M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIII číslo 6

Termín odeslání: 6. 4. 2007

Ahoj kamarádky a kamarádi,

když se tak podíváte z okna, jistě vás napadá, že letos jde počasí trochu napřed před kalendářem. Teď už je někdy v dubnu, chová se velmi aprílově. Zimu jsme měli asi tak týden a nyní těžko poznáváme, jestli přichází jaro, nebo se vrací podzim. Rostlinstvo je toho názoru, že rozhodně jaro, tak už můžeme najít rozkvetlé petrklíče nebo kočičky. Pokud si jich tedy všimneme skrz tu hnusnou mlhu. M&Mko ale zůstává stejné a opět vám přináší další číslo.

Vaši organizátoři

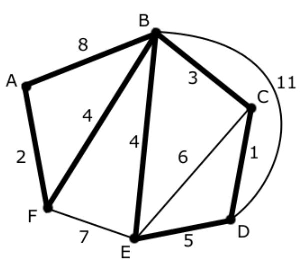
Zadání úloh

Úloha 6.1 – Logické obvody (5b)

Logický obvod je soustava hradel pospojovaných dráty. Po drátech putují jednosměrně binární signály 1/0 (napětí je/není). Některé konce drátů jsou vstupní, a některé výstupní. Hradla jsou AND, OR a NOT. Hradlo NOT má jeden vstup a jeden výstup, hradla AND a OR mají dva vstupy a jeden výstup. NOT funguje jako logická negace, AND jako konjunkce a OR jako disjunkce. Povoleno je jen výstupní rozvětvení drátu, tedy jeden vstup se zkopíruje do několika výstupů.

Rovinný logický obvod je pak takový, který se dá sestavit na desce, aniž by se dráty křížily. Rozhodněte, zda lze každý logický obvod (nerovinný) předělat na rovinný, který bude ekvivalentní (tedy pro stejné vstupy bude dávat stejné výstupy).

Úloha 6.2 – Vedení strýčka Skrblíka (5b)



Strýček Skrblík vlastní (mimo jiné) továrny, které jsou závislé na přívodu elektřiny z jeho elektráren. Všechno bylo v pořádku až do té doby, než v Kačerově začali řádit Rafani. Elektrické vedení je totiž z mědi a Rafani je vytrvale strhávaji, aby jej mohli prodávat ve sběrnách surovin.

Hlavním problémem je to, že tak vázne dodávka elektřiny do továren. Vaším úkolem je vymyslet algoritmus, který bude mít na vstupu počet továren a cen vedení mezi nimi (nezáporná čísla). Chceme vybrat ta vedení mezi továrnami, která se mají postavit, aby i po přerušení kteréhokoliv z těchto vedení byla každá továrna připojena. Elektrikáři jsou totiž vždy schopni nahradit chybějící vedení, než Rafani zaútočí podruhé, ale kdyby nebyla některá továrna během opravy připojena, výroba uvnitř by stála.

Znáte však strýčka Skrblíka, ten se nespokojí s ledajakým nápadem. Každé vedení něco stojí a Skrblík nechce investovat ani cent navíc. Zkuste jej proto přesvědčit, že právě vaše řešení je to nejlepší (strýček se jistě spokojí s pěkným matematickým důkazem správnosti vašeho algoritmu). Pokuste se také odhadnout časovou složitost takového algoritmu.

Příklad: Písmenky A–F jsou označeny továrny, spojnicemi s čísly vedení s jeho cenou. Algoritmus by měl zjistit, že nejlevnějším řešením bude využití vedení vyznačeného tlustou čarou.

Šikulům, kteří by chtěli strýčka Skrblíka potěšit i důkazem, doporučujeme podívat se na algoritmy pro hledání koster grafů a jejich důkazy.

Úloha 6.3 – Kladivo (4b)

Když praštíte člověka po břichu kladivem, tak mu velmi ublížíte. Když si ale ten člověk dá na břicho kovadlinu a vy stejnou silou a impulzem praštíte po té kovadlině, člověku se nic nestane. Vysvětlete, jak je to možné.

