Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XIII číslo 4

Termín odeslání: 20. 1. 2007

Ahoj kamarádky a kamarádi,

Blíží se nám Vánoce, jistě se už děsíte toho, co dáte svým blízkým, ale zároveň se již těšíte na cukroví, kapra a odpočinek od školy a občas zasněně uvažujete nad tím, co najdete pod stromkem vy. Na tuto každoroční otázku vám neodpovíme, víme ale, co jste právě našli ve svých poštovních schránkách! Očekávané vánoční číslo M&M! Čeká vás v něm spousta článků, které jste nám poslali, a také nové zadání.

Vaši organizátoři

Oprava čísla 13.3: Ve vzorovém řešení úlohy Automat bylo chybně uvedeno, že nejkratší známé řešení pro získání kofoly je dlouhé 16 cifer. Dr.MM Matěj Korvas zaslal řešení dlouhé pouhých 13 cifer (3474313474312), které je ještě kratší než originální řešení z knihy R. Smullyana. Opravující délku Matějova řešení přehlédl a tímto se omlouvá.

Zadání úloh

Úloha 4.1 – Magdeburské polokoule (5b)

Německý fyzik Otto von Gericke, starosta města Magdeburgu, v roce 1654 předvedl dramatický experiment, ve kterém ukázal sílu vakua a dokázal existenci atmosféry Země. Gericke spojil dvě duté měděné polokoule o průměru 51 cm s úchyty (Magdeburské polokoule), a ze vzniklé dutiny vypumpoval vzduch. Pak nechal zapřáhnout ke každé polokouli 4 páry koní a ukazoval, že ani 16 koní není schopno od sebe polokoule oddělit. Poté, co nechal do dutiny opět vniknout vzduch, se od sebe obě polokoule oddělily samovolně.

Kolik koní by musel zapřáhnout, aby polokoule roztrhl? Sílu, kterou dokáže táhnout jeden kůň, zkuste buďto zjistit, anebo vhodným způsobem odhadněte. Pokud se vám to nepovede, určete alespoň, jakou silou by museli zapřažení koně táhnout, aby polokoule roztrhli.

Jak by se situace změnila, kdyby použil místo polokoulí „polokrychle“ nebo kužely s hranou, resp. průměrem i výškou 51 cm? Zkuste vysvětlit, proč si vybral právě polokoule.

Úloha 4.2 – Rovnice (4b)

Dokažte, že existuje přirozené číslo $k \leq 100$ takové, že rovnici $\left\lfloor \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor = k$ vyhovuje alespoň 100 přirozených čísel. $\lfloor x \rfloor$ zde představuje dolní celou část čísla x.

Úloha 4.3 – Řez trojúhelníka (4b)

Rozdělte rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník co nejkratším přímým řezem na dvě části stejného obsahu.

Úloha 4.4 – Zrádná lávka (3b)

Proslulý lupič Pedro Ramiréz sebral v indické bance tři zlaté cihly a utíká hustou džunglí. Každá cihla váží 10 kg. Najednou mu však cestu přehradí dlouhá propast s úzkou lávkou. Ta, jako každá indická lávka, unese nanejvýš 100 kg a je-li zatížena víc, spadne. Pedro přemýšlí: „Vážím 79 kg, pokud půjdu opatrně, mohl bych přenést dvě cihly a pak lávku shodit!“

Policie je ještě daleko a tak přemýšlí dál. „… Kdybych ale žongloval (bude to fuška!), tak vždy budu mít v ruce nanejvýš dvě cihly, a lávka nespadne, takže když k tomu půjdu velice opatrně, můžu je přenést všechny, a lávku shodit až pak!“

Jak tento příběh skončí? Povede se slovutnému mexikánci přenést cihly, pokud bude žonglovat tak, že bude mít vždy nejvýše dvě cihly v ruce? A co kdyby žongloval tak, že má vždy v ruce jen jednu cihlu?

Řešení témat

Téma 4 – Algebraické vyjádření goniometrických funkcí

Teória k trigonometrii

Ladislav Bačo

V tomto článku sú zhrnuté niektoré dôležité vzťahy medzi trigonometrickými funkciami a tiež návody na výpočty potrebné k algebraickému vyjadreniu hodnôt trigonometrických funkcií.

V nasledujúcom texte sa budem zaoberať matematickými vzťahmi dôležitými k ďalším výpočtom hodnôt trigonometrických funkcií. Tieto vzťahy môžu pomôcť každému, kto bude riešiť túto tému. Zároveň uvediem zopár návodov, ako vypočítať hodnoty trigonometrických funkcií.

Trigonometrické funkcie sú periodické, preto ak budeme poznať ich hodnoty, ktoré nadobúdajú počas jednej periódy, budeme vedieť ľahko určiť aj hodnoty na celom definičnom obore.

A teraz k tým vzťahom pre periodické hodnoty. Pre funkciu sínus platí:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha\,,$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha\,,$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)\,.$$

Z týchto vzťahov vidno, že na určenie hodnoty funkcie sínus stačí poznať jej hodnoty na intervale $\langle 0°; 90° \rangle$.

Pre funkciu kosínus platí:

$$\begin{aligned}
\cos(180° + \alpha) &= \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\,,\\
\cos(90° + \alpha) &= -\cos(90° - \alpha)\,,\\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\,.
\end{aligned}$$

Opäť vidíme, že potrebujeme poznať len jej hodnoty na intervale $\langle 0°; 90° \rangle$.

Pre funkciu tangens platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(180° + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha\,,\\
\operatorname{tg}(180° - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha\,,\\
\operatorname{tg}(90° + \alpha) &= -\operatorname{tg}(90° - \alpha)\,,
\end{aligned}$$

Aj teraz nám stačí znalosť hodnôt na základnom intervale. Pre funkciu kotangens platí to isté, čo pre funkciu tangens.

Zároveň ak poznám hodnotu nejakej trigonometrickej funkcie pre nejaký uhol, viem vyjadriť hodnoty ostatných trigonometrických funkcií pre ten daný uhol podľa vzťahov:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,,\\
\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\,, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,,\\
&\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Rovnica $z = x^2$ má dve riešenia, ja som si vybral to kladné.

Taktiež veľmi užitočné sú vzťahy pre funkcie súčtu a rozdielu dvoch uhlov.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,\\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,\\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,, & \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,,\\
\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}\,, & \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}\,.
\end{aligned}$$

Funkcie dvojnásobného a polovičného uhla sa dajú odvodiť z vyššie uvedených vzťahov.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	nedef.
$\operatorname{cotg}\alpha$	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

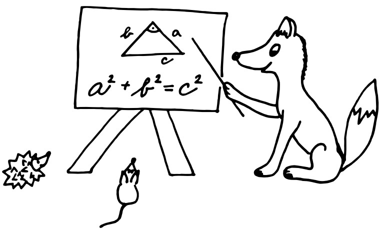
Tabuľka t4.1 – hodnoty goniometrických funkcií.

A teraz k návodom na výpočty hodnôt trigonometrických funkcií. Určite pomôže aj tabuľka t4.1.

Pomocou vzťahu pre polovičný uhol sa dá odvodiť hodnota pre trigonometrické funkcie uhla 15°. Pomocou rozdielu dvoch uhlov (15° a 12°; hodnota $\sin 12^\circ$ je v zadaní témy) sa dá vypočítať hodnota trigonometrických funkcií uhla 3°. Potom sa pomocou súčtových vzorcov dajú nájsť všetky hodnoty trigonometrických funkcií každého uhla, ktorý je násobkom 3°.

Zároveň keby sa použil súčtový vzorec pre uhly 1° a 2° (pre 2° sa použije funkcia dvojnásobného uhla), tak dostaneme

$$\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ\,.$$



Vyriešením by sme dostali $\sin 1^\circ$, teda by sme vedeli odvodiť aj hodnoty ostatných funkcií. Následne by sa dali pomocou súčtových vzorcov určiť hodnoty trigonometrických funkcií každého uhla, ktorého veľkosť by bola v stupňoch vyjadrená prirodzeným číslom.

