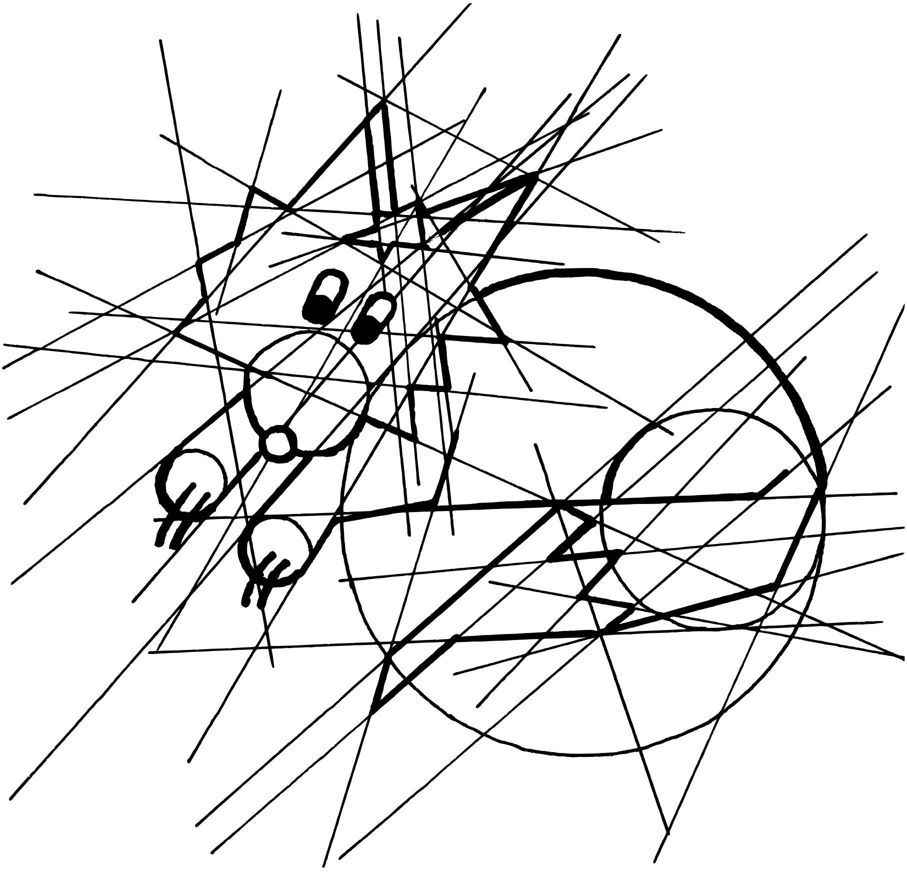
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XIV / Číslo 1

Cena: 0 Kč (0 Sk)



Časopis M&M je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Časopis zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze a je podporován středočeskou pobočkou Jednoty českých matematiků a fyziků.

Milá kamarádko, milý kamaráde!

Zajímáš se o matematiku, fyziku nebo programování? Rád(a) přemýšlíš nad zapeklitými problémy a neobvyklými úlohami? Chceš poznat nové kamarády a kamarádky s podobnými zájmy? Pak je časopis M&M právě pro tebe!

Časopis M&M

M&M je korespondenční seminář a zároveň studentský časopis zaměřený na matematiku, fyziku a informatiku. Pokud se rozhodneš zapojit, budeme ti v průběhu roku posílat poštou (samozřejmě zdarma) nová čísla se zadáním a řešením úloh a témat. Zároveň je budeme zveřejňovat na našich webových stránkách. Budeš pak mít zhruba měsíc na přemýšlení a v termínu, který je uveden na začátku každého čísla, pošleš svoje řešení na adresu redakce. S dalším vydáním časopisu ti přijdou tvé příspěvky zpět opravené a obodované.

