M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIII číslo 7

Termín odeslání: 1. 6. 2007

Ahoj kamarádky a kamarádi,

když se podíváte z okna, vidíte, že venku už je téměř léto. Ještě pár stupínků a vyrazíte na koupaliště. Sluníčko jen volá jít ven. Tak si s sebou vezměte nové číslo vašeho časopisu M&M, na čerstvém vzduchu se přemýšlí lépe ;-). A dejte si záležet, toto zadání je letos poslední.

Chtěli bychom Vás také pozvat na Den dětí na MFF, který se koná pochopitelně 1. června. Bude tam na Vás čekat spousta zajímavých přednášek, pokusů a jiných aktivit, a samozřejmě se tam setkáte se spoustou kamarádů.

Vaši organizátoři

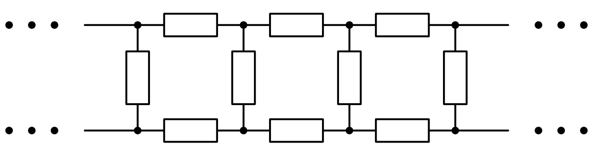
Zadání úloh

Úloha 7.1 – Šťastných deset (5b)

Lišák Riki denně sleduje záznam hry Šťastných deset. U šťastných 10 se losuje 20 čísel z rozsahu 1–80, opakovat se nemůžou, protože se vytahují z osudí a nevrací se tam. Na papírek si napíše tažených 20 čísel do řady za sebou, o řádek níž pak mezi každá dvě čísla napíše jejich rozdíl (celkem tedy 19 rozdílů). Pak zakroužkuje největší z těchto 19 rozdílů a papírek si uloží. Předpokládejme, že by se Riki takto bavil pár milionů let, a pak se rozhodl zjistit, jaké číslo zakroužkovával nejčastěji. Které číslo to nejspíše bude? V záznamu se uvádějí čísla od nejmenšího po největší.

Úloha 7.2 – Odpory (3b)

Mějme následující nekonečný odporový „žebřík“, v němž jeden rezistor má odpor R.



Jaký je odpor mezi uzlem na horní straně „žebříku“ a protějším uzlem na dolní straně? A jaký je odpor mezi dvěma sousedními uzly na horní straně?

Úloha 7.3 – Karty (4b)

Je dána tabulka o rozměrech 3×3 a 9 karet. Na jednotlivých kartách jsou postupně napsána následující čísla $a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ Dva hráči střídavě pokládají nepoužité karty na prázdná políčka v tabulce. Poté, co hráči umístí všechny karty, první hráč sečte šest karet, které jsou umístěny v horním a dolním řádku, druhý hráč sečte šest karet, které leží v pravém a levém sloupci. Vyhrává ten hráč, jehož součet je větší. Který z hráčů vyhraje?

Úloha 7.4 – Vajíčko (3b)

Vajíčko padalo volným pádem (odpor vzduchu zanedbejte). Za poslední půl sekundy pádu před dopadem urazilo polovinu celé své dráhy. Jak dlouho padalo? Z jaké výšky padalo? Jak výsledky závisí na g?

A bonusová otázka ... odkud padalo a kam dopadlo? :-)

Řešení témat

Téma 1 – Čokoládování

K tomuto tématu přišlo hned několik příspěvků. Mgr.[M] Petr Pecha reagoval na článek Prof.[M] Jana Musílka a vylepšil množství čokolády rozmístitelné na stromy se zachováním nepočokoládovatelnosti. Redakčně upravený příspěvek Doc.[M] Alžběty Pechové otiskujeme spolu s podrobným článkem Mgr.[M] Pavla Klavíka níže.

Strategie nenažraného hráče

Doc.[M] Alžběta Pechová

Zabývala jsem se tím, jak z libovolného rozmístění čokolády sníst co možná nejvíce kousků čokolády. Uvažovala jsem při tom několik druhů grafů. U všech grafů platí, že poslední kousek není nikdy možné sníst a žádnou čokoládu nelze sníst ani z grafu s nanejvýš jedním kouskem na každém vrcholu. *Čokoládové číslo* udává počet kousků čokolády na jednotlivých vrcholech.

Úplný graf

Sníst všechnu čokoládu na grafu (až na poslední čtvereček) můžeme, pokud bude existovat alespoň jeden vrchol s čokoládovým číslem alespoň 2. Z tohoto vrcholu sním nějakou čokoládu a zvýším tím čokoládové číslo libovolnému vrcholu (hrany vedou mezi všemi).

Na úplném grafu tedy lze dosáhnout snědení maximálního počtu s podmínkou, že existuje vrchol s čokoládovým číslem alespoň 2.

Pozn. red.: Tohle není úplně přesné, pokud bych měl v grafu vrchol se třemi kousky čokolády a ostatní prázdné, nelze sníst více než jeden kousek. Autorka nepopisuje strategii, jak se takovému nepříjemnému stavu vyhnout.

Kružnice

Pokud je na všech vrcholech čokoláda, začneme na libovolném vrcholu s největším čokoládovým číslem, sníme jeden kousek, přesuneme jej doprava a tam pokračujeme dokola, dokud nebude mít nějaký vrchol číslo 0.

Z výchozího vrcholu se vydám směrem, ve kterém leží více vrcholů mezi výchozím a prázdným vrcholem. Potkám-li cestou *smyčku*, tedy dva vrcholy s čokoládovými čísly 2, je možné je vyjíst a potom pokračovat původním směrem. Tím se vyhnu tomu, že by mi mohly zůstat dva osamocené vrcholy s jedním kouskem čokolády.

Pozn. red.: Tento postup lze možná zobecnit na delší posloupnosti typu 2–3–3–. . . –3–2. Z popisu Doc.^M Pechové bohužel ale není jasné, co dělá na okrajích nenulových úseků, ani to, že je tento postup alespoň blízký optimálnímu. Nejasný příklad je třeba –2–6–2–2–0–0–0–0–, tento lze maximálně vyjíst, ale několik interpretací popsaného postupu nechá 2 kostičky.