Použitá literatúra: Minilexikon matematiky, František Latka, Alfa.

Pozn. red.: Autor shrnul známé vzorce pro úpravy goniometrických funkcí a správně naznačil cestu, kterou lze dospět k rozhodnutí, které celočíselné úhly lze algebraicky vyjádřit, a které ne. Zkuste se nyní zamyslet nad následujícími problémy, které stále ještě zůstávají:

* *V zadání byla napsána hodnota* $\sin 12^\circ$. *Nalézt právě tuto hodnotu není triviální. Víte proč? Umíte ukázat, jaká je hodnota* $\sin 12^\circ$, *aniž byste využili hodnotu uvedenou v zadání?*
* *Jak autor správně poznamenal, vždy umíme ze známé hodnoty goniometrické funkce zjistit hodnotu goniometrické funkce s polovičním úhlem jednoduše vyřešením kvadratické rovnice. Umíme takto dělit úhly na třetiny, pětiny, sedminy či obecně p-tiny? (p je prvočíslo)*
* *Autor ukázal, jak lze získat* $\sin 3^\circ$ *(zašle někdo podrobnější odvození, nejen návod jak postupovat?), a tedy hodnoty všech goniometrických funkcí úhlů dělitelných třemi. Také naznačil, jak by šlo získat hodnotu* $\sin 1^\circ$. *Je to opravdu tak jednoduché? V čem by mohl být problém? Dá se* $\sin 1^\circ$ *vyjádřit bez pomoci komplexních čísel?*

Irigi

Téma 5 – Volby

K tomuto tématu zatím přišly 3 příspěvky. Autoři příspěvků pokryli velkou část položených otázek, přesto je i v tomto tématu spousta věcí, nad kterými můžete hloubat dál. Nemusíte se omezovat pouze na volební systémy vyjmenované v zadání, můžete reagovat na otištěné příspěvky, zpřesňovat je a rozvíjet je dále.

Můžete se zaměřit i do minulosti a zjistit, „jak se volilo kdysi". Měl vždy v historii každý člověk jeden volební hlas? Kdo mohl a kdo nemohl volit? Dokázali byste odhadnout, jak by dopadly výsledky voleb podle tehdejších pravidel (ať už si zvolíte jakékoli)?

Pokud se navíc pročtete celým tématem až na konec, najdete tam soutěž.

Nejkomplexnější řešení poslala Dr.MM Alžběta Pechová a Mgr.MM Hana Florianová. V případech, kdy se výsledky v obou řešeních pro danou část tématu shodovaly, jsme zařadili jen jedno z řešení, v ostatních případech obě.

Otištěné příspěvky jsou redakčně upraveny.

Výpočet obsazení mandátů

Mgr.MM Hana Florianová

V České republice se používá tzv. d'Hondtův systém. Spočívá v tom, že se mandáty rozdělují v jednotlivých krajích (celkem 14). Čím víc voličů v kraji volilo, tím víc mandátů je kraji přisouzeno.

Přehled přidělování mandátů krajům

Kraj	Voličů	Mandátové č.	Celá část	Zbytek	Plusové m.	Celkem m.
Hl. m. Praha	656 495	24.547	24	547	1	25
Středočeský	620 047	23.184	23	184	0	23
Jihočeský	337 387	12.615	12	615	1	13
Plzeňský	289 049	10.807	10	807	1	11
Karlovarský	137 117	5.126	5	126	0	5
Ústecký	374 736	14.011	14	011	0	14
Liberecký	215 510	8.057	8	057	0	8
Královéhradecký	295 931	11.064	11	064	0	11
Pardubický	273 921	10.241	10	241	0	10
Vysočina	275 997	10.319	10	319	0	10
Jihomoravský	608 804	22.763	22	763	1	23
Olomoucký	333 849	12.482	12	482	0	12
Zlínský	319 933	11.962	11	962	1	12
Moravskoslezský	610 200	22.815	22	815	1	23

Nejdřív se zjistí, kolik jeden mandát stojí hlasů. V ČR je 200 poslanců a volilo 5 348 976 občanů starších 18 let. Tedy na jeden mandát je potřeba $5348976/200 = 26744{,}88$ hlasů. Tomuto číslu se říká republikové mandátové číslo. Pokud jím podělím počet voličů v kraji, dostanu číslo, jehož celá část udává počet mandátů kraji přidělených. Po tomto vydělení ovšem zbudou ještě volné mandáty, ty se po jednom přiřadí krajům s největším zbytkem.

Změna počtu poslanců

Mgr.[MM] Hana Florianová

V této části jsem zjišťovala, jak by to vypadalo, kdyby se počet poslanců snížil na 199 nebo zvýšil na 201. V prvé řadě se změní republikové mandátové číslo, protože se nebude dělit 200, ale 199 (resp. 201). A tím pádem se změní i výsledky po jeho dělení.

199 poslanců

Výpočet republikového mandátového čísla: 5348976/199 = 26879, zaokrouhleno na jednotky, protože jak už jsem uvedla dříve, o velikosti čísel se rozhoduje max. na úrovni stovek, a tím pádem nemusím výsledek uvádět na několik desetinných míst. Udělám si opět stejnou tabulku, jak pro 200 poslanců.

Přehled přidělování mandátů pro 199 poslanců

Kraj	Voličů	Mandátové č.	Celá část	Zbytek	Plusové m.	Celkem m.
Hl. m. Praha	656495	24,424	24	424	0	24
Středočeský	620047	23,068	23	068	0	23
Jihočeský	337387	12,522	12	522	1	13
Plzeňský	289049	10,754	10	754	1	11
Karlovarský	137117	5,101	5	101	0	5
Ústecký	374736	13,941	13	941	1	14
Liberecký	215510	8,018	8	018	0	8
Královéhradecký	295931	11,010	11	010	0	11
Pardubický	273921	10,191	10	191	0	10
Vysočina	275997	10,268	10	268	0	10
Jihomoravský	608804	22,650	22	650	1	23
Olomoucký	333849	12,420	12	420	0	12
Zlínský	319933	11,903	11	903	1	12
Moravskoslezský	610200	22,702	22	702	1	23

Z tabulky lze vidět, že o mandát přijde Praha (dobře jí tak). Podívám se tedy na řadu čísel pro Prahu, kterou zde neuvádím, a zjistím, že nejmenší číslo patří ODS, a tedy ta přijde o jeden hlas.

201 poslanců

Výpočet republikového mandátového čísla: 5348976/201 = 26612 (opět zaokrouhleno).

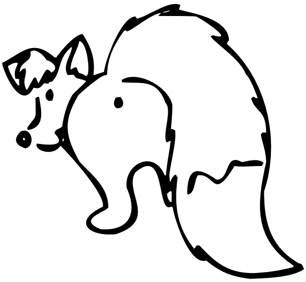
Z tabulky lze vidět, že mandát navíc získá Olomoucký kraj, a pokud v tomto kraji najdu 13. největší číslo, bude to právě ODS, která získá mandát navíc.

Přehled přidělování mandátů pro 201 poslanců

Kraj	Voličů	Mandátové č.	Celá část	Zbytek	Plusové m.	Celkem m.
Hl. m. Praha	656495	24,669	24	669	1	25
Středočeský	620047	23,300	23	300	0	23
Jihočeský	337387	12,678	12	678	1	13
Plzeňský	289049	10,862	10	862	1	11
Karlovarský	137117	5,153	5	153	0	5
Ústecký	374736	14,082	14	082	0	14
Liberecký	215510	8,098	8	098	0	8
Královéhradecký	295931	11,120	11	120	0	11
Pardubický	273921	10,293	10	293	0	10
Vysočina	275997	10,371	10	371	0	10
Jihomoravský	608804	22,877	22	877	1	23
Olomoucký	333849	12,545	12	545	1	13
Zlínský	319933	12,022	12	022	0	12
Moravskoslezský	610200	22,930	22	930	1	23

Strany v poslanecké sněmovně

Pozn. red.: Tato část v podstatě opakuje informace ze zadání úlohy, obsahuje ovšem dvě důležité poznámky, které se v zadání neobjevily.