Úlohy

V každém čísle otiskujeme zadání několika úloh. Nejsou to obyčejné příklady z hodin matematiky a fyziky. Některé vyžadují hlubší zamyšlení, v jiných musíš odhalit logický trik, v dalších si trochu započítáš. Bodové hodnocení úlohy, zpravidla 1–5 bodů, je uvedeno vedle jejího názvu. Za elegantní nebo zajímavé řešení však můžeš dostat bodovou prémii. Pokud řešením úloh jedné série dosáhneš určité bodové hranice (několik pětin celkového uvedeného počtu bodů za úlohy), dostaneš nějaký bonus s ohledem na to, v kolikátém jsi ročníku na čtyřletém gymnáziu (pokud jsi v nižším ročníku, řadíme tě mezi prváky), a to podle následující tabulky:

ročník	1/5 b	2/5 b	3/5 b	4/5 b	5/5 b
1.	+1 b	+2 b	+3 b	+4 b	+5 b
2.	0	+1 b	+2 b	+3 b	+4 b
3.	0	0	+1 b	+2 b	+3 b
4.	0	0	0	+1 b	+2 b

Témata

Jistou zvláštností našeho semináře jsou témata. Vlastními silami v nich prozkoumáš fyzikální zákonitosti, objevíš matematické vztahy nebo napíšeš program. Témata zadaná v prvním čísle budeš potkávat v lichých číslech a ta z druhého čísla v sudých. Každé z nich začíná úvodní úlohou, která je formulována poměrně široce a měla by být především námětem k přemýšlení. Můžeš nám poslat jak řešení úvodní úlohy, tak řešení dalších problémů, které si v rámci tématu sám vymyslíš. Pokud se nám bude tvůj příspěvek

líbit, uveřejníme jej v dalším lichém, resp. sudém čísle. Příspěvek k tématu můžeš zaslat kdykoli během roku. Počet tvých příspěvků k jednomu tématu není nijak omezen – své úvahy můžeš dále rozvíjet, doplňovat, případně poopravit nebo úplně vyvrátit. Můžeš též reagovat na články svých kolegů nebo využít jejich výsledky ve svém dalším řešení.

Za kvalitní otištěný článek lze získat i 20 bodů – hodnotíme nejen správnost, ale i dobrý nápad a snahu téma rozvinout. Důležitá je i forma tvého vědeckého článku, píšeš přece do časopisu. :-) Pokud bude tvůj článek publikovatelný bez výraznějších redakčních úprav a dodělávek, můžeš dostat až 3 body navíc, ale ne více než by ti bylo přiděleno za obsah článku. Jako ve správém vědeckém článku bys měl také citovat prameny, které používáš, opisování je neetické.

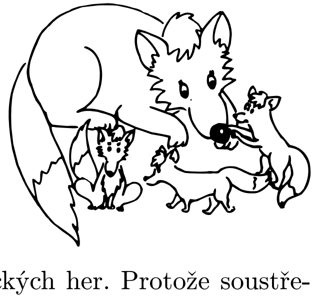
Do redakce můžeš poslat i vlastní námět na nové téma týkající se matematiky, fyziky nebo informatiky. Pokud se nám bude zdát zajímavý, uveřejníme ho při nejbližší vhodné příležitosti a tebe bodově ohodnotíme.

Ocenění

V průběhu roku tvoje body sčítáme a v každém čísle otiskujeme aktuální žebříček řešitelů. Jakmile dosáhneš určité bodové hranice (sčítají se i body z předchozích ročníků M&M), získáš seminární titul, který bude uveden u každého tvého článku a ve výsledkové listině. Už za 10 bodů získáš titul Bc.MM (čili borec), za 20 budeš Mgr.MM (machr), pokud dosáhneš na hranici 50 bodů, stane se z tebe Dr.MM (dříč), při stovce bodů získáš titul Doc.MM (dokonalý) a při 200 bodech už budeš Prof.MM (profík). Výzvou pro tebe může být získání titulu Akad.MM (abnormální kandidát) za 500 bodů – této mety ještě nikdo nedosáhl.

Abys poznal(a) své kolegyně a kolegy ze semináře a také nás, organizátory, vybíráme dvakrát do roka 20–30 nejpilnějších řešitelů, které zveme na jarní a podzimní soustředění. Pro ty úplně nejlepší jsou navíc na konci ročníku připraveny odměny.

