M&M Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIII číslo 5

Termín odeslání: 26. 2. 2007

Ahoj kamarádky a kamarádi,

Blíží se nám jarní soustředění, bude se konat v Beskydech od 24. března až do Apríla. Přinášíme Vám opět 4 zajímavé úložky, ale pouhý jeden článeček, měli byste se trochu polepšit, ať mají Vaši kamarádi příště co číst `:-)`. Máte také poslední šanci nasbírat nějaké bodíky na soustředění, tak se snažte.

Chtěli bychom Vás také pozvat na Den s fyzikou, který se koná ve čtvrtek 1. února v budovách MFF v Tróji a na Karlově. Chystá se pro Vás tam spousta zajímavých exkurzí do hlubin fyziky.

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Úloha 5.1 – Kostky (5b)

Máte tři šestistěnné kostky a vaším úkolem je zvolit na nich počty teček tak, abyste měli při následující hře co největší pravděpodobnost výhry. (Počet teček na každé stěně může být libovolné přirozené číslo bez dalších omezení.)

Hraje se tak, že soupeř si vybere jednu kostku, se kterou hází, a pak si ze zbylých dvou vybíráte vy. Kdo hodí více, vyhrává.

Úloha 5.2 – Fotonová raketa (5b)

Mějme klasickou chemickou raketu (tedy na palubě jsou nádrže s hořlavým palivem a kyslíkem, v trysce hoří, a spaliny vychází ven a reaktivně pohánějí raketu) a „fotonovou“ raketu (představte si ji třeba jako raketu, která má na palubě jaderný reaktor – nebo jiný vhodný zdroj elektrické energie – a na zádi ohromný svítící reflektor. Světlo – fotony – vycházející z reflektoru opět reaktivně pohání raketu).

Která z těchto raket bude schopna dosáhnout při zrychlování ve volném prostoru (gravitační působení okolních těles zanedbejte) větší konečné rychlosti (než jí dojde palivo)? Předpokládejte, že obě rakety nesou stejnou, poměrně malou užitečnou hmotnost, a zbytek je palivo.

Která raketa bude schopna absolvovat rychleji nějakou trasu? Tedy přesunout se mezi dvěma body, které jsou vůči sobe v klidu. Na začátku a na konci musí být vůči nim v klidu i raketa.

Úloha 5.3 – 3D Pythagorova věta (3b)

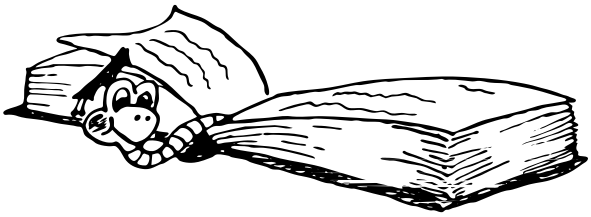
Dokažte, že platí, že pokud budeme mít pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ (všechny vnitřní úhly stěn u vrcholu A jsou pravé), platí tam rovnost

$$S_{ABC}^2 + S_{ACD}^2 + S_{ABD}^2 = S_{BCD}^2\,,$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníka XYZ.

Úloha 5.4 – Gotické okno (3b)

Znáte gotické okno? V polovině své výšky plynule přechází do lomeného oblouku (který je částí kružnice). Jak závisí velikost úhlu „zalomení oblouku“ (ve „špičce“ okna) na výšce a a šířce b okna? Za jakých podmínek se z něj stane okno románské? (Jen tak pro zajímavost by Teka ráda věděla, proč bylo gotické okno tak výhodné – jak se díky němu rozkládají tíhové síly okolního zdiva.)



Řešení témat

Téma 1 – Čokoládování

Další příspěvek Doc.ᴹᴹ Jana Musílka k problému čokoládování se zabývá rozmisťováním co největšího množství čokolády na graf tak, aby ještě pořád nebyl počokoládovatelný. Jeho řešení ale bohužel není úplně správné, a v části o stromech dokonce nepřesné. Uvádí relativně dobrou strategii pro rozmístění kousků čokolády, stejnou pro stromy i obecné grafy, tato však není optimální. Článek otiskujeme v původní podobě.

Pokud váháte, stále ještě zbývá spousta problémů k vyřešení, například počokoládování stromů, rovinných grafů (pro tak obecné grafy stačí i řádové odhady), bipartitních grafů (pro ty, kdo tuší jak na to – jak to souvisí s párováním?). Zatím netknutá zůstala strategie nenažraného hráče.

Co nejvíce čokolády

Doc.ᴹᴹ Jan Musílek

V tomto článku se zabývám nejvyšším možným počtem kousků čokolády, které lze umístit na graf tak, aby nebyl počokoládovatelný. Rozebírám v něm situace pro cesty, kružnice, úplné grafy, stromy.

