M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník XIII číslo 8

Ahoj kamarádky a kamarádi,

tak už se k vám dostalo poslední číslo tohoto ročníku, ve kterém vám přinášíme řešení úloh z posledních dvou čísel, závěrečné články k tématkům a také se můžete pokochat závěrečnou výsledkovou listinou.

Vaši organizátoři

Řešení témat

Téma 3 – Krátery

Doc.[MM] Hanka Jirků nám poslala velmi zajímavý článek popisující kinematickou teorii pádu tělesa do nějaké hmoty. Velmi nás potěšilo, že se někdo odhodlal přistoupit k problému teoreticky. Bohužel se ale již na začátku dopustila chyby, proto nezveřejňujeme celý článek, ale jen myšlenky, které tu ještě nebyly.

Hanka uvažovala model, ve kterém popisuje pád tělesa do hmoty pomocí vzorce pro odporovou sílu prostředí při turbulentním proudění. To je celkem dobře použitelný model pro popis pádu malého tělesa (kuličky) do tekutého nebo sypkého prostředí, což splňuje hodně pokusů, které jste prováděli. Jako první se tedy zabývala tím, že prostředí, do kterého těleso dopadá, klade pohybu odpor.

Sestavila kinetickou rovnici pro pohyb tělesa v prostředí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 + g\,,$$

ve které zanedbala g. Takové zanedbání by bez výhrad platilo pro skutečný meteorit padající na povrch planety. Pro takové případy ale vzorec také neplatí, závislost odporové síly na druhé mocnině rychlosti totiž platí pro pohyb tělesa, které je celé v daném prostředí, což se tělesům tvořícím krátery obvykle nestává. Pro pády těles do vody nebo sypké hlíny se toto zanedbání dá použít jen jako velmi hrubý odhad. Tak už by se ale ono „gé" nemělo ve výpočtech dál motat, jako se zamotalo Hance.

Dál se Hanka pokusila o výpočet hloubky dopadu. Vypočetla ji pro jeden konkrétní teoretický případ, ale už výsledek neporovnala s experimentem.

Kromě toho nám poslala několik zajímavých postřehů:

- Čím je prostředí tekutější, tím jsou zaoblenější okraje kráteru.
- U sypkých materiálů se při dopadu tělesa vrchní vrstvy vznesou, a vytvoří kolem kráteru nízký kopeček.

- Tělesa, která prolétají atmosférou, se brzděním ohřívají, hoří a taví se, jejich parametry jsou tedy v čase proměnné a nezjistitelné. Během dopadu se vlivem tepla mění i vlastnosti povrchu, na který dopadají.

Zuzka

Téma 4 – Algebraické vyjádření hodnot trigonometrických funkcí

Oprava: Na samém začátky bychom se chtěli omluvit za chybu, která se vloudila do převodní tabulky Bc.$^{\text{MM}}$ Kláry Krejčíkové v šestém čísle. Na místě, kde známe funkce $\operatorname{tg}\alpha$, *resp.* $\operatorname{cotg}\alpha$ *a hledáme* $|\cos\alpha|$, *resp.* $|\sin\alpha|$, *mají být vzorce pro přepočet s odmocninami, tedy*

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \textit{resp.} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}.$$

Za tuto chybu se omlouváme.

Protože je toto poslední číslo, a tedy poslední místo, ve kterém se o tomto tématku můžete dozvědět něco více, rozhodli jsme se namísto standardní přesné citace příspěvků autorů raději objasnit, kam až se dalo v jeho řešení dojít, a jaký tedy učinit závěr. Vždy ve vhodnou chvíli použijeme výsledky daných autorů.

V prvé řadě nám přišel velice obsáhlý příspěvek Mgr.$^{\text{MM}}$ Jožka Halagy, ve kterém nám poslal kompletní tabulku všech(!) hodnot funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ v celočíselných úhlech dělitelných třemi. Ve svém příspěvku sice neuvádí, jak přesně k jednotlivým hodnotám došel, stručně lze ale postup shrnout tak, že použijeme hodnotu $\operatorname{tg} 6^\circ$ nalezenou autorem v šestém čísle a použijeme obrácený postup, kterým získal z hodnoty $\sin 6^\circ$ hodnotu $\sin 12^\circ$. Tím získáme

$$\operatorname{tg} 3^\circ = \frac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(1-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

Další hodnoty lze získat už jenom na základě součtových vzorců, např. tak, že si nejprve odvodíme součtový vzorec pro tangens

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

a ten následně používáme.

Jistě vám teď vrtá hlavou, proč se povedlo nalézt jenom hodnoty v celočíselných úhlech, které jsou dělitelné třemi, a ne ve všech. Není to tak docela pravda – Doc.$^{\text{MM}}$ Hanka Jirků si s tímto skutečně velice nelehkým úkolem poradila. Nezávisle na Mgr.$^{\text{MM}}$ Jozefu Halagovi dospěla znovu k algebraickému vyjádření $\cos 3^\circ$. Poté sestavila na základě součtových vzorců rovnici třetího stupně[1] (podobnou, jakou odvodil Mgr.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo ve čtvrtém čísle, jen pro kosiny)

[1] Rovnice třetího stupně je rovnice tvaru $ax^3+bx^2+cx+d=0$, kde hledáme řešení pro x.

a tuto rovnici vyřešila.[2] Z hodnoty $\cos 1^\circ$ již, jak víme, lze pomocí součtových vzorců odvodit všechno ostatní.

Hančino vyjádření $\cos 3^\circ$ však bylo o poznání složitější, než jaké se dalo získat např. z výsledku Jožkova článku v šestém čísle,[3] takže výsledný tvar by se dal sotva zapsat na celou stránku. Otiskujeme proto rovnou „jednodušší" tvar:

$$\cos 3^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}}\,,$$

$$\cos 3^\circ = -3\cos 1^\circ + 4\cos^3 1^\circ\,,$$

tedy pro hodnotu kosinu platí

$$\cos 1^\circ \in \{x :\ \cos 3^\circ = -3x + 4x^3\}\,,$$

což je po vyřešení rovnice

$$\cos 1^\circ = -\frac{1}{\sqrt[3]{2\left(\sqrt{2X-8} - \sqrt{2X+8}\right)}} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{2\left(\sqrt{2X-8} - \sqrt{2X+8}\right)}\,,$$

kde $X \equiv \sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}$.

