M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník XIII číslo 3

Termín odeslání: 18. 12. 2006

Ahoj kamarádky a kamarádi,

zdá se, že podzim se rozjel v plném proudu, a řadu lidí tak začínají ohrožovat deprese. Vy se jich však rozhodně obávat nemusíte, neboť pro vás máme vynikající a zaručený recept – nové číslo M&M, které je nabité čerstvým zadáním a také nejlepšími z vašich příspěvků.

Dalším výborným receptem proti depresím je setkání s přáteli. k tomu máte jedinečnou příležitost čtvrtek 30. listopadu 2006, od 8:00 do 16:00, kdy se koná na matfyze den otevřených dveří. Potkáte tu vedení fakulty, vyučující různých oborů i nás, organizátory. Chystají se všelijaké exkurze a přednášky. Zkrátka nebudete vědět, kam dřív ... Bližší informace hledejte na stránkách matfyzu.

Tak neváhejte a pusťte se do čtení!

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Úloha 3.1 – Lineární člověče nezlob se (5b)

Jako předposlední pomoc v nudě největší se nabízí nová a ještě nudnější hra – lineární člověče pro jednoho hráče! Jde o hrací plán s po sobě jdoucími políčky očíslovanými 1 až 10!, na poli (10!) je umístěna čokoláda. Hráč začíná na políčku číslo 1 a hází si jednou z přiložených kostek (stále stejnou). Pokud na čokoládu stoupne, je jeho, pokud čokoládu přeskočí, musel by hrát znovu a na to nemá nervy :-) Přiložené kostky a hodnoty na jejich stěnách jsou: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $(1, 2)$ (mince) $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ $(5, 42, 42, 42, 42, 42)$

Jaké šance má s jednotlivými kostkami? (10! považujte za *velmi* velké číslo, použijte odhad, ale *dobře* ho zdůvodněte.)

Úloha 3.2 – Mince (3b)

Lze poskládat z přesně 50 mincí (máme na výběr pětikoruny, dvacetikoruny a padesátikoruny) obnosy 400 Kč, 500 Kč a 750 Kč?

Úloha 3.3 – Ladička (5b)

Představme si ladičku na komorní A. Ladička vypadá jako „dvojvidlice“ se dvěma kovovými tyčkami, které kmitají s vlastní frekvencí 440 Hz. Pokud si ladičku přiložíme k uchu a pozvolna s ní otáčíme, potom uslyšíme, že v některých úhlech neuslyšíme nic.

Vysvětlete, proč „hluché úhly“ vznikají a popište jejich rozložení v okolí ladičky v závislosti na vzdálenosti tyček ladičky.

Úloha 3.4 – Rozměry jednotek (2b)

Fyzikální jednotky, se kterými se ve škole setkáváte (ale i ty, se kterými jste se dosud nesetkali) jsou vyjádřitelné pomocí celých mocnin základních jednotek SI. Je to náhoda, nebo to má nějaký hlubší smysl? Jaký?

Řešení témat

Téma 1 – Čokoládování

K tématu čokoládování nám zatím přišlo jen velmi málo příspěvků. Níže otištěný článek Doc.$^{\text{MM}}$ Jana Musílka pokrývá jen čokoládování základních grafů (ačkoli Doc.$^{\text{MM}}$ Musílek dle svých vlastních slov plánuje svůj článek ještě rozšířit). Pokud váháte, stále ještě zbývá spousta problémů k vyřešení, například počokoládování stromů, rovinných grafů (pro tak obecné grafy stačí i řádové odhady), bipartitních grafů (pro ty, co tuší jak na to – jak to souvisí s párováním?). Netknuté zůstaly i odhady maximálního počtu kostiček pro nepočokoládovatelnost vrcholu či strategie nenažraného hráče.

Kolik kousků čokolády?

Doc.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek

V článku se zabývám tím, jaký nejmenší počet kousků čokolády je potřeba pro počokoládování různých typů grafů v závislosti na počtu vrcholů nebo hran. Konkrétně jsem se zabýval cestami, kružnicemi, úplnými grafy a binárními stromy.

Cesta

Nejprve objasním, co budu v dalším textu nazývat schématem. Schéma bude obecné znázornění nejlepšího rozmístění v určitém typu grafu (pro každý typ jedno schéma), kde budou jednotlivé vrcholy zastoupeny čísly a hrany pomlčkami.

Je zjevné, že cesta by měla začínat $0 - 2 - 0$, protože se tak maximálně využije potenciálu vrcholu se dvěma kousky čokolády. A stejnou posloupností se může pokračovat stále dokola (např. $0-2-0-0-2-0$). Pokud je délka cesty o jedno kratší, necháme dvojku na konci. Pokud je o jedna delší, nahradíme nulu jedničkou a nakonec připíšeme ještě jednu nulu.

Každá ideálně počokoládovaná cesta odpovídá schématu:

$$0 - 2[\,-0-0-2]_{(n-K)}\,,\quad n \in N,\ K \in \{\text{nic}, 0, 1-0\}$$

Což znamená, ze na první vrchol nepoložím žádný kousek čokolády, na druhý dva, pak se n-krát ($0 \in N$) opakuje sekvence *nic – nic – dva kousky čokolády* a na konci buď není nic (tedy poslední uzel je 2), nebo 0, nebo sekvence $1 - 0$.

