Stejný institut uvádí jako „geografický střed" Evropy (bohužel nespecifikují, co do ní zahrnují) litevské město Purnuskes, 26 km od Vilniusu. Cimrmanovský střed Evropy je pak v Havlíčkově Brodě. :-)

Lenka Havelková rovněž našla jako uváděný střed Evropy město Purnuskes, navíc dodává, že geografickým středem autoři myslí těžiště desky tvaru Evropy včetně Ruska. Také uvádí, že aritmetický průměr bodů nejvíce na severu, východě, západu a jihu Evropy je bod poblíž polského města Toruň. (Povšimněte si, že je to již třetí způsob získání středu ze znalosti čtyř nejvzdálenějších bodů!)

Všichni se vesměs shodují na tom, že jednoznačnou odpověď nelze nalézt.

Chtěl bych přidat několik postřehů a námětů k přemýšlení:

- Uvádějte, v jaké projekci je vámi použitá mapa – pokud totiž např. počítáte nebo měříte těžiště Evropy jako desky, závisí (i jinak přesný) výsledek na použité projekci – pokud nevíte, jaká to je, nedá se váš výsledek porovnat s výsledky jiných a značně ztrácí na hodnotě.
- Zkuste určit chybu měření. Číslo chyba, které se píše ve tvaru hodnota $\pm$ chyba, udává, že na 68,3 % bude skutečná hodnota uvnitř tohoto rozsahu. Nemusíte chybu určovat takto přesně nebo nějak přehnaně sofistikovaně, zkuste ale alespoň přibližně určit, jestli je vaše hodnota

$\pm 100$ km, nebo $\pm 10$ km. Také by vám mohl pomoci článek o chybách měření z prvního čísla.

- Nezapomeňte, že na sebe můžete reagovat. To, že zopakujete měření/výpočet, který už provedl někdo před vámi neznamená, že váš výsledek nemá cenu posílat! Naopak, svým měřením předchozí výsledek můžete potvrdit, nebo naopak diskutovat, proč se liší.

## Střed Evropy

*Zuzana Tereškov*á

Problém definice:

1. Bod s nejmenší vzdáleností od nejvzdálenějšího bodu náležícího Evropě (bod na pevnině/bod na ostrovech).
2. Těžiště desky tvaru Evropy.
3. Těžiště desky tvaru Evropy se zahrnutím zakřivení povrchu Země.
4. Bod, ze kterého je průměrná vzdálenost do každého jiného bodu Evropy nejmenší.
5. Bod, který má nejblíže ke všem mořím a oceánům omývajícím břehy Evropy.
6. Některé definice neberou za Evropu Rusko.

Co považuji za Evropu?

a. Do Evropy počítám Rusko po pohoří Ural,
b. ostrovy, vyjímaje:
   $\alpha$. Island (geograficky už patří k Americe, k Evropě patří jen z důvodu politických),
   $\beta$. Azory,
   $\gamma$. Kanárské ostrovy (geograficky patří k Africe)
c. a samozřejmě pevninskou Evropu od nejzápadnějšího bodu v Irsku (Tearaght) po nejvýchodnější bod v severním evropském Rusku (ústí řeky Bajdaraty).

Nyní už tedy přejděme k tomu samotnému záhadnému Středu Evropy. Pokládám si otázku, ví vůbec někdo jistě kde vlastně je? Jak jsem zkoumala různé knihy a stránky na internetu, narazila jsem na několik naprosto odlišných lokalit, kde by se mohl vyskytovat. Zde jsou alespoň některé z nich:

V Česku: Číhošť, Břežany nad Ohří, vrch Kohout u Benešova nad Černou, Třebíč, Kouřim, vrch Melechov u Havlíčkova Brodu, Znojmo, Žďár nad Sázavou.

V Německu: Mittelpunkt Europas (nedaleko vrchu Dyleň v ČR), v Hildweinsreuthu u Flossenbürgu, v Kleinmaischeidu u Neuwiedu.

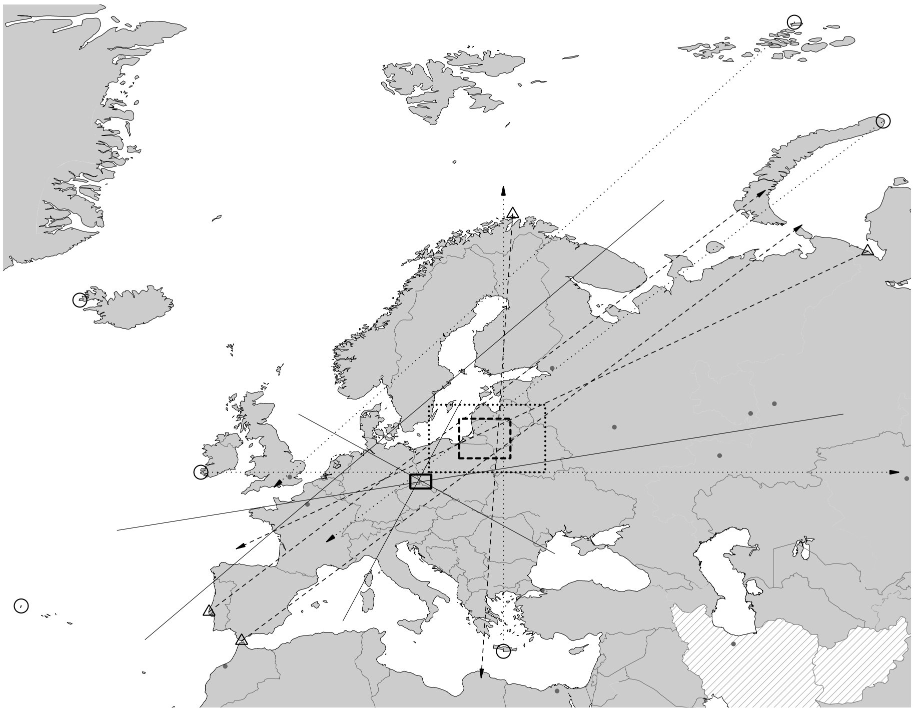
V jiných zemích:

*Slovensko* – kostel sv. Jána nad obcí Krahule, Kremnické Bane u Kremnice,

*Ukrajina* – u města Rachiv,
*Polsko* – Suchowola,
*Litva* – v obci Purnušes u Vilniusu,
*Bělorusko* – jezero Šo.

Vzhledem k tomu, že těch tzv. středů je opravdu mnoho, rozhodla jsem ho najít sama. Vyzkoušela jsem alespoň nějaké z definic:

1. podle nejvzdálenějších bodů Evropy na ostrovech;
2. podle nejvzdálenějších bodů Evropy na pevnině;
3. podle moří a oceánů obklopujících Evropu.



Obr. t1.1 – Grafické určení středu Evropy. *Pozn. red.: mapový podklad je mapa světa v Millerově válcovém zobrazení*[2]*; zdroj https://www.cia.gov/library/publications/ /the-world-factbook/reference_maps/time_zones.html.*

Mé pokusné měření, jak vidíte na přiložené mapě,[3] není přesné, ale můžeme z něj vyčíst alespoň něco.

[2] V tomto zobrazení se souřadnice na povrchu Země ($\lambda$ a $\varphi$) přepočítavají do roviny podle vztahu $x = \lambda$, $y = 1{,}25 \ln(\mathrm{tg}(\pi/4 + 0{,}8\varphi/2))$.