Do sněmovny se dostanou jen ty strany, které na celorepublikové úrovni dostanou více než 5 % hlasů. Těmi letos byly: ODS, ČSSD, KSČM, SZ a KDU-ČSL. Mezi tyto strany se tedy rozdělovaly mandáty (této části se říká skrutinium), a to tak, že se v každém kraji vzal počet hlasů postupně pro každou z výše uvedených stran a dělil se řadou přirozených čísel od 1 do n, kde n je počet kandidátů na volebním lístku dané strany (viz níže). (Tady bych chtěla upozornit, že se dělil vždy počet hlasů, nikoli již vydělený výsledek, jak by se dalo ze zadání pochopit.) Všechny strany ale měly tolik kandidátů, že se k číslu n nikdy nedošlo. Výsledek se zaokrouhluje na dvě desetinná místa, i když to také tentokrát není potřeba, protože o velikosti čísel se rozhoduje maximálně na místě stovek. Pak se čísla seřadí od největšího a prvních m se započítá, kde m je počet mandátů přidělených danému kraji. Nakonec se sečtou všechny získané mandáty v krajích a máme výsledky voleb!

Různé volební systémy

Pozn. red.: V této části se výsledky Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběty Pechové a Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hany Florianové neshodují. Po podrobném rozboru jsme našli nesrovnalosti u obou zmiňovaných řešení. Oběma autorkám dáme možnost zkontrolovat si své postupy a k této části tématu se vrátíme příště.

Kdo nevolí, volí komunisty?

Mgr.[MM] Hana Florianová

Zjišťovala jsem, zda je toto tvrzení pravdivé. Vzala jsem v úvahu, že by šli volit všichni voliči (tedy by nebyl nikdo, kdo nevolí). Jestli by si pak komunisté polepšili nebo pohoršili. Předpokládám, že počet procent lidí volících dané strany by zůstal zachován, protože asi těžko šli všichni, kdo podporují komunisty, volit a ti, kdo podporují jiné strany, zůstali doma.[1] Vzala jsem tedy první kraj – to je Hlavní město Praha – a tam prováděla výpočet:

	ODS	ČSSD	SZ	KSČM	KDU-ČSL
Celkem voličů	963 199				
Procenta pro strany	40,32 %	23,22 %	9,19 %	7,9 %	4,84 %
Hlasů	465 418	224 329	88 518	76 093	46 619
Mandátů	14	6	2	2	1

To je úplně stejně, jak kdyby nevolili všichni → je úplně jedno kolik lidí jde nebo nejde volit.[2] Tvrzení, že kdo nevolí, podporuje komunisty, platí jen z 1/8 (tedy neplatí), protože v celé republice je 12,81 % voličů komunistů, pro které opravdu platí, že i když nevolí, podporují komunisty.[3] A 12,81 % je 1/8 počtu nevoličů.

Výhodné čtyřkoalice

Mgr.[MM] Hana Florianová

Zabývala jsem se tím, zda by bylo pro politické strany výhodné vstupovat do voleb ve čtyřkoalici. Čtyřkoalice musí získat na republikové úrovni minimálně 20 % hlasů. Předpokládala jsem, že by koalici čistě teoreticky utvořily strany, které se dostaly do sněmovny, tedy jednou by koalice byla bez ODS, pak bez ČSSD, SZ, KSČM a KDU-ČSL. Pro každou z těchto možností jsem počítala mandáty podle d'Hondtova systému. Dopadlo to následovně.

ČSSD + SZ + KSČM + KDU-ČSL

Kolik mandátů ve kterém kraji kdo získal, uvádím v tabulce:

kraj	Pra	StřČ	JČ	Plz	Karl	Úst	Lib	Krhr	Par	Vys	JM	Olo	Zlí	MoSl	celkem
ODS	13	10	5	4	2	5	3	4	3	3	7	4	4	7	74
Koalice	12	13	8	7	3	9	5	7	7	7	16	8	8	16	126

[1] *Pozn. red.: Je tento předpoklad oprávněný?*

[2] *Pozn. red.: Souhlasíte s tímto názorem?*

[3] *Pozn. red.: Toto je jedna z možností, jak můžeme tuto otázku pochopit. Zkuste ji prozkoumat i z jiného úhlu.*

V rámci koalice jsem mandáty dělila tak, aby každá strana dostala stejně. Pokud to nešlo, jednou jsem jí přidala a podruhé ubrala.

Pozn. red.: V původním příspěvku byly u každé varianty koalice uvedeny tabulky ukazující rozdělení mandátů mezi strany v jednotlivých krajích. Vzhledem k tomu, že výsledky byly i slovně shrnuty, jsme tabulky z důvodu úspory místa vynechali.

ODS si pohoršila o 7 a ČSSD o 42. Naopak SZ si polepšila o 26, KSČM o 5 a KDU-ČSL o 18 mandátů.

ODS + SZ + KSČM + KDU-ČSL

kraj	Pra	StřČ	JČ	Plz	Karl	Úst	Lib	Krhr	Par	Vys	JM	Olo	Zlí	MoSl	celkem
ČSSD	6	7	4	4	2	5	2	3	3	4	8	4	4	10	66
Koalice	19	16	9	7	3	9	6	8	7	6	15	8	8	13	134

ODS by si pohoršila o 47 a ČSSD o 8 mandátů. Polepšili by si opět menší strany, a to SZ o 28, KSČM o 7 a KDU-ČSL o 20 mandátů.

ODS + ČSSD + KSČM + KDU-ČSL

kraj	Pra	StřČ	JČ	Plz	Karl	Úst	Lib	Krhr	Par	Vys	JM	Olo	Zlí	MoSl	celkem
SZ	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	5
Koalice	23	22	13	11	5	14	8	11	10	10	22	12	12	22	195

ODS by si pohoršila o 32, ČSSD o 25 a SZ o 1 mandát. O 23 by si polepšila KSČM a o 35 KDU-ČSL.

ODS + ČSSD + SZ + KDU-ČSL

kraj	Pra	StřČ	JČ	Plz	Karl	Úst	Lib	Krhr	Par	Vys	JM	Olo	Zlí	MoSl	celkem
KSČM	2	3	1	1	0	2	1	1	1	1	3	2	1	3	22
Koalice	23	20	12	10	5	12	7	10	9	9	20	10	11	20	178

ODS si pohorší o 36, ČSSD o 29 a KSČM o 4 mandáty, SZ si polepší o 38 a KDU-ČSL o 31.

ODS + ČSSD + SZ + KSČM

kraj	Pra	StřČ	JČ	Plz	Karl	Úst	Lib	Krhr	Par	Vys	JM	Olo	Zlí	MoSl	celkem
KDU	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	1	10
Koalice	24	22	12	11	5	14	8	11	9	9	21	11	11	22	190

Pohorší si ODS o 33 mandátů, ČSSD o 26 a KDU-ČSL o 3. Polepší si SZ o 41 a KSČM o 21.

Pro ODS a ČSSD je tedy absolutně nevýhodné vstupovat do čtyřkoalice, naopak zelení by na tom vydělali nejvíc.[4]

---

[4] *Pozn. red.: Hanka se zabývala pouze čtyřkoalicemi. Zkuste zanalyzovat situaci pro dvojkoalice a trojkoalice. A ještě se naskýtá jedna otázka: Zjevně není pro všechny strany výhodné dělit si hlasy rovným dílem. Napadá vás lepší způsob dělení?*

Další volební systémy

Spravedlivost systému

Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová

Podle mého názoru by bylo spravedlivé rozdělení[5] takové, že by se mandáty vůbec nerozdělovaly podle krajů.