Nalezení algebraického vyjádření všech celočíselných úhlů je tak obtížné nejen proto, že je potřeba vyřešit rovnici třetího stupně (k tomu se dají použít tzv. Cardanovy vzorce – podrobněji se zde řešením zabývat nebudeme, protože je to na delší výklad), ale hlavně proto, že se *kosinus jednoho stupně nedá algebraicky napsat jinak, než jako součet dvou komplexních čísel*. Všimněte si, že výraz $(2X - 8)$ je záporný, takže jeho druhá odmocnina je *imaginární.* Každá z třetích odmocnin je tedy z komplexního čísla. Kosinus jednoho stupně je ale samozřejmě reálné číslo. Přesto se nedá algebraicky zapsat jinak, než jako součet dvou výrazů, z nichž každý je komplexní. O této podivné vlastnosti některých kořenů rovnic třetího stupně věděl už Cardano roku 1545 a nazval ji *casus irreducibilis*. Až ve 20. století matematik B. L. van der Waerden dokázal, že *casus irreducibilis* je nevyhnutelný a že je to skutečně vlastnost kořenů rovnic třetího stupně, nejedná se tedy jenom o to, že bychom kosinus jednoho stupně neuměli lépe zapsat, ale že to skutečně *není možné*. To je taky odpověď pro ty z vás, kteří zkoušeli rovnici třetího stupně „obejít" nějakým trikem – v tomto případě to nejde, jedině by se ve vašem postupu vyskytly komplexní čísla nějakým jiným způsobem.

Pokud už jednou přistoupíme na to, že budeme pro vyjadřování hodnot goniometrických funkcí používat komplexní čísla, je ale daleko snazší použít vzorec, který nám zaslal Kryštof Touška. Protože víme, že

$$\mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z\,,$$

[2] za použití počítačového programu Mathematica

[3] tj. pomocí součtových vzorců „vydělit" úhel v $\cos 6^\circ$ dvěma

tedy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

můžeme napsat dělení úhlu libovolným přirozeným číslem p jako

$$\sin \frac{z}{p} = \frac{e^{i\frac{z}{p}} - e^{-i\frac{z}{p}}}{2i} = \frac{\sqrt[p]{e^{iz}} - \sqrt[p]{e^{-iz}}}{2i},$$
$$\cos \frac{z}{p} = \frac{e^{i\frac{z}{p}} + e^{-i\frac{z}{p}}}{2} = \frac{\sqrt[p]{e^{iz}} + \sqrt[p]{e^{-iz}}}{2}.$$

Přitom je ale potřeba dát pozor na to, kterou z p odmocnin přípustných v komplexním oboru zvolíme – každopádně právě jedna z nich bude hodnotou dané goniometrické funkce.

Úplně na závěr můžeme říct, že pokud známe algebraicky hodnotu funkce s daným úhlem, vždy tento úhel umíme „vydělit“ dvěma tak, aby zůstal reálný, při „dělení“ třemi a vyššími prvočísly se mohou vyskytnou výrazy obsahující komplexní čísla a pomocí komplexních čísel vyjádříme velmi snadno libovolný úhel.

Irigi

Řešení úloh

Úloha 6.1 – Logické obvody (5b)

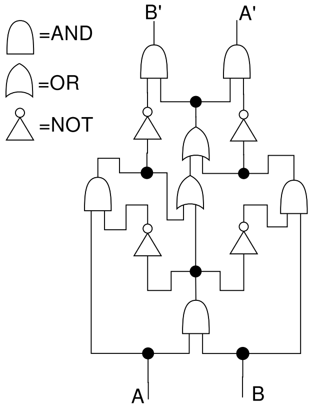
Zadání:

Logický obvod je soustava hradel pospojovaných dráty. Po drátech putují jednosměrně binární signály 1/0 (napětí je/není). Některé konce drátů jsou vstupní, a některé výstupní. Hradla jsou AND, OR a NOT. Hradlo NOT má jeden vstup a jeden výstup, hradla AND a OR mají dva vstupy a jeden výstup. NOT funguje jako logická negace, AND jako konjunkce a OR jako disjunkce. Povoleno je jen výstupní rozvětvení drátu, tedy jeden vstup se zkopíruje do několika výstupů.

Rovinný logický obvod je pak takový, který se dá sestavit na desce, aniž by se dráty křížily. Rozhodněte, zda lze každý logický obvod (nerovinný) předělat na rovinný, který bude ekvivalentní (tedy pro stejné vstupy bude dávat stejné výstupy).

Řešení:

Snadno nahlédneme, že k tomu, abychom dokázali, že každý prostorový logický obvod můžeme přeskládat na rovinný, stačí zkonstruovat rovinný obvod, který funguje jako mimoúrovňové křížení drátů. Jedno z možných řešení je na obrázku.

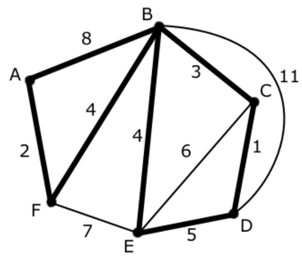


Jarda

Úloha 6.2 – Vedení strýčka Skrblíka (5b)

Zadání:

Strýček Skrblík vlastní (mimo jiné) továrny, které jsou závislé na přívodu elektřiny z jeho elektráren. Všechno bylo v pořádku až do té doby, než v Kačerově začali řádit Rafani. Elektrické vedení je totiž z mědi a Rafani je vytrvale strhávají, aby jej mohli prodávat ve sběrnách surovin.



Hlavním problémem je to, že tak vázne dodávka elektřiny do továren. Vaším úkolem je vymyslet algoritmus, který bude mít na vstupu počet továren a cen vedení mezi nimi (nezáporná čísla). Chceme vybrat ta vedení mezi továrnami, která se mají postavit, aby i po přerušení kteréhokoliv z těchto vedení byla každá továrna připojena. Elektrikáři jsou totiž vždy schopni nahradit chybějící vedení, než Rafani zaútočí podruhé, ale kdyby nebyla některá továrna během opravy připojena, výroba uvnitř by stála.