[3] *Pozn. red.: Původní barevný obrázek byl redakčně upraven vzhledem k technickým omezením při tisku.*

a. Dle první definice jsem získala lokalitu (na mapě ohraničena tečkovaným obdélníkem) zahrnující Litvu, Polsko, Bělorusko a kus Lotyšska, podle „zeměpisců“ uvádějících svá díla na internetu by to mohlo být hned několik míst – Vilnius, Suchowola, Šo.
b. Dle druhé definice jsem získala lokalitu (na mapě ohraničeno čárkovaným obdélníkem) opět těchto 4 států jako v bodě a. ale s menšími rozměry . . .
c. Dle třetí definice jsem získala lokalitu (na mapě ohraničenou plným obdélníkem) zahrnující kus České Republiky, severovýchodního Německa a severozápadního Polska – mohlo by to tedy být nějaké místo na hranicích ČR, Německa a Polska.

Vysvětlivky k mapě:

- Tečkované polopřímky vedou z nejvzdálenějších bodů na ostrovech náležících Evropě.
- Čárkované polopřímky vedou z nejvzdálenějších pevninských bodů náležících Evropě.
- Plné čáry spojují moře a oceány obklopující Evropu.
- Trojúhelníky a kružnice označují nejvzdálenější body Evropy na pevnině, resp. na ostrovech – z některých také vychází čáry. Ty místa, ze kterých čáry nevycházejí náleží sice Evropě, ale já je za Evropu nepokládám (viz výše).

Dle mých úvah a pokusů jsem došla k závěru, že střed Evropy není jen jeden, ale je jich hodně, a záleží to pouze na definici, takže, ač se mi to zdá nemožné, jeden jediný střed Evropy dle mého názoru prostě neexistuje.

*Irigi*

## Téma 2 – Opilý hasič

Z doručených riešení vyberám s minimálnymi úpravami nasledujúci článok a krátky úryvok od iného autora za ním. Pozorne si prečítajte všetky poznámky v článku a na konci textu.

### Kam stříká hasič?

*Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Töpfer*

V tomto článku se budu zabývat tvarem trajektorie vytvořené vodou stříkající z hasičského auta. Nejdříve se pokusím určit nějaké obecné rysy, které křivka musí splňovat, a poté odvodím vztah pro závislost vzdálenosti, do které voda dostříkne na úhlu, pod kterým stříká. Na závěr použiji tento vztah pro nakreslení grafu možných vzdáleností s konkrétně zvolenými hodnotami.

#### Tvar křivky

Auto se pohybuje stálou rychlostí, můžeme tedy předpokládat, že v každém okamžiku je o kousek dále než v okamžiku předešlém. Proto se nakreslená čára nemůže křížit.[4] Na nakreslení kličky by totiž bylo nutné, aby tryska byla vícekrát na stejném místě a stříkala pod různými úhly. Také platí, že voda tryská z auta neustále, v každém okamžiku tedy dopadá těsně vedle místa, kam dopadala před malou chvilkou. Proto bude výsledná křivka spojitá.[5] Navíc rozhodně existuje nějaká nejdelší vzdálenost, kam může voda dostříknout. Je teda možné popsat křivku[6] parametricky.

## Jak daleko voda dostříkne

Označme si výšku auta $h_0$, počáteční rychlost stříkající vody $v_0$ a úhel, pod kterým voda stříká $\alpha$. Uvažujme nyní pohyb každé kapičky vody. Jedná se o šikmý vrh, počáteční rychlost se tedy rozdělí do dvou složek ve směru os $z$ a $y$.[7] Ve směru osy $z$ navíc působí ještě tíhová síla. Pro souřadnice $y$ a $z$ každého bodu $A$, ve kterém je kapka v čase $t$, tedy platí: $y_A = v_0 t\cos\alpha$ a $z_A = h_0 + v_0 t\sin\alpha - 1/2gt^2$. Při dopadu kapky ve vzdálenosti $d$ od cesty[8] v čase $t_d$ bude tedy platit: $d = v_0\cos\alpha t_d$ a $0 = h_0 + v_0 t_d\sin\alpha - 1/2gt_d^2$. Z druhé rovnice vyjádříme čas. Vyjde nám kvadratická rovnice se dvěma kořeny. Jeden z nich je ale vždy záporný, proto se jím nebudeme zabývat, a druhý dosadíme do rovnice první. Tak dostaneme výsledný vztah pro vzdálenost dopadu kapky od cesty.

$$d = v_0\cos\alpha\frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin\alpha^2 + 2gh_0}}{g}\,.$$

Nyní se můžeme pokusit odpovědět na otázku, jestli může voda dopadnout do stejné vzdálenosti při různě velkém úhlu $\alpha$. To se ale z tohoto vzorce určuje poměrně obtížně. Pokud bychom pro zjednodušení položili $h_0 = 0$, tak ho můžeme upravit na tvar

$$d_0 = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

---

[4] *Pozn. red.: Je to skutečně pravda? Napríklad Bc.$^{MM}$ František Steinhauser, alebo Mgr.$^{MM}$ Josef Tkadlec si myslia niečo iné (ani jeden z nich to však nepodložil matematicky).*

[5] *Pozn. red.: Vhodnejšie toto tvrdenie formuluje napríklad Dr.$^{MM}$ Ladislav Bačo, keď tvrdí, že vzdialenosť dopadu vody je spojitou funkciou spojito premenlivého uhlu otočenia $\alpha$, a teda krivka tvorená dopadajúcou vodou je spojitá.*

[6] *Pozn. red.: Autor pôvodne hovoril o funkcii, ale to v tomto prípade nebude správny výraz.*

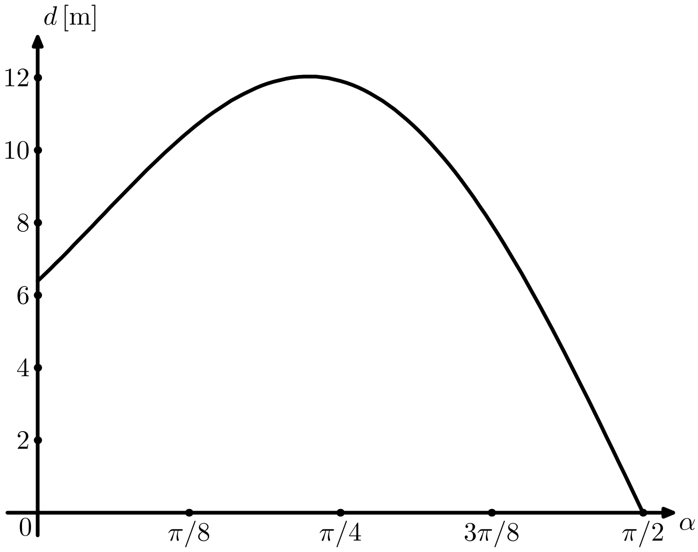
[7] teda „nahor“ a „do poľa“, v smere osi $x$ sa hýbe auto; priamka $y = z = 0$ je vlastne cesta.

[8] *Pozn. red.: Autor pôvodne nesprávne tvrdil, že vzdialenosť $d$ meria od auta. Neuvádza ale od ktorej polohy, či od polohy v ktorej došlo k vystreknutiu vody, alebo od polohy v čase dopadu vody. Preto som nahradil vzdialenosť od auta vzdialenosťou od cesty, ktorú ďalej počíta.*

Zde je již patrné, že například pro elevační úhel $30°$ i $60°$[9] vyjde vzdálenost stejná. Stejná vzdálenost pro dva různé úhly $\alpha$ může vyjít i u prvního (nezjednodušeného) vzorce. To si ukážeme na grafu.

## Jak závisí vzdálenost na natočení trysky

Protože vzorec pro vzdálenost, do které kapky dopadnou, je poměrně složitý, zvolíme si nějaké vhodné konstanty a zkusíme si celou situaci vyjádřit graficky. Zvolme $v_0 = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $h_0 = 2\,\mathrm{m}$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Nyní můžeme sestrojit graf závislosti $d(\alpha)$.