Nejprve by se určily ty strany, které by se dostaly do Poslanecké sněmovny (tj. ty, které překročili volební kvórum). Sečetly by se jejich procenta hlasů, které získaly v celé republice. Toto číslo by se vydělilo počtem mandátů (u nás tedy 200). Takovýto počet procent by jednotlivé strany potřebovaly na získání mandátu.

Do Poslanecké sněmovny se v letošních volbách dostalo pět stran s takovýmto procentuálním ziskem: ODS 35,38 %, ČSSD 32,32 %, KSČM 12,81 %, SZ 6,29 %, KDU-ČSL 7,22 %, celkem 94,02 %. Procenta potřebná k získání mandátu: 0,47 % (94,02/200).

Procenta získaná jednotlivými stranami by se vydělila tímto číslem (0,47). Výsledek by se zaokrouhlil na dvě desetinná místa a strana by získala pouze tolik mandátů, kolik je celá část tohoto podílu. Pak by se zjistilo, kolik mandátů se ještě nerozdělilo, a ty by se přidaly stranám s největším zbytkem po dělení.

Pozn. red.: Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová zde stanovila pravidla dalšího volebního systému. Pamatují tyto pravidla na všechny situace? Nemůže se stát, že součet celých částí vydělených a zaokrouhlených čísel bude větší než počet mandátů? Nehrozí zde nějaké další obtíže?

V letošních volbách by to pro jednotlivé strany dopadlo následujícím způsobem: ODS: 75,28 $\rightarrow$ 75 mandátů, ČSSD: 68,77 $\rightarrow$ (68 + 1) mandátů, KSČM: 27,26 $\rightarrow$ 27 mandátů, SZ: 13,38 $\rightarrow$ (13 + 1) mandátů, KDU-ČSL: 15,36 $\rightarrow$ 15 mandátů.

Tomuto systému se nejvíce blíží systém Saint Lague, potom Dánský systém.

Hlasy

Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Florianová

Nakonec jsem se ještě zabývala tím, jak by to dopadlo, kdyby se nepoužívaly žádné metody, ale pouze se přepočetly hlasy. Měla by to být nejspravedlivější

---

[5] Jak je možné rozdělit hlasy voličů „spravedlivě“? Zkuste najít takováto kritéria a zhodnotit podle nich systém Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběty Pechové a Mgr.$^{\text{MM}}$ Hany Florianové.

metoda.[6] Nejdříve by se spočítalo na úrovni kraje, kolik hlasů stojí jeden mandát, vzniklo by takové „krajové mandátové číslo“ (můj název). Tím jsem vydělila počet hlasů jednotlivých stran. Každá (strana) pak získala za kraj tolik mandátů, kolik byla celá část tohoto čísla plus zbylé mandáty, které se rozdělovaly podle největších zbytků, stejně jako na republikové úrovni krajům.

Kraj / strana	celkem	ODS	ČSSD	SZ	KSČM	KDU-ČSL
Hl. m. Praha	25	13	6	3	2	1
Středočeský	23	10	8	1	3	1
Jihočeský	13	7	4	1	2	1
Plzeňský	11	5	4	1	1	1
Karlovarský	5	3	2	0	1	0
Ústecký	14	6	6	1	2	0
Liberecký	8	5	3	1	1	0
Královéhradecký	11	6	4	1	1	1
Pardubický	10	5	3	1	1	1
Vysočina	10	4	4	0	2	1
Jihomoravský	23	9	8	2	3	3
Olomoucký	12	5	4	1	2	1
Zlínský	12	5	4	1	1	2
Moravskoslezský	23	8	10	1	3	2
celkem	200	75	70	15	25	15

Závěr: Spravedlnost posuzuji podle toho, kolik každá strana za jeden mandát zaplatí hlasů.[7] U všech systémů to je tak, že větší strany zaplatí méně hlasy než strany menší.[8] Pokud srovnám jednotlivé systémy, je nejspravedlivější Saint Lague, ten přidal pouze jeden mandát ODS a ČSSD jeden ubral, další je Dánský – tam už se změnilo 5 mandátů, zato d'Hondtův systém hodně ubírá malým stranám a přidává velkým, střed zůstává nastejno. Úplně nejhůř ale dopadl systém Imperali, ten naprosto nadržuje největší straně a malým nechává jen drobky.[9]

---

[6] *Pozn. red.: Podle jakého hlediska Hanka posuzuje spravedlivost systému?*

[7] *Pozn. red.: Je z tohoto hlediska systém navrhovaný Hankou optimální? Nedal by se vymyslet systém, který by byl v tomto ohledu „spravedlivější“?*

[8] *Pozn. red.: Hanka se zde odkazuje na svou analýzu volebních systémů, které byly vyjmenované v zadání tématu (jenž nebyla v tomto dílu otištěna).*

[9] *Pozn. red.: Funguje někde ve světě systém, který by naopak „nadržoval“ malým stranám?*

Čím je dán nepoměr v počtu mandátů stran SZ a KDU-ČSL v letošních volbách?

Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová

Tento poměr je dán jednak přepočítáváním podle d'Hondtova systému (u jiných, ani u mnou navrženého systému není nepoměr tak výrazný) a u tohoto systému je to hlavně dáno rozložením voličů v jednotlivých krajích.

Strana zelených má své voliče rozloženy rovnoměrně (získaná procenta hlasů v jednotlivých krajích se kromě Prahy a Libereckého kraje pohybují okolo 4,34 % do 6,71 %) zatímco strana KDU-ČSL má své voliče rozložena velmi nerovnoměrně (od 2,23 % v Ústeckém kraji až po 13,02 % ve Zlínském kraji).

D'Hondtův systém zvýhodňuje strany s nerovnoměrným rozložením voličů[10] (rozhodně je výhodné, kdyby se získané hlasy přesunuly do poloviny krajů – získaly byste za stejný celostátní zisk více mandátů).

Soutěž

Soutěž souvisí s posledním příspěvkem Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběty Pechové. V něm tvrdí, že pokud bychom přesunuly všechny hlasy Strany zelených do poloviny republiky, získala by tím tato strana více mandátů v Poslanecké sněmovně.

Zkusme si teď představit tuto situaci: Strana zelených se poučila z výsledků voleb do poslanecké sněmovny, nechala si udělat analýzu volebního systému a došla k tomu samému výsledku, jako Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová. Bohužel se v této zemi nemůžou přesouvat hlasy libovolně, tak, jak by si to přála politická strana. Přesto mají politické strany v této zemi možnost ovlivnit, kde bude započítáván hlas daného člověka. Pokud si totiž člověk vyzvedne voličský průkaz, může volit v libovolném kraji (dokonce i v zahraničí) a jeho hlas bude započítán k hlasům z tohoto kraje. Představme si, že Strana zelených může svým doporučením, jak a kde volit, ovlivnit 15 % svých příznivců (pro jednoduchost 15 % z každého kraje). Může vydávat doporučení pro každý kraj zvlášť. Oněm 15 % lidí kteří jsou „ovlivnitelní" je jedno, v jakém kraji nakonec budou hlasovat.

Jaké doporučení má vydat, aby získala nejvíce mandátů? (Předpokládejme stejné rozložení voličů, jak v letošních červnových volbách.) Vyplatí se jim v této situaci doporučit v nějakém kraji, aby lidé vůbec nevolili? Vyplatí se jim doporučit lidem v nějakém kraji, aby hlasovali pro jinou politickou stranu? Zkuste zkoumat poslední dvě otázky i v obecné situaci, zkuste vymyslet takovou situaci, kdy by byly takovéto rady výhodné.

Jindra

Téma 6 – Slunce

K tématu nám zatím přišel jediný příspěvek od Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Pechy a Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Bětky Pechové. Řešení nám předali na soustředění, ale bohužel se jej nepovedlo uchránit během závěrečného úklidu a někam se ztratilo. Za to se oběma autorům moc

[10] *Pozn. red.: Toto je velmi smělé tvrzení. Zkuste jej prověřit.*

omlouvám a pokusím se napsat alespoň krátký článek podle toho, co si z řešení pamatuji.