Vypsáním několika prvních členů přijdeme na to, že pro počokoládování cesty o délce (počtu vrcholů) N je potřeba

$$a_N = 2 \cdot \left[\frac{N}{3}\right] + N \;\mathbf{mod}\; 3$$

kousků čokolády, kde číslo uzavřené v hranatých závorkách znamená jeho celou část, zatímco $N \;\mathbf{mod}\; 3$ znamená zbytek po dělení N třemi. Ke stejnému výsledku můžeme dojít i následující úvahou, která je zároveň i důkazem:

Cesta o délce $N - 1$, $(N/3)$, se dá počokoládovat $\frac{N}{3}$ kousky čokolády (cesta končí – 2). Cesta o délce N, kde N je dělitelné třemi, se dá počokoládovat přesně $\frac{N}{3}$ kousky čokolády (cesta končí – 2 – 0). Cesta o délce $N + 1$, $(N/3)$, se dá počokoládovat $\frac{N}{3} + 1$ kousky čokolády (končí – 2 – 1 – 0). A nakonec, cesta o délce $N+2$, $(N/3)$, se dá počokoládovat $\frac{N}{3}+2$ kousky čokolády, protože končí – 2 – 0 – 0 – 2, což už můžeme ztotožnit s $N - 1$. Tedy na musíme vytvořit takový vzorec, který dává stejný výsledek pro $N - 1$ a pro N a o jedna větší výsledek pro $N + 1$ a ještě o jedna větší výsledek pro $N + 2$, který je stejný jako pro $N + 3$ atd. Tuto vlastnost námi vytvořený vzorec má, a tedy je určitě správný pro jakékoliv N.

Vzorec v závislosti na počtu hran H dostaneme jednoduchou substitucí $N = H + 1$.

$$a_H = 2 \cdot \left[\frac{H+1}{3}\right] + (H+1) \;\mathbf{mod}\; 3$$

Kružnice

Podobně jako u cesty, nejdříve zapíšu ideální schéma (otevřené konce znamenají vzájemné spojení do kružnice):

$$-\,[0 - 2 - 0]_{(n-K)} - \,, \qquad n \in N,\; K \in \{\text{nic}, 1, 0 - 2\}$$

Vypsáním několika prvních členů nebo stejným důkazem jako u cest zjistíme, že pro kružnice platí totéž co pro cesty, tedy

$$a_N = 2 \cdot \left[\frac{N}{3}\right] + N \;\mathbf{mod}\; 3$$

Vzorec v závislosti na počtu hran (protože kružnice má stejný počet vrcholů jako hran):

$$a_H = 2 \cdot \left[\frac{H}{3}\right] + H \;\mathbf{mod}\; 3$$

Úplný graf

Protože v úplném grafu je každý vrchol spojen se všemi ostatními, stačí mi do libovolného vrcholu umístit dva kousky čokolády, z nichž jeden sním a druhý posunu na libovolný jiný vrchol. Na počokoládování úplného grafu mi tedy stačí vždy pouze 2 kousky čokolády.

$$a_N = 2$$

A stejně tak (ne)závislost na počtu hran:

$$a_H = 2$$

Binární strom

Binární strom je strom, který obsahuje právě jeden vrchol druhého stupně, určitý počet vrcholů třetího stupně a určitý (nenulový) počet vrcholů prvního stupně. Nejlepší řešení, jaké jsem pro obecný binární strom nalezl, je umístit 2 kousky čokolády do jeho kořene a po jednom do všech vrcholů stupně 3.

Vzorec pro počet kousků čokolády v závislosti na počtu vrcholů odvodíme takto: Jeden vrchol (druhého stupně) tvoří kořen. V něm jsou umístěny 2 kousky čokolády. Nejjednodušším binárním stromem je vlastně cesta o délce 3. Pokud vytváříme delší strom, vrchol 1. stupně je nahrazen vrcholem 3. stupně a na něj jsou napojeny dva nové vrcholy 1. stupně. Přibude tedy jeden vrchol 1. stupně a jeden vrchol 3. stupně. Z toho plyne, že v binárním stromu s N vrcholy je právě 1 vrchol 2. stupně, $\frac{N-1}{2} - 1$ vrcholů 3. stupně a $\frac{N-1}{2} + 1$ vrcholů 1. stupně.

Protože pokládáme dva kousky čokolády na vrchol 2. stupně a po jednom kousku na každý vrchol 3. stupně, musí být celkový počet kousků čokolády v závislosti na počtu vrcholů:

$$a_N = 2 + \frac{N-1}{2} - 1$$

V binárním stromu je počet hran vždy o jedna menší, než počet vrcholů a tedy $N = H + 1$:

$$a_H = 2 + \frac{H}{2} - 1$$

Čtyři zákony čokoládování

Na závěr jsem se pokusil formulovat 4 zákony, podle kterých jsem navrhoval své grafy. Priorita zákonů je nepřímo úměrná jejich pořadovému číslu (tedy 1. zákon má nejvyšší prioritu).

1. Každý vrchol musí být počokoládovatelný.
2. Na každý graf se musí spotřebovat co nejméně kousků čokolády.
3. Čokolády umístěné na grafu se musí sníst co nejvíce.
4. Používaná čokoláda je hořká.

Závěr

V článku jsem popsal odvození a důkaz pro nejmenší množství kousků čokolády potřebných na počokoládování cest, kružnic a úplných grafů a navrhl jsem pravděpodobně nejlepší rozmístění pro binární strom (ovšem bez důkazu). Formuloval jsem 4 zákony čokoládování, podle kterých je radno se řídit při navrhování grafů (zvláště pak podle 4. zákona =○)). Příště se snad budu zabývat plány deskových her (pokud někdo toto téma nerozebere dříve). Mnoho zdaru a čokolády!