Nápověda: Předpokládejte, že to, co člověku ubližuje, je energie, která působí deformaci těla.

Úloha 6.4 – Sever (3b)

Všichni jistě umíte určit jih pomocí hodinek. Namíříme-li malou ručičku na slunce (a máme-li na hodinkách zimní čas), míří osa úhlu mezi malou ručičkou a dvanáctkou k jihu. Jak bychom ale určili jih na ručičkových hodinkách, které měří čas do dvacetičtyř hodin? Bonus: jak by určil jih ufon z planety HD 47964314j, kde je den tak dlouhý, že ručička jeho hodinek oběhne všechna čísla až po třicetšestku na ciferníku jeho hodinek za tři pozemské dny.

Řešení témat

Téma 4 – Algebraické vyjádření goniometrických funkcí

Do tohoto čísla se sešlo skutečně hodně příspěvků k tomuto tématu. Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha zaslal způsob, jak pomocí pravidelného šestiúhelníka a čtverce vypočítat hodnoty goniometrických funkcí úhlů 30°, 45° a 60°. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíková jednak odvodila[1] tabulku, ze které lze, známe-li hodnotu jedné trigonometrické funkce, spočítat hodnoty dalších:

hledám/znám	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$\lvert\sin\alpha\rvert$	–	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\lvert\operatorname{tg}\alpha\rvert}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$
$\lvert\cos\alpha\rvert$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	–	$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{\lvert\operatorname{cotg}\alpha\rvert}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
$\lvert\operatorname{tg}\alpha\rvert$	$\frac{\lvert\sin\alpha\rvert}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\lvert\cos\alpha\rvert}$	–	$\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$
$\lvert\operatorname{cotg}\alpha\rvert$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\lvert\sin\alpha\rvert}$	$\frac{\lvert\cos\alpha\rvert}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	–

a jednak odvodila hodnoty trigonometrických funkcí pro hodnotu 15°:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

proto (z tabulky)

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\\ \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}},\\ \operatorname{cotg} 15^\circ &= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Jak Klára uvádí, nyní již umíme spočítat hodnoty každého úhlu, který je násobkem 15°, příkladem jsou např. hodnoty

$$\sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$(105 = 7\cdot 15\,, 75 = 5\cdot 15)$.[2]

Příspěvek Mgr.$^{\text{M}}$ Jozefa Halagy otiskujeme. Nejdále se podařilo tématko posunout Dr.$^{\text{M}}$ Hance Jirků – její příspěvek vyjde celý až v osmém čísle jako perlička nakonec.

Vyjadrenie hodnoty sin 12°

Mgr.$^{\text{M}}$ Jozef Halaga

Pozn. red.: Článek obsahuje elegantní odvození hodnoty $\sin 12^\circ$*, bohužel však není autorem dostatečně komentován, aby mohl být otištěn ve zcela nezměněné podobě. Proto některé komentáře k jednotlivým postupům dodává redakce.*

[1] Podrobněji odvození neotiskujeme – vychází se především z definice funkcí $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ a z identity $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

[2] Autorka uvádí i hodnoty ostatních funkcí v těchto úhlech – čtenář je snadno dopočte sám z tabulky výše – jen pozor na to, že když jsou hodnoty sinů stejné, hodnoty jiných funkcí se stále mohou lišit znaménkem!

Z geometrie známe velikost úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku s jednotkovou stranou $u = 1/2\left(1+\sqrt{5}\right)$. Úhlopříčka tvoří základnu rovnostranného trojúhelníka (jehož zbylými stranami jsou jednotkové strany pětiúhelníku). Úhel mezi základnou a stranou je $36°$, takže platí $\cos 36° = u/2$, tedy

$$\cos\left(30° + 6°\right) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

rozvineme podle součtového vzorce na

$$\cos 30° \cdot \cos 6° - \sin 30° \cdot \sin 6° = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) .$$

Ze vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ zavedeme substituci $x = \sin 6°$, $\sqrt{1-x^2} = \cos 6°$, čímž dostaneme rovnici pro x