Bc.MM Petr a Dr.MM Bětka se rozhodli měřit dobu, za kterou na slunci roztaje kostka ledu. Nechali zmrznout ledový kvádřík o známých rozměrech, umístili na slunce a měřili čas, za jak dlouho roztaje. Ze známého skupenského tepla tání ledu a z hmotnosti ledového kvádříku určili teplo potřebné k roztátí ledu. Toto teplo vydělené časem tání pak považovali za výkon slunečního záření dopadajícího na kvádřík.

Pozn.: Zde bych rád uveřejnil číselné výsledky, ke kterým došli, bohužel je v tuto chvíli nemám.

Jak moc je uvedený postup měření vhodný a přesný? Zkuste uvážit různé vlivy, které mohou ovlivňovat čas tání. Jak jsou podstatné v porovnání s výkonem dopadajícího slunečního záření?

A pokud nechcete uvažovat nad uvedeným měřením, pusťte se do vlastního. Těšíme se na další experimenty a výsledky. (A nebojte se, pokud nebudete papír s řešením odevzdávat na soustředění, tak jej neztratím.)

Marble

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Led a voda (2b)

Zadání:

Máme skleničku s vodou, ve které plovou kostky ledu. Hladina vody ve skleničce sahá na počátku až po okraj. Led se ve skleničce postupně rozpouští. Jak se mění hladina vody? Přeteče nějaká voda přes okraj?

Jak by se změnila situace, kdyby uvnitř kostek ledu byly zamrzlé malé vzduchové bublinky? Co by se stalo, kdyby uvnitř kostky ledu byla zamrzlá hliníková kulička (kostka ledu na začátku plove na hladině)?

V celém příkladu zanedbáváme jevy související s povrchovým napětím vody. Předpokládáme také, že hustota vody za daných podmínek nezávisí na teplotě.

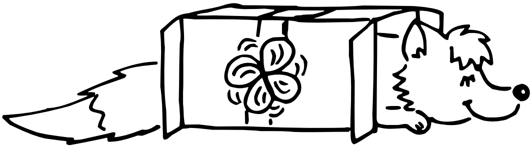
Řešení:

K úspěšnému vyřešení úlohy stačí vědět, co vymyslel jistý Archimédes ze Syrákús více než 200 let před naším letopočtem. Přišel na to, že těleso, které plove v kapalině (je v rovnovážné poloze, nepotápí se ani nestoupá) vytlačí právě tolik kapaliny, aby její hmotnost byla stejná, jako hmotnost plovoucího tělesa. Jinak řečeno objem ponořené části kostky ledu je stejný jako objem vody, která by měla stejnou hmotnost jako celá ledová kostka.

Dále se hodí vědět fakt, že led a voda mají různou hustotu, přičemž hustota ledu je o něco menší (to je zřejmé z toho, že led plove na vodě). Pokud si ještě uvědomíme, že hmotnost se při tání ledu zachovává, můžeme jednoduše odpovědět na první otázku.

Ponořená část ledových kostek má právě takový objem, jaký je objem vody o hmotnosti ledových kostek. Když tyto kostky roztají, změní se ve vodu o tomto objemu, která přesně nahradí objem ponořené části. Hladina ve skleničce se tedy během tání nijak nezmění.[11]

Pokud bude v ledové kostce *zamrzlá hliníková kulička*, ponořená část bude mít takový objem, aby voda o stejném objemu měla hmotnost jako ledová kostka i s kuličkou. Dokud bude kostka plovat, platí totéž, co pro situaci bez kuličky. Hladina se nemění. Odtávající led snižuje hmotnost kostky a tím i objem její ponořené části a tento úbytek je přesně vyrovnán přibývající odtátou vodou.



Změna nastane až ve chvíli, kdy kostka přestane plovat a klesne ke dnu. V tu chvíli by k tomu, aby se udržela na hladině, potřebovala vytlačit více vody, než je její objem. To ale nemá jak udělat, takže zůstane na dně a postupně dále odtává. Objem ponořené kostky se snižuje o odtátý led, ale ten má v podobě vody větší hustotu a tedy nevyrovná úbytek objemu kostky a hladina ve skleničce začne klesat.

Pokud nás zajímá, kolik vody nakonec zmizí, můžeme to jednoduše určit. Pokud by mohla hliníková kulička vytlačit tolik vody, aby vydržela plovat, hladina ve skleničce by se (analogicky prvnímu případu) nezměnila. Potřebný objem vody má stejnou hmotnost jako hliníková kulička. Kulička ale ve skutečnosti vytlačí jen tolik vody, kolik je její vlastní objem. Rozdíl pak udává pokles hladiny. Ve skleničce s plochou hladiny S tedy hladina klesne o

$$\Delta h = m_{\mathrm{Al}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{H_20}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{Al}}} \right) \frac{1}{S} \,.$$

Zbývá poslední případ – *vzduchová bublinka zamrzlá v kostce ledu*. Dokud bublinka zůstává v kostce, situace je opět analogická případu, ve kterém žádná bublinka neexistuje. To, co odtaje z kostky sníží její hmotnost a ponořený objem a právě takový objem přidá nová voda. Co se stane, když se z kostky uvolní bublinka? Důležité je si uvědomit, jestli se tím nějak změní tíha kostky, kterou musí voda ve skleničce nadnášet.

Pokud by tlak v bublince byl stejný jako atmosferický tlak, nestane se vůbec nic. Proč to? Představme si jednoduchý experiment – vezmeme dutou nádobu s jedinou dírou ven uzavíratelnou na kohoutek. V nádobě je vzduch a nádoba

[11] Zde je dobré poznamenat, že ve skutečnosti má vliv i změna hustoty vody s teplotou – pokud bychom skleničku s vodou trochu zahřáli nebo ochladili, hladina se změní a nepotřebujeme ani žádný tající led. Ale podle zadání budeme tento efekt zanedbávat.

působí nějakou tíhou na podložku, na které leží. Teď uzavřeme kohoutek a vytvoříme uvnitř velkou „bublinku“. Tím se ale nic nezměnilo, žádný plyn nikam neproudil. Stejně tak když kohoutek otevřeme, žádný plyn nikam neproudí. Na kohoutek působí nulová výsledná síla (stejný tlak z obou stran), tlak na stěny krabice se také nemění, takže není důvod, aby se zavřením či otevřením kohoutku nějak změnila tíha krabice.

Ve skutečnosti by ale v bublince zamrzlé v ledu byl větší tlak, než je atmosferický. (Bublinka je stlačena už tím, že byla před zamrznutím pod vodou a dále ji stlačil rozpínající se led.) Pokud si vzpomeneme na krabici z předchozího experimentu, zvýšíme tlak uvnitř a uzavřeme kohoutek, tak pak při otevření kohoutku uteče vzduch ven a působící síly se změní. Jak konkrétně? Z vnějšího pohledu je krabice se zavřeným kohoutkem stejná bez ohledu na tlak uvnitř, tedy i vztlak vzduchu působící zvenčí se nemění. Jenže vzduch o větším tlaku má (za stejné teploty) vyšší hmotnost. Takže tíha krabice působící na podložku bude větší, pokud je tlak uvnitř větší. Otevřením kohoutku se tlak sníží a tíha klesne.

Totéž bude platit pro ledovou kostku. Ve chvíli, kdy bublinka uteče, najednou klesne tíha kostky. Tedy se sníží objem ponořené části a hladina ve skleničce klesne. V nové výšce pak zůstane po celé další odtávání kostky až do chvíle, kdy uteče další bublinka.