Znáte však strýčka Skrblíka, ten se nespokojí s ledajakým nápadem. Každé vedení něco stojí a Skrblík nechce investovat ani cent navíc. Zkuste jej proto přesvědčit, že právě vaše řešení je to nejlepší (strýček se jistě spokojí s pěkným matematickým důkazem správnosti vašeho algoritmu). Pokuste se také odhadnout časovou složitost takového algoritmu.

Příklad: Písmenky A–F jsou označeny továrny, spojnicemi s čísly vedení s jeho cenou. Algoritmus by měl zjistit, že nejlevnějším řešením bude využití vedení vyznačeného tlustou čarou.

Šikulům, kteří by chtěli strýčka Skrblíka potěšit i důkazem, doporučujeme podívat se na algoritmy pro hledání koster grafů a jejich důkazy.

Řešení:

Soustavu vedení si můžeme představit jako graf, ve kterém jsou továrny vrcholy a vedení mezi nimi oceněné hrany. Požadovaná vlastnost, že po odebrání kterékoliv hrany zůstane graf stále spojitý, se nazývá hranová 2-souvislost (přesněji: tuto vlastnost grafu definujeme pouze pro souvislé grafy na 3 a více vrcholech). Formulace zadání byla však poněkud nepřesná. Strýček Skrblík totiž neřekl, jestli chce minimalizovat pouze cenu stavby projektovaného vedení, nebo jestli jej zajímá i cena jeho provozu (cenou provozu rozumíme to, že Rafani každý den nějakou část ukradnou). Můžeme si totiž představit několik modelů chování Rafanů:

a) Rafani ve skutečnosti neukradnou celé vedení, vždy si jenom „kousek někde uprostřed" ustřihnou, čímž vedení znefunkční. Oprava ale vždy stojí stejnou částku (onen malý kousek je vždy stejně velký) a tak cenu provozu jako konstruktéři nemusíme brát v úvahu. Algoritmus má tedy najít takový hranově 2-souvislý podgraf se všemi vrcholy z původního grafu, jehož součet cen (také nazývaných vah) hran je minimální.
b) Rafani kradou naprosto náhodně, ale kradou vždy vedení po celé jeho délce. Po jistém čase (průměrně po m dnech, kde m je počet vedení, resp. hran v grafu) tedy náklady na provoz přesáhnou cenu výstavby a po delší době už nebude samotná cena výstavby důležitá, do popředí se dostane právě cena provozu. Její optimalizace odpovídá sestavení podgrafu (se všemi původními vrcholy) s minimálním aritmetickým průměrem cen hran při zachování hranové 2-souvislosti.
c) Rafani jsou vypočítaví a nejen že ukradnou vedení po celé jeho délce, oni si taktéž vybírají, které ukrást. A samozřejmě chtějí získat ve sběrných surovinách co nejvíce a Skrblíkovi pokud možno co nejvíce uškodit, proto si budou vybírat vždy nejdražší vedení v celé síti. My tedy chceme nalézt takový podgraf (opět na všech původních vrcholech), jehož nejdražší hrana je co nejlevnější.

Bohužel, tento úkol je algoritmicky náročnější, než se na první pohled zdá. V diskrétní matematice je známý pojem Hamiltonovská kružnice – je to taková kružnice v grafu (nejedná se o kružnici ve svém geometrickém významu, nýbrž o posloupnost vrcholů v_0, v_1, …, v_n, v_0, kde mezi $v_{(i-1)}$ a v_i pro i od 1 do n a mezi v_n a v_0 existuje hrana), která v sobě obsahuje všechny vrcholy z daného grafu. Graf, který takovouto kružnici obsahuje, nazýváme Hamiltonovský.

Hledání Hamiltonovské kružnice v grafu spadá do třídy NP-úplných problémů. Sice dosud neexistuje důkaz, že tyto problémy nejsou řešitelné v čase polynomiálním (jsou řešitelné pouze v exponenciálním čase), ovšem všeobecně se tak soudí (kdyby se náhodou některému zvídavému řešiteli podařilo dokázat, že to lze či nelze, je na tento důkaz vypsána odměna 1 000 000 dolarů a M&M jej určitě také obdaruje pár bonusovými body `:-)`). Navíc jsou navzájem převoditelné, čili pokud existuje algoritmus řešení jednoho problému, dá se převést na řešení jiného.

Tvrzení: Mějme Hamiltonovský graf G na n vrcholech se všemi hranami ohodnocenými 1. Potom algoritmus, který najde nejmenší hranově 2-souvislý podgraf na všech původních vrcholech, najde Hamiltonovskou kružnici na grafu G.

Důkaz: Pokud jsou všechny hrany ohodnoceny hodnotou 1, pak hledaný podgraf má celkový součet hodnot větší nebo roven n. Tímto podgrafem musí být právě Hamiltonovská kružnice, protože všechny jiné podgrafy jsou buď izolované kružnice (čili nejsou souvislé), nebo mají více než n vrcholů (každý vrchol musí být stupně 2 – tedy musí na něj být připojeny 2 hrany, aby byl 2-souvislý a vzhledem k tomu, že počet hran je součet stupňů všech vrcholů/2, tak právě n hran mají pouze grafy ve tvaru jedné nebo více izolovaných kružnic) a pak nejsou minimální.

Víme tedy, že musíme použít algoritmus „zkus všechno a najdi to nejlepší“ (ve skutečnosti bychom asi nemuseli zkoušet úplně všechno, dají se použít techniky ořezávání, kdy dále nezkoušíme možnosti, které evidentně k výsledku nevedou, ovšem „skoro všechno“ je pořád exponenciálně složité).