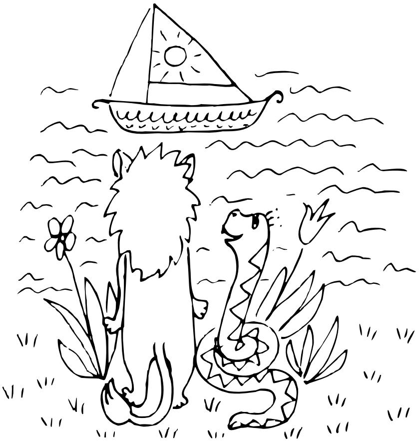
Soustředění



Jarní a podzimní týdenní soustředění je odměnou pro nejlepší řešitele, tj. takové, kteří se umístí přibližně do 30. místa ve výsledkové listině. Jestli budeš mít možnost se soustředění zúčastnit záleží především na tvé píli a snaze při řešení úloh a témat během celého roku. Na soustředění se během přednášek dozvíš mnoho nových zajímavých věcí z matematiky, fyziky, informatiky, astronomie i dalších oborů a také si zahraješ celou řadu více i méně tradičních, matfyzáckých i ryze nematfyzáckých her. Protože soustředění je za odměnu, hradíš si kromě dopravy pouze minimální část nákladů. Takže pilně řešit se rozhodně vyplatí!

Soutěžní pokyny

Do řešení M&M se můžeš zapojit kdykoli během školního roku. Nemusíš řešit všechny úlohy, vyber si především to, co tě baví. Má smysl posílat i náznak řešení. Nepiš jen výsledky, důležitější než čísla jsou myšlenkové postupy, kterými ses ubíral(a). Řešení každé úlohy nebo tématka piš na *zvláštní papír* a nezapomeň se *podepsat*!



Řešení můžeš posílat i e-mailem na adresu redakce (uvedenou také na konci každého čísla společně s poštovní adresou) `mam@atrey.karlin.mff.cuni.cz`. Nejdřív si ale prosím přečti technické pokyny na `http://mam.mff.cuni.cz` pod odkazem „Informace“. Pokud chceš dostávat potvrzení, že jsme tvá řešení v pořádku dostali, napiš nám to.

S prvním řešením nám prosím pošli lístek se jménem, adresou pro korespondenci (kam ti budeme posílat časopis a opravená řešení), adresou školy, ročník a rok, kdy budeš maturovat, a to i v případě, že nám budeš řešení zasílat elektronicky! Pokud přidáš i e-mail a telefonní číslo, budeme rádi.

Internet

Na adrese `http://mam.mff.cuni.cz` se můžeš dozvědět další informace o M&M, nahlédnout do archivu minulých ročníků nebo si prohlédnout fotky z minulých soustředění. V odkazu „Informace“ též najdeš návod, jak se přihlásit do naší e-mailové konference. Díky ní tě můžeme snadno a rychle informovat o vydání dalšího čísla tvého oblíbeného časopisu nebo pozvat na víkendové setkání řešitelů. Ty můžeš konferenci využít pro komunikaci s kamarády ze semináře.

Organizátoři

My organizátoři jsme většinou studenti různých oborů Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, často bývalí řešitelé semináře. Během roku pro tebe vymýšlíme úlohy, opravujeme řešení a připravujeme soustředění. Těšíme se, že se na tom dalším setkáme třeba právě s tebou.

Angwin, Bzučo, Flavius, Gavento, Helča, Hroch, Irigi, Jarda, Jindra, Jeffer, Krsoun, Marble, Martin, (R)adim, Teka, Terka, Zuzka a Riki.

Jak zpracovávat vaše měření

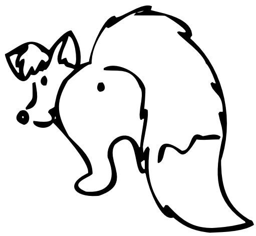
Ve fyzikálních problémech často potřebujete něco změřit. Většinou ale nestačí jen vzít měřidlo a odečíst hodnotu. Aby mělo měření nějaký smysl, musíte ten odečet provést vícekrát a měření správně zpracovat. Tady vám přinášíme návod, jak na to.