Konkrétní pokles hladiny závisí na hustotě vzduchu (tlaku) uvnitř bublinky. Hladina klesne o takový objem, který má stejnou hmotnost jako rozdíl hmotnosti vzduchu v bublince se zvýšeným tlakem a s normálním tlakem. Tedy

$$\Delta h = V_{\mathrm{bubl.}} \frac{\rho_{\mathrm{bubl.}} - \rho_{\mathrm{atm}}}{\rho_{\mathrm{H_20}}} \frac{1}{S} = V_{\mathrm{bubl.}} \frac{\rho_{\mathrm{atm}}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} \left(\frac{p_{\mathrm{bubl.}}}{p_{\mathrm{atm}}} - 1 \right) \frac{1}{S} \,.$$

Marble

Úloha 2.2 – Matematici v letadle (4b)

Zadání:

Na konferenci matematiků bylo z Matfyzu vypraveno celé plné letadlo s n matematiky. Každý dostal číslo svého sedadla, ale hned první nastupující se příliš zamyslel nad problémem, o kterém se mu dnes zdálo, a sedl si na náhodné místo. Další nastupující se na rozdíl od něj zabývali tím, kam si sednou, a všichni by nejraději seděli na svém místě. Matematici jsou ale mírumilovná stvoření a pokud zjistí, že je někdo podsedl, vyberou si náhodně jiné volné místo a neobtěžují už sedícího. Jakou šanci sednout si na své sedadlo (které má mimochodem číslo 42) máte jakožto poslední nastupující (v závislosti na n)? Matematici nastupují v nahodilém pořadí, uvažujte $n \geq 42$.

Řešení:

Uvedu dvě řešení, první delší a preciznější a druhé kratší a elegantnější.

Označme p_i pravděpodobnost, že si jako poslední nastupující sednu na své místo v situaci s celkem i matematiky. Evidentně $p_1 = 1$ a $p_2 = 0{,}5$, z toho postupně spočteme i další p_i. K tomu si očísluji matematiky v pořadí, v jakém do letadla nastupovali, (na skutečných číslech sedadel vůbec nezáleží) $1, 2, \ldots, n$.

Pokud si zamyšlený matematik sedne náhodou právě do svého sedadla, všichni (a tedy i já) budou sedět na svých místech. Pokud si sedne na místo n, už si určitě nebudu moct sednout na své místo. Pokud si sedne na místo $1 < i < n$, sednou si všichni matematici $2, 3, \ldots, i-1$ na své místo a matematik i se zachová podobně jako zmatený – buď si sedne na místo 1, a ukončí ten blázinec, nebo si sedne na mé místo n, nebo si sedne na místo $i < j < n$, a tím učiní z j dalšího „zmateného". V situaci, kdy si matematik i náhodně vybírá, kam si sednout, mám potom stejnou šanci na sednutí si, jako by to byl ten první zamyšlený pro $n = n - i + 1$. Z toho mohu sestrojit vztah pro p_i:

$$p_i = \frac{1}{i} \cdot 1 + \frac{1}{i} \cdot 0 + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{1}{i} \cdot p_{i-k+1} \,.$$

Z tohoto vzorce je už vidět, že $p_i = 0{,}5$ $(\forall i > 1)$, což lze jednoduše ověřit indukcí.

Druhé řešení není tak přesvědčivě správné, ale je mnohem jednodušší. Každý z těch matematiků přede mnou, kteří si museli vybrat náhodné místo, mohl se stejnou pravděpodobností usednout na místo zamyšleného matematika, jako zasednout místo mě. Mohl si sice sednout i na jiné místo, a tím přesunout volbu na dalšího, ale dříve či později někdo přede mnou musí sednout na jedno z těch dvou míst, a tím rozhodnout. Protože je pravděpodobnost obou těchto jevů stejná, je má šance na šťastné sedadlo pouze 0,5.

Gavento

Úloha 2.3 – Kochova vločka (6b)

Zadání:

Kochova vločka je útvar, který vznikne tak, že vezmeme rovnostranný trojúhelník, rozdělíme každou jeho stranu na třetiny, a k prostřední třetině každé strany přilepíme rovnostranný trojúhelník s třetinovou délkou strany. Tím vznikne hvězdice se šesti cípy. Potom opět ke každé straně každého z cípů přilepíme v prostřední třetině trojúhelník, a to celé děláme do nekonečna.

Taková vločka má mnoho zajímavých vlastností – například má nekonečný obvod a konečný obsah (který je jistě menší než obsah kružnice opsané). Pokud vločku roztočíme kolem dokola, jakou bude mít rotující útvar kinetickou energii? (Třeba si můžete představit, že je vystřižená z plechu a otáčíme v rovině daného útvaru, zájemci mohou spočítat i jiné osy rotace). K řešení Vám může pomoci Steinerova věta – zkuste ji např. použít na zjištění momentu setrvačnosti obyčejného trojúhelníka, abyste se vyhnuli složitému integrování.

Řešení:

Na úvod bychom se chtěli omluvit za redakční omyl při zadávání úlohy: ve skutečnosti nejde o vločku Kochové, ale o Kochovu vločku – jejím objevitelem není žena, ale muž, švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch.

Přišla nám dvě řešení této úlohy. Se správným řešením přišel jen Mgr.[MM] Martin Výška podobným způsobem, jako je úloha vyřešena níže. Mgr.[MM] Hanka Florianová úspěšně spočetla obsah Kochovy vločky (což je pro výpočet kinetické energie rotace vločky nutné), další fázi výpočtů však již neprovedla. Samotný výpočet momentu setrvačnosti není snadný, a vyžaduje rozdělit si úlohu na několik částí.

Výpočet momentu setrvačnosti rovnostranného trojúhelníka

Nejprve provedeme jednodušší úlohu, na které ilustrujeme, jakým způsobem se kinetické energie rotujících útvarů dají počítat. Pokud bychom počítali kinetickou energii tělesa, které se neotáčí, a celé se pohybuje rychlostí v, potom bychom použili známý vzorec $E_k = mv^2/2$. Pokud se ale zabýváme energií rotace, je situace složitější. Jednotlivé body tělesa se pohybují různými rychlostmi. Body, které leží dál od osy, přispívají ke kinetické energii víc, než body, které leží přímo u osy otáčení (ty se totiž v podstatě nehýbou). Pokud bychom uvažovali, že máme drátěnou konstrukci, ve vrcholech jsou umístěny hmotná závažíčka a hmotnosti drátů můžeme zanedbat, dostaneme kinetickou energii jako součet kinetických energií jednotlivých závažíček:

$$E_r = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2 ,$$

kde jsme ve druhém kroku nahradili $v_i = \omega r_i$. v_i jsou rychlosti jednotlivých bodů, m_i jejich hmotnosti, r_i jejich vzdálenosti od osy otáčení a ω je úhlová rychlost, která je pro všechny body stejná (proto ji neoznačujeme indexem i, který čísluje jednotlivé body od 1 do N).

V posledním kroku jsme zadefinovali konstantu

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

Tuto konstantu nazýváme *moment setrvačnosti* a charakterizuje tvar a rozměry tělesa. Není-li těleso složeno jen z konečného množství hmotných bodů, odvození výše zůstává v platnosti, jen sumu nahradíme integrálem

$$J = \int_V \rho r^2 \,\mathrm{d}V ,$$

což uvádíme jen pro úplnost, protože v řešení se dá integraci zcela vyhnout. K tomu ovšem potřebujeme tzv. *Steinerovu větu*, kterou zde odvozovat nebudeme. Ta říká, že je-li J_T moment setrvačnosti daného tělesa kolem osy procházející těžištěm, potom moment setrvačnosti kolem osy o rovnoběžné s původní osou je $J_o = J_T + md^2$, kde m je hmotnost tělesa a d je vzdálenost nové osy od osy procházející těžištěm.

Dále potřebujeme vědět, jaký je moment setrvačnosti podobných geometrických útvarů. Pokud zvětšíme těleso α-krát, kolikrát se zvětší moment setrvačnosti? Je zjevné, že hmotnost takového tělesa (pokud je hustota stále stejná) se zvětší (α^3)-krát, je-li těleso trojrozměrné nebo (α^2)-krát, je-li těleso dvojrozměrné (tedy úměrně obsahu). Poloměr se zvětší α-krát, tedy z předchozího vzorce plyne, že moment setrvačnosti se zvětší pro dvojrozměrné těleso (což bude náš případ) (α^4)-krát.