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) .$$

Vynásobením dvojkou a umocněním získáme kvadratickou rovnici

$$3\left(1-x^2\right) = x^2 + \left(1+\sqrt{5}\right)x + \frac{3+\sqrt{5}}{2} .$$

Rovnice má dvě řešení, jedním z nich musí být hodnota $\sin 6°$. Které z řešení rovnice to je, zjistíme např. na kalkulačce – jde o řešení

$$x = \sin 6° = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8} .$$

Dopočítáme

$$\sqrt{1-x^2} = \cos 6° = \sqrt{1-\left(\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}\right)^2} .$$

Z těchto hodnot podle vzorce $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ získáme rovnici

$$\sin^2 6° = \left(\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}\right)^2 = \frac{1-\cos 12°}{2} ,$$

po vyřešení

$$\cos 12° = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8} .$$

Z rovnice $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ opět zjistíme

$$\begin{aligned}\sin 12° &= \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{28-4\sqrt{5}-2\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{8} .\end{aligned}$$

Dále autor dokazuje, že tento výraz je totožný s výrazem ve druhém čísle a uvádí i hodnoty ostatních goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned}
\sin 12^\circ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}\,,\\
\operatorname{tg} 12^\circ &= \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}\,,\\
\operatorname{cotg} 12^\circ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\,,\\
\operatorname{tg} 6^\circ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\,,\\
\operatorname{cotg} 6^\circ &= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Na závěr autor dodává: Súhlasím s kolegom Mgr.MM Bačom, že sa dá vyjadriť každá goniometrická funkcia celého uhla, otázkou ostáva ako veľmi sa budeme snažiť.

Irigi

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Magdeburské polokoule (5b)

Zadání:

Německý fyzik Otto von Gericke, starosta města Magdeburgu, v roce 1654 předvedl dramatický experiment, ve kterém ukázal sílu vakua a dokázal existenci atmosféry Země. Gericke spojil dvě duté měděné polokoule o průměru 51 cm *s úchyty (Magdeburské polokoule), a ze vzniklé dutiny vypumpoval vzduch. Pak nechal zapřáhnout ke každé polokouli 4 páry koní a ukazoval, že ani 16 koní není schopno od sebe polokoule oddělit. Poté, co nechal do dutiny opět vniknout vzduch, se od sebe obě polokoule oddělily samovolně.*

Kolik koní by musel zapřáhnout, aby polokoule roztrhl? Sílu, kterou dokáže táhnout jeden kůň, zkuste buďto zjistit, anebo vhodným způsobem odhadněte. Pokud se vám to nepovede, určete alespoň, jakou silou by museli zapřažení koně táhnout, aby polokoule roztrhli.

Jak by se situace změnila, kdyby použil místo polokoulí „polokrychle“ nebo kužely s hranou, resp. průměrem i výškou 51 cm*? Zkuste vysvětlit, proč si vybral právě polokoule.*

Řešení:

Nejprve spočteme sílu, kterou byly polokoule drženy pohromadě. Polokoule drží pouze atmosferický tlak. Jeho velikost lze v rozumných nadmořských výškách uvažovat 100 kPa. Dále určitě víte, že tlak působící na určitou plochu se projevuje jako tlaková síla. Její velikost je $F = pS$. Mimo velikosti má tato síla i směr – je kolmá na uvažovanou plochu. Je tedy vidět, že nestačí jednoduše spočítat vnější povrch polokoulí a vynásobit atmosferickým tlakem. Na různé části polokoulí působí tlaková síla různým směrem a nelze tedy prostě sčítat velikosti.

Abychom se vyhnuli složitým výpočtům, můžeme si pomoct následující úvahou. Představme si polokouli, která bude ne dutá, ale zcela vyplněná. Taková polokoule se určitě samovolně vlivem atmosferického tlaku nezačne pohybovat. Výslednice sil na ni působících je tedy nulová. Tlakovou sílu působící na rovnou kruhovou stranu umíme jednoduše vypočítat. Pokud je d průměr polokoule, pak

$$F = p_\mathrm{a} S = p_\mathrm{a} \frac{\pi d^2}{4} .$$

Výslednice sil působících na „kulatou" část polokoule musí být stejně velká, ale opačného směru.