Cesta

Vrcholy s alespoň dvěma kousky čokolády označíme jako *výchozí*. Úseky vrcholů s jedním kouskem čokolády označíme počtem sousedících výchozích vrcholů. Z každého výchozího vrcholu vybereme směr, kterým se budeme postupným jedením pohybovat po úsecích s jedním kouskem čokolády. Pokud dva výchozí vrcholy sousedí, rozjíme se od nich v obou směrech. Toto opakujeme, dokud existují nějaké výchozí vrcholy.

Je obecně výhodné vytvářet výchozí vrcholy sudého stupně, tyto lze za určitých okolností úplně vyjíst.

Pozn. red.: Popsané návrhy strategií možná nejsou optimální ani přesně neurčují postup v některých sporných příkladech, nepodařilo se nám ale najít protipříklady, kdy tyto strategie nechají nesnědené libovolně velké množství zatímco optimální by nechala jen jediný kousek.

Stručný úvod do teorie her s čokoládou

Mgr.^M Pavel Klavík

Pepa s Frantou se takhle domluvili, že si zahrají jednu hru. Každý z nich si vybere nějaký vrchol v grafu. Poté si spočítají, kolik kousků čokolády na něj budou muset umístit, aby byl graf počokoládovatelný. Vyhrává ten, který potřebuje méně kousků. Franta, to je schopný hráč, proto vždy vybere nejlepší vrchol. Zato Pepa je strašný smolař a vždy zvolí ten nejhorší. Jaké množství čokolády budou potřebovat? Jaké vrcholy budou vybírat?

V dalším textu předpokládejme, že všechny grafy jsou souvislé. Pokud by nebyly souvislé, neexistoval by vrchol, z kterého by byly počokoládovatelné. Hru by samozřejmě šlo upravit tak, že by Pepa s Frantou vybírali v každé komponentě jeden vrchol, ale pak se můžeme zabývat postupně pouze jednotlivými komponentami a tato varianta pro nás tedy není zajímavá.

Označme si P vrchol, který si vybral Pepa, a F vrchol, který si zvolil Franta. $P_\oplus$ a $F_\oplus$ bude minimální počet kousků čokolády, které je třeba do vrcholu P a F

umístit, aby byl graf počokoládovatelný. Dále si mohou Pepa s Frantou zahrát i drobnou modifikaci hry a místo $P_\oplus$ a $F_\oplus$ porovnávat minimální počet kousků čokolády, které je třeba do vrcholu P a F umístit, aby šlo počokoládovat celý graf najednou, tedy aby po konečně mnoha krocích zůstal v každém vrcholu alespoň jeden kousek čokolády (a protože hledáme minimální množství, pak můžeme dokonce omezit podmínku na právě jeden kousek čokolády). Taková čísla si označme $P^\otimes$ a $F^\otimes$.

Popišme si nejprve některé obecné vlastnosti Pepova a Frantova výběru. Zjevně $P_\oplus \geq F_\oplus$ a $P^\otimes \geq F^\otimes$. Také platí tyto nerovnosti: $P_\oplus \leq P^\otimes$ a $F_\oplus \leq F^\otimes$. Označme si list takový vrchol grafu, který je stupně jedna, tedy je spojen s právě jedním vrcholem. Dále můžeme z grafu vypustit všechny smyčky a multihrany[1], tyto hrany nám určitě při počokoládovávání nepomohou. Dokažme si následující věty:

Věta 1: *Vrchol F, který si Franta zvolí, nikdy nebude list pro grafy o více jak dvou vrcholech.*

Důkaz: Graf o dvou vrcholech musí mít oba vrcholy listy, proto si Franta nemůže jiný zvolit. Graf s jedním či žádným vrcholem nemá z hlediska počokoládovavání smysl uvažovat. Důkaz této věty je jednoduchý. Pro spor předpokládejme, že si Franta vybral list, označme ho A. Platí, že $F_\oplus \geq 4$. Pokud by si však Franta vybral sousední vrchol B, který není listem, potom by stačilo $F_\oplus$ poloviční. Proč? Protože vzdálenost všech ostatních vrcholů od B je o jedna menší jak vzdálenost od A, tedy potřebujeme pouze polovinu kousků čokolády. A na počokoládování listu A nám stačí pouhé 2 kousky čokolády, které určitě budeme mít ve vrcholu B. Tím jsme nalezli spor a tedy věta platí.

Naproti tomu obrácená věta, že Pepa si vždy zvolí list, pokud je to možné, neplatí. Snadno nalezneme protipříklad. Na vrchol zavěsme list a dvě kružnice délky čtyři. Pokud by si Pepa zvolil onen list, bylo by $P_\oplus = 2^3 = 8$. Pepa si však ve vší prozřetelnosti vybere správně protilehlý vrchol jedné z kružnic a dostává $P_\oplus = 2^4 = 16$. Pepa je totiž tak mazaný. Nyní se pokusme udělat nějaké odhady čísel $P_\oplus$, $P^\otimes$, $F_\oplus$ a $F^\otimes$.