Pokud je výsledkem měření číselná hodnota, patří k ní vždy i nějaká chyba. Chyba měření *není* odchylka vámi změřené hodnoty od té tabulkové (nebo jinak prohlášené za správnou), ale chyba toho, jak jste měřili právě vy. To znamená, že i když vám náhodou vyjde gravitační zrychlení na dvě desetinná místa shodné s tabelovanou hodnotou, chyba může být přesto řádu $0{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, protože s vašimi pravítky, pochybnými stopkami s necitlivými knoflíky na mobilu a rychlostí reakce o moc přesněji měřit nebudete. Pokud už máme střední (průměrnou) hodnotu i chybu, zapisujeme výsledek ve tvaru:

$$x = (\text{střední hodnota} \pm \text{chyba})\,\text{jednotka}\,.$$

Obě uvedená čísla zaokrouhlíme. Chybu na jednu platnou cifru[1] (v případě, že je to jednička, můžeme uvést dvě). Hodnotu průměru pak zaokrouhlíme tak, aby její poslední platná cifra byla na stejném místě, jako poslední platná cifra chyby.

Chyba se skládá z několika částí – systematické chyby měřícího přístroje a metody a chyby statistické.



Chyba měřidla říká, jak přesně odpovídá údaj na měřidle skutečné měřené hodnotě. (Pravítko je vyrobeno s nějakou omezenou přesností, váhy nejsou zcela přesně rovnoramenné, jedno „tiknutí“ stopek nemusí trvat přesně jednu sekundu apod.) Může být explicitně uvedena v návodu, případně na měřidle (typicky u různých elektronických přístrojů a vah). Pokud tomu tak není, považuje se za ni většinou polovina nejmenšího dílku stupnice. Například nejmenší dílek na pravítku bývá 1 mm, takže systematická chyba je 0,5 mm, není-li uvedeno jinak.

Chyba metody je způsobená tím, že při měření zanedbáváme některé existující vlivy. (Určitou součástku považujeme za ideální, zanedbáváme odpor vzduchu, deformaci atd.) Pokud tyto vlivy nemůžeme nebo nechceme přesně vyjádřit, musíme je vzít v úvahu jako systematickou chybu metody. Ta nám říká,

[1] Platné cifry počítáme směrem doprava v zápisu čísla od první nenulové po poslední nenulovou. Tedy číslo 12030 má čtyři platné cifry, zatímco číslo 0,0021 dvě.

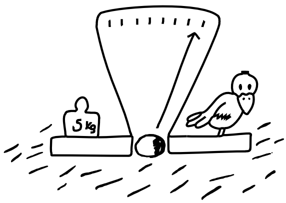
jak moc mohou ovlivnit naměřené hodnoty. Většinou nezbývá, než tuto chybu kvalifikovaně odhadnout.

Tyto dvě chyby sečteme a nazveme systematickou chybu měření.

Měření se provádí opakovaně (N-krát). Za střední naměřenou hodnotu bereme aritmetický průměr.

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N}\,. \qquad (1)$$

Statistická chyba měření vyjadřuje míru toho, jak náhodné jevy ovlivňují naměřenou hodnotu. Je tedy třeba upozornit, že se z jediného měření nedá určit. Třeba když měříte posuvným měřítkem (čili šuplérou), můžete vzorek různě stisknout, ten se různě zdeformuje, a vy pak odečtete různé hodnoty. Proto statistická chyba měření šuplérou bude větší u gumy než u oceli. :-) Při jejím výpočtu vycházíme z absolutních hodnot rozdílů jednotlivých změřených hodnot a hodnoty průměrné $x_i - \overline{x}$. Nejčastěji se počítá *směrodatná odchylka aritmetického průměru* definovaná jako



$$s = \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}\,. \qquad (2)$$

Abychom mohli tento vztah použít, měli bychom mít naměřeno alespoň deset hodnot.