Obr. t2.1 – Závislost vzdálenosti dopadu na počátečním úhlu.

Na tomto grafu už snadno uvidíme, že pro dva různé úhly $\alpha$ můžeme dostat stejnou vzdálenost dopadu kapky $d$. Z křivky, kterou za sebou hasič zanechává, tedy nemůžeme určit natočení trysky s výjimkou nejdelší možné vzdálenosti, která vychází pro $\alpha$ velké přibližně 0,703, což je asi $40{,}3°$[10].

Tvar čáry tvořené stříkající vodou lze specifikovat jako spojitou parametrickou křivku. Dále jsem odvodil vztah pro vzdálenost, do které voda dostříkne. A na závěr jsem ukázal, že podle tvaru křivky nelze určit, jak byla tryska na autě natočena.

[9] *Pozn. red.: Ako tvrdí napr. Doc.^M^ Alžběta Pechová, jedná sa obecne o uhly* $\alpha$ *a* $\pi/2-\alpha$*, ale aj to platí len pre zjednodušený prípad nulovej výšky auta.*

[10] *Pozn. red.: Pozor, táto hodnota je závislá na zvolenej výške auta* $h_0$*, preto nie je očakávateľných* $\pi/4$.

## A přeci se kříží

*Mgr.[MM] Josef Tkadlec*

Zde je důležité uvědomit si jednu věc. Můžeme považovat jedoucí vůz za vztažnou soustavu (tedy za nehybný) a terén za „ubíhající". Postavíme-li se bokem ke směru jízdy, budeme mít proud vždy přímo před sebou. Aby se stopa mohla překřížit, musí jednu takovou kolmici protnout dvakrát. To, že krajina ubíhá (auto jede) se dá charakterizovat i tak, že co dopadne dřív „uteče". Naše otázka tedy je, zda umíme v různé časy vystříknout dva různé proudy vody tak, aby dopadly v témž okamžiku. To dozajista umíme – nejdřív proud vody pod strmým úhlem a vzápětí pod mírným.

Zpět do představy neustále stříkající vody. Pokud úhel trysky rychle snížíme ze strmého na mírný, vznikne protnutí. Tento rychlý pohyb musí přejít přes úhel, při kterém voda doletí nejdál.[11] Pozor, tato podmínka je nutná, nikoliv postačující.

### Poznámky redakcie

Vyzerá to tak, že nám predchádzajúce dva článočky priniesli množstvo námetov na premýšľanie:

- Jedine na spojitosti čiary sa snaď zhodli všetci (ak zanedbáme efekty pozorovateľné v realite, ako je rozpad na kvapôčky a podobne).
- Tak ako je to s tým krížením? Môže sa čiara pretínať?
- Ak si myslíte, že je kríženie možné, potom nutnú podmienku navrhol Mgr.[MM] Josef Tkadlec. Ako ale znie podmienka postačujúca?
- Niektorí riešitelia tvrdia, že je možné vždy určiť uhol pod ktorým bola tá ktorá časť čiary vystreknutá. Mgr.[MM] Josef Tkadlec používa menej silné tvrdenie: „Pokud by se nám povedlo určit úhel pro jeden bod, dal by se z toho vyvodit úhel na celem úseku mezi protnutím, či maximální vzdáleností." Ktoré z ponúknutých tvrdení je pravdivé? Alebo je to nakoniec úplne inak?
- Vyzerá to tak, že článok Mgr.[MM] Jakuba Töpfera je plný redakčných poznámok. Obsahuje tiež elementárnu chybu, ktorej sa dopustila väčšina riešiteľov! Skúste navrhnúť minimálne nutné úpravy tak, aby sa proti nemu nedalo nič namietať.

*Jeffer*

# Téma 3 – Samopopisující věty

Dostali jsme od vás pár článků o samopopisujících větách plných originálních nápadů, ale i několik triviálních vět, jako „Tato věta (bohužel) neobsahuje čtyřicet dva vykřičníků!" či „Tato věta je psána v 19:09.". Obecně jste si všimli,

[11] *Pozn. red.: Autor pôvodne tvrdí $\pi/4$, ale to platí len pre zanedbanú výšku hasičského auta.*

že generovat negativní výroky nebo výroky popisující vlastnost téměř nesouvisející se strukturou, je až moc jednoduché. Zkuste se víc zaměřit na výroky pozitivní, popisující co nejjemněji strukturu věty.

Nejzajímavější jsou právě případy, kdy věta popisuje i samotný svůj popis tak, že skoro každá její změna zruší jeho platnost. Takových nám přišlo několik, většina byla zaměřena na počet jednotlivých souhlásek či cifer. Popsaný postup bohužel většinou fungoval jen pro konkrétní větu nebo byl příliš mlhavý a nepřesný („Budu se snažit o ...“). Jde tuto úlohu řešit obecněji (pro libovolně zadaný základ nebo omezení věty), nebo je vždy potřeba řešit jedinečný hlavolam?

Originální příspěvek zaslal Bc.[M] František Steinhauser. V jeho větě $V$ je délka každého slova dělitelná třemi a $V$ to o sobě prohlašuje. Toto samo o sobě sice přináší jen poněkud kostrbaté omezení slovníku, ale je to krok zajímavým směrem, který můžete zkusit rozvinout.

*Gavento*

# Řešení úloh

## Úloha 1.1 – 3D biliard (3b)

**Zadání:**

*Mějme kulečníkovou kouli v krychli. Může se volným pohybem odrazit od každé stěny právě jednou a poté se vrátit na stejné místo? Předpokládejte, že vše se odehrává ve stavu beztíže.*

**Řešení:**

### Nejjednodušší řešení

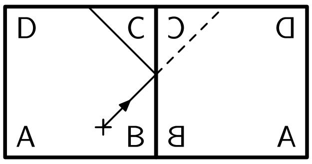
Stačí ji umístit na libovolné místo tělesové úhlopříčky a poslat ji „do rohu“. Tam se odrazí zpět, následně se ještě odrazí od druhého rohu a dostane se na místo odkud vylétla.

Na toto jednoduché řešení přišli skoro všichni. Úloha je však mnohem bohatší, a pokud jste se dostali pouze k tomuto, většinou jste ode mě tři body nedostali. Možná si říkáte: „Proč, vždyť je to správná odpověď?“ Ano, je, ale něco tam chybí – vysvětlení, proč by se měla koule odrazit v rohu právě do opačného směru, než přiletěla (což není triviální tvrzení, jak by se na první pohled zdálo). Postupně se k tomu dostaneme.

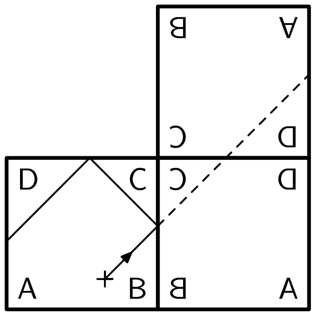
### Metoda zrcadlení

Velikost koule můžeme zanedbat a považovat ji za hmotný bod. Odraz koule od stěny splňuje zákon odrazu – koule zůstane v rovině dopadu a odrazí se pod stejným úhlem, jako přiletěla. Kdyby byly vnitřní stěny krychle zrcadla, mohli bychom dokonce nahradit tento hmotný bod paprskem světla a v zrcadlech bychom viděli, kam máme svítit – na zadní konec baterky nebo laseru. To je hlavní princip první metody.

Pro jednoduchost teď budeme brát 2D případ, lépe se nám bude kreslit a představovat. Na prvním obrázku máme zrcadlo pouze na pravé stěně čtverce.