Věta 2 (O omezení shora): *Pro libovolný graf tvořený N vrcholy jsou omezení shora takováto: $P_\oplus \leq 2^{N-1}$, $P^\otimes < 2^N$, $F_\oplus \leq 2^{\lceil (N-1)/2 \rceil}$ a $F^\otimes < 2^{\lceil (N-1)/2 \rceil + 2}$.*

Důkaz: Nejprve se zaměřme na jednodušší důkazy odhadů čísel $P_\oplus$ a $F_\oplus$. Nejdelší cesta v grafu má délku maximálně $N - 1$, pak na ní leží všech N vrcholů a připojením dalšího by se nám vrcholy opakovaly, tedy nebyla by to cesta. Jestliže si zvolíme libovolný vrchol na nejdelší cestě, potom jsou od něj všechny vrcholy vzdáleny nejvýše $N-1$, tedy z toho jasně plyne, že $P_\oplus \leq 2^{N-1}$. Pepa by si tedy určitě vybral jeden z okraje nejdelší cesty, ale Franta, všemi mastmi mazaný, si zvolí její prostředek. Zde opět platí, že zvolený vrchol je od všech vrcholů vzdálen nejvýše $\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$ hran. Kdyby existoval vzdálenější vrchol, potom bychom dostali spor s tím, že jsme si vybrali střed nejdelší cesty,

[1] Někdy se hodí uvažovat tzv. multigrafy, kde může vést více hran mezi týmiž dvěma vrcholy a hrana může mít oba konce v jediném vrcholu.

tato nejdelší cesta by totiž musela jít prodloužit. Tedy také určitě platí, že $F_\oplus \leq 2^{\lceil (N-1)/2 \rceil}$. Nyní se podívejme na dva zbývající odhady. K tomu budeme potřebovat dokázat ještě několik jednoduchých vět.

Věta 3: *V grafu o N vrcholech existuje maximálně k vrcholů, jejichž vzdálenost od vybraného vrcholu A je větší či rovna $N - k$.*

Důkaz: Místo libovolného grafu můžeme uvažovat strom. Pokud z obecného souvislého grafu vypustíme určité vrcholy, dostaneme strom. Nejkratší cesty z jednotlivých vrcholů můžeme tak jenom prodloužit, tedy pokud popisovaná věta platí pro stromy o N vrcholech, pak platí pro libovolný graf o N vrcholech.

Dokažme si větu indukcí. Pro strom se dvěma vrcholy a jednou hranou zjevně platí. Nechť platí pro M vrcholů, poté musí platit i pro $M + 1$ vrcholů. Pokud nový vrchol A připojíme k B, potom vytvoříme ke všem cestám k vrcholu B jejich o jedna delší variantu. Tedy pro vrchol A popisovaná věta platí. Pokud si zvolíme jiný vrchol, potom nově máme cestu do vrcholu A. Tato cesta má určitě délku nejvýše M hran. Tedy počty cest jednotlivých délek zůstanou až na jednu nezměněné, ta se zvětší o jedničku. Ale o jedna se zvětší i počet vrcholů v grafu a proto věta musí platit i pro $M + 1$ vrcholů.

Dokončení důkazu věty 2: Nyní se vraťme zpět k důkazu věty 2. Pepa si vybral vrchol P, využijeme větu 3. Podle ní nejvýše jeden vrchol je vzdálen $N - 1$ hran, na jeho pokrytí potřebujeme ve vrcholu P mít 2^{N-1} kousků čokolády. Dále můžeme mít až 2 vrcholy vzdálené $N - 2$ hran, na jejich pokrytí potřebujeme 2^{N-1} kousků čokolády, ale potom už nemůžeme mít vrchol vzdálený $N - 1$ hran. Tak to platí i pro vrcholy vzdálené $N - 3$ a dále. Tedy největší součet dostaneme, jestliže máme jeden vrchol vzdálený $N - 1$ hran, jeden vzdálený $N - 2$ hran a tak dále. Bude to součet konečné geometrické řady s prvním členem 1 (jednu kostičku potřebujeme na pokrytí vrcholu P) a koeficientem 2. Dosadíme do vzorečku a dostáváme:

$$P^\otimes = a_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 < 2^n \,.$$

Takže i nerovnost s $P^\otimes$ platí. Zbývá dokázat omezení pro $F^\otimes$. Využijeme jednoduchého triku a z celého grafu uděláme strom. Za kořen si vybereme vrchol F a graf rozdělíme na jednotlivé komponenty podle synů vrcholu F a jejich podstromů. Jestliže má F pouze dva syny, nejdelší cesta z F do listů jednotlivých podstromů měří nejvýše $\lceil \frac{N-1}{2} \rceil$ a $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ (protože F leží na nejdelší cestě v grafu). Tedy budeme potřebovat nejvýše $2 \cdot 2^{\lceil (N-1)/2 \rceil + 1} - 2$ kousků čokolády, což je menší jak dokazovaný odhad.

Nyní indukčně přidávejme další vrcholy. Přitom neustále musí být zachována nejdelší cesta v grafu. Vrcholy budeme přidávat a tvořit další podstromy u vrcholu F, dva, skrz které vede cesta, necháme nezměněné. Nechť věta platí pro M vrcholů, dokažme její správnost i pro $M + 1$ vrcholů. Jestliže přidáváme sudý vrchol ke grafu, potom se odhad nemění. Tento vrchol však můžeme přidat nejvýše do vzdálenosti $M - N$ od vrcholu F a tedy na jeho pokrytí bude potřeba nejvýše 2^{M-N} kousků čokolády. Pro $M = N + 1$ určitě dva další kousky čokolády máme a poté je vždy $2^{M-N} < 2^{\lceil (N-1)/2 \rceil + 1}$, za každé dva přidané vrcholy se nám odhad zvětší dvojnásobně, počet dalších kousků čokolády je výrazně menší. Z toho plyne, že i poslední odhad je správný.

Odhady zdola je již jednoduché vytvořit a dokázat. $P_\oplus$ a $F_\oplus$ je nejméně dva, $P^\otimes$ a $F^\otimes$ je rovno nejméně $2N-1$. Důkaz ponechejme na čtenáři jako malé cvičení.

Pozn. red.: Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Pavel Klavík popsal odhady a jejich důkazy na velké úrovni preciznosti. Se všemi jeho větami souhlasíme, znění některých odhadů by bylo možné zlepšit zavedením centra grafu, což je množina vrcholů s nejmenší vzdáleností do od nich nejvzdálenějších vrcholů a průměru grafu, což je vzdálenost dvou nejvzdálenějších vrcholů. Průměr stromu Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Klavík zmiňuje, když píše o délce nejdelší cesty v něm.