Pro případy a) a b):

Budeme postupovat rekurzivním hledáním ve stromu všech možností do hloubky (depth first search, DFS). Na začátku předáme algoritmu celý graf:

1. Ověříme, jestli je podgraf hranově 2-souvislý – pokud není, skončíme algoritmus.
2. Ohodnotíme podgraf, tedy sečteme hodnoty všech hran (ceny vedení).
3. Pokud je ohodnocení menší, než nejlepší dosud dosažené, zapíšeme si jej a s ním i tento podgraf.
4. Spustíme tento algoritmus pro případ, že z tohoto grafu odebereme ještě jednu hranu (pro každé větvení jinou).

Pro případ c):

1. Seřadíme si všechny hrany od nejdražší po nejlevnější.
2. Postupně odebíráme hrany (od nejdražší) a vždy ověříme, jestli je graf stále hranově 2-souvislý.
3. Jakmile narazíme na hranu, jejímž odstraněním porušíme hranovou 2-souvislost, spustíme výše uvedený algoritmus na graf, ve kterém nejsou hrany, které jsme vyřadili – kromě té poslední, která je již nutná.

Tento algoritmus je konečný (skončí po 2^m průchodech cyklem) a zjevně z něj získáme nejlepší možný 2-souvislý podgraf na všech vrcholech.

Ověření hranové 2-souvislosti podgrafu však není triviální operace. Budeme ji provádět opět pomocí rekurzivního průchodu grafu do hloubky:

1. Vybereme si libovolný bod v daném podgrafu a nazvěme jej kořen.
2. Pro všechny body si pamatujeme dvě hodnoty – hladinu (vzdálenost po cestě od kořene) a spojku (cesta na nižší hladinu jinudy, než po cestě, kudy jsme přišli, viz níže). Na počátku algoritmu mají všechny body hladinu nedefinovanou.
3. Spustíme rekurzivní algoritmus pro kořen a hladinu 0.
4. Zjistíme, jestli jsme prošli všechny vrcholy a jestli každý vrchol kromě kořene má spojku menší, než je jeho hladina. Pokud ano, tak je graf hranově 2-souvislý, pokud ne, bohužel není.

Rekurzivní algoritmus: (Na vstupu je vrchol a vstupní hladina.)

1. Hladině vrcholu přiřadíme hodnotu vstupní hladiny, spojce taktéž přiřadíme hodnotu vstupní hladiny.
2. Procházíme všechny sousedy vybraného vrcholu – vybereme jednoho souseda, kterého jsme ještě nezkoumali.
3. Pokud má tento soused hladinu nižší, než je hladina aktuálního vrcholu, tak přiřadíme spojce aktuálního vrcholu hodnotu hladiny souseda (tedy přes tuto spojku se můžeme vrátit, pokud by byla běžná cesta přerušena, na hladinu, kam spojka vede).
4. Pokud má tento soused nedefinovanou hladinu, spustíme rekurzivní algoritmus pro tohoto souseda a hladinu o 1 vyšší, než je ta aktuální.
5. Pokud má vrchol ještě nějaké další sousedy, opakujeme od kroku 2.
6. Jakmile jsme vyčerpali všechny sousedy, zjistíme si hodnotu nejmenší spojky sousedů tohoto vrcholu, a pokud je tato nejmenší spojka menší, než spojka aktuálního vrcholu, tak spojce aktuálního vrcholu přiřadíme hodnotu nejmenší spojky.
7. Navrátíme řízení tomu algoritmu, který nás ve svém kroku 4. zavolal.

Časová složitost

A jak dlouho nám vlastně takový algoritmus bude trvat? Máme-li m hran, existuje 2^m možností, jak z něj vybrat podgraf (přítomnost či nepřítomnost hrany v podgrafu si můžeme představit jako cifru 1 či 0 na pozici náležející dané hraně ve dvojkovém zápisu čísla, které udává daný podgraf – toto číslo má rozsah 0 až $(2^m - 1)$, existuje tedy 2^m různých podgrafů). Sice nebudeme testovat opravdu všechny, ale pořád jich bude exponenciálně mnoho. Odhadneme jej tedy $O(2^m)$ (složitost ohodnocení grafu + složitost ověření jednoho podgrafu na 2-souvislost). Ohodnocení času provedeme sečtením max. m cen vedení, proto jeho časová složitost bude $O(m)$. Při ověřování hranové 2-souvislosti „sáhneme“ na každý vrchol a každou hranu právě jednou, proto při vhodné reprezentaci dat bude jeho časová složitost $O(n + m)$. Lépe už to nejde.

Celková složitost algoritmu pro strýčka Skrblíka je tedy $O(2^m(n + 2m))$. Vzhledem k tomu, že hran může být až $\binom{n}{2} \sim n^2$, můžeme n oproti m zanedbat, čili odhadneme toto na $O(m2^m)$ (toto je asymptotická časová složitost, takže 2 taktéž zanedbáváme).

Exponenciální složitost není moc hezkou vizitkou, ale jak jsme si ukázali, lépe to opravdu nešlo. Jsou sice postupy, jak v mnohem rychlejším čase najít poměrně přijatelné řešení – např. maximálně o 20 % horší, než je optimum – (nazývají se aproximační algoritmy), ale ty jsou poměrně netriviální. A navíc, Strýček Skrblík by mohl dostat infarkt z představy, že zaplatí tolik peněz navíc. Existují také tzv. heuristiky – ty nám někdy mohou pomoci dosáhnout výsledku rychleji, ovšem někdy nám nemusí pomoci vůbec a běh bude jenom zpomalen o režii těchto heuristik. Strýček Skrblík se tak sice načeká (doufejme, že nemá těch továren moc), ale aspoň ho v jeho kačeřím srdíčku může hřát, že nedá ani cent navíc.

Flavius

Úloha 6.3 – Kladivo (4b)

Zadání:

Když praštíte člověka po břichu kladivem, tak mu velmi ublížíte. Když si ale ten člověk dá na břicho kovadlinu a vy stejnou silou a impulzem praštíte po té kovadlině, člověku se nic nestane. Vysvětlete, jak je to možné.

Nápověda: Předpokládejte, že to, co člověku ubližuje, je energie, která působí deformaci těla.