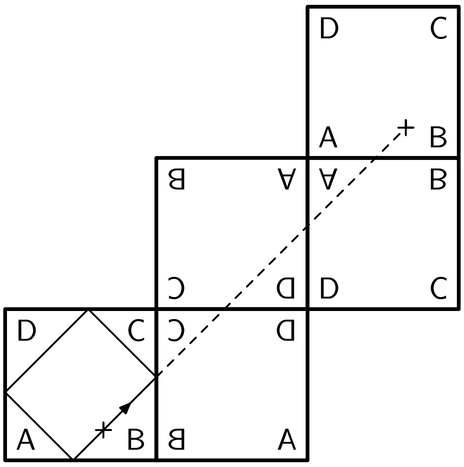
Obr. r1.1.1



Obr. r1.1.2

Rovinné zrcadlo věrně zobrazuje prostor, který je před ním, akorát jej zobrazí osově symetricky. Při pohledu do zrcadla se nám pak bude zdát, že paprsek se neodrazil, ale šel rovně, a následně narazil do horní stěny. Do druhého obrázku jsme přidali zrcadlo i na horní stěnu, paprsek se pak z našeho pohledu zastavil až na levé stěně čtverce. Nakonec přidáme i zbylá dvě zrcadla (při pohledu do zrcadla bychom pak mohli vidět sami sebe zezadu).

Na obrázcích jsem zvolil úhel, který svírá paprsek se stěnami, 45°. Jak k tomuto úhlu dojít pomocí metody zrcadlení? Z třetího obrázku je to jasné – zrcadlit čtverec můžeme i bez paprsku, a paprskem pak spojíme baterku a její obraz po čtyřech zrcadleních.



Obr. r1.1.3

Posledním krokem je převedení obrazu paprsku v zrcadlech do původního čtverce, což už není nic těžkého.

Všimněme si, že počátek (bod, z kterého vylétá paprsek) si můžeme zvolit naprosto libovolně. Podobný postup můžeme použít i v krychli, nakreslili bychom si pouze složitější obrázek, vše ostatní by zůstalo nezměněno.

## Souřadnice a změny směru

V obrázku r1.1.3 si můžeme všimnou ještě další zajímavé věci, a to kolik uletěl paprsek ve vodorovném a svislém směru (rozložíme si dráhu do x-ového a y-ového směru). V obou směrech paprsek prošel dráhu rovnou dvojnásobku hrany čtverce. Je to logické – pokud se má odrazit od dvou protilehlých hran a vrátit se zpět, tak musí překonat dvojnásobek jejich vzdálenosti. Znamená to ale i to, že všechny složky rychlosti pohybu paprsku (zde koule) mají stejnou velikost. Koule se pohybuje např. stejně rychle doprava jako nahoru. To ale znamená, že dráha koule svírá se všemi stěnami 45°.

Teď zopakuji předchozí úvahu trochu formálněji, exaktněji a ve třech dimenzích. Zaveďme si vektor rychlosti

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)\,,$$

jehož složky jsou rychlosti ve směru $x$, $y$ a $z$. Co se děje s vektorem rychlosti při odrazu od stěny? Změní se pouze složka rychlosti kolmá na danou stěnu (změní se dokonce jen znaménko rychlosti), ostatní složky se nezmění. Pokud má tedy koule urazit ve všech směrech dráhu $2a$ za stejný čas, platí, že

$$t = \frac{2a}{v_x} = \frac{2a}{v_y} = \frac{2a}{v_z}$$

a odtud

$$v_x = v_y = v_z\,.$$

V poslední rovnosti je schována informace o tom, že paprsek svírá se stěnami úhel 45°. Všimněme si, že zde si opět můžeme počátek zvolit libovolně.

## Průměty do stěn

Představte si, že máte v krychli nakreslenou dráhu koule. Pokud se na dráhu podíváme shora (uděláme kolmý průmět dráhy do horní podstavy), uvidíme, že dráha vypadá jako čtverec nebo obdélník (ve výjimečných případech přímka). Vidíme, že je to podobný obrázek, jaký jsme zkonstruovali metodou zrcadlení. (Zajímavé je, že zde nerozeznáme, kde se koule odrazila od horní a dolní stěny. Z předchozího, ale víme, že se při odrazu mění jen složka rychlosti kolmá na tuto stěnu.) Pokud bychom se na dráhu v krychli podívali z boku, viděli bychom něco podobného.

Dal by se složit trojrozměrný obraz dráhy z těchto dvou průmětů? Ano. Pokud máme například průmět do stěn $x = 0$ a $y = 0$, můžeme každé souřadnici $z$ přiřadit dvojici $x$, $y$ (pokud budeme mít v průmětech naznačeny směry pohybu, tak dokonce jednoznačně).

## Chybná úvaha v řešení

Zde uvedu jednu chybnou úvahu, kterou někteří z vás použili:

„Ze zákona odrazu víme, že při odrazu zůstává koule stále v jedné rovině dané drahou koule před dopadem a jejím kolmým průmětem na stěnu. Proto musí být dráha koule v krychli rovinný útvar.“ Nemusí, při každém odrazu jde totiž o jinou rovinu.

### Závěr a využití

Zadání úlohy splníme, pokud kouli vyšleme z libovolného místa krychle směrem rovnoběžným s tělesovou úhlopříčkou.

Zajímavým a užitečným poznatkem je hlavně to, že po odrazu „v rohu“ se směr paprsku změní na směr opačný ($\boldsymbol{v}$ se změní na $-\boldsymbol{v}$), a to pro jakýkoli původní směr. Pokud si postavíte tři čtvercová zrcátka navzájem kolmo k sobě, uvidíte v nich svůj obličej, ať už se do nich díváte z jakéhokoli směru. Takovému útvaru říkáme koutový odražeč a používá se třeba v odrazkách na kolech. Koutové odražeče jsou umístěny i na Měsíci, a pomocí nich se měří vzdálenost mezi Zemí a Měsícem.

*Jindra*

## Úloha 2 – Páječka (4b)

**Zadání:**

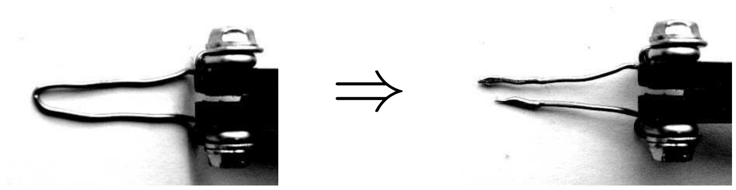
*Proč se u obyčejné transformátorové páječky zahřívá nejvíce špička hrotu? Hrot je přeci celý ze stejně tlustého drátu a teče jím všude stejný proud ... Přitom je špička hrotu znatelně teplejší (lze jednoduše experimentálně ověřit, například jinou částí než špičkou cín téměř neroztavíte).*

*Řešení je celkem jednoduché a zcela bez vzorečků, stačí si jenom pořádně rozmyslet, jak taková páječka vypadá*:-)*. Nebojte se experimentovat.*

*Pokud ovšem něco spočítáte, body navíc vás neminou.*

**Řešení:**

Výzva k experimentování v zadání této úlohy měla svůj smysl. Pokud jste se totiž pustili do experimentů s různě tvarovanými hroty, mohli jste mimo ověření tvrzení v zadání zjistit i další důležité skutečnosti. Zajímavý nápad na provedení experimentu použil Mgr.M Jan Bogár – místo běžného měděného hrotu použil hrot přímo z cínové pájky[12] a pozoroval, kde se přetaví. Tuto metodu jsem si vypůjčil pro vytvoření ilustračních obrázků v čísle.