Pokud se teď vrátíme k dutým polokoulím a vyčerpáme z nich vzduch, výše zmíněná síla působící na „rovnou" část polokoule zmizí[3] a zbude stejně velká síla okolní atmosféry působící na „kulatou" část polokoule. Každá polokoule je tedy k té druhé tlačena silou právě $p_\mathrm{a}\pi d^2/4$. Po dosazení

$$F = p_\mathrm{a} \frac{\pi d^2}{4} = 10^5 \cdot \frac{\pi 0{,}51^2}{4}\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{kN} .$$

Tímto tlakem je přitlačována každá z polokoulí k té druhé. Tedy pro roztržení by takovou sílu musely vyvinout 4 páry koní zapřažené ke každé z nich. Vychází tedy přibližně 2,5 kN na jednoho koně.

Zbývá určit sílu, kterou dokáže táhnout jeden kůň. Snaha počítat tuto sílu z jednotky „koňského výkonu" nemá smysl, protože tady nejde o výkon, ale o maximální působící sílu. (Kůň, který se snaží roztrhnout polokoule neprodukuje žádný užitečný výkon – působí sice poměrně velkou silou, ale na nulové dráze. Takže jen z hlediska výkonu by měl být schopný působit nekonečnou silou, což zřejmě není pravda.) Pouštět se do analýzy vlastností koňských svalů, tření mezi kopyty a zemí a dalších věcí také nevypadá příliš nadějně. Pomůžeme si tedy existujícími „experimenty".

Mezi různými koňskými soutěžemi existují i takové, kdy se pár koní snaží popotáhnout po zemi co největší náklad naložený na jakýchsi saních. (Pokud byste k tomu chtěli hledat další informace, tak disciplína se jmenuje *Horse Pull*.) Ve výsledcích těchto soutěží jsou náklady kolem tří tun celkem běžné (rekordy jsou spíše pět tun). Pokud budeme uvažovat koeficient smykového tření saní přibližně 0,5, vychází, že trénovaný kůň by neměl mít problém vyvinout tažnou sílu kolem 7 kN. Irena Pavlíčková zjistila, že belgický chladnokrevník utáhne 2,4 tuny (pravděpodobně opět jako náklad tažený smykem), tedy dokonce ještě více, než předchozí výsledek.

To je o dost více, než potřebná síla spočtená výše. Lze samozřejmě oprávněně namítat, že běžní koně ze 17. století nebyli schopni táhnout takovou silou,

[3] Ve skutečnosti nezmizí úplně, protože uvnitř nebude nikdy zcela nulový tlak. Nicméně i obyčejná mechanická vývěva nemá problém vyčerpat prostor alespoň na tlak řádově stovek pascalů, tedy méně než procento atmosferického. Z tohoto hlediska můžeme působící sílu považovat klidně za nulovou.

jako koně dnes speciálně trénovaní na soutěže v tahání. Druhá věc je, že se všichni zapřažení koně těžko mohli zapřít maximální silou ve stejnou chvíli. O kolik nižší sílu získáme kvůli těmto vlivům je ale těžké odhadnout.

Celkem pravděpodobně vypadá, že síla, kterou byli koně schopni vyvinout, se dost blížila síle potřebné na roztrhnutí. Podívejme se na celý experiment z pohledu starosty. Než se předvedl na veřejnosti, zkusil si jej asi nejprve někde v ústraní. Přitom mohl zjistit, kolik koní polokoule skutečně roztrhne, a pak jich pro veřejné předvádění prostě pár ubrat. To by i odpovídalo tomu, že síla připadající na jednoho koně není moc velká. A k roztržení tedy pravděpodobně stačilo přidat jen několik málo koní.