Gavento

Téma 2 – Krátery

Převážně jste se zabývali rozměry vzniklých kráterů. Bc.MM Petr Pecha a Dr.MM Bětka Pechová provedli i konkrétní měření. Rozhodli jsme se otisknout malou část Bětčina článku, zbytek tvoří surová naměřená data. Rádi ale otiskneme nějaká zpracovaná data, např. nějaký pěkný graf (jeden).

Krátery v bahně

Dr.MM Alžběta Pechová

Prováděla jsem praktické měření tvaru, velikosti a hloubky kráterů v těchto materiálech: hlína suchá, vlhká, bahno.

Měřila jsem krátery vzniklé pomocí sedmi kamenů lišících se tvarem, velikostí a hmotností padající ze tří různých výšek (0,5 m, 1 m, 2 m).

Dopadové rychlosti kamenů z různých výšek

Kameny mají malé tření, proto jsem ho zanedbávala a pád kamene považovala za volný pád. Pro dráhu volného pádu platí

$$s = h = \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Vyjádřím si čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \,.$$

Velikost rychlosti při dopadu je

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} \,.$$

Závěry

Tvar kráteru závisí na tvaru podstavy padajícího předmětu.

Rozměry jsou závislé na na dopadové rychlosti, tedy na výšce, ze které kámen házím, a nezávisí na jeho hmotnosti[1]. Dále závisí na materiálu, do kterého kámen pouštím.

[1] *Pozn. red.: Opravdu? Klára Krejčíčková zastává názor, že velikost kráteru závisí na energii dopadajícího předmětu, tedy i na hmotnosti i na rychlosti. Která z dam má pravdu? Také by nás zajímalo, jak by ta závislost mohla matematicky vypadat.*

Lenka Švidrnochová zjistila, že dopadající předmět zapadne hloub, pokud je materiál mokrý, sypký, nakypřený, ... Kterou fyzikální veličinou by šlo popsat tu vlastnost, že se do látky předmět zaryje hloub? Jak hloubka kráteru na této veličině může záviset?

Bzučo&Zuzka

Řešení úloh

Úloha 1 – Rovnováha (2b)

Zadání:

Před vámi je systém velmi lehkých zavěšených vah s poměry délek ramen a místy pro zavěšení závaží jako na obrázku.

Zjistěte, jak na místa A až I zavěsit závaží o hmotnostech 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 kg (každé právě jednou), aby byla každá váha v rovnováze.

Hmotnost samotných vah neuvažujte.

Řešení:

Tuto úlohu asi nešlo řešit jinak, než *inteligentní hrubou silou. Hrubá síla* znamená projít všechny možnosti, vyzkoušet ale všech 9! rozmístění závaží není moc *inteligentní*. Mnozí z vás si všimli několika věcí:

- Každá váha určuje jednu rovnici rovnováhy na páce, obecně:

  $$\sum_{i\in L} d_i m_i = \sum_{i\in R} d_i m_i \,,$$

  kde L a R jsou množiny závaží nebo vah na levé a pravé strně, d_i a m_i jejich hmotnosti.

  Pro tento systém vah:

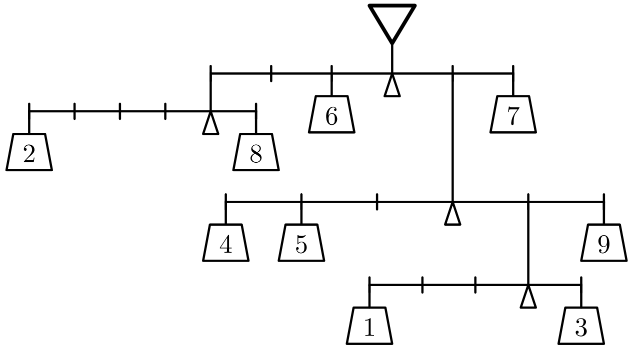
  $$\begin{aligned} 4A &= B \\ 3F &= G \\ 3D + 2E &= 1(F+G) + 2H \\ 3(A+B) + 1C &= 1(D+E+F+G+H) + 2I \end{aligned}$$

  Tedy 4 lineární rovnice o 9 neznámých. Navíc ještě ale vím, že

  $$A+B+C+D+E+F+G+H+I = 45\,.$$

- Na vahách se dvěma závažími (A, B) a (F, G) je jen malý počet možností: $(A = 1, B = 4)$ a $(A = 2, B = 8)$ na první, $(F = 1, G = 3)$, $(F = 2, G = 6)$ a $(F = 3, G = 9)$ na druhé. Možnosti $(A = 2, B = 4)$ a $(F = 2, G = 6)$ se navíc vylučují.

- Při $A = 1$ a $B = 4$ se nejvyšší váha určitě převáží doprava, i kdyby totiž $C = 9$ a $I = 2$, pak páka působící na pravou část bude $2 \cdot 2 + 1(3+5+6+7+8) = 34$, zatímco na levou jen $3(1+4)+1 \cdot 9 = 24$. Takže $A = 2$ a $B = 8$.
- Zbývá prozkoumat možnosti $(F = 1, G = 3)$ a $(F = 3, G = 9)$, pokud vyzkouším $H \in \{4, 5, 6, 7, 9\}$ pro první a $H \in \{1, 4, 5, 6, 7\}$ pro druhou, hned mi pro první vyjde jediná možnost $(D = 4, E = 5, H = 9)$ a pro druhou $(D = 6, E = 1, H = 4)$ a $(D = 6, E = 4, H = 7)$. Ještě krátká úvaha o možnostech pro C a I, a zbude jediná možnost, a to $A = 2$, $B = 8, C = 6, D = 4, E = 5, F = 1, G = 3, H = 9, I = 7$.