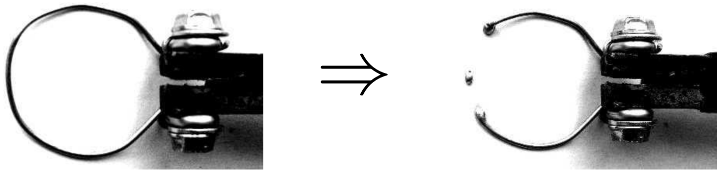
Obr. r1.2.1

[12] Pájka je ten kov, který se taví. Samotnému elektrickému zařízení se říká páječka nebo pájecí pistole.

Slovo „hrot“ budu v následujícím textu používat ve smyslu tenkého drátku na konci páječky bez ohledu na to, že v některých případech nebude skutečný hrot moc připomínat. Samotné ostře ohnuté místo budu označovat slovem špička.

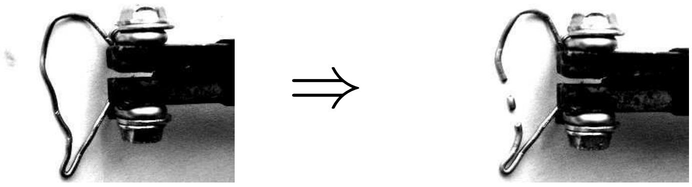
Nejprve tedy začneme s „klasickým“ tvarem hrotu. Výsledek vidíme na obrázku r1.2.1 a odpovídá tomu, co se tvrdí v zadání. Hrot se skutečně roztavil na špičce. Jako další z mnoha možných experimentů zkusme kruhový „hrot“, který nemá žádnou špičku.

Výsledek experimentu na obrázku r1.2.2 ukazuje, že místo roztavení je uprostřed. Kupodivu i špička klasického hrotu je právě uprostřed. To může naznačovat, že není až tak podstatná samotná špička, ale spíš prostředek hrotu z tenkého drátu. K ověření této teorie zkusme vyrobit hrot, který bude mít špičku, ale ta bude umístěna mimo střed drátku.



Obr. r1.2.2

Jak je vidět z výsledku na obrázku r1.2.3, tato teorie se potvrdila. Hrot je nejteplejší uprostřed, bez ohledu na to, kde má špičku (případně jestli vůbec nějakou má, nebo jich je více).



Obr. r1.2.3

Částečnou odpovědí na otázku v zadání by tedy mohlo být: *„Protože špička hrotu je uprostřed.“* Zkusme ale ještě najít vysvětlení pro ten prostředek. Při všem experimentování bychom si mohli všimnout, že z těla páječky jdou ke hrotu dva silné přívodní pruty (v případě mojí páječky je to měď o průřezu $25\,\mathrm{mm}^2$), které jsou po celou dobu chladné. Zdůvodnění je poměrně jednoduché: hrot tvořený drátem o průměru typicky $1\,\mathrm{mm}^2$ má na jednotku délky $25\times$ menší odpor a tudíž se v něm produkuje 25krát více tepla na jednotku délky.

Pokud bychom ale předpokládali, že přívodní pruty jsou chladné a hrot horký, byl by na jejich spoji prudký skok teploty. Takováto situace ale nemůže vydržet, protože teplo se bude šířit z teplejšího místa na studenější, přesně tak, jak mu velí termodynamické zákony. Vzhledem k vysoké tepelné vodivosti mědi bude tento efekt hrát v ochlazování hrotu podstatnou roli.

Protože hmota a tedy i tepelná kapacita přívodů je mnohem větší než u hrotu, projeví se přesun tepla hlavně ochlazením hrotu. A nejvíce se ochladí kraje hrotu, které jsou nejblíže přívodům. Střed hrotu pak zůstane nejteplejší.

Toto je tedy prvotní efekt zodpovědný za různou teplotu různých částí hrotu. V tuto chvíli ale už není hrot všude stejný (má různou teplotu) a tedy ani nemá všude stejný odpor. Tam, kde je zahřátý má odpor větší, produkuje tam více tepla a tudíž se dále víc zahřívá. Navíc ani tepelná vodivost není konstantní, ale s rostoucí teplotou klesá (u mědi, resp. kovů obecně), takže se teplo navíc od špičky hůře odvádí. Tyto dva efekty tedy dále zesilují vzniklý rozdíl teplot. Samy o sobě ale nemohou za vznik rozdílu.

Stručně řečeno, za rozdílné teploty hrotu je zodpovědné vedení tepla od zahřátého hrotu ke chladným přívodům. Tímto efektem se více ochlazují kraje hrotu a špička zůstává horká. Navíc vzniklý teplotní rozdíl je zesílen kvůli závislosti elektrického odporu a tepelné vodivosti na teplotě.

## Něco málo čísel na závěr

Pokud stále čekáte na nějaká konkrétní čísla, tak jste se konečně dočkali. :-) Kompletní výpočet rozdělení teploty na hrotu tu uvádět nebudu – problém pravděpodobně nelze řešit jinak než numericky na počítači a samotný výpočet mi nepřipadá příliš zajímavý. (Pokud vás toto zajímá, můžeme se o tom pobavit například na soustředění.) Nicméně pokusím se zde zdůvodnit, proč je odvod tepla do přívodních prutů podstatným efektem, který určuje rozložení teploty.

Typickým zahřátým hrotem transformátorové páječky protéká proud kolem 100 A (při napětí několik desetin Voltu). Měrný odpor mědi se pohybuje od $2 \cdot 10^{-8}\,\Omega/\mathrm{m}$ při pokojové teplotě po $4 \cdot 10^{-8}\,\Omega/\mathrm{m}$ při asi 400 °C. Předpokládejme hrot z měděného drátu o průměru 1 mm. Na rozžhavené špičce se pak produkuje přibližně 5 W na centimetr délky.

Hrot se tepla zbavuje několika způsoby. Jako každé těleso jej vyzařuje do okolí ve formě záření. Energie, kterou libovolné těleso vyzáří jednotkovou plochou je úměrná čtvrté mocnině jeho termodynamické teploty[13] a dále závisí na vlastnostech tělesa (jeho barvě v obecném slova smyslu). Pro jednoduchost budeme předpokládat ideálně černé těleso, i když se tím dopustíme určité nepřesnosti (každé reálné těleso vyzařuje méně, než ideálně černé těleso). Hrot tedy září podle své teploty a naopak přijímá záření od okolí dané teplotou okolí. Konstantou úměrnosti je Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$. Drát s obvodem $o$ při teplotě $T$ vyzařuje na jednotku délky výkon

$$P_{\mathrm{z}} = \sigma o \left(T^4 - T_0^4\right),$$

kde $T_0$ je teplota okolí. Pro náš hrot při teplotě 650 K vychází 0,3 W/cm.

[13] Tj. teploty v Kelvinech.

Dále se teplo předává okolnímu vzduchu. Limitujícím faktorem bude pravděpodobně přestup tepla z povrchu mědi do vzduchu. Mgr.[M] Alžběta Prokopová ve svém řešení uvádí hodnotu $15\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$, mě se nepodařilo najít žádnou důvěryhodnou hodnotu a obecně nalezené hodnoty vypadaly spíš nižší. Nicméně i pro uvedenou hodnotu se náš hrot tímto způsobem dokáže zbavit jen asi 0,2 W/cm.

Zbývá poslední mechanismus, vedení tepla. Tepelná vodivost mědi $\lambda$ je od $400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ při pokojové teplotě po necelých $250\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ při 400 °C. Pokud by byl pokles teploty od špičky hrotu k jeho kraji rovnoměrný a pokud by $\lambda$ nezáviselo na teplotě, bude výkon odvedený ze špičky o teplotě $T$

$$P_\mathrm{v} = 2\lambda S\,\frac{T-T_0}{l}\,,$$

kde $T_0$ je teplota kraje hrotu a $l$ vzdálenost od špičky hrotu k jeho kraji (dvojka je ve výrazu proto, že teplo se odvádí na obě strany). Nerovnoměrný pokles teploty způsobí, že odváděný výkon bude limitován místem s nejmenším poklesem teploty, tedy bude menší, než podle výše uvedeného vzorce. Nicméně vzhledem k obtížnosti určení rozložení teploty budeme vycházet ze zjednodušení uvedeného výše (s vědomím, že se tím dopouštíme určité chyby).