Cesta

Jako ze všeho nejvýhodnější se jeví postavit na jeden konec cesty co nejvíce kousků a zbytek nechat prázdný. Je tomu tak proto, že počet kousků čokolády klesá exponenciálně se vzdáleností, kterou musí urazit. Tedy, pokud mám na prvním vrcholu cesty 32 kousků čokolády, na další už jich přemístím jenom 16, na další 8, pak 4, 2, 1. Tady skončím, protože jednu samotnou kostičku už nikam přemístit nelze.

Z toho logicky plyne, že maximální počet kousků čokolády, které můžu umístit na cestu tak, aby nebyla počokoládovatelná je:

$$a_N = 2^{N-1} - 1\,,$$

kde N je počet vrcholů grafu.

Kružnice

Obdobně jako pro cestu, odvodím maximální počet kousků čokolády i pro kružnici. Dva nejvzdálenější vrcholy kružnice tvoří cestu o délce $[N/2] + 1$, kde N je počet vrcholů kružnice. Vzorec pro kružnici je tedy:

$$a_N = 2^{[N/2]} - 1$$

Úplný graf

Úplný graf je celý počokoládovatelný už ve chvíli, kdy na jeden vrchol umístíme dva kousky čokolády (viz můj předchozí článek). Nezbývá nám tedy nic jiného, než umístit na každý vrchol kromě jednoho jeden kousek čokolády:

$$a_N = N - 1\,.$$

Stromy

Na rozdíl od počokoládovatelnosti co nejmenším počtem kousků čokolády je maximum, které můžeme položit na jeden strom docela jednoduché. Po krátké úvaze můžeme přijít na to, že strom není počokoládovatelný právě tehdy, když není počokoládovatelná nejdelší cesta v něm obsažená. Tedy stačí zjistit, jak je dlouhá nejdelší cesta ve stromu, a počet kousků spočítat pomocí vzorce pro cestu.

Obecné grafy

Zde nejde vzhledem ke složitosti grafu vyjádřit žádný konkrétní vzorec, ale lze popsat obecný postup, pomocí kterého se dá počet kousků přibližně spočítat.

Maximální počet kousků, kterými nepočokoládujeme obecný graf je roven počtu kousků, kterými nepočokoládujeme jednu z cest v něm obsaženou.

Najdeme tedy nejdelší cestu, která je ovšem zároveň nejkratší cestou mezi svými koncovými vrcholy. To znamená, že pokud jsou v cestě kružnice (dvě různé možnosti, kudy se dostat z jednoho vrcholu do druhého), musíme brát jejich kratší variantu. Pokud takovou cestu najdeme, spočítáme už počet kousků podle vzorce pro cesty:

$$a_N = 2^{N-1} - 1$$

Poté ještě ovšem musíme zvážit alternativu, kdy se náš obecný graf blíží grafu úplnému. Zkusíme tedy ještě aplikovat vzorec

$$a_N = N - 1$$

a umístit na každý vrchol kromě jednoho jeden kousek čokolády. Porovnáme výsledky prvního a druhého způsobu a vybereme si ten s větším výsledkem.

Závěr

V článku jsem se zabýval tím, kolik můžu umístit na různé typy grafů kousků čokolády tak, aby nebyly celé počokoládovatelné. Odvodil jsem vzorce pro cesty, kružnice, úplné grafy a obecné stromy. Popsal jsem strategii pro rozmisťování čokolády po obecném grafu. Je třeba podotknout, že tato strategie není úplně optimální a existují grafy, pro které nefunguje (resp. funguje v tom smyslu, že popíše počet kousků, pro které je graf nepočokoládovatelný, ale nedává stoprocentní jistotu, že je maximální). Pro spoustu grafů však funguje přesně.

Gavento

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Lineární člověče nezlob se (5b)

Zadání:

Jako předposlední pomoc v nudě největší se nabízí nová a ještě nudnější hra – lineární člověče pro jednoho hráče! Jde o hrací plán s po sobě jdoucími políčky očíslovanými 1 až $10!$*, na poli (*$10!$*) je umístěna čokoláda. Hráč začíná na políčku číslo 1 a hází si jednou z přiložených kostek (stále stejnou). Pokud na čokoládu stoupne, je jeho, pokud čokoládu přeskočí, musel by hrát znovu a na to nemá nervy :-) Přiložené kostky a hodnoty na jejich stěnách jsou:* $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $(1, 2)$ *(mince)* $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ $(5, 42, 42, 42, 42, 42)$

Jaké šance má s jednotlivými kostkami? (10! považujte za velmi velké číslo, použijte odhad, ale dobře ho zdůvodněte.)