Další zajímavé pozorování by bylo například to, že $3D + 2E = 1(F + G) + 2H = 4F + 2H$ implikuje, že D je určitě liché. Pokud už víme, že (A=2, B=8), pak C a $D+E+F+G+H$ musí dát stejný zbytek po dělení 2 (protože $3(A+B)$ i $2I$ jsou sudé), ale potom z čísel 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 na I nutně zbude liché. Možná by šlo udělat ještě více takových inteligentních pozorování (například pro H opravdu nebylo třeba zkoušet úplně všechny možnosti), ale to pro tuto úlohu už není potřeba.

Pokud bychom měli nějakou mnohem větší soustavu (třeba výplň zadní strany v minulém čísle), už pro ni nic jiného než omezenou hrubou sílu neznám. Vymyslíte něco?

Gavento

Úloha 2 – Automat (5b)

Zadání:

Váš oblíbený hrdina lišáček Riki se potýká s automatem na sladkosti. Rád by z něj dostal své dva nejoblíbenější pamlsky – kofolu a čokoládu. Jenže tento automat je nějaký podivný, místo mincí do něj vkládáte posloupnosti cifer a místo drobných vrací jiné posloupnosti cifer.

Na automatu je v návodu k použití napsáno toto:

- *Automat přijímá a vrací pouze cifry* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- *Po vložení* 1*x*2 *vrátí automat* *x*. *(Např.:* 1422 *vrátí* 42.*)*
- *Pokud* *x* *vrací* *y*, *pak* 3*x* *vrátí* *yy* *(Např.:* 317652 *vrátí* 765765, *protože* 17652 *vrací* 765.*)*

- *Pokud x vrací y, pak $4x$ vrátí y pozpátku. (Např.: 417652 vrátí 567.)*
- *Pokud x vrací y, pak $5x$ vrátí y bez první cifry. (Např.: 517652 vrátí 65.)*
- *Pokud x vrací y, pak $6x$ vrátí $1y$. (Např.: 617652 vrátí 1765.)*
- *Pokud x vrací y, pak $7x$ vrátí $2y$. (Např.: 717652 vrátí 2765.)*
- *Pokud vložíte posloupnost, která nic nevrací, automat bude minutu vrčet a nedá vám nic.*
- *Pokud vložíte posloupnost x, na kterou automat odpoví xx (tedy jejím zdvojením), dostanete kofolu.*
- *Pokud vložíte posloupnost x, na kterou automat odpoví x bez poslední cifry, dostanete čokoládu.*

Když Riki zkoušel zadat 5371362, dostal zpět 36236. Po vložení 537136 na něj automat jen zlostně vrčel. To lišáčka trochu vyděsilo, co bude teď dělat? Poraďte mu vy, které dvě posloupnosti má Riki zadat do automatu, aby dostal obě pochoutky. Třeba se s vámi na soustředění rozdělí.

Posloupnosti by neměly být příliš dlouhé (aby Riki zatím neumřel hladem a žízní). Bohatě by vám mělo stačit 20 cifer na každou.

Řešení:

Váš oblíbený hrdina lišáček Riki dostal spoustu správných rad, jak se dostat ke kofole i k čokoládě. Nejkratší zaslané řešení pro kofolu je 3474536134745362, pro čokoládu rekordní 31312 (ačkoli většina z vás poslala delší 53615362). Jak se k těmto posloupnostem dostat?

- Postupně si najdu takové k, že $k1x2 \to x1x2$ pro libovolné x. Potom totiž $3k1x2 \to x1x2x1x2$ a stačí mi dosadit $x = 3k$ a mám to.
- Začnu s $1x2 \to x$, přidám jedničku: $61x2 \to 1x$, zdvojím: $361x2 \to 1x1x$, a odeberu první jedničku: $5361x2 \to x1x$.
- Teď bych chtěl mít na konci 2, ale k tomu mi stačí posloupnost otočit: $45361x2 \to \overleftarrow{x}1\overleftarrow{x}$, pak přidat 2: $745361x2 \to 2\overleftarrow{x}1\overleftarrow{x}$, a ještě znovu otočit: $4745361x2 \to x1x2$.
- Dál už stačí jen posloupnost zdvojit: $34745361x2 \to x1x2x1x2$, a zařídit, aby $34745361x2 = x1x2$, neboli dosadit $x = 3474536$:
- $3474536134745362 \to 34745361347453623474536134745362$

Hurá, kofola!

Pro čokoládu si z předchozího postupu vezmu $5361x2 \to x1x$ a dosadím $x = 536$: $53615362 \to 5361536$

Tralala, čokoláda!

A jak dostat kratší řešení? Vím, že $31x2 \to xx$ a přitom chci $31x2 \to 31x$, do toho mi stačí dosadit $x = 31$ a mám $31312 \to 3131$.

Thando, hořká čokoláda!