Předpokládejme, že máme střední část hrotu o délce 1 cm zahřátou na 400 °C. Ve vzdálenosti 3 cm od ní je konec hrotu na pokojové teplotě. Předpokládejme rovnoměrný pokles teploty a tepelnou vodivost $250\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Pak se špička hrotu tímto způsobem zbaví výkonu asi 4,6 W. Podle předchozích úvah se zbylého tepla zbavuje zářením (0,3 W) a vedením (0,2 W).

Je vidět, že vedením se hrot zbavuje řádově více tepla, než ostatními způsoby. Takže bez ohledu na použitá zjednodušení lze předpokládat, že vedení tepla je hlavní mechanismus ochlazování a vzhledem k jeho charakteru, kdy ochlazuje více ty části hrotu, které jsou dále od špičky, bude zodpovědný za pozorované rozložení teploty.

*Marble*

## Úloha 1.3 – Mapa (5b)

**Zadání:**

*Rikistán je malá zemička, která vznikla po bouřlivé revoluci rozpadem velké Mamutánské Říše. Sotva co se však politická situace ustálila, zjistila místní vláda, že potřebuje pro svou zemi vydat novou mapu. Odmítá však používat staré mamutánské mapy (Mamutánská Říše Rikistán dlouho utlačovala a proto se od ní chtějí co nejvíce distancovat) a z náboženských důvodů je v Rikistánu taktéž zakázáno cokoliv měřit. Inu, jediná informace, podle které můžete mapu sestavit, jsou zřejmě rozcestníky na centrálním náměstí každého z rikistánských měst. Tam je vždy uvedena vzdálenost vzdušnou čarou do každého z ostatních měst. Rikistánská vláda vás požádala o pomoc, jak tedy mapu sestrojit. Vymyslete algoritmus, který z tabulky vzájemných vzdáleností mezi městy zjistí jejich kartézské souřadnice na mapě. Rikistán je poměrně malá země, proto můžete zakulacení zemského povrchu zanedbat.*

**Řešení:**

Většina z vás správně řešila případ, kdy všechny vzdálenosti jsou naprosto přesně zadány a souhlasí. Algoritmus v tomto případě není složité vymyslet, proto jsem se při opravování zaměřil spíše na vaši schopnost hezky jej popsat – aby ten, kdo podle něj vytváří program, nemusel o ničem samostatně uvažovat. Ve skutečnosti však většinou nemáme přesná ani zdrojová data (na rozcestnících je vzdálenost udána ne jako $7 \cdot \sqrt{376} + 5$, ale 140 km, popř. 5 dní cesty atd.). Dalším zdrojem nepřesností je i reprezentace čísel v počítači a matematické operace na nulu (tedy $(10/3) \cdot 3 = 9{,}999$ a podobné zaokrouhlování při počítání s plovoucí desetinnou čárkou). Proto bychom měli uvažovat i úpravu algoritmu pro nepřesná vstupní data a zaokrouhlující výpočetní stroj.

Ovšem i s ideálními podmínkami nemáme výslednou mapu jednoznačnou – neuvažujeme-li různá otočení a škálování, vždy budou dvě zrcadlová otočení výsledné mapy. V této chvíli už bohužel musíme zapojit selský rozum a podívat se na směr, kterým rozcestníky vedou, a podle toho vybrat, která mapa odpovídá realitě.

Označení: Vzdálenost dvou měst A a B budu označovat jako $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$, souřadnice města A jako $[x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}]$. Písmenem $n$ označujeme počet měst. Předpokládáme, že žádná vzdálenost dvou měst není nulová, jinak duplicitní město sloučíme.

Algoritmus pro ideální případ se dá formulovat např. takto:

1. Na počátek soustavy souřadnic umístím první město ze seznamu měst (označme jej např. $\mathrm{M}_1$).
2. Druhé město ze seznamu $\mathrm{M}_2$ umístím na souřadnice $[d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2), 0]$.
3. Dokud město $\mathrm{M}_i$ pro $i$ z množiny $\{3..n\}$ leží na přímce $(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2)$, tedy dokud platí $|d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_i) - d(\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_i)| = d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2)$ nebo $d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_i) + d(\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_i) = d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2)$), jako souřadnici města $\mathrm{M}_i$ zvolíme $[x, 0]$. Přitom $x$ je řešení soustavy

$$|x| = d(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_i)\,, \quad |x - d(\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_1)| = d(\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_i)\,.$$

4. Jakmile najdeme město $\mathrm{M}_t$ takové, že neleží na přímce $(\mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2)$, umístíme město $\mathrm{M}_t$ na souřadnice $[x(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_t), y(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_t)]$, kde

$x(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ a $y(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ jsou řešení soustavy rovnic

$$(x - x_\mathrm{A})^2 + (y - y_\mathrm{A})^2 = d(\mathrm{A},\mathrm{C})^2 \,,$$
$$(x - x_\mathrm{B})^2 + (y - y_\mathrm{B})^2 = d(\mathrm{B},\mathrm{C})^2$$

($x$ a $y$ jsou volné proměnné). Tato soustava však bude mít dvě řešení – vybereme tedy právě jedno z nich, druhá možná mapa bude pak symetrická podle osy $x$.

5. Pro každé město $\mathrm{M}_i$, kde $i$ je z množiny $\{(t+1)..n\}$, provedeme tyto kroky:
   a. Najdeme řešení $x(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_i)$, $y(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_i)$.
   b. Vybereme to řešení, pro které platí

   $$(x_{\mathrm{M_i}} - x_{M_3})^2 + (y_{\mathrm{M_i}} - y_{\mathrm{M}_3})^2 = d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_3)^2$$

   a zaznamenáme jeho souřadnice pro město $\mathrm{M}_i$.

Pozn.: Prvky $i$ bereme z množiny postupně. Jakmile bychom měli vybírat město z prázdné množiny, vypíšeme výsledky a algoritmus ukončíme.

Tento algoritmus má lineární časovou složitost vzhledem k počtu měst (souřadnice každého města počítáme pouze jednou a k jejich výpočtu řešíme soustavu tří rovnic, jejíž řešení má v principu konstantní časovou složitost).

Povšimněme si také, že nás nezajímají vzdálenosti $d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j)$ pro $i > 3$ a $j > 3$, a na každou vzdálenost nám stačí zeptat se pouze jednou (tento údaj můžeme později přepsat), při vhodné implementaci nám stačí paměťový prostor s pouze konstantní velikostí.

Pro řešení neideálního případu se nám přímo nabízí dvě možnosti:

A. Algoritmus jako takový modifikovat nebudeme, pouze předefinujeme operátory porovnání. Budeme počítat s nějakou maximální tolerovanou absolutní ($A = B$ právě tehdy, když $\mathrm{A} - \varepsilon \leq \mathrm{B} \leq \mathrm{A} + \varepsilon$) nebo relativní ($\mathrm{A} = \mathrm{B}$ právě tehdy, když $|\mathrm{A}/\mathrm{B} - 1| < \varepsilon$) nepřesností. V takovémto případě bude zachována asymptotická časová složitost, ovšem při nevhodné volbě $\varepsilon$ můžeme algoritmus dostat do nedefinovaného stavu (podmínka v bodu 8 není splněna ani pro jedno řešení, nebo platí pro obě). Navíc tak nezohledníme další známá data o vzdálenostech k dalším městům, čili mapa nebude dostatečně přesná.
B. Spočítáme všechna možná místa, kde by se mělo město vyskytovat, a najdeme střed (těžiště) těchto bodů. Ten prohlásíme za polohu města.