Gavento

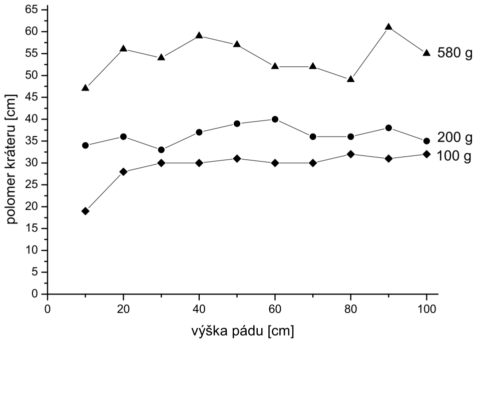
Téma 2 – Krátery

K tomuto tématu nám přišlo několik příspěvků o padání předmětů do hlíny, z nichž ani jeden nebyl vhodný k zveřejnění tak, jak byl. Proto uvádíme pouze výsledky jejich snažení. Zato příspěvek sester Pechových se povedl, a proto ho otiskujeme.

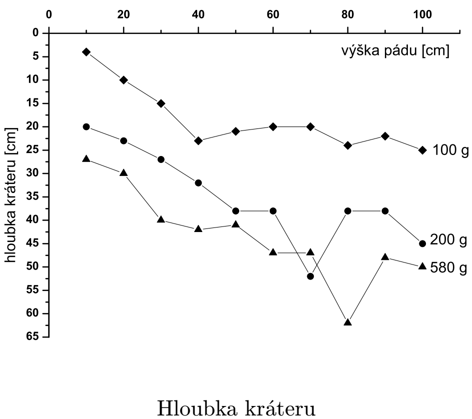
Rozměry kráteru

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha

Autor analyzoval, jak se mění hloubka kráteru a poloměr kráteru s hmotností dopadajícího tělesa a výšky, ze které těleso padá. Grafy jsme v redakci přepracovali, aby měly větší vypovídací hodnotu. Zejména jsme grafy pro různé hmotnosti sjednotili do jednoho.



Poloměr kráteru



Hloubka kráteru

Analýza redakce (tedy to, co měl udělat autor): Z grafů lze vidět, že s rostoucí hmotností roste jak poloměr kráteru, tak hloubka kráteru. Graf ale také ukazuje, že poloměr kráteru s rostoucí výškou (a tedy dopadovou rychlostí) prakticky neroste. Je to určitě zajímavý experimentální výsledek. Hloubka kráteru naopak s rostoucí výškou roste.

Hloubka kráteru

Bc.MM Dušan Rychnovský

Autor se snažil teoreticky odvodit, na čem a jak závisí hloubka kráteru vzniklého dopadem kuličky. Myslíme si, že se mu to podařilo celkem zdařile.

Hloubka kráteru je rovna brzdné dráze dopadlé kuličky. Přitom na ni působí brzdným účinkem odporová síla materiálu, do kterého se boří.

$$s = \frac{v_0^2}{2a}\,,$$

kde a je zrychlení působící na kuličku. Dosazením za $a = F/m$ dostaneme

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{F} = \frac{E_{\text{kin.}}}{F}\,.$$

Protože kinetická energie je rovna energii potenciální, platí

$$s = \frac{mhg}{F}\,. \tag{t2.1}$$

Závěr

Hloubka kráteru tedy závisí přímo úměrně na výšce h, odkud kámen pouštíme, hodnotě gravitačního zrychlení g a hmotnosti m kuličky. Zároveň závisí nepřímo úměrně na odporové síle materiálu, kterou se mi zatím nepodařilo odvodit. [2]

Vaření krupičné kaše

Doc.MM Alžběta a Dr.MM Tereza Pechovy

Pokusem jsme se snažily zjistit, zda při vaření krupicové kaše vznikají krátery. Poté jsme přemýšlely, co může být příčinou jejich vzniku. Nakonec jsme provedly srovnání námi pozorovaných kráterů v krupicové kaši a kráterů vzniklých dopadem kamenu do hlíny.

Na pokus jsme použily krupicovou kaši, hrubou pšeničnou, kterou jsme vařily v litru mléka. Téměř uvařenou kaši jsme přestaly míchat, a pozorovaly jsme tvorbu vzduchových bublin, které prorážely na povrch kaše, a tím vznikaly

[2] *Pozn. red.: Jak asi vypadá odporová síla? Je konstantní, nebo se s časem, s hloubkou či materiálem mění? Vzorec (t2.1) platí pouze pro konstantní sílu F. Jak budou vypadat rovnice, jestliže síla bude záviset na čase?*

krátery. Vznikaly velmi rychle a také velmi rychle zanikaly, takže nebylo možné přesně změřit jejich velikost, odhadujeme jejich průměr asi na 1 cm. Vzhledem k tomu jsme se při pozorování zaměřily hlavně na tvar kráterů.

Vznik bublin v krupicové kaši

Při varu krupičné kaše dochází k tvorbě bublin páry. Tyto bubliny zvětšují svůj objem a vznikají tak větší bubliny, než je tomu např. u vody, protože krupičná kaše má větší viskozitu, a tedy na její proražení je potřeba větší bublina páry.

Tvar kráterů vzniklých pádem kamenu do hlíny je rozdílný od tvaru kráteru vzniklého při vaření krupicové kaše, a to proto, že je rozdílný způsob jejich vzniku. Kráter od kamene je otisk kamene, má tedy jeho přibližný tvar. Takto vzniklý kráter se vždy zužuje směrem dolů.