Může se stát, že některá ze změřených hodnot je „úplně mimo“. Takové by se měly ze zpracování vyloučit. „Ujetá“ hodnota se pozná podle toho, že rozdíl jí a průměru je větší než $3s$.

Chceme-li spočítat chybu měření veličiny, kterou teprve spočteme z měřených veličin, máme na výběr. Buď můžeme používat následující vzorečky pro horní odhad chyby měření. (Je rozumné je použít pro výpočet výsledné systematické chyby.) Máme-li dvě naměřené veličiny $a = (\overline{a} \pm s_a)$ a $b = (\overline{b} \pm b_s)$, pak

$$\begin{aligned} a + b &= (\overline{a} + \overline{b}) \pm (s_a + s_b)\,, \\ a - b &= (\overline{a} - \overline{b}) \pm (s_a + s_b)\,, \\ a \cdot b &= (\overline{a} \cdot \overline{b}) \pm (a \cdot s_b + b \cdot s_a)\,, \\ a/b &= (\overline{a}/\overline{b}) \pm (s_a/b + a \cdot s_b/b)\,. \end{aligned} \qquad (3)$$

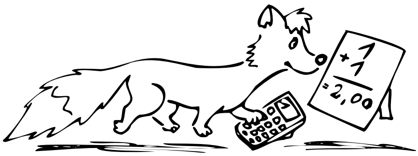
V případě, že jsme směrodatné odchylky jednotlivých veličin x_i získali statistickým zpracováním výsledků, můžeme použít následující přesnější vzorec pro celkovou směrodatnou odchylku měření, který ale obsahuje derivace.

$$s_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2 \cdot s_{x_j}^2}\,, \tag{4}$$

Tedy předpis naší funkce $F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k)$ zderivujeme podle všech veličin, které jsme změřili, přičemž ostatní považujeme za konstantní. Vynásobíme je chybou příslušné veličiny. Umocníme na druhou, sečteme a odmocníme.

Celková chyba měření je dána vztahem

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{s_{\text{stat}}^2 + s_{\text{syst}}^2}\,. \tag{5}$$



Pokud jsme měřili dvojici veličin x a y, u kterých známe tvar jejich závislosti $y = f(x)$ (např. $y = a/(x+b) + c$) a chceme určit neznámé konstanty, použijeme tzv. regresi (tj. proložení funkce naměřenými hodnotami). Regresit umí kdejaký počítačový program (origin, excel, gnuplot, …). Osobně pro prokládání všelijakých funkcí naměřenými daty doporučuji program gnuplot. Je volně ke stažení na stránkách `http://www.gnuplot.info/`. Proložit lineární závislost $y = a \cdot x$ zvládneme i bez počítače. Platí následující vztahy:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad s_a^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - a x_i)^2}{N}\,. \tag{6}$$

Pro obecnou funkci to ale takto jednoduše nejde a většinou ani neexistuje žádný vzoreček. Musíme počítač nechat, aby „postupně zkoušel hledat nejlepší řešení“. Navíc už z principu nemusí program najít nejlepší řešení a je na nás, abychom mu pomohli vhodně zvolenými počátečními hodnotami hledaných koeficientů.

V případě regrese je důležité uvědomit si, že výpočet vychází z předpokladu nulové chyby x. Prakticky tedy potřebujeme zajistit, aby chyba x byla mnohem menší než chyba y. Podle toho vyberte, která z veličin bude vaše x a která y (pokud za vás náhodou už někdo formulací zadání nevybral).

Podzimní soustředění

Stejně jako v minulých letech pořádáme i letos podzimní soustředění. Na něj budou pozváni jak úspěšní řešitelé z minulého roku, tak i ti z vás, kteří nám pošlou dobré řešení alespoň některých úloh a témat z tohoto čísla.

Soustředění se bude konat v říjnu a s největší pravděpodobností někde ve východních čechách nebo na moravě. Přesný termín a místo uveřejníme hned, jak bude domluven objekt. Na soustředění budeme vybírat účastnický poplatek do 500 Kč. Ubytování a stravování bude zajištěno, na vás je jen dopravit se na místo. Podrobnější informace rozešleme spolu s pozvánkou.