Kromě zvýšení časové složitosti má však tato metoda jednu zásadní nevýhodu: pokud nám vyjdou dvě možná řešení, nevíme, pro které se rozhodnout (a které tedy použít do výpočtu polohy středu) – měl by to být ten bližší středu, ale střed dosud neznáme, a k jeho výpočtu už jej potřebujeme. Kdybychom počítali s oběma, mohli bychom dostat neúnosnou nepřesnost. Nabízí se zkusit všechny možnosti výběru jednoho z oněch dvou bodů a ohodnocovat tento výběr, ovšem to bychom se při větším počtu měst a vesnic (cca přes 30–40) asi výsledku nedočkali.

Proberme si tedy všechny možnosti řešení soustavy oněch dvou rovnic:

1. Rovnice nemají žádné řešení – my bychom ale nějaké chtěli, a víme, že tam s menší odchylkou je. Proto jako bod tohoto řešení zvolíme bod, který je na ose středů kružnic, které rovnice popisují, a který je ve vzdálenosti od obou úměrné poměru jejich poloměrů. Tedy máme-li města A a B, jeden z bodů pro výpočet polohy města C – bod $\mathrm{C}_i$ bude mít tyto souřadnice:

   a. Pokud jsou kružnice navzájem vně, tedy platí

   $$(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 > (d(\mathrm{A},\mathrm{C}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C}))^2\,,$$

   můžeme si představit, že se obě kružnice jakoby zvětšují, dokud nenastane jejich vnější dotyk. Tento bod dotyku, který bereme jako výsledný „průnik“ kružnic, bude mít následně souřadnice

   $$\left[x_\mathrm{A} + (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}) \cdot \frac{d(\mathrm{A},\mathrm{C})}{d(\mathrm{A},\mathrm{C}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C})}\,,\right.$$
   $$\left. y_\mathrm{A} + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}) \cdot \frac{d(\mathrm{A},\mathrm{C})}{d(\mathrm{A},\mathrm{C}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C})}\right].$$

   b. Pokud jsou kružnice v sobě, tedy

   $$(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 < \max(d(\mathrm{A},\mathrm{C}), d(\mathrm{B},\mathrm{C}))$$

   (nezapomeňme, že uvažujeme případ, kdy nám vyšlo, že rovnice nemají řešení), spočítáme souřadnice obdobně jako u předchozího případu, pouze se v tomto poměru bude větší kružnice jakoby zmenšovat a menší zvětšovat, aby nastal vnitřní dotyk.

2. Rovnice mají právě jedno řešení – s tím jsme naprosto spokojeni.
3. Rovnice mají dvě řešení – toto je ten těžší případ. Máme body $C_{i1}$ a $C_{i2}$, definujme si bod S, který je na půli cesty mezi těmito body. Zároveň máme spočítány ostatní body $C_{j1}$ a $C_{j2}$ pro $j \neq i$.

   Povedeme polopřímku $(\mathrm{S}, \mathrm{C}_{i1})$ a zjistíme, kolik přímek $(\mathrm{C}_{j1}, \mathrm{C}_{j2})$ naše polopřímka protne. Zároveň toto provádíme i pro polopřímku $(\mathrm{S}, \mathrm{C}_{i2})$. K hodnocení polopřímek ještě můžeme připočíst počet bodů, které nám vyšly z případů 1 a 2, které se nalézají v polorovině s hranicí kolmou na příslušnou polopřímku a procházející bodem S. Pokud má hodnocení vyšší polopřímka procházející bodem $\mathrm{C}_{i1}$, definujeme jako $\mathrm{C}_i$ právě bod $\mathrm{C}_{i1}$, v opačném případě $\mathrm{C}_{i2}$. Pokud mají přímky stejné hodnocení, vybereme libovolný z těchto dvou.

Zapsání tohoto do pojmů analytické geometrie již není náročné, pouze poněkud pracnější, proto jej zde vynechám.

Jak tedy bude vypadat výsledný algoritmus? První dva body se lišit nebudou, začnu tedy od bodu 3:

3. Pro každé město $\mathrm{M}_j$, kde $j$ je z množiny $\{3..n\}$, provedeme:

   a. Spočteme všechny body $\mathrm{C}_i$ jako případně upravené řešení soustavy rovnic pro každá dvě města A, B ($\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{B}$), jejichž polohu již známe. Měli bychom tak dostat $p = (j-1)\cdot(j-2)/2$ bodů.

   b. Definujeme město $\mathrm{M}_j$ jako těžiště bodů $\mathrm{C}_i$ o souřadnicích

$$\left[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{\mathrm{C_i}}, \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{\mathrm{C_i}}\right].$$

Ačkoliv je tento algoritmus napohled kratší, obsahuje v sobě netriviální výpočet každého bodu $\mathrm{C}_i$. Jeho slabinou je taktéž větší asymptotická složitost: v $n$ krocích počítáme řádově $n^2$ bodů $\mathrm{C}_i$, v nejhorším případě (3) k tomu potřebujeme najít dalších $n^2$ průniků přímek a polopřímek, tedy celková časová složitost je $O(n^5)$.

Ani po dlouhém čekání na výsledek navíc nemusíme dostat mapu, která se výsledku dostatečně blíží – pokud budou nepřesnosti ve zdrojových datech veliké, můžeme dostat mapu úplně chybnou. Mohlo by se tak vyplatit spočítat několik map, kde pokaždé seznam měst náhodně zpřeházíme, a tyto mapy pak průměrovat.

V závěru bychom se mohli pokusit ještě mapu přiblížit optimální mapě (tedy takové, která má např. součet druhých mocnin rozdílů zdrojové vzdáleností a vzdálenosti na mapě minimální) nějakým iterativním procesem – ten si můžeme představit například tak, že na každé město na mapě budou působit z ostatních měst síly – pokud jsou města dále, než je vzdálenost ze zdrojových dat, budou na ně jakoby působit přitažlivé síly, v opačném případě budou tyto síly odpudivé. V každém kroku algoritmu (iteraci) spočteme výslednici sil a přenásobíme ji nějakou malou konstantou – město se pohne o kousek tím směrem, kam jej táhnou síly. Po několika krocích tak můžeme získat opět poněkud přesnější mapu (ač to není jisté).

*Flavius*

## Úloha 1.4 – Hesla (3b)

**Zadání:**

*Tři prváci z Matfyzu Adam, Bohuš a Cyril, si mají založit hesla do Studijního informačního systému (tam si zapisují předměty a zkoušky, sledují rozvrh, atd.). Všichni si jej založí s maximální povolenou délkou, která je v systému nějak nastavena. Adam i Bohuš mají svoje oblíbené podmnožiny znaků, z nichž si znaky pro hesla vybírají. Když to zjistil Cyril, řekl si, že si zkusí* *vybrat svoji podmnožinu znaků tak, aby měl právě tolik možných hesel jako Adam a Bohuš dohromady (počet možných Adamových hesel + počet možných Bohušových hesel). Může se mu to podařit?*

**Řešení:**

Adam s Bohušem už vědí, že vybrat si své oblíbené heslo, není až tak snadné. Co ale nebohý Cyril? Myslíte, že už prošvihl zápis předmětů, protože si stále vybírá vhodné heslo, anebo zjistil, že se mu to nepovede? Cyril má štěstí, že je mezi vámi tolik dobrých duší, které mu chtěly pomoci. Jak tedy postupovat?