Řešení:

Mnozí z vás při řešení správně odhadli, že každá strana kostky padne přibližně stejně často, jako ty ostatní, ale nesprávně z toho odvodili, že po mnoha hodech padne *právě násobek* součtu čísel na kostce, což je obecně dost nepravděpodobné. Lepší úvahou je, o kolik mě průměrně posune každý hod. To je *střední hodnota* konkrétní kostky jako *náhodné veličiny*, což je pro kostku aritmetický průměr čísel na ní. Pro kostku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ se tedy na jeden hod pohnu průměrně o 3,5, pro minci $(1, 2)$ o 1,5, pro kostku $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ o 21 a pro poslední kostku $(5, 42, 42, 42, 42, 42)$ o $215/6$.

S kostkou s průměrem k skočím během N hodů o průměrně Nk polí (pokud je N dost velké), a stoupnu při tom na N polí. Kdyby všechna políčka od nějakého dále měla téměř stejnou pravděpodobnost, že na ně stoupneme, pak by šance, že v průběhu skočím právě na jedno konkrétní vybrané pole, byla $N/(Nk) = 1/k$.

Kdy mají políčka přibližně stejnou pravděpodobnost? Určitě to neplatí pro kostky, jejichž čísla mají nějakého společného dělitele. Například kostka $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ hází pouze sudá čísla a při hře s ní bychom se tedy pohybovali jen po lichých polích a nikdy nestoupli na 10!. Ostatní kostky už takovou vlastnost nemají, a pravděpodobnosti políček u nich jsou pro dost vzdálená pole téměř stejné.

Pravděpodobnosti tedy vycházejí $1/3{,}5 \doteq 0{,}2857$ pro kostku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $1/1{,}5 \doteq 0{,}6667$ pro $(1, 2)$, 0 pro $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ a $1/(215/6) \doteq 0{,}0279$ pro kostku $(5, 42, 42, 42, 42, 42)$.

Jak spočíst pravděpodobnost přesně? Ilustruji to na minci, označím p_n pravděpodobnost stoupnutí na políčko n. Je tedy $p_0 = 0$ a $p_1 = 1$. Přitom $p_{n+2} = p_n/2 + p_{n+1}/2$, protože na pole $n + 2$ dojdu buď z pole n hozením dvojky nebo z $n + 1$ hozením jedničky. Vývoj p_n je následující:

$$1{,}0; 0{,}5; 0{,}75; 0{,}625; 0{,}6875; 0{,}6563; 0{,}6719; 0{,}6641;$$
$$0{,}6680; 0{,}6660; 0{,}6670; 0{,}6665; 0{,}6667; \ldots ,$$

což velmi rychle konverguje ke slibovaným 2/3. Pro ostatní kostky jde použít podobný postup a konvergence pak je o něco pomalejší. Matematicky se dá popsat a sledovat maticemi a jejich *vlastními čísly*, to by ale bylo na mnohem delší povídání ...

Gavento

Úloha 3.2 – Mince (3b)

Zadání:

Lze poskládat z přesně 50 mincí (máme na výběr pětikoruny, dvacetikoruny a padesátikoruny) obnosy 400 Kč, 500 Kč a 750 Kč?

Řešení:

Označíme-li počty pětikorun, dvacetikorun a padesátikorun po řadě a, b, c, pak má platit

$$a + b + c = 50\,, \quad 5a + 20b + 50c = x\,,$$

kde x je cílová částka. (400, 500 nebo 750) Odečteme teď od druhé rovnice pětinásobek první, čímž dostaneme

$$15b + 45c = x - 250\,.$$

Nyní je vidět, že pro $x = 500$ a $x = 750$ řešení neexistuje, neboť levá strana je dělitelná 15. Pro $x = 400$ lze volit např. $a = 46$, $b = 1$, $c = 3$.

Jarda

Úloha 3.3 – Ladička (5b)

Zadání:

Představme si ladičku na komorní A. Ladička vypadá jako „dvojvidlice“ se dvěma kovovými tyčkami, které kmitají s vlastní frekvencí 440 Hz. Pokud si ladičku přiložíme k uchu a pozvolna s ní otáčíme, potom uslyšíme, že v některých úhlech neuslyšíme nic.

Vysvětlete, proč „hluché úhly“ vznikají a popište jejich rozložení v okolí ladičky v závislosti na vzdálenosti tyček ladičky.

Řešení:

Tato úloha je těžší, než první pohled vypadá, což zaskočilo i nás při jejím řešení. Pokud si vezmete ladičku a zkusíte s ní otáčet, snadno vypozorujete, že hluché úhly jsou čtyři, jsou na sebe navzájem kolmé a oproti ose ladičky pootočené o 45°. Toho si všimli mnozí z vás. Zdůvodnění je nasnadě: každý z konců ladičky vydává vlnění na dané frekvenci (440 Hz) – vlny se (díky tomu, že jsou konce ladičky posunuty) skládají jako na hladině rybníka, což způsobuje, že v některých místech zvuk vůbec není. Za kterékoliv nebo obě z těchto pozorování jsme udělovali po bodu.