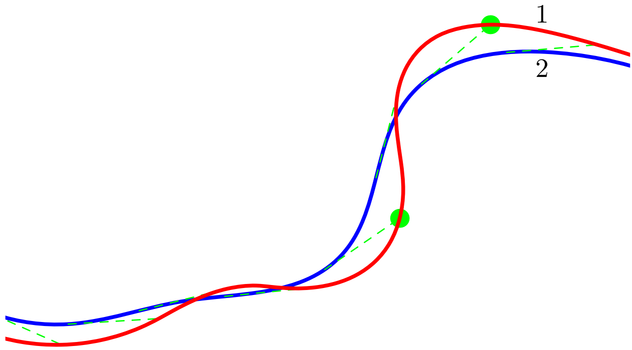
Gavento

Úloha 3 – Kolo (3b)

Zadání:

Jízdní kolo zanechalo v písku na pláži stopu. Rozhodněte, kterým směrem kolo jelo a která stopa je od zadního kola. Bonusová otázka: Pokud přední kolo jelo konstantní okamžitou rychlostí, ve kterém místě byla okamžitá rychlost zadního kola nejnižší?

Řešení:
Jede-li kolo beze smyku, pak tečna ke trajektorii kola vždy udává směr natočení kola. Uvědomíme-li si, jak je jízdní kolo konstruováno (zadní kolo vždy „míří“ k přednímu a rozchod l mezi koly je konstantní), zřejmě lze získat trajektorii předního kola z trajektorie zadního kola tak, že od ní v každém bodě naneseme ve směru tečny stejnou vzdálenost (rovnou rozchodu kol). Odtud už lze snadno rozlišit, že na našem obrázku patří Čára jedna přednímu a čára dva zadnímu kolu.



Stopa kola v písku

Bonusová otázka: Ve shodě s tradiční notací mechaniky budeme pro vektor $\boldsymbol{x}$ značit x jeho velikost a $\boldsymbol{x}^0$ jeho směr (tj. bezrozměrný jednotkový vektor stejného směru). Buď rychlost předního, resp. zadního kola $\boldsymbol{v}_p$, resp. $\boldsymbol{v}_z$. Uvážíme-li soustavu souřadnic s počátkem v bodě zadního kola, pak rychlost předního kola v této soustavě bude $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_z$. Nechť $\boldsymbol{l}$ je polohový vektor předního kola v této soustavě. Víme, že jeho velikost l se nemění, což znamená, že $\boldsymbol{v}$ musí být kolmý k $\boldsymbol{l}$ (rotační pohyb), což vyjádříme pomocí skalárního součinu (kolmost k $\boldsymbol{l}$ je i kolmost k $\boldsymbol{l}^0$):

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}^0 = 0\,.$$

Odtud plyne

$$\boldsymbol{v}_z \cdot \boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{l}^0\,,$$

a označíme-li úhel mezi $\boldsymbol{v}_p$ a $\boldsymbol{l}$ jako ϑ a uvážíme, že $\boldsymbol{v}_z^0 = \boldsymbol{l}^0$, získáme pěkný vztah mezi okamžitými rychlostmi obou kol:

$$v_z = v_p \cos\vartheta\,,$$

kde ϑ je odchylka směrů pohybu kol. Tedy okamžitá rychlost zadního kola při konstantní rychlosti předního kola je nejnižší, právě když je tato odchylka (úhel) maximální.

Poznámky: Většina z vás až na světlé výjimky se nad úlohou hlouběji nezamýšlela a výsledky jste spíš odhadovali, zdůvodnění se pak hemžila slovy jako „jasný“, „zřejmě“ apod. Intuice je důležitá věc, ale občas může člověka navést i špatným směrem. Rád bych zde zbořil některé mýty, které se ve vašich řešeních objevovaly:

1. Hodně z vás správně usoudilo, že rychlost předního kola je vždy větší nebo rovna rychlosti kola zadního, takže stejná nerovnost platí i mezi dráhami uraženými ve stejném čase. Mnozí ale potom s ledovým klidem napsali, že si tudíž stačí změřit délky celých trajektorií na obrázku, nebo např. jen mezi dvěma průsečíky, ačkoliv takové dvojice úseků kola ve stejném čase zjevně neprojížděla (přední kolo tam vjelo dřív a dřív vyjelo).
2. Někteří jste tvrdili, že dráha předního kola je vždy více křivá, než dráha kola zadního – to zdaleka není vždy pravda, jak ukazuje příklad, kdy přední kolo vedete po kružnici a zadní opisuje menší kružnici (která má větší křivost).
3. Častou odpovědí na bonusovou otázku bylo, že nejvíce poklesne rychlost zadního kola oproti přednímu v místě, kde trajektorie předního kola dělá nejostřejší zatáčku, tedy kde má (lokální) maximum jeho křivost. To kupodivu není pravda. To obecně *není* stejné místo, jako to, kde se přední kolo maximálně vytočí vůči zadnímu (a kde se, jak už víme, naše hledaná místa skutečně nacházejí). Do jisté míry to jde vidět i na našem obrázku. Pomocí tzv. diferenciální geometrie lze ukázat, že platí
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+l^2\kappa_z^2}}\,,$$
kde κ_z je křivost trajektorie zadního kola, a tedy k největšímu poklesu dojde v místech, kde naopak *zadní* kolo točí největší zatáčku (tj. jeho dráha má největší křivost)!