Ke svému řešení prosím připiš, jestli na soustředění jet chceš nebo nechceš. Ušetříš nám tak trochu starostí s pozváním správného počtu řešitelů.

Termín odeslání první série: 28. 9. 2007

Zadání úloh

Úloha 1 – 3D biliard (3b)

Mějme kulečníkovou kouli v krychli. Může se volným pohybem odrazit od každé stěny právě jednou a poté se vrátit na stejné místo? Předpokládejte, že vše se odehrává ve stavu beztíže.

Úloha 2 – Páječka (4b)

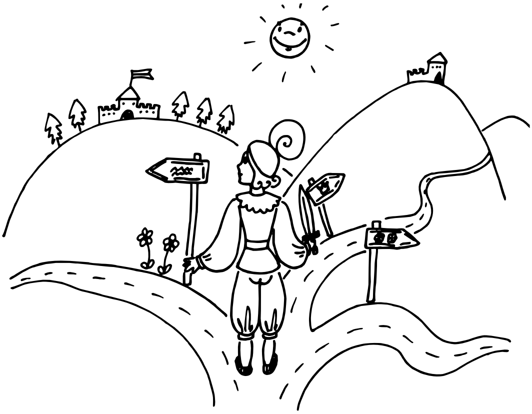
Proč se u obyčejné transformátorové páječky zahřívá nejvíce špička hrotu? Hrot je přeci celý ze stejně tlustého drátu a teče jím všude stejný proud … Přitom je špička hrotu znatelně teplejší (lze jednoduše experimentálně ověřit, například jinou částí než špičkou cín téměř neroztavíte).

Řešení je celkem jednoduché a zcela bez vzorečků, stačí si jenom pořádně rozmyslet, jak taková páječka vypadá:-). Nebojte se experimentovat.

Pokud ovšem něco spočítáte, body navíc vás neminou.

Úloha 3 – Mapa (5b)

Rikistán je malá zemička, která vznikla po bouřlivé revoluci rozpadem velké Mamutánské Říše. Sotva co se však politická situace ustálila, zjistila místní vláda, že potřebuje pro svou zemi vydat novou mapu. Odmítá však používat staré mamutánské mapy (Mamutánská Říše Rikistán dlouho utlačovala a proto se od ní chtějí co nejvíce distancovat) a z náboženských důvodů je v Rikistánu taktéž zakázáno cokoliv měřit. Inu, jediná informace, podle které můžete mapu sestavit, jsou zřejmě rozcestníky na centrálním náměstí každého z rikistánských měst. Tam je vždy uvedena vzdálenost vzdušnou čarou do každého z ostatních měst. Rikistánská vláda vás požádala o pomoc, jak tedy mapu sestrojit. Vymyslete algoritmus, který z tabulky vzájemných vzdáleností mezi městy zjistí jejich kartézské souřadnice na mapě. Rikistán je poměrně malá země, proto můžete zakulacení zemského povrchu zanedbat.



Úloha 4 – Hesla (3b)

Tři prváci z matfyzu Adam, Bohuš a Cyril, si mají založit hesla do Studijního informačního systému (tam si zapisují předměty a zkoušky, sledují rozvrh, atd.). Všichni si jej založí s maximální povolenou délkou, která je v systému nějak nastavena. Adam i Bohuš mají svoje oblíbené podmnožiny znaků, z nichž si znaky pro hesla vybírají. Když to zjistil Cyril, řekl si, že si zkusí vybrat svoji podmnožinu znaků tak, aby měl právě tolik možných hesel jako Adam a Bohuš dohromady (počet možných Adamových hesel + počet možných Bohušových hesel). Může se mu to podařit?