Zbývá poslední otázka – situace s kužely a „polokrychlemi“. Provedeme úplně stejnou úvahu jako na začátku. Síla, kterou jsou obě poloviny přitlačovány k sobě, odpovídá tlakové síle na myšlenou podstavu, která je ve vakuu. Kužely mají stejnou podstavu jako polokoule, takže i výsledná síla bude stejná. V případě „polokrychle“ je styčná plocha větší, konkrétně $4/\pi$-násobně. Tedy i síla bude asi 1,27-krát větší.

Proč zrovna polokoule? S největší pravděpodobností proto, že koule dokáže nejlépe rozložit zvenčí působící tlak a tudíž se nejméně snadno zdeformuje. (Polokrychle nebo kužely by musely být oproti kouli vyrobeny z pevnějšího nebo silnějšího materiálu.) Hezky to jednoduše zdůvodnil Dr.MM Marek Basovník: *Koule je dokonale souměrné těleso a všechny její body jsou si „rovny“ (nijak se od sebe, co se týče libovolné prostorové charakteristiky, neliší). Koule tedy, naivně řečeno, „neví“, kde se má splasknout a kde vypouknout.*

Marble

Úloha 4.2 – Rovnice (4b)

Zadání:

Dokažte, že existuje přirozené číslo $k \leq 100$ takové, že rovnici $\left\lfloor \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor = k$ vyhovuje alespoň 100 přirozených čísel. $\lfloor x \rfloor$ zde představuje dolní celou část čísla x.

Řešení:

Úlohu šlo řešit pomocí Dirichletova principu. Postup je následující: Všechna $1 \leq x \leq 10000$ splňují

$$1 \leq \left\lfloor \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 100 \,.$$

Rozdělme x do 100 různých přihrádek. Do k-té přihrádky dáme číslo

$$\left\lfloor \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor = k \,.$$

Aspoň jedna z těchto přihrádek musí obsahovat aspoň 100 různých přirozených čísel x. Tato přihrádka odpovídá číslu k, jehož existenci jsme měli dokázat.

Angwin

Úloha 4.3 – Řez trojúhelníka (4b)

Zadání:
Rozdělte rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník co nejkratším přímým řezem na dvě části stejného obsahu.

Řešení:
Nechť a je velikost odvěsny našeho trojúhelníka. Ať už vedeme řez jakkoli, vždycky odsekne z celého trojúhelníka menší trojúhelník (zbývající část může být čtyřúhelník nebo trojúhelník). Délka řezu x je pak stranou tohoto odseknutého malého trojúhelníka. Úhel ω proti straně x v tomto trojúhelníku je buď $45°$ nebo $90°$, podle toho, který vrchol původního trojúhelníka odřízneme. Zbývající dvě strany odříznutého trojúhelníka označíme y a z. Z kosinové věty pro stranu x pak dostáváme

$$x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2yz\cos\omega} = \sqrt{(y-z)^2 + 2yz(1-\cos\omega)} \geq \sqrt{2yz(1-\cos\omega)}\,.$$

Rovnost přitom nastává právě pro $y = z$, tedy tehdy, je-li odseknutý trojúhelník rovnoramenný. Víme, že náš řez má dělit velký trojúhelník na dvě části, a proto musí platit

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\,yz\,\sin\omega = \frac{a^2}{4}\,,$$

a tedy

$$yz = \frac{a^2}{2\sin\omega}\,.$$

To dosadíme do poslední nerovnosti, a dostaneme

$$x \geq a\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}}\,.$$

Z posledního vztahu tedy dostáváme, že pokud řez protíná obě odvěsny ($\omega = 90°$) pak pro délku řezu platí $x \geq a$, zatímco když řez protíná odvěsnu a přeponu ($\omega = 45°$) platí $x \geq a\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Protože $\sqrt{\sqrt{2}-1} < 1$, je nejkratší řez třeba vést přes odvěsnu a přeponu tak, aby odtínal rovnoramenný trojúhelník (a samozřejmě aby dělil trojúhelník na části stejného obsahu). A protože známe délku řezu ($x = a\sqrt{\sqrt{2}-1}$), můžeme jej zkonstruovat.