Jarda

Úloha 4 – Přesuny v mřížce (4b)

Zadání:

Je zadán čtverec ABCD s vrcholy v mřížových bodech ($\mathrm{A}=(0,0)$*,* $\mathrm{B}=(6,0)$*,* $\mathrm{C}=(6,6)$*,* $\mathrm{D}=(0,6)$*). Vrcholy lze přesouvat, ale v jednom kroku jen do sousedního bodu (i diagonálně, tedy každá souřadnice se smí změnit o* ± 1*), a navíc jen tak, aby se zachoval obsah čtyřúhelníka. Úkolem je otočit výchozí čtverec o* 90° *(nemusí ale být na původních souřadnicích). Lze to učinit, pokud povolíme současný pohyb jedním, dvěma, čtyřmi body? Pokuste se nalézt takový postup, aby se čtyřúhelník co nejméně zdeformoval, tedy aby velikosti úhlů čtyřúhelníků zůstávaly v co nejužším intervalu. Jak se bude úloha chovat s jinak velkými počátečními čtverci?*

Řešení:

Řešení, kdy se pohybuje současně jen jedním vrcholem, je nasnadě: přesuneme vrchol C šestkrát dolů doprava, tedy o $(1,-1)$ do $(12,0)$. Dále přesuneme vrchol D doprava do $(12,6)$, a pak vrchol A nahoru doprava do $(6,6)$. Využíváme fakt, že když posouváme jeden vrchol trojúhelníka rovnoběžně s protilehlou stranou, obsah se nemění. Vnitřní úhly čtyřúhelníka zůstávají při tomto řešení v intervalu $\langle 45^\circ, 180^\circ\rangle$. Lze ovšem získat i užší intervaly, například postupem

$$A=(0,0)\,,\ B=(0,6)\,,\ C=(6,6)\,,\ D=(6,0)$$

$$\begin{array}{cccccc}
C\to(7,5)\,; & A\to(-1,1)\,; & C\to(8,4)\,; & C\to(9,3)\,; & A\to(-2,2)\,; & A\to(-3,3)\,;\\
B\to(1,6)\,; & D\to(5,0)\,; & B\to(2,6)\,; & B\to(3,6)\,; & B\to(4,6)\,; & B\to(5,6)\,;\\
B\to(6,6)\,; & D\to(4,0)\,; & D\to(3,0)\,; & D\to(2,0)\,; & D\to(1,0)\,; & D\to(0,0)\,;\\
C\to(8,2)\,; & C\to(7,1)\,; & C\to(6,0)\,; & A\to(-2,4)\,; & A\to(-1,5)\,; & A\to(0,6)
\end{array}$$

podle H. Florianové, při němž úhly zůstanou v intervalu $\langle 39^\circ\ ,\ 135^\circ\rangle$.

Pokud povolíme pohyb dvěma vrcholy, můžeme postupovat lépe: Nejprve čtverec zkosíme (pohybujeme horní stranou doprava), až bude $C=(12,6)$, $D=(6,6)$. Pak přesuneme vrchol C do $(12,0)$ a vrchol A do $(0,6)$. Nakonec posuneme spodní stranu doleva a kosodélník zase narovnáme do čtverce. Vnitřní úhly zůstávají v intervalu $\langle 45^\circ\ ,\ 135^\circ\rangle$. Z vylepšených postupů uveďme opět řešení H. Florianové:

$$A=(0,0)\,,\ B=(0,6)\,,\ C=(6,6)\,,\ D=(6,0)$$

$$\begin{array}{cccc}
C\to(7,5)\,, & A\to(-1,1)\,; & C\to(8,4)\,, & A\to(-2,2)\,;\\
C\to(9,3)\,, & A\to(-3,3)\,; & B\to(1,6)\,, & D\to(5,0)\,;\\
B\to(2,6)\,, & D\to(4,0)\,; & B\to(3,6)\,, & D\to(3,0)\,;\\
B\to(4,6)\,, & D\to(2,0)\,; & B\to(5,6)\,, & D\to(1,0)\,;\\
B\to(6,6)\,, & D\to(0,0)\,; & C\to(8,2)\,, & A\to(-2,4)\,;\\
C\to(7,1)\,, & A\to(-1,5)\,; & C\to(6,0)\,, & A\to(0,6)\,,
\end{array}$$

které udrží úhly v intervalu $\langle 53^\circ\ ,\ 127^\circ\rangle$.

Jak lze očekávat, povolíme-li pohyb všemi vrcholy zároveň, lze udržet úhly v ještě užším intervalu. Řešení ovšem začíná být záležitostí spíše pro stroj než pro člověka, protože není už tak snadné rozhodnout, zda dané posunutí vrcholů zachová obsah čtyřúhelníka. Následující sekvence ukazuje řešení, kdy vnitřní úhly zůstávají v intervalu $(80^\circ\ ,\ 100^\circ)$:

$$\begin{array}{cccc}
A\to(0,0)\,, & B\to(6,0)\,, & C\to(6,6)\,, & D\to(0,6)\,;\\
A\to(0,-1)\,, & B\to(6,0)\,, & C\to(5,6)\,, & D\to(0,6)\,;\\
A\to(1,-1)\,, & B\to(7,2)\,, & C\to(5,7)\,, & D\to(-1,4)\,;\\
A\to(2,-1)\,, & B\to(8,2)\,, & C\to(6,7)\,, & D\to(0,4)\,;\\
A\to(2,-1)\,, & B\to(9,3)\,, & C\to(6,7)\,, & D\to(0,3)\,;\\
A\to(2,-2)\,, & B\to(8,2)\,, & C\to(6,6)\,, & D\to(-1,2)\,;\\
A\to(3,-1)\,, & B\to(8,3)\,, & C\to(4,7)\,, & D\to(-1,3)\,;\\
A\to(2,-1)\,, & B\to(7,3)\,, & C\to(3,7)\,, & D\to(-2,3)\,;\\
A\to(2,-2)\,, & B\to(6,3)\,, & C\to(2,7)\,, & D\to(-2,2)\,;\\
A\to(1,-2)\,, & B\to(5,4)\,, & C\to(1,7)\,, & D\to(-3,1)\,;\\
A\to(2,-2)\,, & B\to(6,5)\,, & C\to(2,7)\,, & D\to(-2,1)\,;\\
A\to(3,-1)\,, & B\to(7,6)\,, & C\to(3,8)\,, & D\to(-1,1)\,;\\
A\to(4,0)\,, & B\to(7,6)\,, & C\to(2,8)\,, & D\to(-1,2)\,;\\
A\to(5,0)\,, & B\to(6,7)\,, & C\to(1,8)\,, & D\to(0,1)\,;\\
A\to(6,1)\,, & B\to(5,7)\,, & C\to(0,7)\,, & D\to(0,0)\,;\\
A\to(6,0)\,, & B\to(6,6)\,, & C\to(0,6)\,, & D\to(0,0)\,.
\end{array}$$