První přiblížení

Někteří z vás (a my zprvu také) se snažili chvění ladičky modelovat následujícím způsobem: Označme si δ vzdálenost tyček ladičky, λ vlnovou délku zvuku na frekvenci $f = 440\,\mathrm{Hz}$ ve vzduchu. Nyní jsou dvě možnosti. Buďto oba konce ladičky mají stejnou fázi, nebo opačnou. (Zatím nespecifikujeme, jak je to ve skutečnosti, protože následující model se stejně ukáže jako zavádějící.) Pak je hodnota tlaku vzduchu v daném bodě prostoru a v daném čase dána jako:

$$U(x,y,t) = \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{(x-\delta/2)^2+y^2}}{\lambda}\right) + \sigma\pi\right) + \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{(x+\delta/2)^2+y^2}}{\lambda}\right)\right),$$

σ je buď rovno nule, nebo jedné (podle toho, zda předpokládáme fázový posun o π (a tedy opačnou fázi), nebo ne). Užijeme součtové vzorce a získáme[1]:

$$U(x,y,t) = 2\cos\left(\pi\left(\frac{\sqrt{(x-\delta/2)^2+y^2} - \sqrt{(x+\delta/2)^2+y^2}}{\lambda}\right) + \sigma\,\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{(x-\delta/2)^2+y^2} + \sqrt{(x+\delta/2)^2+y^2}}{2\lambda}\right) + \sigma\,\frac{\pi}{2}\right).$$

[1] Ve skutečnosti by bylo přesnější ještě každý ze sinů násobit členem vyhadřujícím pokles intenzity zvuku se vzdáleností od zdroje. Při použitých zjednodušeních toho ale není zapotřebí (hluché úhly se tím příliš nezmění a přesný výpočet by zase vyžadoval zohlednit ostatní rozměry ladičky, apod.)

Všimněme si, že sinus závisí na čase (s periodou 440 Hz), zatímco kosinus závisí jen na poloze, je tedy součástí amplitudy. Amplituda vlnění v nějakém bodě je

$$U_0(x,y) = 2\cos\left(\pi\left(\frac{\sqrt{(x-\delta/2)^2+y^2}-\sqrt{(x+\delta/2)^2+y^2}}{\lambda}\right)+\sigma\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Amplituda je tedy nulová (hluchý úhel), pokud je vnitřek kosinu roven $\frac{\pi}{2}+k\pi$, což nastává pokud:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\left(\lambda^2\,(2k-\sigma)^2-16x^2\right)\left(\lambda^2\,(2k-\sigma)^2-4\delta^2\right)}{16\lambda^2\,(2k-\sigma)^2}}\,.$$

Zajímají-li nás hluché úhly ve větší vzdálenosti od ladičky (pro velká x), tak vidíme, že vznikají jen pokud je vnitřek odmocniny kladný. Pro velká x zanedbáme člen $\lambda^2(2k-\sigma)^2$ (je řádově menší než $16x^2$ se kterým ho srovnáme).

$$y \approx \pm\sqrt{\frac{(-16x^2)\left(\lambda^2\,(2k-\sigma)^2-4\delta^2\right)}{16\lambda^2\,(2k-\sigma)^2}}\,.$$

„Hluché hyperboly“ tedy vznikaji, pokud je koeficient u x^2 kladný, což nastává právě když $(\lambda^2\left(2k-\sigma\right)^2-4\delta^2\right) < 0$, tedy když $\delta > \frac{1}{2}\lambda\,(2k-\sigma)$.

Z toho vidíme, že ani pro nejmenší kombinaci σ a k nemůže být tento mechanismus zodpovědný za hluché úhly (pokud není rozestup tyček ladičky větší než polovina vlnové délky, tedy 39 cm). Protože úplné řešení je obtížné, udělili bychom za tuto úvahu (byla-li by úplná) 4 body. Rámcově správné řešení se povedlo Mgr.^M Martinu Výškovi a Pavlu Klavíkovi.

Lepší přiblížení

Abychom lépe popsali, co slyšíme, je potřeba udělat přesnější model. Nejprve: Jak ladička kmitá? Oba konce ladičky mohou kmitat buď v módu „proti sobě“ (konce ladičky se od sebe střídavě vzdalují a přibližují, poloha středu se nemění), nebo v módu „spolu“ (tj. vzdálenost tyček ladičky se nemění, kmitají ve stejné fázi). Zastoupeny jsou obecně módy oba (i když jeden z nich se může tlumit třeba daleko rychleji, takže nevíme, v jakém poměru).