Nyní již výpočet momentu setrvačnosti rovnostranného trojúhelníka. Díky předešlým úvahám můžeme říci, že

$$J_\Delta = k_\Delta m_\Delta a^2 \,,$$

kde a je strana trojúhelníka, $m_\Delta = \varrho_\Delta S_\Delta$ jeho hmotnost a k_Δ je konstanta charakterizující tvar trojúhelníka (rozměry jsou již zahrnuty v hmotnosti – tedy při konstantní hustotě obsahu – a straně trojúhelníka). Nyní rozdělme trojúhelník na čtyři rovnostranné trojúhelníky s poloviční stranou $(a/2)$ – tři trojúhelníky budou mít totožný vždy jeden vrchol s jedním vrcholem velkého trojúhelníka a jeden trojúhelník bude uprostřed. Nyní napíšeme moment setrvačnosti velkého trojúhelníka jako součet momentů setrvačností dílčích trojúhelníků, které jsou mu podobné:

$$J_\Delta = k_\Delta m_\Delta a^2 = \frac{1}{16}\, k_\Delta m_\Delta a^2 + 3\left(\frac{1}{16}\, k_\Delta m_\Delta a^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{3}\, v_{a/2}\right)^2 \frac{m_\Delta}{4}\right) .$$

$v_{a/2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$ je výška trojúhelníka o straně $a/2$, nezavádíme zvláštní symboly pro hmotnosti malých trojúhelníků – uvádíme je rovnou ve zlomcích hmotnosti trojúhelníka velkého. V rovnici na pravé straně vystupuje šestnáctkrát zmenšený moment setrvačnosti trojúhelníka, který odpovídá momentu setrvačnosti menšího trojúhelníka kolem osy procházející těžištěm, která je kolmá na rovinu trojúhelníka. Druhý člen v závorce na pravé straně odpovídá posunu tohoto momentu pomocí Steinerovy věty. Vzdálenost, o kterou je osa posunuta, je dvojnásobek třetiny výšky trojúhelníka. Z této rovnice vyjádříme k_Δ a získáme (bez jakékoliv integrace!)

$$J_\Delta = \frac{1}{12}\, m_\Delta a^2 \,.$$

Výpočet obsahu Kochovy vločky

Následující postup je postup, který zvolila Mgr.[M] Hanka Florianová a který vede poměrně rychle k výsledku. Označme S_K^i obsah vločky po i-tém kroku. Nebudeme přitom měřit obsah v závislosti na straně a největšího trojúhelníka, ale budeme jej počítat v násobcích obsahu největšího trojúhelníka o straně a, takže $S_K^1 = S_{\Delta_a}$. V následujícím kroku se vždy obsah vločky změní následujícím způsobem

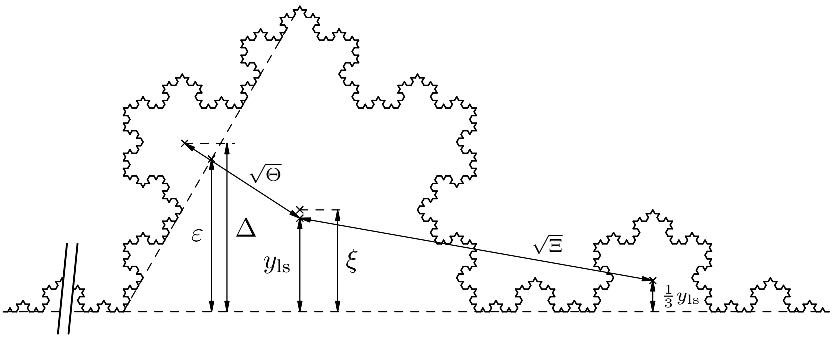
$$S_K^i = S_K^{(i-1)} + \left(3 \cdot 4^{(i-2)} \cdot \frac{1}{9^{(i-1)}}\, S_{\Delta_a}\right)$$

To vyplývá z toho, že nové trojúhelníky mají vždy devětkrát menší obsah a je jich čtyřikrát víc až na první krok, kde je jich jen třikrát víc než trojúhelníků přidaných v předchozím kroku. K úplnému výsledku je potřeba vyřešit tento rekurentní vztah, uznal jsem však i řešení, kde jste došli k této posloupnosti nebo jste „uhádli“ její hodnotu.

$$S_K^{\infty} = \frac{8}{5} \cdot S_{\Delta_a} = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{2}\, a^2$$

Výpočet momentu setrvačnosti Kochovy vločky

Obdobně, jako jsme si trojúhelník rozdělili na podobné útvary (menší trojúhelníky), a využili Steinerovu větu, musíme totéž udělat pro vločku. Způsobů je mnoho. Použijeme rozdělení, kdy řekneme, že se vločka skládá z největšího trojúhelníka a třech okrajů. Okrajem rozumíme všechno, co nalepíme na jednu ze stran velkého trojúhelníka (danou stranu nadále označujeme jako hlavní stranu okraje nebo jen stranu okraje). Moment setrvačnosti trojúhelníka již známe, moment setrvačnosti okraje spočteme tak, že okraj rozdělíme na největší trojúhelník toho okraje a čtyři třetinové okraje (dva přilepené na strany největšího trojúhelníka okraje a dva přilepené na zbylé třetiny strany okraje), a využijeme Steinerovu větu.



Nejprve označme několik vhodných symbolů:

$$\xi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\, a\,,$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\, a \sin 45^\circ\,,$$
$$\Delta = \varepsilon + \frac{y_{\mathrm{ls}}}{3} \sin 45^\circ\,,$$

kde a je délka hlavní strany okraje, ξ je vzdálenost těžiště největšího trojúhelníka okraje od hlavní strany okraje, ε je (nenulová) vzdálenost středu strany největšího trojúhelníka okraje od hlavní strany okraje a Δ je vzdálenost těžiště (třetinového) okraje, který přiléhá k straně největšího trojúhelníka velkého okraje (viz obrázek). y_{ls} značíme vzdálenost, těžiště okraje o straně a od hlavní strany.

Dále označme

$$S_{\Delta_{a/3}} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{2}\, a^2 \,, \qquad S_{\mathrm{ls}} = \frac{1}{3}\left(S_K - S_{\Delta_a}\right) ,$$

po řadě obsah největšího trojúhelníka okraje (jehož strana je $a/3$) a obsah okraje (který spočteme odečtením obsahu největšího trojúhelníka vločky od obsahu vločky jako takové a vydělením počtem okrajů třemi).