Teka

Úloha 4.4 – Zrádná lávka (3b)

Zadání:
Proslulý lupič Pedro Ramiréz sebral v indické bance tři zlaté cihly a utíká hustou džunglí. Každá cihla váží 10 kg. *Najednou mu však cestu přehradí dlouhá propast s úzkou lávkou. Ta, jako každá indická lávka, unese nanejvýš* 100 kg *a je-li zatížena víc, spadne. Pedro přemýšlí: „Vážím 79 kg, pokud půjdu opatrně, mohl bych přenést dvě cihly a pak lávku shodit!“*

Policie je ještě daleko a tak přemýšlí dál. „… Kdybych ale žongloval (bude to fuška!), tak vždy budu mít v ruce nanejvýš dvě cihly, a lávka nespadne, takže když k tomu půjdu velice opatrně, můžu je přenést všechny, a lávku shodit až pak!“

Jak tento příběh skončí? Povede se slovutnému mexikánci přenést cihly, pokud bude žonglovat tak, že bude mít vždy nejvýše dvě cihly v ruce? A co kdyby žongloval tak, že má vždy v ruce jen jednu cihlu?

Řešení:
Z došlých řešení bylo jednoznačně nejelegantnější řešení Dr.$^{\text{MM}}$ Marka Basovníka, které otiskujeme (téměř) v nezměněné podobě:

Když Pedro žongluje s cihličkou, tak počítáme, že po čas T_1 ji drží v ruce, a po čas T_2 letí vzduchem. Aby mohl házet n cihličkami, musí pro časy platit

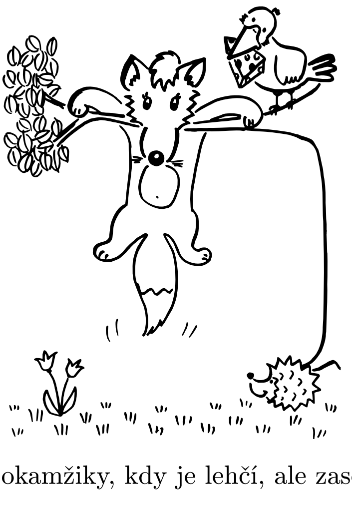
$$(n-1)T_1 = T_2\,.$$

Předpokládáme, že v ruce bude mít vždy právě jednu cihlu (postup se dá i zobecnit, ale pro jednoduchost je to dobrý předpoklad). Když ji drží v ruce, tak jí svou silou uděluje hybnost vzhůru, a když cihla letí vzduchem, udělí jí gravitační síla hybnost směrem dolů. Předpokládáme, že Pedro svoji silou uděluje cihle konstantní zrychlení – kdyby totiž ne, tak by v nějakém čase musel zrychlovat rychleji, což by bylo vždy jen horší. Musí platit, že celková hybnost se po uplynutí doby T_1 a T_2 nezmění – kdyby totiž výsledná hybnost byla nenulová, pak by těžiště všech cihel klesalo níž a níž, až by po chvíli bylo pod úrovní lávky. To vyjádříme jako

$$p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad T_1F = (T_2 + T_1)F_G \rightarrow$$

$$T_1F = ((n-1)T_1 + T_1)F_G \quad \rightarrow \quad F = nF_G$$

Z toho je vidět, že má-li Pedro n cihel, pak sice má v ruce vždy cihlu jen jednu (kterou chytá „co možná nejšetrněji“), ale působí na ni silou rovnou tíze všech cihel. Žonglováním tedy není možné si ulehčit na vlastní tíze, a slavný osud Pedra Ramireze tímto končí hluboko v propasti.



V tomto řešení využíváme toho, že hybnost je „celkový účinek síly za daný čas“ (definuje se jako $\Delta p = mv = ma\Delta t = F\Delta t$, kde a je zrychlení, v rychlost, m hmotnost, p hybnost a F síla) – zhruba řečeno: Pokud celková průměrná síla, kterou Pedro na cihly působí, nebude stejná jako síla, kterou na cihly působí Země, těžiště cihel začne klesat.