Velká bublina páry vznikne v krupicové kaši tak, že bublina stoupá nahoru dokud se nedotkne povrchu, a cestou nová pára vniká do ní, místo aby vytvořila malou bublinu. V místě dotyku, což je nejtenčí místo mezi bublinou a okolním vzduchem, vzduch prorazí vrstvičku kaše a unikající vzduch vytvoří kráter. Nejužší místo kráteru je na jeho vrchu. Domníváme se, že vnitřní tvar kráteru bude koule, neboť bude mít tvar po vzduchové bublině.

Bzučo

Téma 3 – Zhasínání světýlek

Tématka se zhostili jen dva řešitelé. Oba správně zaznamenali klíčové pozorování: *výsledek nezávisí na pořadí přepínání spínačů, ale jen na paritě počtu přepnutí jednotlivých přepínačů.* Rozžíhání a zhasínání světýlek lze tedy dobře popisovat pomocí sčítání a násobení v tělese Z_2 (počítání modulo 2) – přepnutí světýlka znamená přičtení jedničky. Bc.ᴹᴹ Kristýna Krejčová zaslala funkční program na řešení úlohy metodou rekurzivního prohledávání všech možností, tzv. *backtracking*. Bohužel, prohledávání všech možností má exponenciální složitost ($O(2^{mn})^3$ pro obdélníkovou tabulku $m \times n$), což znamená, že je v praxi pro větší tabulky (v případě Kristýnina programu už 5×4) nepoužitelné.

Popíšeme si nyní algoritmus řešení pro obdélníkové tabulky $m \times n$ s libovolným počátečním rozložením světýlek v čase $O(mn \min(m, n))$. Uvažujme matice $Z, P \in Z_2^{m\times n}$, kde prvky Z označují, zda bylo dané světýlko na začátku rozsvícené, a prvky P značí, zda bude příslušný přepínač přepnut. Označíme sloupce matic Z a P jako vektory $z_1, \dots, z_n$ a $p_1, \dots, p_n$. Buď M matice $m \times m$ s prvky $m_{ij} = 1$ pro $|i - j| \le 1$ a $m_{ij} = 0$ jinak (tzv. třídiagonální matice). Z požadavku, aby na konci byla všechna světla vypnutá pak dostáváme

[3] $O(f(m, n, \dots))$ v teoretické informatice označuje, jak se doba běhu (případně spotřeba paměti) programu mění pro různé velikosti vstupů. Měřit nebo počítat přesné časy je velmi obtížné a velmi to závisí na použitém jazyku, kompilátoru a počítači. $O(2^{mn})$ například znamená, že pokud pro $m = n = 1$ poběží program 1 ms, pro $m = n = 6$ poběží 19 hodin a už pro $m = n = 7$ by poběžel 17 let.

rovnice

$$\begin{aligned} Mp_1 + p_2 &= z_1\,, \\ p_1 + Mp_2 + p_3 &= z_2\,, \\ &\vdots \\ p_{n-1} + Mp_n &= z_n\,. \end{aligned}$$

To je tzv. soustava s blokově třídiagonální maticí. Lze ji vyřešit nejlépe tak, že vyjádříme postupně vektory $p_2, \ldots, p_n$ z vektoru p_1 pomocí prvních $n-1$ rovnic a dosadíme do poslední rovnice. Dostaneme pak následující rekurentní schéma výpočtu:

$$\begin{aligned} &A_0 = 0\,, b_0 = 0\,, A_1 = I_m\,, b_1 = 0\,, \\ &A_{i+1} = MA_i + A_{i-1}\,, b_{i+1} = Mb_i + b_{i-1} + z_i\,, i = 1\,, \ldots, n\,, \\ &p_0 = 0\,, p_1 = A_{n+1}^{-1} b_{n+1}\,, \\ &p_{i+1} = Mp_i + p_{i-1} + z_i\,, i = 1\,, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

Násobení MA_i má složitost $O(m^2)$. (Rozmyslete si, proč tomu tak je. Kdyby M byla obecná matice, bylo by to $O(m^3)$.) Řešení soustavy s maticí A_{n+1} Gaussovou eliminací má složitost $O(m^3)$. (Ano, ta, kterou znáte. Postup je stejný, jen v tomto případě nemusíte dělit a násobit, protože jediné nenulové číslo je jednička.) Celková složitost tedy vychází na $O(m^2 n + m^3)$. Pokud si před výpočtem obrátíme tabulku tak, aby $m \le n$, vychází časová složitost na $O(mn \min(m, n))$ a paměťová složitost na $O(mn)$.

Jarda

Řešení úloh

Úloha 5.1 – Kostky (5b)

Zadání:

Máte tři šestistěnné kostky a vaším úkolem je zvolit na nich počty teček tak, abyste měli při následující hře co největší pravděpodobnost výhry. (Počet teček na každé stěně může být libovolné přirozené číslo bez dalších omezení.)

Hraje se tak, že soupeř si vybere jednu kostku, se kterou hází, a pak si ze zbylých dvou vybíráte vy. Kdo hodí více, vyhrává.

Řešení:

Tato úloha se ukázala být mnohem těžší, než zamýšlel její autor. Dokonce ani nikdo z účastníků nepřišel na úplné odvození.

Cílem bylo najít nejlepší strategii, tj. strategii s největší pravděpodobností výhry. Strategií bylo navrhnuto několik a některé z nich zajistily druhému hráči výhru v průměrném případě. Je to docela překvapivý výsledek. U hracích kostek nemusí platit tranzitivita. Existuje sada kostek, která zachovává princip hry kámen-nůžky-papír. Zde jsou příklady trojic kostek, které se tak chovají:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 15 & 16 & 17 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 18 \\ 1 & 6 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Dokázat, že máme tu nejlepší je těžké. Vzhledem k parametrům úlohy nám nezbývá nic jiného, než vyzkoušet všechny možné sady kostek, a z nich vybrat tu nejlepší. Vyzkoušení všech možností je taky důkaz.