Řešení:

Na začátek zavedeme vhodné značení: hmotnost kladiva značme jako m, hmotnost kovadliny M, rychlost kladiva při dopadu v, rychlost kladiva po odrazu v' a obdobně rychlosti kovadliny V a V', dále plochu kladiva kterou dopadá na člověka jako s a plochu kovadliny (která se dotýká člověka) jako S. Předpokládejme také rovnou, že jsou vyrobeny ze stejného materiálu a mají tudíž stejnou hustotu.

První věc, která člověka pravděpodobně napadne, je, že kladivo má podstatně menší plochu s, takže se působící síla rozloží na větší plochu kovadliny S – pokud zranění člověku působí energie přepočtená na plochu, bude zranění menší. Podívejme se na tuto situaci podrobněji, abychom získali řádový odhad, jak moc se to projeví:

Pokud má hlavice kladiva zhruba podobný tvar jako kovadlina (což je docela rozumný předpoklad), můžeme vyjádřit vztah mezi hmotou kladiva a kovadliny a plochami, kterými by na člověka dopadaly. Hmotnost (spolu s objemem) roste se třetí mocninou rozměru, zatímco plocha se druhou, takže platí

$$\frac{s^{1/2}}{S^{1/2}} = \frac{m^{1/3}}{M^{1/3}}\,,$$

tedy

$$S = s\,\frac{m^{2/3}}{M^{2/3}}\,.$$

To je zhruba také poměr, ve kterém bychom v lepším případě (kdy zranění působí energie na plochu a ne energie) mohli očekávat menší zranění. (Odhady jsou to samozřejmě jen velice orientační.)

Ve skutečnosti je však situace složitější – je potřeba vyřešit srážku kladiva a kovadliny precizněji, a tím získáme překvapivý výsledek – zranění bude ještě daleko menší. Při srážce se (přesně) zachovává hybnost soustavy kladivo-kovadlina a (ne nutně přesně) energie – část energie se totiž může ztratit tak, že způsobí ohřátí obou těles, nebo způsobit jejich vibrace. Zapišme tuto skutečnost matematicky:

$$\begin{aligned} mv &= mv' + MV'\,, \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \alpha^{-1}\left(\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mV'^2\right)\,. \end{aligned}$$

α je koeficient, který charakterizuje kolik energie se při srážce ztratí: $\alpha = 0$ odpovídá dokonale nepružné srážce, $\alpha = 1$ dokonale pružné. Pro kladivo a kovadlinu bude $\alpha \approx 1$. Vyřešením těchto rovnic za předpokladu $\alpha = 1$ získáme vztahy

$$v' = -\frac{(M-m)v}{m+M}\,,$$
$$V' = \frac{2mv}{m+M}\,.$$

To je ovšem potěšující výsledek! Předaná energie bude oproti kovadlině v předchozím případě $(4mM)/(m+M)^2$ násobně menší. (Je to podíl kinetické energie kovadliny po odrazu kladiva $1/2\,MV'^2$ a původně uvažované celé energii kladiva $1/2\,mv^2$). Započítáme-li i rozdíl ploch kladiva a kovadliny jako jsme to udělali poprvé a vynásobíme podíl energií navíc členem $m^{2/3}M^{-2/3}$ získaným na začátku, zjistíme, že odráží-li se kladivo od kovadliny, působí $\left(m^{2/3}M^{-2/3}(4mM)/(m+M)^2\right)$ násobně menší zranění. (Ve skutečnosti je to něco mezi $\left((4mM)/(m+M)^2\right)$ a $\left(m^{2/3}M^{-2/3}\,(4mM)/(m+M)^2\right)$, protože jen těžko můžeme odhadnout, jestli zranění působí energie nebo energie na plochu.)

Pokud byste chtěli provést důkladnější rozbor a nepředpokládat, že odraz je dokonale pružný ($\alpha \neq 1$), obdržíte vztahy

$$v' = v\,\frac{m\alpha^{-1} - \sqrt{M\alpha^{-1}(M + m(1-\alpha^{-1}))}}{m+M}\,,$$
$$V' = v\,\frac{M\alpha^{-1} + \sqrt{M\alpha^{-1}(M + m(1-\alpha^{-1}))}}{m+M}\,\frac{m}{M}\,,$$

ze kterých již jistě snadno příslušné „koeficientu poměru zraňování“ dopočtete.

Irigi

Úloha 6.4 – Sever (3b)

Zadání:

Všichni jistě umíte určit jih pomocí hodinek. Namíříme-li malou ručičku na slunce (a máme-li na hodinkách zimní čas), míří osa úhlu mezi malou ručičkou a dvanáctkou k jihu. Jak bychom ale určili jih na ručičkových hodinkách, které měří čas do dvaceti čtyř hodin? Bonus: jak by určil jih ufon z planety HD 47964314j, kde je den tak dlouhý, že ručička jeho hodinek oběhne všechna čísla až po třicet šestku na ciferníku jeho hodinek za tři pozemské dny.

Řešení:

Keďže na 12-hodinových hodinkách sa ručička hýbe 2-krát rýchlejšie ako Slnko po oblohe, musíme uhol poliť. 24-hodinové hodinky to riešia za nás a tak po namierení malej ručičky na Slnko, ukazuje 12-tka na juh (až na odchylku spôsobenú použitím pásmového času namiesto pravého slnečného).

Ufón z planéty HD 47964314j by sa zamyslel a potom, čo by si synchronizoval miestnu polnoc s 36-kou, by mu bolo jasné, že tým, že sa ručička na jeho hodinkách hýbe tretinovou rýchlosťou oproti Slnku, bude musieť uhol medzi ručičkou (mieriacou na Slnko) a 18-kou násobiť trojkou (alebo môže podľa aktuálneho dňa násobiť tromi iba uhol k najbližšiemu poludniu, teda číslu 6, 18, alebo 30).

Jeffer

Úloha 7.1 – Šťastných deset (5b)

Zadání:

Lišák Riki denně sleduje záznam hry Šťastných deset. U šťastných 10 se losuje 20 čísel z rozsahu 1–80, opakovat se nemůžou, protože se vytahují z osudí a nevrací se tam. Na papírek si napíše tažených 20 čísel do řady za sebou, o řádek níž pak mezi každá dvě čísla napíše jejich rozdíl (celkem tedy 19 rozdílů). Pak zakroužkuje největší z těchto 19 rozdílů a papírek si uloží. Předpokládejme, že by se Riki takto bavil pár milionů let, a pak se rozhodl zjistit, jaké číslo zakroužkovával nejčastěji. Které číslo to nejspíše bude? V záznamu se uvádějí čísla od nejmenšího po největší.