K dobrému popisu je potřeba uvážit ne dva, ale čtyři zdroje zvuku. Jak ladička kmitá, tyčky se pohybují tam a zpět. Pokud si představíme zvuk jako to, že vzduch je v některých místech hustší a v některých místech řidší, pak při pohledu na jednu z tyček ladičky, pokud se pohybuje směrem k nám, vzduch se zhušťuje, pokud se pohybuje od nás, tak jej zřeďuje.[2] Jednu tyčku ladičky tedy

[2] Ve skutečnosti to může být složitější, za zhušťování a zřeďování vzduchu může být zodpovědná změna rychlosti tyčky, nebo její rychlost, každopádně průběh bude harmonický a okraje jedné tyčky budou mít navzájem opačnou fázi.

popíšeme jako dva zdroje s opačnou fází vzdálené o tloušťku tyčky (označme ξ). Tomuto modelu se říká *kvadrupólový*.

Mód „proti sobě“ tedy vypadá jako $(+-)(-+)$[3]

$$\begin{aligned}U(x,y,t) = \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x-\frac{\delta}{2}-\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)+\pi\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x-\frac{\delta}{2}+\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x+\frac{\delta}{2}-\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x+\frac{\delta}{2}+\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)+\pi\right)\end{aligned}$$

a mód „spolu“ $(+-)(+-)$ jako:

$$\begin{aligned}U(x,y,t) = \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x-\frac{\delta}{2}-\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)+\pi\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x-\frac{\delta}{2}+\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x+\frac{\delta}{2}-\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)+\pi\right)\\
+\sin\left(2\pi\left(ft + \frac{\sqrt{\left(x+\frac{\delta}{2}+\frac{\xi}{2}\right)^2+y^2}}{\lambda}\right)\right).\end{aligned}$$

[3] Schématicky znázorněno – v závorkách jsou jednotlivé tyčky ladičky, plus a mínus jsou dva její konce s opačnou fází. Jsou dvě orientace: $(+-)(-+)$ („proti sobě“) a $(+-)(+-)$ („spolu“). Možnosti $(-+)(+-)$ a $(-+)(-+)$ jsou pochopitelně totožné s předchozími (jen posunuté v čase).

Nyní je nejtěžším úkolem zjistit amplitudy v jednotlivých bodech prostoru. Následující výpočet je právě ona náročnější část a uvádíme jej hlavně pro zájemce o něco navíc. Základní myšlenka je jednoduchá. Zbavíme se závislosti na čase tím, že uděláme průměr přes velký časový úsek. (Tím získáme, jak hlasitý je zvuk „v průměru“.) Průměrováním sinusovek ovšem nic nezískáme – jejich střední hodnota je pro každé místo nula (střídají se kladné a záporné výchylky). Průměrujme tedy druhou mocninu. Pro jednoduchost zapíšeme $U(x, y, t)$ pomocí konstant:

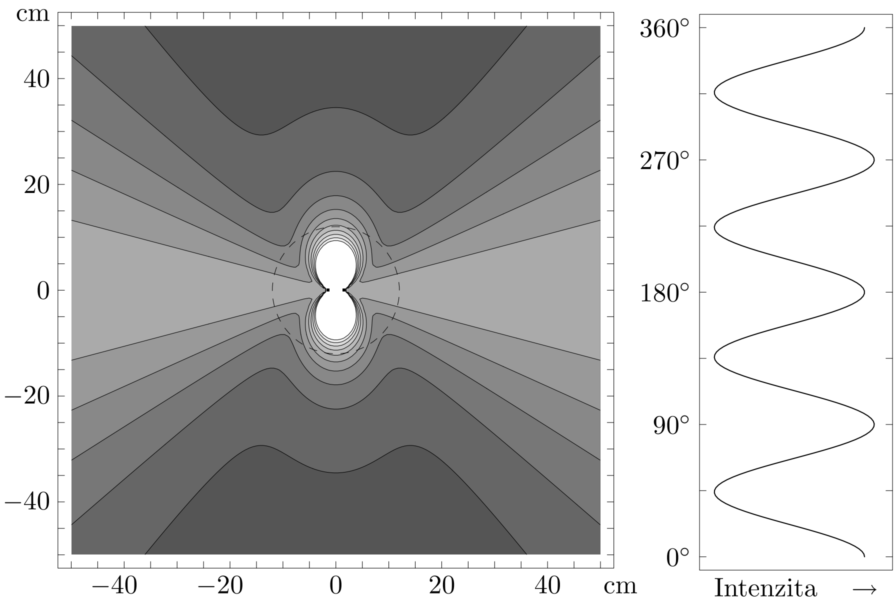
$$U(x,y,t)^2 = \left(\sin(\omega t + A) + \sin(\omega t + B) + \sin(\omega t + C) + \sin(\omega t + D)\right)^2 .$$