Angwin

Úloha 5.2 – Fotonová raketa (5b)

Zadání:

Mějme klasickou chemickou raketu (tedy na palubě jsou nádrže s hořlavým palivem a kyslíkem, v trysce hoří, a spaliny vychází ven a reaktivně pohánějí raketu) a „fotonovou“ raketu (představte si ji třeba jako raketu, která má na palubě jaderný reaktor – nebo jiný vhodný zdroj elektrické energie – a na zádi ohromný svítící reflektor. Světlo – fotony – vycházející z reflektoru opět reaktivně pohání raketu).

Která z těchto raket bude schopna dosáhnout při zrychlování ve volném prostoru (gravitační působení okolních těles zanedbejte) větší konečné rychlosti (než jí dojde palivo)? Předpokládejte, že obě rakety nesou stejnou, poměrně malou užitečnou hmotnost, a zbytek je palivo.

Která raketa bude schopna absolvovat rychleji nějakou trasu? Tedy přesunout se mezi dvěma body, které jsou vůči sobe v klidu. Na začátku a na konci musí být vůči nim v klidu i raketa.

Řešení:

Nejprve uvažme, že raketa (ať už fotonová nebo chemická) má na začátku hmotnost M, rychlost $v(t)$ a v soustavě, ve které stojí, vypouští palivo z trysek rychlostí v_{pal} (přičemž pro fotonovou raketu je $v_{\mathrm{pal}} = c$). Pokud má raketa v čase t rychlost $v(t)$, přetransformujeme úlohu do těžišťové soustavy, kde raketa stojí (tj. od rychlosti odečteme rychlost $v(t)$). Nyní v klidové soustavě raketa po dobu $\mathrm{d}t$ vypouští palivo, které má tedy hybnost

$$dp = v_{\mathrm{pal}} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t\,.$$

Protože jsme v těžišťové soustavě, získá zbytek rakety stejnou hybnost, tedy získá rychlost

$$\mathrm{d}v = \frac{v_{\mathrm{pal}}}{m(t) - \mathrm{d}M} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \approx \frac{v_{\mathrm{pal}}}{M} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t\,.$$

V poslední úpravě jsme použili zanedbání, které platí, pokud jsou $\mathrm{d}M$ i $\mathrm{d}t$ malé. $\mathrm{d}v$ představuje rychlost nabytou za krátký okamžik $\mathrm{d}t$. Nyní transformujeme zpět do původní vztažné soustavy, tedy přičteme rychlost $v(t)$, a získáme tak rychlost rakety v příštím okamžiku.

$$v(t + \mathrm{d}t) = v(t) + \frac{v_{\mathrm{pal}}}{M} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t\,.$$

Když tento vztah porovnáme s obecně platným vztahem pro malé posuny dx a „hezké“ funkce $f(x)$

$$f(x + \mathrm{d}x) = f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

tak vidíme, že

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_{pal}}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,,$$

což po zkrácení dt dá diferenciální rovnici pro rychlost rakety v závislosti na hmotnosti rakety

$$\mathrm{d}v = \frac{v_{\mathrm{pal}}}{M}\mathrm{d}M \;\;\Rightarrow\;\; v = v_{\mathrm{pal}} \ln \frac{M}{M - M_{\mathrm{pal}}}\,,$$

kde M_{pal} je hmotnost paliva o které raketa přišla. Tato rovnice se nazývá Ciolkovského rovnice a popisuje pohyb rakety. Pokud se na rovnici podíváme blíže, zjistíme, že vysokých rychlostí lze dosáhnout buď tak, že máme vysokou výstupní rychlost paliva (v_{pal} vysoké), nebo že je hmotnost paliva velká ve srovnání s hmotností rakety na začátku ($M \approx M_{\mathrm{pal}}$).

Stručně řečeno fotonová raketa představuje jeden z extrémů, zatímco chemická druhý. Kvalitativní výpočty provedla Dr.[MM] Hanka Jirků. Předpokládala hmotnost rakety 1000 tun a spočetla, že pokud se ve fotonové raketě přemění 450 kg uranu, získá raketa rychlost 135 m/s. K dosažení stejné rychlosti chemickou raketou je potřeba spálit 34 tun paliva.

Co se týká porovnání rychlosti raket, tak na dlouhé vzdálenosti vítězí fotonová raketa, protože má sice velmi malý tah, ale palivo spaluje velmi efektivně, tedy zrychluje celou dobu svého letu (zatímco chemická raketa zrychluje jen na začátku a na konci letu a své palivo promrhá velmi neefektivně). Chemická raketa je zase daleko rychlejší na krátké vzdálenosti, protože dokáže spálit palivo okamžitě, a tedy s vysokým zrychlením překonat krátkou vzdálenost.

Ještě dodejme, že fotonová raketa je limitována tím, že z uranu dokáže vytěžit jen asi 1% energie skrytého ve hmotě – kdyby raketa byla ze třetiny naplněna antihmotou, mohla by vyzářit až dvě třetiny své hmoty (navíc velmi rychle) a šlo by v podstatě o nejúčinnější možný reakční pohon.

Chyby, jichž bylo potřeba se vyvarovat

Poměrně nešťastně zvoleným postupem bylo počítat úlohu pomocí zákona zachování energie: je velice obtížné počítat celkovou kinetickou energii spalin (jak raketa zrychluje, vysílá spaliny *ze své klidové soustavy* stále stejnou rychlostí – celkově se ale průběh rychlosti spalin viděných z jedné soustavy mění). Další problém je, že energii nemáme tak dobře pod kontrolou – nevíme např, kolik energie se spotřebuje na ohřev spalin, apod.

Naopak výhodu měli ti, kteří si našli Ciolkovského rovnici, a počítali přímo s ní – takovému řešení se také nedá nic vytknout.