Řešení:

Číslo, které Riki nejčastěji zakroužkuje, je 11. K této správné odpovědi dospěl jen Prof.$^{\mathrm{M}}$ Jan Musílek – velký potlesk! Jak to udělal? Pomocí počítače náhodně vylosoval 20 čísel z 80, přičemž pokud některé vytáhl podruhé, losoval znovu. Pak tato čísla setřídil (algoritmem Bubble Sort), prošel je a našel největší rozdíl mezi sousedy. To celé zopakoval 10^9-krát, zaznamenával výsledky a na konci udělal statistiku. Vyšlo mu, že nejčastěji padá číslo 11, a to v 14,6 % případů, což se od přesné hodnoty 14,527 % odchyluje o necelou desetinu procenta.

Podobným jednoduchým, ale účinným postupem, kterému se obvykle říká Monte Carlo, lze odhadovat např. neznámé pravděpodobnosti náhodných jevů a střední hodnoty náhodných veličin, a tyto odhady lze aplikovat na výpočet celé řady dalších věcí, například integrálů, intenzity elektrického pole, optimálních synoptických vah neuronové sítě apod.

Možná vás zaráží kvalita výsledku, přestože počet pokusů 10^9 je nesrovnatelně menší než počet možných tahů $3{,}53 \cdot 10^{42}$ klesá s rostoucí mocninou. Je to tím, že přesnost určení neznámé pravděpodobnosti nějakého jevu metodou Monte Carlo *nezávisí* na velikosti množiny jevů, ale pouze na počtu pokusů, které děláme, přičemž střední odchylka odhadované hodnoty typicky klesá s odmocninou z počtu těchto pokusů.

To platí, pokud pokusy simulujeme skutečně náhodně a rovnoměrně – proto jsou Monte Carlo metody citlivé na provedení pokusu a na kvalitu generátorů pseudonáhodných čísel. Lze například spočítat, že očekávaná odchylka četnosti nejlepšího pokusu v případě Janovy simulace je asi jen 0,001 % – lze tedy usuzovat, že větší chyba je způsobena nějakou nerovnoměrností při pokusech.

Nastíníme si ještě alternativní postup založený na myšlence tzv. *dynamického programování*. Zavedeme si funkci A na trojicích nezáporných celých čísel s následující definicí: $A(m, n, k)$ je počet n-prvkových posloupností nezáporných celých čísel se součtem m a hodnotami prvků nejvýše k. Pro tuto funkci lze odvodit vztahy (rozmyslete si):

$$
\begin{aligned}
A(0,n,k) &= 1, \text{ pro } n,k \geq 0\,, \\
A(m,0,k) &= 0, \text{ pro } m \geq 1, k \geq 0\,, \\
A(m,n,0) &= 0, \text{ pro } m \geq 1, n \geq 0\,, \\
A(m,n,k) &= \sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n-1} A(i,j,k)\,A(m-k-i,n-1-j,k-1) \text{ pro } m,n,k \geq 1
\end{aligned}
$$

a pomocí těchto vztahů lze hodnoty A rekurentně počítat. Pokud si všechny mezivýsledky ukládáme, má výpočet $A(m,n,k)$ časovou složitost $O(m^2n^2k)$ a paměťovou $O(mnk)$. Dále lze spočítat

$$
\begin{aligned}
C(k) &= \sum_{l=1}^{61}\sum_{n=0}^{61-l} A(n,19,k-1) \text{ pro } 1 \geq k \geq 61 \\
D(k) &= C(k) - C(k-1) \text{ pro } 2 \geq k \geq 61\,, \quad D(1) = C(1)
\end{aligned}
$$

a dokázat, že $D(k)$ je právě počet tahů Šťastných 10, při kterých Riki zakroužkuje číslo k. (Proč? Uvědomte si, že každý tah je určen nejmenším taženým číslem a posloupností rozdílů mezi sousedními čísly.) Tímto přístupem lze na mém domácím počítači (Celeron 1,2 GHz) získat exaktní výsledek během zlomku sekundy, zatímco Janův program na metodu Monte Carlo s miliardou pokusů by běžel odhadem 14 hodin (pokusy lze ovšem zrychlit). Na druhou stranu je obtížnější na něj přijít.

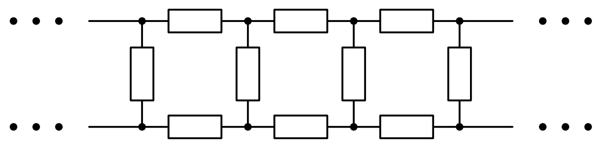
Výsledek Prof.[TM] Jana Musílka je krásným příkladem, že i jednoduchý postup pomocí počítače může dát použitelný výsledek, a experimentovat s počítači se vyplatí.

Jarda

Úloha 7.2 – Odpory (3b)

Zadání:

Mějme následující nekonečný odporový „žebřík“, v němž jeden rezistor má odpor R.



Jaký je odpor mezi uzlem na horní straně „žebříku“ a protějším uzlem na dolní straně? A jaký je odpor mezi dvěma sousedními uzly na horní straně?