Průměr této funkce bude

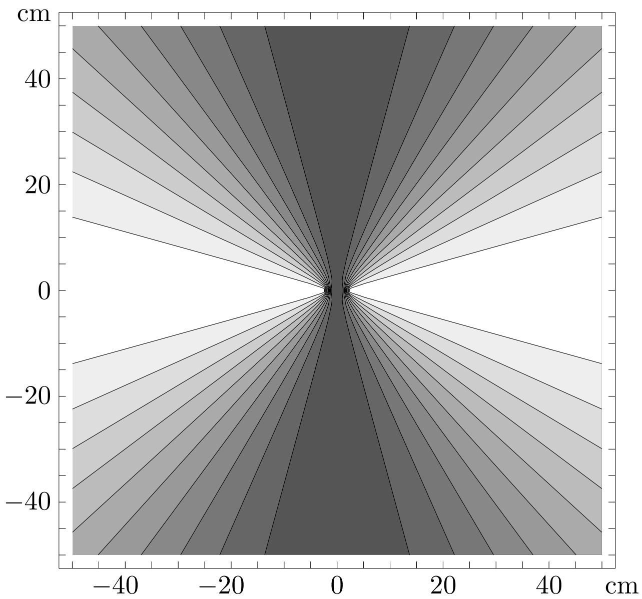
$$U_0(x,y) = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T U(x,y,t)^2 \mathrm{d}t}{T}.$$

Roznásobíme-li závorky se siny, vyskytnou se obecně členy složené ze dvou násobených sinů s různým argumentem, pro které

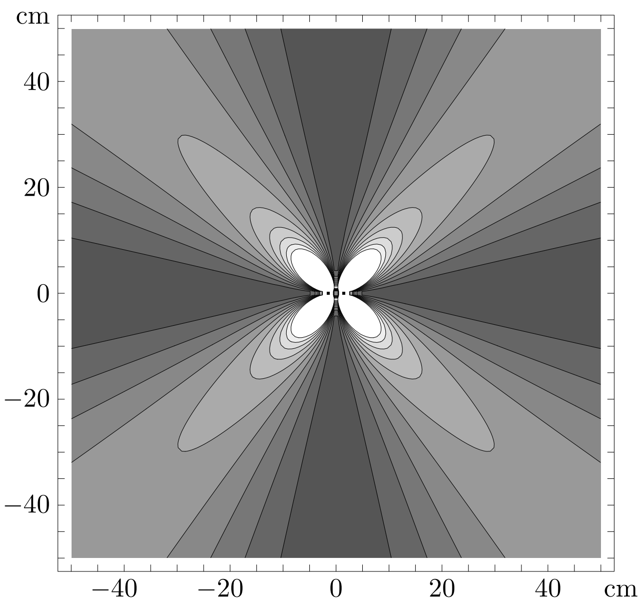
$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T 2\sin(\omega t + A)\sin(\omega t + B)\,\mathrm{d}t}{T} = \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{T\cos(A-B) - \omega^{-1}\cos(A+B+T\omega)\sin(T\omega)}{T} = \\
&= \cos(A-B)\,.
\end{aligned}$$



Obr. r3.3.1 – Rozložení intenzity kolem ladičky ($\delta = 3\,\mathrm{cm}$ a $\xi = 5\,\mathrm{mm}$) kmitající v módu „proti sobě“ a průběh intenzity na kružnici s poloměrem 12 cm.



Obr. r3.3.2 – Intenzita kolem ladičky kmitající v módu „spolu“.



Obr. r3.3.3 – Intenzita kolem ladičky kmitající v módu $\binom{+}{-}\binom{-}{+}$.

Roznásobením $U(x, y, t)^2$ a nahrazením každé dvojce sinů podle tohoto pravidla získáme prostorovou část. Algebraicky je tento výraz složitý, proto uvádíme jen obrázky zachycující intenzitu v okolí ladičky pro mód „proti sobě“

(obr. r3.3.1) a pro mód „spolu“ (obr. r3.3.2). Jak je vidět, tak hluché úhly vznikají blízko ladičky právě o 45° skloněné oproti ose ladičky (na obrázcích rovnoběžná s textem).

Ještě poznamenejme, že ladička (kromě módu „spolu“ a „proti sobě“) může ještě kmitat kolmo na spojnici tyček ladičky. V takovém případě se členy $\pm\xi/2$ přičítají k y-ové souřadnici, siny jsou opět čtyři a vznikají dva módy (spolu a proti sobě), které můžeme znázornit jako $\binom{+}{-}\binom{+}{-}$ a $\binom{+}{-}\binom{-}{+}$. Podrobný rozbor je stejný jako výše. Průběh intenzity zvuku u prvního módu je vpodstatě stejný jako na obr. r3.3.2, jen o 90° otočený, průběh druhého je zobrazen na obr. r3.3.3. Jak je vidět, má maxima právě tam, kde očekáváme hluché úhly (což jenom dokumentuje to, že oba příčné módy jsou velmi slabé a na tvorbě intenzity se příliš nepodílíá, což jsme už od začátku čekali).

Irigi & Jindra

Úloha 3.4 – Rozměry jednotek (2b)

Zadání:

Fyzikální jednotky, se kterými se ve škole setkáváte (ale i ty, se kterými jste se dosud nesetkali) jsou vyjádřitelné pomocí celých mocnin základních jednotek SI. Je to náhoda, nebo to má nějaký hlubší smysl? Jaký?