Otázka nejužšího možného intervalu zůstává otevřená, a nejspíše nepůjde o snadný problém. Dá se očekávat, že při zvětšování čtverce se interval bude zužovat, neboť mřížka se stává vzhledem ke čtverci „hustší“.

Jarda

Úloha 5 – Na divokém západě (5b)

Zadání:

Svého času žil jeden kovboj, který moc rád předváděl, jak přesně dokáže střílet. Jednoho dne se u ohrad sešlo pár lidí, tak toho hned využil. Někde vylovil malé půl-kilové závaží (malinký váleček vysoký asi 5 cm), postavil ho na metr vysokou ohradu a vrátil se 50 metrů zpátky mezi přihlížející. Zatímco se ostatní dívali na nepatrný cíl v dálce a hádali se, jestli ho trefí, kovboj vzal svůj kolt ráže 11 mm, nastavil před kladívko poslední olověný náboj v bubínku, zamířil a vystřelil. Slabý kovový zvuk, který potvrzoval, že střela trefila váleček, téměř zanikl v bezprostředně následujícím odrazu zvuku výstřelu od nedalekého lesíka.

Jenže to nebylo všechno. Okamžik nato se všichni, kdo zatím pozorovali střelbu, otočili a uviděli místního bankéře, jak se hroutí na zem a drží se za hrudník. Chvíli se všichni jen nechápavě dívali, ti pohotovější se snažili bankéři rychle pomoct. Ale po chvíli už došli někteří k jasnému závěru. Chytili kovboje a obvinili ho: „To ty jsi ho zastřelil! Střela se odrazila a zasáhla ho.“ Netrvalo dlouho, a někteří si přisadili: „Dobře jsi to připravil, vypadá to jako náhoda, ale sám pořád předvádíš, jak umíš střílet. Co? Dokážeš trefit váleček tak, aby se střela odrazila tam, kam chceš!“

Konečně dorazil z osady šerif. Rozhlédl se kolem a pozeptal se několika lidí, co se stalo. (Místní šerif byl velký nadšenec do prací takových pánů jako Sir Newton a další.) Na chvíli se zamyslel, zeptal se, kde stál střílející, odkrokoval si vzdálenost k lesíku a zjistil, že je to asi 60 metrů. Obdobně zjistil, že bankéř stál trochu dál než ostatní přihlížející, asi 10 metrů vpravo od kovboje. Opět se na chvíli zamyslel, a pak prohlásil směrem k několika lidem, kteří stále drželi nebohého kovboje: „Pusťte ho, jeho kulka za to nemůže. A zkuste co nejrychleji chytit skutečného vraha!“

Jenže jakkoliv tu měl šerif autoritu, takovéhle prohlášení nikomu nestačilo. Jakpak nemohla, odrazila se a zasáhla ho, vždyť je to jasné. A nějaká fyzika? S tím na nás nechoďte.

Šerif tedy došel k ohradě a zjistil, že váleček leží v trávě asi 6 m od místa, kde stál před výstřelem, a odletěl pod úhlem asi 60° vůči směru, kterým přiletěla kulka. Opět se na chvíli zamyslel, pak zavolal lidi a ukázal směr: „Pořádně se tímhle směrem podívejte. Tam bude kulka, která shodila váleček.“ Vydali se tedy hledat a kupodivu ji po chvíli našli zaraženou ve stěně nedaleké kůlny téměř přesně ve směru, kterým šerif ukázal. To už stačilo všem, aby uznali, že kovboj je (alespoň tentokrát) nevinný.

Na základě čeho šerif hned prohlásil, že bankéře nemohla zasáhnout kovbojova kulka? Jakým směrem potom ukázal, že tam najdou kulku? A jak tento směr určil?

Řešení:

Pozn. red.: Na začátek bych se chtěl omluvit za chybu v zadání. Při vymýšlení úlohy jsem do konečných čísel započítal hmotnost střely takovou, jaká by odpovídala poloměru kulky 11 mm (a tedy dvojnásobné ráži). Ráže je ve skutečnosti průměr hlavně a kulky. Tato osminásobná změna hmotnosti kulky dost podstatně změní celou úlohu. V následujícím textu ukážu řešení jak pro původně zamýšlený případ kovboje střílejícího z příručního děla o ráži 22 mm, tak i variantu pro čísla uvedená v zadání. V druhém případě bude mít ale šerif podstatně těžší práci.