Nyní jelikož obecně těžiště daného objektu spočteme jako

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho S_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} \rho S_i} \,,$$

můžeme napsat rovnici pro vzdálenost těžiště okraje od strany okraje (ze symetrie je zřejmé, že těžiště se nachází kolmo nad středem strany okraje)

$$y_{\mathrm{ls}} = \frac{\left(S_{\Delta_{a/3}}\xi + \left(\Delta + \frac{1}{3}\, y_{\mathrm{ls}}\right) \cdot \frac{2}{4}\, S_{\mathrm{ls}}\right)}{\left(S_{\Delta_{a/3}} + 4 \cdot \frac{1}{4}\, S_{\mathrm{ls}}\right)} \,.$$

Vyřešením rovnice získáme

$$y_{\mathrm{ls}} = \frac{\left(27\sqrt{2} + 20\sqrt{3}\right) a}{900 - 54\sqrt{2}} \,.$$

Nyní již můžeme spočítat moment setrvačnosti okraje Kochovy vločky a vzápětí i moment setrvačnosti vločky jako takové. Nejprve spočtěme moment setrvačnosti okraje vzhledem k ose kolmé na jeho rovinu a procházející jeho těžištěm. Opět předpokládáme tento moment setrvačnosti ve tvaru $J_{\mathrm{ls}} = k_{\mathrm{ls}} m a^2$. Okraj složíme z jeho největšího trojúhelníka a čtyřech třetinových okrajů.

$$J_{\mathrm{ls}} = \left[J_{\Delta_{a/3}} + \rho S_{\Delta_{a/3}} \left(y_{\mathrm{ls}} - \xi\right)^2\right] + \left[\frac{4}{81}\, J_{\mathrm{ls}} + \frac{1}{9}\, \rho S_{\mathrm{ls}} \left(2\Xi + 2\Theta\right)\right] ,$$

kde

$$\Theta = \left(\left(\xi + \frac{1}{3}\, y_{\mathrm{ls}}\right) \cos 45^\circ\right)^2 + \left(\left(\xi + \frac{1}{3}\, y_{\mathrm{ls}}\right) \sin 45^\circ + \xi - y_{\mathrm{ls}}\right)^2 ,$$
$$\Xi = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{ls}} - \frac{1}{3}\, y_{\mathrm{ls}}\right)^2 .$$

První hranatá závorka představuje moment setrvačnosti největšího trojúhelníka okraje vzhledem k ose procházející těžištěm okraje (druhý člen posouvá pomocí Steinerovy věty), druhá hranatá závorka odpovídá čtyřem zmenšeným okrajům – dva z nich mají vzdálenost svého těžiště od těžiště okraje rovnu $\sqrt{\Xi}$ a dva $\sqrt{\Theta}$ (vzdálenosti vyplývají z geometrického nákresu). Čtverce těchto vzdáleností jsou násobeny hmotností jednotlivých okrajů, které jsou vyjádřeny v závislosti na obsahu podobných útvarů příslušně zmenšených. Po dosazení všech substitucí a vyjádření získáme výsledek

$$J_{\mathrm{ls}} = \frac{\left(13446 + 36558\sqrt{2} - 401237\sqrt{3} + 33876\sqrt{6}\right) a^4 \rho}{166320\left(150\sqrt{2} - 1259\right)} \,.$$

Nyní již jen sečtením momentů setrvačnosti okrajů (které ovšem musíme posunout o vzdálenost těžiště Kochovy vločky od těžiště jejich!) získáme konečně moment setrvačnosti Kochovy vločky samotné

$$\begin{aligned} J_K &= J_{\Delta_a} + 3\left(J_{\mathrm{ls}} + \rho S_{\mathrm{ls}}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\,a + y_{\mathrm{ls}}\right)^2\right) = \\ &= \frac{\left(305890085 + 3321048\sqrt{2} + 861633\sqrt{3} + 10869768\sqrt{6}\right) a^2 M}{2846069688} \\ &\doteq 0{,}119\, a^2 M \,. \end{aligned}$$

Irigi

Úloha 2.4 – Rychlá množina (3b)

Zadání:

Navrhněte způsob, jak programově reprezentovat množinu nejvýše M celých čísel z rozsahu $1 \ldots N$ za splnění následujících požadavků: Kromě jednoho pole celých čísel o délce $M + N$ smíte použít jen konstantní[12] počet celočíselných proměnných a celočíselných polí konstantní délky.

Musíte umět realizovat operace přidání prvku do množiny, test na přítomnost prvku v množině, odebrání prvku z množiny, dotaz na počet prvků v množině a vyprázdnění množiny. To vše v konstantním čase.[13]

Operace vyprázdnění by měla fungovat nezávisle na předchozím stavu (tedy pole i všechny pomocné proměnné mohou obsahovat naprosto libovolná data), a tak být použitelná i jako inicializace celé struktury.

Řešení:

Řešení této úlohy má jednoduchou filozofii: přítomnost prvků v množině budeme indikovat pomocí `M`-prvkového pole. Abychom to zabezpečili, nestačí obyčejná nula nebo jednička, ale chce to index do `N`-prvkového pole, které bude

[12] *Konstantní zde znamená nezávislý na velikosti M a N. Musí tedy existovat konstanta omezující počet bytů, který vám s jedním polem délky $M+N$ určitě bude stačit. (Tuto konstantu nepočítejte, uvádíme jen pro informaci.)*

[13] *Tedy tak, aby každá operace vždy zabrala nějakou konstantou omezený počet jednoduchých instrukcí nezávisle na $M + N$ a na tom, jaké jiné operace již byly provedeny.*

sloužit jako „kontrolní“. Implementace v Pascalu, která následuje, předpokládá korektní vstupy, tedy že vkládáme vždy prvek z intervalu `1..M`, a pokud je již v množině `N` prvků, nepokoušíme se vložit další. Doplnit si případně příslušné kontroly jistě zvládnete sami.

```
unit rychlamnozina;
interface
const M = 100; N = 200;
var ind: array[1..M] of integer;
    bag: array[1..N] of integer;
    pocet: integer;

implementation

procedure pridej(prvek:integer);
begin
  if not pritomen(prvek) then
  begin
    pocet := pocet + 1;
    bag[pocet] := prvek;
    ind[prvek] := pocet
  end
end;

function pritomen(prvek:integer): boolean;
var index:integer;
begin
  index := ind[prvek];
  if (index < 1) or (index > pocet) then
    pritomen := false
  else
    pritomen := bag[index] = prvek
end;

procedure odeber(prvek:integer);
var index:integer;
begin
  index := ind[prvek];
  if (index >= 1) and (index <= pocet) then
    if bag[index] = prvek then
    begin
      bag[index] := bag[pocet];
      ind[bag[index]] := index;
      pocet := pocet - 1
    end
```

```
end;

procedure vyprazdni;
begin
  pocet := 0;
end;
end.
```

Jarda

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz
WWW: http://mam.mff.cuni.cz

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

				Úlohy									
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t4**	**t5**	**t6**	$+$	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.^{MM} Martin Výška	2.	34	2	4	6					3	15	34
2.	Dr.^{MM} Alžběta Pechová	2.	98	1					5	3	0	9	33
3.	Mgr.^{MM} Hana Florianová	3.	27	1	1	3			9		0	14	27
4.	Bc.^{MM} Petr Pecha	1.	16	1						3	0	4	16
5–9.	Doc.^{MM} Jan Musílek	3.	187										13
	Dr.^{MM} Matěj Korvas	4.	72										13
	Mgr.^{MM} Hana Jirků	4.	39	2	4						0	6	13
	Bc.^{MM} Petr Dlabaja	4.	13										13
	Bc.^{MM} Jozef Halaga	4.	13										13
10–11.	Bc.^{MM} Jan Vaňhara	2.	14	0	4						0	4	11
	Bc.^{MM} Michal Rolínek	4.	11		3						0	3	11
12–13.	Dr.^{MM} Radim Pechal	4.	69										10
	Bc.^{MM} Jakub Marian	3.	10										10
14.	Mgr.^{MM} Miroslav Klimoš	2.	33										9
15.	Lenka Švidrnochová	2.	9										8
16–19.	Ladislav Bačo	1.	7					7				7	7
	Jana Fojtová		7										7
	David Navrkal	3.	7										7
	Dušan Rychnovský	3.	7	1	1		1				0	3	7
20–21.	Kryštof Touška	4.	6										6
	Martin Volf	1.	6	0	1						0	1	6
22.	Anita Gregorová	4.	5	2	1						0	3	5
23–24.	Michal Petrucha	2.	4										4
	Pavla Zárubová	2.	4	0					2		0	2	4
25.	Klára Krejčíčková	3.	3										3
26–29.	Mgr.^{MM} Tereza Pechová	4.	41										2
	Pavel Makovec	2.	2										2
	Julie Musilová	2.	2										2
	Irena Pavlíčková	2.	2										2
30–32.	Mgr.^{MM} Marek Pecha	1.	40	0	1						0	1	1
	Juraj Hartman	3.	1										1
	Zbyněk Klikoš	3.	1										1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.