Řešení:

Nejprve se zamysleme nad následující věcí: pokud měříme nějakou veličinu, potom to děláme tak, že ji poměřujeme s nějakou etalovanou hodnotou této veličiny, která byla zvolena dohodou. To platí pro základní jednotky SI (metr, stejně jako např. kilogram mohly být zvoleny libovolně), ale také pro jednotky odvozené. Např. rychlost bychom mohli rovněž poměřovat s etalonovou hodnotou (dostatečně neměnnou) (např. ji vyjadřovat v násobcích rychlosti světla, nebo v násobcích střední hodnoty rychlosti elektronu v základním stavu atomu vodíku, apod.). Ukazuje se však jako výhodné vyjadřovat jednotky odvozené z jednotek základních (v případě rychlosti tedy počítáme násobky rychlosti, kdy daná částice urazí metr za sekundu). Tolik k odpovědi na otázku proč se používají odvozené jednotky: je to jen věc domluvy, aby bylo jednotek co možná nejméně a systém jednotek byl pokud možno co nejjednodušší. Zajímavější otázka je, proč jsou vyjádřitelné právě v mocninách základních jednotek?

Odvozené jednotky spočítáme ze základních, a ty základní můžeme volit zcela libovolně. To ale znamená, že fyzikální zákony nesmí na volbě těchto jednotek záviset! Vězměmě například sílu. Při změně velikosti jedné ze základních jednotek (např. sekunda) se musí hodnota síly přenásobit nějakou funkcí $f(\mathrm{s})$ a všechny fyzikální vztahy musí zůstat v platnosti. (Přenásobit proto, že sílu vyjadřujeme v *násobcích* newtonu, změní-li se tedy newton, je síla přenásobena.)[4]

[4] *Pozn. red.: Takto se dají vybudovat i systémy jednotek, kdy by nebyla hodnota před změnou jednotky J přenásobena konstantou, ale byla by k ní konstanta přičtena. Např. kdybychom definovali veličinu „logaritmus síly“ (značme* $\log(F)$*), pak mění-li se newton při změně sekundy jako* $\mathrm{N} \to \mathrm{N} f(\mathrm{s})^{-2}$*, bude se*

Z pochopitelných důvodů také nelze sčítat (nebo jakkoliv jinak „míchat“) dvě různé jednotky – jednotka $\mathrm{kg} + \mathrm{m}$ nemá dobrý smysl, protože pak by vztahy obsahující tuto jednotku závisely na (námi zvoleném) poměru velikosti kilogramu a metru, což nesmí. Ze stejného důvodu nenásobíme při změně základních jednotek A, B, C, … $\mathrm{A} \to f_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$, $\mathrm{B} \to f_{\mathrm{B}}(\mathrm{B})$, … odvozenou jednotku X pomocí obecné funkce $f_{\mathrm{X}}(\ldots)$ těchto jednotek: $\mathrm{X} \to \mathrm{X} f_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots)$, ale pomocí součinu transformačních funkcí jednotlivých jednotek: $\mathrm{X} \to \mathrm{X} \quad f_{\mathrm{X,A}}(\mathrm{A}) f_{\mathrm{X,B}}(\mathrm{B}) f_{\mathrm{X,C}}(\mathrm{C}) \ldots$ (Funkce, kterou se jednotky mění musí být součinem funkcí, kterými se mění jednotlivé jednotky.)

Ze stejného důvodu je funkce, kterou přenásobujeme jednotku X složenou z jednotek A, B, C, … při změně $\mathrm{A} \to f_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$, $\mathrm{B} \to f_{\mathrm{B}}(\mathrm{B})$, … ne jako $\mathrm{X} \to \mathrm{X} f_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ (kde $f_{\mathrm{X}}(\ldots)$ je obecná funkce určená funkcemi $f_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$, … závisejícími na původních hodnotách veličin A, B, …), ale jen jako funkce $\mathrm{X} \to \mathrm{X} f_{\mathrm{X,A}}(\mathrm{A}) f_{\mathrm{X,B}}(\mathrm{B}) f_{\mathrm{X,C}}(\mathrm{C}) \ldots$, tedy taková, že když se jednotky mění, musí být součinem funkcí, kterými se mění jednotlivé jednotky.

A protože navíc typicky chceme, aby se všechny jednotky změnily ve stejném poměru při změně metru na dvojnásobnou délku, jako při změně dvojnásobku metru na čtyřnásobek metru (nezávislost prostoru a času na měřítkách), jsou jedinými přípustnými funkcemi $f_{\mathrm{X,A}}$ mocniny.