Irigi

Úloha 5.3 – 3D Pythagorova věta (3b)

Zadání:
Dokažte, že platí, že pokud budeme mít pravoúhlý čtyřstěn ABCD (všechny vnitřní úhly stěn u vrcholu A jsou pravé), platí tam rovnost

$$S_{ABC}^2 + S_{ACD}^2 + S_{ABD}^2 = S_{BCD}^2 \,,$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníka XYZ.

Řešení:
Riešenie tejto úlohy bolo celkom jednoduché, naviac ste sa mohli vybrať viacerými cestami. Prvá (a najviac používaná) bolo využitie znalosti Herónovho vzorca a Pythagorovej vety – pomocou Pythagorovej vety sa dajú priamo spočítať dĺžky strán podstavy (teda dĺžky hrán $|XY|$, $|YZ|$ a $|ZX|$) a prípad, keď poznáme dĺžky všetkých troch strán trojuholníka a chceme zistiť jeho obsah je ako stvorený pre Herónov vzorec. Ten ostatne hovorí stručne o obsahu S trojuholníka so stranami a, b a c: $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde s je polovica súčtu dĺžok strán, teda $s = (a+b+c)/2$. Vyzbrojená týmito informáciami sa väčšina z Vás dopracovala po úmornom upravovaní až k požadovanému dôkazu.

Inak postupoval Mgr.[M] Ladislav Bačo, ktorý využil kosínusovú vetu ($a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$) a vzorec pre obsah trojuholníka ($2S = ab\sin\gamma$) a zo súčtu ich druhých mocnín dostal po potrebných úpravách priamo hľadaný vzťah. Hana Bendová zas postupovala úpravou súčtu obsahov trojuholníkov plášťa, až sa dostala k vyjadreniu obsahu podstavového trojuholníka pomocou súčinu dĺžky strany a výšky k nej zodpovedajúcej. Niekoľko riešiteľov priamo spočítalo výšku na jednu zo strán podstavového trojuholníka a tým pádom aj jeho obsah. Všetky tieto metódy boli (aspoň čo sa týka zložitosti výrazov pri upravovaní) jednoduchšie ako použitie Herónovho vzťahu.

Môžeme ale postupovať ešte inak – stačia nám základné znalosti vektorovej algebry. Nech sú teda strany vychádzajúce z vrcholu A dané vektormi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$. Naviac vieme, že veľkosť vektora $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ a že veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov dáva obsah rovnobežníka, ktorý tieto dva vektory určujú (a teda po predelení dvoma obsah trojuholníka). Ďalej si vyjadríme dva z troch vektorov podstavy: Nech napríklad $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$. Potom teda tvrdenie vety znie:

$$\frac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{4} + \frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})^2}{4} + \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2}{4} = \frac{[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})]^2}{4}\,.$$

Vektorový súčin na pravej strane roznásobíme (pozor na poradie členov!), čím sa obsah hranatej zátvorky zmení na

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

(člen $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$ je samozrejme nulový) a ďalej použijeme už uvedený vzťah pre veľkosť vektora (keďže tu máme túto veľkost umocnenú na druhú) a teda po rozpísaní na pravej strane dostaneme:

$$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})^2 + 2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$$
$$+ 2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \,.$$

Zmiešané členy nám ale vypadnú[4] a tým pádom sme skončili tam, kde sme chceli – pravá strana je rovná ľavej a teda sme dokázali, čo sme dokázať chceli.

Jeffer

Úloha 5.4 – Gotické okno (3b)

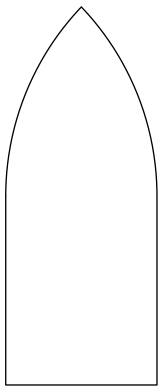
Zadání:

Znáte gotické okno? V polovině své výšky plynule přechází do lomeného oblouku (který je částí kružnice). Jak závisí velikost úhlu „zalomení oblouku“ (ve „špičce“ okna) na výšce a a šířce b okna? Za jakých podmínek se z něj stane okno románské? (Jen tak pro zajímavost by Teka ráda věděla, proč bylo gotické okno tak výhodné – jak se díky němu rozkládají tíhové síly okolního zdiva.)

Řešení:

Obrys gotického okna je vidět na obrázku. Svislé boční stěny v polovině výšky okna hladce přecházejí v oblouky kružnic.

Nejprve je dobré si udělat náčrtek gotického okna (obr. 1). Důležitá je pro nás jeho horní polovina, a protože je okno souměrné podle svislé osy souměrnosti, stačí načrtnout kupříkladu jen jeho levou horní část (obr. 2). Předpokládejme, že $a > b$. Střed kružnice, jejíž část tvoří oblouk got. okna najdeme následovně. Protože rám okna hladce (bez zlomu) přechází do oblouku, je přímka, jejíž část tvoří svislý rám v dolní části okna (AD), tečnou ke kružnici tvořící oblouk. Střed tedy leží na kolmici k přímce AD vedené bodem A. Úsečka AB je pak tětivou kružnice a střed kružnice tedy leží také na ose této tětivy.



Obr. 1

Dalším problémem je, jak změřit úhel dvou kružnic. Úhel tečen dvou kružnic v jejich společném bodě je úhel, který tyto kružnice svírají (bereme úhel ostrý).