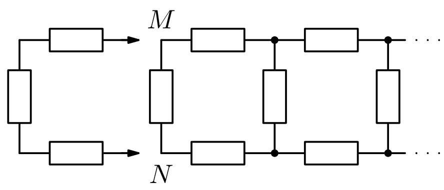
Řešení:

Nejprve spočteme odpor polovičního žebříku, který je nekonečný jen v jednom směru (viz obrázek r7.2.1). K tomu je vhodné si uvědomit jednu důležitou vlastnost nekonečně velkých čísel: Totiž když k nekonečnu přičteme jedničku (anebo obecně libovolné jiné konečné číslo), zůstane nekonečno pořád stejné. Tedy když k nekonečnému odporovému žebříku přidáme nebo ubereme konečný počet „příček", odpor žebříku se nijak nezmění, protože se nezmění ani samotný žebřík. Takže tak, jak je naznačeno na obrázku r7.2.1, k polovičnímu žebříku přidáme tři rezistory. Pokud si odpor polovičního nekonečného žebříku mezi body M a N označíme R_∞, můžeme napsat rovnici

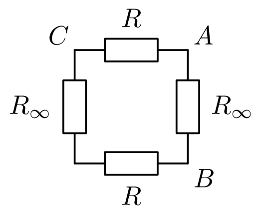
$$\frac{1}{R_\infty} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + R_\infty + R}\,.$$

Tedy po úpravě

$$R_\infty^2 + 2RR_\infty - 2R^2 = 0\,,$$
$$\left(\sqrt{3} - 1\right) R = R_\infty\,.$$



Obr. r7.2.1



Obr. r7.2.2

Se znalostí odporu R_∞ můžeme celý žebřík překreslit tak, jak je na obrázku r7.2.2. Otázkami ze zadání jsou pak hodnoty odporu mezi body A a B, resp. mezi body A a C. Ty už je možné spočítat podle jednoduchých pravidel pro sčítání odporů:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_\infty} + \frac{1}{2R + R_\infty}\,,$$
$$R_{AB} = \frac{R_\infty(2R + R_\infty)}{2R + 2R_\infty}\,,$$
$$R_{AB} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} R = \frac{\sqrt{3}R}{3}\,.$$

Odpor mezi body A a C je:

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + 2R_\infty}\,,$$
$$R_{AC} = \frac{R(R + 2R_\infty)}{2R + 2R_\infty}\,,$$
$$R_{AC} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) R\,.$$

Marble

Úloha 7.3 – Karty (4b)

Zadání:

Je dána tabulka o rozměrech 3×3 a 9 karet. Na jednotlivých kartách jsou postupně napsána následující čísla $a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ Dva hráči střídavě pokládají nepoužité karty na prázdná políčka v tabulce. Poté, co hráči umístí všechny karty, první hráč sečte šest karet, které jsou umístěny v horním a dolním řádku, druhý hráč sečte šest karet, které leží v pravém a levém sloupci. Vyhrává ten hráč, jehož součet je větší. Který z hráčů vyhraje?

Řešení:

Buď vyhraje první hráč, nebo hra skončí nerozhodně.

Očíslujme tabulku po řádcích zleva doprava čísly 1 až 9. Hodnoty karet na políčcích 1, 3, 7 a 9 se započítávají oběma hráčům, nejsou proto pro vítěznou strategii důležité. Rozhodují karty na políčcích 2, 4, 6 a 8. Oba hráči to ví a snaží se sobě přidat co nejvíce a soupeři co nejméně. Jestliže $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$, první hráč položí kartu s a_9 (aby si přidal co nejvíce bodů) na políčko 2 (i kdyby mu soupeř dal na pole 8 kartu a_1, bude mít v součtu na rozhodujících polích více) a ve druhém tahu položí kartu a_2 nebo a_1 na pole 4 nebo 6 (aby co nejvíce uškodil soupeři).

Jestliže $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$, první hráč položí kartu s a_1 na políčko 4 a v druhém tahu umístí a_9 nebo a_8 na políčko 2 nebo 8. Jestliže $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, může se první hráč řídit kteroukoli z výše uvedených strategií.

Teka

Úloha 7.4 – Vajíčko (3b)

Zadání:

Vajíčko padalo volným pádem (odpor vzduchu zanedbejte). Za poslední půl sekundy pádu před dopadem urazilo polovinu celé své dráhy. Jak dlouho padalo? Z jaké výšky padalo? Jak výsledky závisí na g?

A bonusová otázka … odkud padalo a kam dopadlo? :-)

Řešení:

Tato úloha patří k těm, jejichž zadání je mnohem elegantnější než jejich řešení. Šlo hlavně o to použít správně rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Označme h výšku, ze které vejce padalo, a t dobu, po kterou padalo. t' (zde 0,5 s) pak budiž doba, za kterou vejce urazilo *druhou* polovinu celkové dráhy. Z celkového pádu pak stačí vyjádřit

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

a z první části pádu

$$\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}g(t - t')^2\,.$$

Po zkombinování těchto dvou rovnic a vykrácení všudepřítomného g dostaneme kvadratickou rovnici

$$0 = \frac{1}{2}t^2 - 2tt' + t'^2\,.$$

Ta má sice dvě řešení, ale jen jedno dává smysl (druhé je méně než t').

Toto řešení je

$$t = t'(2 + \sqrt{2}) \doteq 1{,}7\,\mathrm{s}\,,$$

výšku pádu h dostaneme dosazením:

$$h = 3 + 2\sqrt{2}gt'^2 \doteq 14{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Z posledních vzorců je rovnou vidět, že dráha závisí na gravitačním zrychlení g lineárně a že čas na něm nezávisí vůbec. Na Měsíci by vejce padalo stejně dlouho, jen by urazilo sotva něco přes dva metry.

Kde se tam vejce vzalo? Jak napsal Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha, nejspíše jej právě snesla slepice obývající kurník zavěšený na kladce ve výšce 4. patra `:-)`. Na Měsíci ho mohl do mělkého kráteru upustit kosmonaut, který si právě uvědomil, že i kdyby se mu povedlo vejce uvařit bez ohně, stejně by ho pak kvůli skafandru nemohl sníst.