Zadání témat

Téma 1 – Střed Evropy

Již hodně diskusí bylo učiněno na téma středu Evropy. U nás se pravděpodobně dočtete, že střed se nachází v České republice – u Třebíče, Znojma nebo Žďáru nad Sázavou, zahraniční prameny vás zase odkáží na Západní Ukrajinu, Slovensko, Polsko nebo Německo. Problém je samozřejmě už v samotné definici středu. Pokuste se najít co nejvíce lokalit, které jsou středy Evropy podle následujících definic středů:

- Bod s nejmenší vzdáleností od nejvzdálenějšího bodu náležícího Evropě.
- Těžiště desky tvaru Evropy.
- Těžiště desky tvaru Evropy se zahrnutím zakřivení povrchu Země.
- Bod, ze kterého je průměrná vzdálenost do každého jiného bodu Evropy nejmenší.
- Jakákoliv jiná rozumná definice, těšíme se na vaše nápady. :-)

Nezapomeňte uvést, co považujete za Evropu (Počítají se k ní ostrovy? Počítá se k ní evropská část Ruska?) a z jakých zdrojů vycházíte.

Téma 2 – Opilý hasič

Představte si trysku na jedoucím hasičském autě namířenou kolmo na směr jízdy, ze které stříká konstantní rychlostí nepřerušovaný velmi tenký proud vody. Tato tryska je otočná okolo osy rovnoběžné se směrem jízdy, ale mířit může jen na jednu stranu od auta.

Auto jede konstantní rychlostí a tryskou chaoticky otáčí opilý hasič sedící na střeše. Vy jedete za autem mizícím v dálce na kole a sledujete tvary čar, které voda nakreslila do vyschlého pole u cesty. Popište, jak může mokrá oblast vypadat. Bude to vždy souvislá křivka? Dokážete z tvaru mokré oblasti odvodit jak byla tryska natočena v každé pozici auta? Může se křížit? Předpokládejte, že znáte rychlost a výšku auta a rychlost stříkající vody, a že vzduch má v těchto oblastech tak malý odpor, takže vůbec nemění rychlost a tvar proudu vody. Můžete také pro zjednodušení předpokládat, že auto jede úvozem, a střecha auta je ve stejné výšce jako pole.

Téma 3 – Samopopisující věty

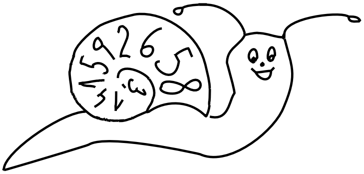
Některé věty v českém jazyce mluví samy o sobě – o své délce, počtu číslic, počtu písmenek a pod. Například věta říkající „Tahle věta obsahuje třicet dva písmen.“ je pravdivá. Sestavit takovou větu není nic těžkého, existuje ale mnoho složitějších variant, například věty typu „Tato věta obsahuje 2-krát 0, 3-krát 1, 10-krát 2, …“, nebo asi nejsložitější: „Tato věta obsahuje padesát šest písmen „a“, dvacet osm písmen „b“, …“. Je možné počítat vše možné – samohlásky, diakritiku, s interpunkcí nebo i s mezerami … Některé úkoly jsou ale moc lehké, proto si vyberte nějaký adekvátně těžký a co nejelegantnější.

Napište nám nejen nějaká ta řešení, ale hlavně myšlenku a použité triky. Nestyďte se použít počítač nebo to navrhnout (ale s rozmyslem, nemáme na to věčnost). Používejte výhradně češtinu nebo slovenštinu. Těšíme se na vaše řešení. Mimochodem, toto zadání obsahuje šedesát dva háčků.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`