Přímka SB je kolmicí k tečně vedené bodem B (tedy společným bodem obou kružnic). Úhel přímek SB a $S'B$ (kde S' je střed druhé z kružnic) je shodný s úhlem, který svírají tečny kružnic v bodě B. „Úhel lomeného oblouku“ pak můžeme vzít jako $|\sphericalangle SBS'| = 2|\sphericalangle SBC|$ (z osové souměrnosti okna). To ovšem platí, pokud $S \notin\mapsto CA$ tedy $S \in\mapsto AC \& |SA| > |CA|$. Nechť

$$S \in\mapsto CA \;\&\; A \in k \;\&\; B \in k \,,$$

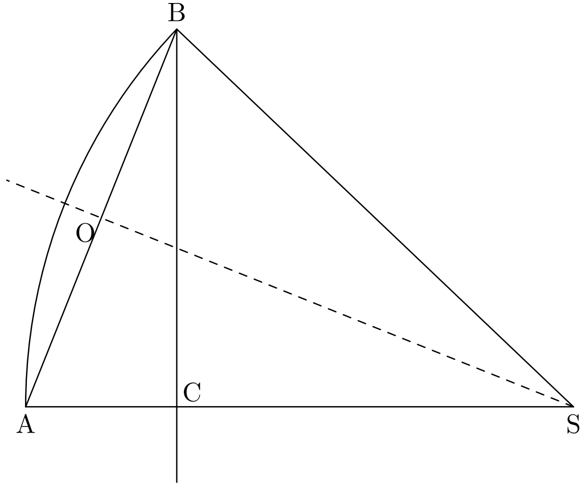
[4] Je to len vďaka tomu, že vieme, že základné vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ sú navzájom kolmé. Ak by neboli, s upravovaním sme skončili a dostávame 3D analógiu kosínusovej vety.

pak

$$|SO| < |BC| \ \& \ |SA| < |CA|\,,$$

protože $a > b$ je $|CB| > |AC|$, je $|SA| < |CA| < |CB|$. Protože $|SA|$ je poloměr kružnice (A musí ležet na kružnici), je tedy $r < |BC|$. Což je spor, protože B by již neležel na kružnici. Z rovnoramenného trojúhelníka ABC pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} |\sphericalangle BAC| &= \frac{a/2}{b/2} \Rightarrow |\sphericalangle BAC| = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \\
|\sphericalangle ABC| &= \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle BAC| \\
|\sphericalangle BAC| &= |\sphericalangle BAS|
\end{aligned}$$



Obr. 2

Existují samozřejmě i další vyjádření hledaného úhlu. Záleželo na tom, jakou goniometrickou funkci kdo při vyjádření úhlu použil, jestli uvažoval tupost i ostrost úhlu kružnic a jestli úhel vyjadřoval přímo z úhlu tečen či průvodičů (přímek procházejících středem kružnic a společným bodem kružnic). Většina si však uvědomila, že $a > b$, a předpokládali to, což v zadání nebylo, a bylo to třeba dopsat. Také je vždy na místě zkontrolovat, zda vše, s čím počítáme, bude vypadat jako na náčrtku. Doplňující otázkou pak bylo, kdy se z okna gotického stane okno románské. Po chvíli hledání je možné najít informace na wikipedii (`http://www.wikipedia.org`). V románském slohu byla okna nahoře tvořena půlkružnicí. Za našich podmínek se tak stane v případě, že průvodiče kružnic (i jejich tečny) splynou a pak tedy $a = b$. Děkuji také všem, kteří se mi snažili osvětlit výhodnost gotického okna oproti jeho předchůdcům (tedy i oknu románskému). Toto řešení zde neuvádím, protože nebylo součástí úlohy.

Teka

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	t3	t4	t5	t6	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	135	1		3		8	8					0	20	70
2.	Dr.$^{\text{MM}}$ Martin Výška	2.	61													61
3.	Dr.$^{\text{MM}}$ Hana Jirků	4.	81	0	5	3	3							0	11	55
4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Hana Florianová	3.	54	0	4	3	1							0	8	54
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Petr Pecha	1.	45			1	0	3	3	5		3	1	0	16	45
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jozef Halaga	4.	33			3	2							0	5	33
7.	Prof.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek	3.	206													32
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	29			3	1							1	5	29
9.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Pavel Klavík	4.	27	4		3		14						0	21	27
10.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Pavla Zárubová	2.	20			2	1							0	3	20
11.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jakub Marian	3.	18	3		3	2							0	8	18
12–13.	Bc.$^{\text{MM}}$ Anita Gregorová	4.	17			3	3							0	6	17
	Bc.$^{\text{MM}}$ Kristýna Krejčová	4.	17		2	3	2			10				0	17	17
14–15.	Dr.$^{\text{MM}}$ Marek Basovník	4.	51													16
	Bc.$^{\text{MM}}$ Klára Krejčíčková	3.	16			3								0	3	16
16.	Dr.$^{\text{MM}}$ Tereza Pechová	4.	54			3			5					0	8	15
17–19.	Dr.$^{\text{MM}}$ Matěj Korvas	4.	72													13
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	2.	37	4										0	4	13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Petr Dlabaja	4.	13													13
20–23.	Dr.$^{\text{MM}}$ Radim Pechal	4.	71	2										0	2	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Petrucha	2.	12													12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Alžběta Prokopová	2.	12	0		3	2							0	5	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Dušan Rychnovský	3.	12						5						5	12
24–26.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Vaňhara	2.	14													11
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jana Fojtová		11													11
	Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Rolínek	4.	11													11
27–29.	Bc.$^{\text{MM}}$ Filip Děchtěrenko	4.	10	0	4	3	3							0	10	10
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jakub Töpfer	2.	10	3		3	3							1	10	10
	Bc.$^{\text{MM}}$ Martin Volf	1.	10	0	1		0							0	1	10
30.	Kryštof Touška	4.	9								3				3	9
31.	Lenka Švidrnochová	2.	9													8
32–34.	Hana Bendová	4.	7	3		2	2							0	7	7
	David Navrkal	3.	7													7
	Peter Smolárik	1.	7	3		2	1							1	7	7
35.	Juraj Hartman	3.	6			3								0	3	6

				Úlohy												
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t5**	**t6**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	1.	44													5
37.	Irena Pavlíčková	2.	4													4
38.	Julie Musilová	2.	3													3
39.	Pavel Makovec	2.	2													2
40.	Zbyněk Klikoš	3.	1													1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R." je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+" značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.