Elegance tohoto řešení spočívá v tom, že odpovídá i na otázku, zda Pedro nemůže žonglovat nějak „chytře“ – jestli se mu např. nevyplatí jednu cihlu vyhazovat více a druhou méně. Odpověď je ne: nejlepší, čeho lze dosáhnou, je, že Pedro bude vážit i s cihlami stejně, jako by nežongloval. Pokud to dělá jinak, pak jsou sice okamžiky, kdy je lehčí, ale zase jsou i okamžiky, kdy je těžší.

Irigi

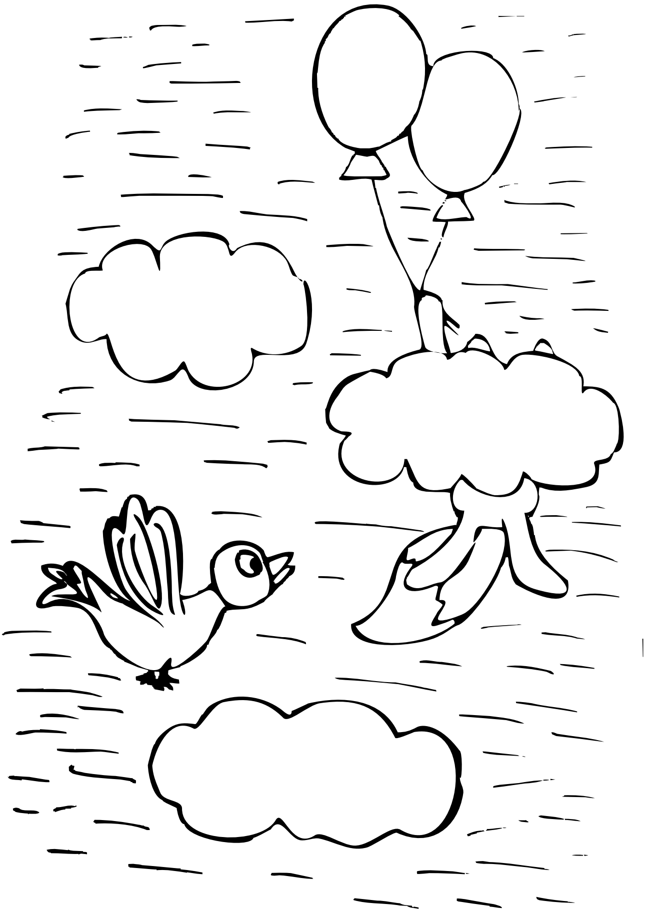
Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina

				Úlohy								
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t4**	**t5**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	2.	61	4	3	3	3			3	16	61
2.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	115		4	0	1		8	0	13	50
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Florianová	3.	46	4	0	1	2		6	0	13	46
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	4.	70	2	3	4	3	14		0	26	44
5.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	3.	206	4	3	0				0	7	32
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	1.	29				1	3		0	4	29
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Halaga	4.	28		3	2	2	8		0	15	28
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	24	3	3	0	3			2	11	24
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Pavla Zárubová	2.	17			0	2			0	2	17
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	4.	51	4	4	3	4			1	16	16
11–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	4.	72									13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dlabaja	4.	13									13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Krejčíčková	3.	13									13
14.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Petrucha	2.	12		4		3			1	8	12
15–18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	2.	14									11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Fojtová		11		0		2			0	2	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Anita Gregorová	4.	11				3			0	3	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Rolínek	4.	11									11
19–20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	4.	69									10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	3.	10									10
21–22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	2.	33									9
	Martin Volf	1.	9			0	1			0	1	9
23.	Lenka Švidrnochová	2.	9									8
24–27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	4.	46		4					0	4	7
	David Navrkal	3.	7									7
	Alžběta Prokopová	2.	7									7
	Dušan Rychnovský	3.	7									7
28–29.	Pavel Klavík	4.	6									6
	Kryštof Touška	4.	6									6
30.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	1.	44									5
31.	Irena Pavlíčková	2.	4	2						0	2	4
32–33.	Juraj Hartman	3.	3									3
	Julie Musilová	2.	3									3
34.	Pavel Makovec	2.	2									2
35.	Zbyněk Klikoš	3.	1									1



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.