Maximální délku hesla, které si můžou studenti zapsat do SISu, označme $n$. Počet znaků v Adamově množině označme $A$, v Bohoušově množině $B$, a počet znaků v množině, kterou by si měl Cyril vybrat, označme $C$. Počet možných hesel, které si Adam může zvolit určíme jako variaci s opakováním $n$-té třídy z $A$ prvků, což je $A^n$. Počet hesel, které si může zvolit Bohouš je $B^n$ a počet hesel které by si měl být Cyril schopný vybrat ze své množiny znaků je $C^n$. Musí tedy platit vztah:

$$A^n + B^n = C^n\,.$$

SIS ještě neumí hesla záporné délky a tak je zřejmé, že $A$, $B$, $C$, $n \in N$. Nyní je potřeba určit, pro která $n$ má rovnice řešení:

Pro $n = 1$ platí $A + B = C$, což splňují všechna přirozená čísla, neboť součtem dvou přirozených čísel je vždy přirozené číslo. V tomto případě si Cyril vždy může zvolit svou množinu znaků.

Pro $n = 2$ si můžeme přepsat vzorec jako $A^2 + B^2 = C^2$. Řešením této rovnice jsou pro přirozená čísla pouze tzv. Pythagorejská čísla, což jsou trojice, které splňují danou rovnici, např. čísla 3, 4, 5; 5, 12, 13; … Cyril si potom může zvolit množinu znaků pouze v případě, že počet znaků Adamovy množiny a počet znaků Bohoušovy množiny budou Pythagorejská čísla ze stejné trojice.

Pro $n > 2$ úlohu formuloval již v 17. století Pierre de Fermat. Vyslovil domněnku, že pro $n > 2$ se to Cyrilovi nikdy nepovede. Na okraj stránky si tehdy poznamenal, že našel úžasný důkaz tohoto tvrzení, který se mu ale zde nevejde. Tato poznámka trápila matematiky více než 350 let. Až v roce 1994 ji Andrew Wiles dokázal použitém prostředků velmi pokročilé matematiky, kterou k tomu vybudoval. 200 stránkový důkaz této věty zde raději neuvádíme. `:-)` O tomto důkazu vznikl dokonce muzikál Fermat's last tango.

Takže až potkáte Cyrila, řekněte mu, že se mu to povede vždy pro hesla délky 1 a pro hesla délky 2 jen ve speciálním případě. A pro delší hesla, ať se podívá na muzikál. :-)

*Martin & (R)adim*

# Výsledková listina

| Poř. | Jméno | R. | $\sum_{-1}$ | r1 | r2 | r3 | r4 | t1 | t2 | t3 | + | $\sum_0$ | $\sum_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Úlohy | | | | | | | | | |
| 1. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Josef Tkadlec | 3. | 31 | 3 | 4 | 4 | 3 | | 9 | 6 | 2 | 31 | 31 |
| 2. | Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo | 2. | 62 | 3 | 4 | 4 | 3 | | 7 | | 3 | 24 | 24 |
| 3. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Koblížek | 1. | 23 | 3 | 2 | 4 | 3 | | | 7 | 4 | 23 | 23 |
| 4–5. | Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová | 3. | 160 | 3 | 0 | 3 | 1 | | 8 | 6 | 0 | 21 | 21 |
| | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer | 3. | 35 | 2 | 2 | 4 | 3 | | 9 | | 1 | 21 | 21 |
| 6. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Alena Bušáková | 1. | 19 | 3 | 4 | 4 | 3 | 1 | | | 4 | 19 | 19 |
| 7–8. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jitka Novotná | 3. | 17 | 2 | 2 | 4 | 1 | | | 7 | 1 | 17 | 17 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lada Peksová | 2. | 17 | 3 | 5 | 3 | 3 | | | | 3 | 17 | 17 |
| 9. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ František Steinhauser | 2. | 16 | 3 | | 2 | 2 | | 3 | 5 | 1 | 16 | 16 |
| 10–11. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Bogár | 2. | 24 | 3 | 5 | 4 | | | | | 3 | 15 | 15 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Klemsa | 2. | 15 | 3 | 4 | 4 | 1 | | | | 3 | 15 | 15 |
| 12. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Lux | 1. | 14 | 3 | 1 | 4 | 3 | | | | 3 | 14 | 14 |
| 13. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Zavřel | 1. | 12 | 3 | 0 | 3 | 1 | 3 | | | 2 | 12 | 12 |
| 14–17. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš | 3. | 48 | 3 | | 4 | 3 | | | | 1 | 11 | 11 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Milan Bartoš | 3. | 11 | 3 | 4 | | 3 | | | | 1 | 11 | 11 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlastimil Dort | 2. | 11 | 3 | | 4 | 2 | | | | 2 | 11 | 11 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dávid Vendel | 3. | 11 | 3 | 0 | 4 | 3 | | | | 1 | 11 | 11 |
| 18–19. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová | 3. | 26 | 2 | 4 | 3 | | | | | 1 | 10 | 10 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Eliška Nekvapilová | 3. | 10 | 2 | | 4 | 3 | | | | 1 | 10 | 10 |
| 20. | Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek | 4. | 225 | 2 | | 4 | 3 | | | | 0 | 9 | 9 |
| 21–24. | Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha | 1. | 58 | 3 | 0 | 3 | | | | | 2 | 8 | 8 |
| | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian | 4. | 26 | 1 | 0 | 4 | 3 | | | | 0 | 8 | 8 |
| | Tomáš Kubelka | 1. | 8 | 3 | | | 3 | | | | 2 | 8 | 8 |
| | Zuzana Tereškova | 1. | 8 | | 0 | | 3 | 4 | | | 1 | 8 | 8 |
| 25–27. | Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha | 2. | 55 | 2 | 0 | 2 | 2 | | | | 1 | 7 | 7 |
| | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková | 4. | 23 | 2 | 0 | 4 | 1 | | | | 0 | 7 | 7 |
| | Hana Bílková | 3. | 7 | 2 | 0 | 4 | 1 | | | | 0 | 7 | 7 |
| 28–30. | Tomáš Bartoněk | 1. | 6 | 2 | 0 | 3 | 0 | | | | 1 | 6 | 6 |
| | Lenka Havelková | 1. | 6 | 2 | | | 1 | 2 | | | 1 | 6 | 6 |
| | Tomáš Volf | 1. | 6 | | | 2 | 3 | | | | 1 | 6 | 6 |
| 31–33. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara | 3. | 19 | 2 | 0 | | 3 | | | | 0 | 5 | 5 |
| | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf | 1. | 15 | 2 | 0 | 1 | 1 | | | | 1 | 5 | 5 |
| | Stanislav Fořt | 1. | 5 | 2 | 1 | | 1 | | | | 1 | 5 | 5 |
| 34–35. | David Bambušek | 2. | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 | 3 | 3 |
| | Klára Holková | 3. | 3 | | 0 | | 3 | | | | 0 | 3 | 3 |

| Poř. | Jméno | R. | $\sum_{-1}$ | Úlohy r1 | r2 | r3 | r4 | t1 | t2 | t3 | + | $\sum_0$ | $\sum_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36–37. | Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová | 3. | 22 | 0 | 0 | | 2 | | | | 0 | 2 | 2 |
| | Petra Zahajská | 1. | 2 | 0 | 0 | 1 | | | 1 | | 0 | 2 | 2 |
| 38. | Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik | 2. | 17 | | 0 | | 1 | | | | 0 | 1 | 1 |
| 39–40. | Jana Baxová | 2. | 6 | | 0 | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| | Aleš Růžička | 4. | 0 | | 0 | | | | | | 0 | 0 | 0 |

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

## Adresa redakce:


M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

*Telefon:* +420 221 911 235
*E-mail:* `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
*WWW:* `http://mam.mff.cuni.cz`


Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.