Tomáš

Výsledková listina z 6. čísla

				Úlohy										
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t2**	**t3**	**t4**	**t6**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	4.	101	5	3	2	3	7				0	20	75
2.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	135											70
3–4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Florianová	3.	61		1	3	1				2	0	7	61
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	2.	61						0				0	61
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	47	2								0	2	47
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Halaga	4.	38							5			5	38
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	35			2	3					1	6	35
8.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	3.	206											32
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Klavík	4.	27											27

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy									$\sum_0$	$\sum_1$
				r1	r2	r3	r4	t2	t3	t4	t6	+		
10.	Dr.^{MM} Marek Basovník	4.	57					6					6	22
11–12.	Dr.^{MM} Radim Pechal	4.	79	5			3					0	8	20
	Mgr.^{MM} Pavla Zárubová	2.	20											20
13–14.	Bc.^{MM} Jakub Marian	3.	18											18
	Mgr.^{MM} Alžběta Prokopová	2.	18	0		4	2					0	6	18
15–16.	Bc.^{MM} Anita Gregorová	4.	17											17
	Bc.^{MM} Kristýna Krejčová	4.	17											17
17.	Bc.^{MM} Klára Krejčíčková	3.	16											16
18.	Dr.^{MM} Tereza Pechová	4.	54											15
19.	Mgr.^{MM} Peter Smolárik	1.	14			3	3					1	7	14
20–23.	Dr.^{MM} Matěj Korvas	4.	72											13
	Mgr.^{MM} Miroslav Klimoš	2.	37											13
	Bc.^{MM} Petr Dlabaja	4.	13											13
	Bc.^{MM} Marek Nečada	3.	13	5		4	3					1	13	13
24–25.	Bc.^{MM} Michal Petrucha	2.	12											12
	Bc.^{MM} Dušan Rychnovský	3.	12											12
26–28.	Bc.^{MM} Jan Vaňhara	2.	14											11
	Bc.^{MM} Jana Fojtová		11											11
	Bc.^{MM} Michal Rolínek	4.	11											11
29–31.	Bc.^{MM} Filip Děchtěrenko	4.	10											10
	Bc.^{MM} Jakub Töpfer	2.	10											10
	Bc.^{MM} Martin Volf	1.	10											10
32–33.	Hana Bendová	4.	9											9
	Kryštof Touška	4.	9											9
34.	Lenka Švidrnochová	2.	9											8
35.	David Navrkal	3.	7											7
36.	Juraj Hartman	3.	6											6
37.	Mgr.^{MM} Marek Pecha	1.	44											5
38.	Irena Pavlíčková	2.	4											4
39.	Julie Musilová	2.	3											3
40–41.	Jana Baxová	1.	2			2						0	2	2
	Pavel Makovec	2.	2											2
42.	Zbyněk Klikoš	3.	1											1

Výsledková listina ze 7. čísla

				Úlohy							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t4**	**+**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	4.	101								75
2.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	139		0	1	3		0	4	74
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Florianová	3.	68	0	0	4	3		0	7	68
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	2.	61								61
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	52		2	1	1		1	5	52
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Halaga	4.	48	0				10	0	10	48
7.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	3.	216	5		4			1	10	42
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	41			2	3		1	6	41
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Klavík	4.	27								27
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	4.	57								22
11–14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	4.	79								20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	2.	20			1	1		0	2	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	1.	20		3	1	1		1	6	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	2.	20								20
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	3.	18								18
16–17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Anita Gregorová	4.	17								17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Krejčová	4.	17								17
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	3.	16								16
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	4.	54								15
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	2.	14		0	2	2		0	4	14
21–25.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	4.	72								13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	2.	37								13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dlabaja	4.	13								13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	3.	13								13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Petrucha	2.	13				1		0	1	13
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dušan Rychnovský	3.	12								12
27–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	2.	14								11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Fojtová	.	11								11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Rolínek	4.	11								11
30–31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Děchtěrenko	4.	10								10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	10								10
32–35.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	1.	48				3		1	4	9
	Hana Bendová	4.	9								9
	Ján Bogár	1.	9	0	2	2	3		2	9	9
	Kryštof Touška	4.	9								9

				Úlohy							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t4**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
36–37.	Lenka Švidrnochová	2.	9								8
	Jana Baxová	1.	8			2	3		1	6	8
38.	David Navrkal	3.	7								7
39.	Juraj Hartman	3.	6								6
40.	Irena Pavlíčková	2.	4								4
41.	Julie Musilová	2.	3								3
42.	Pavel Makovec	2.	2								2
43.	Zbyněk Klikoš	3.	1								1

Výsledková listina XIII. ročníku

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	4.	101	7	6	5	26	11	20		75
2.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	139	24	9	4	13	20		4	74
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Florianová	3.	68	13	14	6	13	8	7	7	68
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	2.	61	19	15	11	16		0		61
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	52	12	4	9	4	16	2	5	52
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Halaga	4.	48	13			15	5	5	10	48
7.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	3.	216	13		12	7			10	42
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	41		7	6	11	5	6	6	41
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Klavík	4.	27			6		21			27
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	4.	57				16		6		22
11–14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	4.	79	10				2	8		20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Prokopová	2.	20			7		5	6	2	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Smolárik	1.	20					7	7	6	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	2.	20	2	2	11	2	3			20
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	3.	18	10				8			18
16–17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Anita Gregorová	4.	17	2	3	3	3	6			17
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristýna Krejčová	4.	17					17			17
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	3.	16	3		10		3			16
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	4.	54	2		1	4	8			15
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Töpfer	2.	14					10		4	14
21–25.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	4.	72	13							13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	2.	37	9				4			13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dlabaja	4.	13	13							13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Nečada	3.	13						13		13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Petrucha	2.	13	4			8			1	13
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dušan Rychnovský	3.	12	4	3			5			12
27–29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	2.	14	7	4						11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Fojtová	.	11	7		2	2				11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Rolínek	4.	11	8	3						11
30–31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Filip Děchtěrenko	4.	10					10			10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Volf	1.	10	5	1	2	1	1			10
32–35.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	1.	48	0	1	4				4	9
	Hana Bendová	4.	9					9			9
	Ján Bogár	1.	9							9	9
	Kryštof Touška	4.	9	6				3			9

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Číslo 1	2	3	4	5	6	7	$\sum_1$
36–37.	Lenka Švidrnochová	2.	9	8							8
	Jana Baxová	1.	8						2	6	8
38.	David Navrkal	3.	7	7							7
39.	Juraj Hartman	3.	6	1		2		3			6
40.	Irena Pavlíčková	2.	4	2			2				4
41.	Julie Musilová	2.	3	2		1					3
42.	Pavel Makovec	2.	2	2							2
43.	Zbyněk Klikoš	3.	1	1							1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.