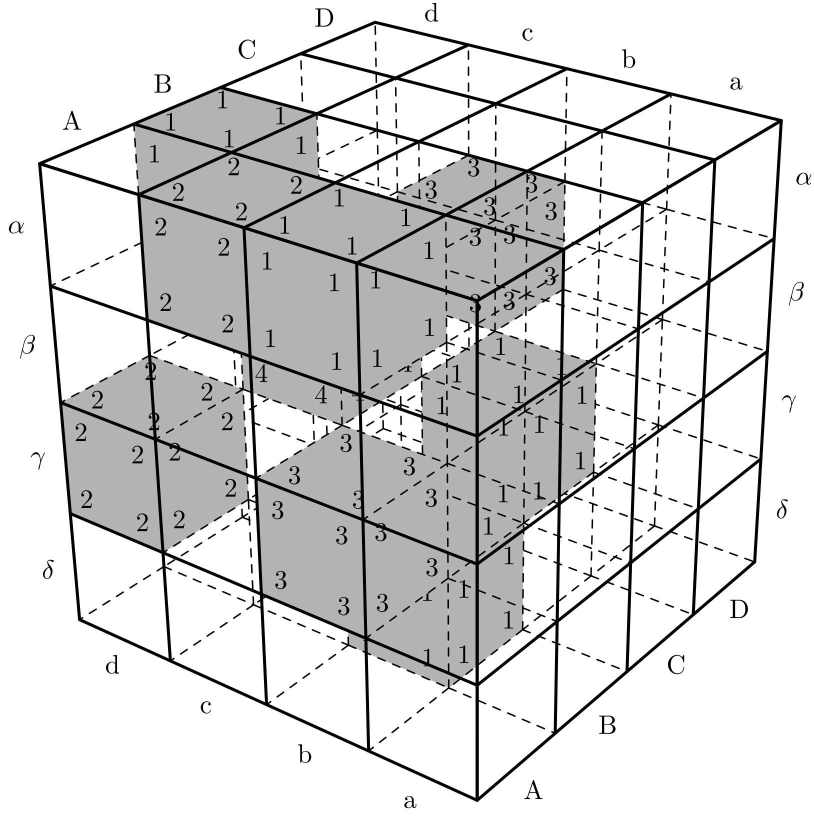
Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Na závěr pro vás máme jednu neobvyklou hříčku. Určitě znáte sudoku ve dvou rozměrech. Ale co přidat třetí rozměr? Místo vepisování čísel do čtverečků vkládat očíslované kostky do velké krychle.

Pravidla jsou obdobná známé dvojrozměrné verzi. Pro pořádek nejprve řekneme, jak budeme značit kostičky. Každá kostička je určena vektorem se třemi složkami x, y a z. Pro přehlednost používáme místo čísel pro složku x velká písmena, pro složku y malá písmena a pro složku z písmena řecké abecedy.

- Každé kostičce je přiřazeno právě jedno z čísel 1, 2, 3 nebo 4.
- Každé ze čtyř kostiček ležících na přímce rovnoběžné s jednou z os je přiřazeno jiné číslo. Jinak řečeno ve čtveřici kostiček $[\mathrm{A}, ?_1, ?_2]$, $[\mathrm{B}, ?_1, ?_2]$, $[\mathrm{C}, ?_1, ?_2]$, $[\mathrm{D}, ?_1, ?_2]$ (pro pevně zvolené $?_1$ a $?_2$) se žádné číslo neopakuje. Analogicky to platí pro zbylé dva směry.
- V každé, ze čtveřic kostiček $[\mathrm{A..B}, \mathrm{a..b}, ?]$, $[\mathrm{C..D}, \mathrm{a..b}, ?]$, $[\mathrm{A..B}, \mathrm{c..d}, ?]$ a $[\mathrm{C..D}, \mathrm{c..d}, ?]$ (pro pevně zvolené ?) se každé číslo vyskytuje právě jednou. Analogicky to platí pro zbylé dva kolmé směry.

A pokud úlohu vyřešíte do konce, dostanete řešení s několika zajímavými vlastnostmi – zkuste se zamyslet proč tomu tak je.



Zadání rozepsané podle souřadnic krychliček:

$[\mathrm{A}, \mathrm{b}, \alpha]$	:	1	$[\mathrm{B}, \mathrm{c}, \beta]$	:	4	$[\mathrm{C}, \mathrm{b}, \gamma]$	:	1
$[\mathrm{A}, \mathrm{c}, \alpha]$	:	2	$[\mathrm{D}, \mathrm{c}, \beta]$	:	3	$[\mathrm{A}, \mathrm{d}, \gamma]$	:	2
$[\mathrm{B}, \mathrm{d}, \alpha]$	:	1	$[\mathrm{A}, \mathrm{b}, \gamma]$	:	3	$[\mathrm{B}, \mathrm{b}, \delta]$	:	1