Odpovědí na otázku ze zadání je tedy: Kvůli tomu, aby se neměnily fyzikální zákony při změně základních jednotek, z požadavku, aby byla veličina vyjádřena jako násobek velikosti etalonu, tedy aby se při změně základních jednotek transformovala násobením nějakou funkcí závislou vždy jen na měněné jednotce (což je vidět na příkladu logaritmických jednotek), a aby byla změna závislá jen na poměru původní a nové hodnoty, ne na jejich absolutní velikosti, mohou být funkcemi $f_{\mathrm{X,A}}$ jen mocniny.

Na závěr uvedeme příklad jednotky, která není dána vzhledem k základním jednotkách mocninou celou (takové jednotky sice nejsou běžné, ale vyskytují se – nic je nezakazuje). Je to např. rozměr, který má v kvantové mechanice vlnová funkce Ψ – jde o hustotu amplitudy pravděpodobnosti, takže $|\Psi|^2 = p\Delta V^{-1}$, kde p je pravděpodobnost a ΔV je objem, v němž měříme pravděpodobnost nalezení částice. Protože pravděpodobnost jednotku nemá, je jednotkou vlnové funkce $\mathrm{m}^{-3/2}$.

Irigi

---

tato jednotka ($\mathrm{loN} \equiv \log \mathrm{N} = \log\left(\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{-2}}\right)$*) měnit jako:* $\mathrm{loN} \to \mathrm{loN} - 2\log f(\mathrm{s})$. *V takovémto systému jednotek bychom neříkali, že daný předmět váží $x\,\mathrm{kg}$, ale že váží $x + \mathrm{lokg}$ – jednotky by se přičítaly. Tomu se ale při zavádění jednotek vždy dá vyhnout aplikováním vhodné inverzní funkce (pro tento „podivný“ systém jednotek odlogaritmováním).*

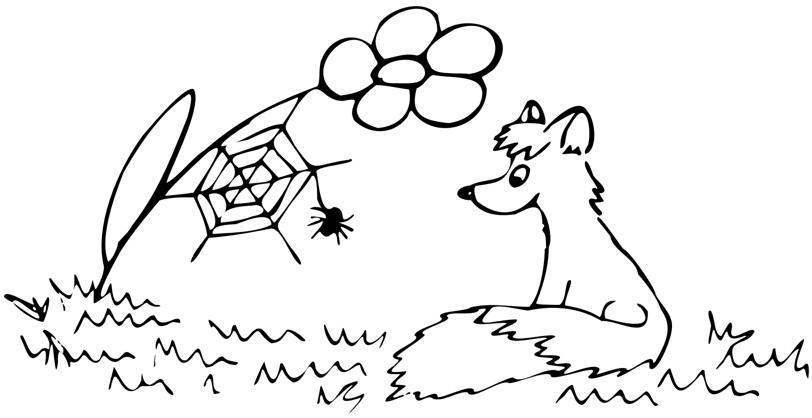
Výsledková listina

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t1**	**t2**	**t4**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Martin Výška	2.	45	3	3	3	0				2	11	45
2.	Doc.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	2.	102	3	1		0				0	4	37
3.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Florianová	3.	33	2	3		1				0	6	33
4–5.	Doc.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek	3.	199		3			9			0	12	25
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Petr Pecha	1.	25	3	3	1					2	9	25
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Jirků	4.	44	1	3	1					0	5	18
7.	Bc.$^{\text{MM}}$ Pavla Zárubová	2.	15	1	3	1	2		3		1	11	15
8–12.	Dr.$^{\text{MM}}$ Matěj Korvas	4.	72										13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Ladislav Bačo	1.	13		3		2				1	6	13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Petr Dlabaja	4.	13										13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jozef Halaga	4.	13										13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Klára Krejčíčková	3.	13		3					7	0	10	13
13–14.	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Vaňhara	2.	14										11
	Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Rolínek	4.	11										11
15–16.	Dr.$^{\text{MM}}$ Radim Pechal	4.	69										10
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jakub Marian	3.	10										10
17–18.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	2.	33										9
	Jana Fojtová		9		1		1				0	2	9
19–21.	Lenka Švidrnochová	2.	9										8
	Anita Gregorová	4.	8		3						0	3	8
	Martin Volf	1.	8	1	1	0					0	2	8
22–24.	David Navrkal	3.	7										7
	Alžběta Prokopová	2.	7	3	3		0				1	7	7
	Dušan Rychnovský	3.	7										7
25–26.	Pavel Klavík	4.	6		3	3					0	6	6
	Kryštof Touška	4.	6										6
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Pecha	1.	44		3		0				1	4	5
28.	Michal Petrucha	2.	4										4
29–31.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Pechová	4.	42		1						0	1	3
	Juraj Hartman	3.	3				2				0	2	3
	Julie Musilová	2.	3		1						0	1	3
32–33.	Pavel Makovec	2.	2										2
	Irena Pavlíčková	2.	2										2
34.	Zbyněk Klikoš	3.	1										1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.