První věc, která se dá z uvedených údajů zjistit, je rychlost kulky. Vím, že zvuk výstřelu se odrazil od lesa, a putoval po dráze 120 metrů. Za stejnou dobu kulka urazila vzdálenost k závaží a zvuk nárazu se vrátil 50 metrů zpět. Tedy kulka urazila vzdálenost 50 m za stejnou dobu jako zvuk 70 m.[2] Za předpokladu

[2] Střely z koltů divokého západu skutečně nepřekračovaly rychlost zvuku.

rychlosti zvuku asi $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ mi pro rychlost kulky vyjde

$$v_0 = \frac{50}{70}\,v_\mathrm{z} = 240\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

(Tato hodnota je přesně vzato průměrnou rychlostí kulky po dobu letu k závaží, ale budu ji dále považovat za v rámci přesnosti shodnou s rychlostí kulky při nárazu.)

Následuje určení hmotnosti kulky. Podle údajů v zadání je ráže pistole, 11 mm. Hustota olova je $\varrho = 11\,340\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, tedy

$$m = \frac{1}{6}\,\pi d^3\varrho = 7{,}9\,\mathrm{g}\,.$$

Jak už jsme napsal výše, číselné údaje v zadání byly počítány pro dvojnásobně velkou kulku s osminásobnou hmotností, tedy 63 g.

Ještě rozeberu v teoretické rovině otázku, jestli se střela mohla odrazit zpět na bankéře. Při zadané hybnosti dopadající kulky a hmotnosti válečku to nelze vyloučit. Pokud je hmotnost válečku větší, než hmotnost střely, je možný odraz kamkoliv (z hlediska zachování hybnosti a energie).

Pro úhel odrazu α bude odvození vypadat následovně. Hybnost udělená válečku musí být rozdíl hybností dopadající a odražené kulky.[3] Z kosinové věty:

$$\frac{m_\mathrm{v}^2}{m^2}\,v_\mathrm{v}^2 = v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1\cos\alpha\,,$$

kde v_v je rychlost válečku, m_v jeho hmotnost a v_1 rychlost kulky po odrazu. Kinetická energie se při nárazu nemusí zcela zachovat, část se ztratí jako zahřátí a deformace střely a válečku. V mezním ideálním případě se kinetická energie zcela zachová, ve skutečnosti bude rychlost po nárazu o něco nižší. Při zachování kinetické energie platí

$$\frac{m_\mathrm{v}}{m}\,v_\mathrm{v}^2 = v_0^2 - v_1^2\,.$$

Dohromady tedy

$$\begin{aligned}
\frac{m_\mathrm{v}}{m}\,\left(v_0^2 - v_1^2\right) &= v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1\cos\alpha\,;\\
0 &= \left(1 + \frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\,v_1^2 - 2v_0v_1\cos\alpha + \left(1 - \frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\,v_0^2\,;\\
0 &= \left(1 + \frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\,\frac{v_1^2}{v_0^2} - 2\,\frac{v_1}{v_0}\,\cos\alpha + \left(1 - \frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\,;\\
\frac{v_1}{v_0} &= \frac{\cos\alpha + \sqrt{(m_\mathrm{v}/m)^2 - \sin^2\alpha}}{(m_\mathrm{v}/m) + 1}\,.
\end{aligned}$$

Přitom hodnotu (v_1/v_0) je třeba chápat jako maximální možnou hodnotu poměru rychlosti střely po nárazu a před nárazem.

[3] Hybnost je vektor, takže sčítání a odečítání je třeba provádět vektorově.

Řešení pro příruční dělo s hmotností kulky 63 g

Tato varianta je původně zamýšlenou při psaní zadání, bohužel ale neodpovídající ráži v něm uvedené. Pokud se kulka měla odrazit na bankéře, musí být úhel odrazu $\alpha = 180° - \mathrm{tg}\, 10/50 = 168°$. Po dosazení do výše uvedeného vztahu vyjde, že v tomto případě mohla mít kulka po odrazu maximálně 78 % původní rychlosti. To je ještě poměrně velká rychlost, ale nesmíme zapomínat, že jde o nereálný mezní případ, rychlost kulky navíc považujeme po celou dobu letu k válečku za stejnou – nebrzdí se o vzduch. Obě tyto zanedbání sníží výslednou rychlost kulky. Šerif navíc mohl uvažovat následujícím způsobem: Pokud by se kulka trefila do hrany válečku, určitě se hodně zdeformuje a ztratí podstatnou část energie. Pokud se trefila do boční stěny válečku, nemohla se nijak podstatně změnit její svislá rychlost a za dobu, než by dolétla k bankéři, by už byla na zemi a nezasáhla by jej do prsou. Od kovboje k válečku letěla kulka asi 0,2 s a za tu dobu klesla asi o 20 cm. To odpovídá tomu, že kovboj vystřelil z běžné výšky a trefil váleček ve výšce jednoho metru. Ale zpět k bankéři letěla kulka minimálně další 0,3 s a za tu dobu by už klesla o metr navíc.

Tohle by bylo vyřešeno, ale kde tedy hledat kulku. Pokud předpokládám, že váleček dopadl přímo na popsané místo (nekutálel se po zemi apod.), můžeme na základě faktu, že z výšky 1 m padal volným pádem asi 0,45 s a mezitím se vzdálil 6 m, určit jeho rychlost po nárazu: $v_\mathrm{v} = 6\,\mathrm{m}/0{,}45\,\mathrm{s} = 13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Při libovolném rázu se musí zachovávat hybnost. Rozepíši si ji na dvě složky (nezapomínejte, hybnost je vektor) – ve směru přilétající kulky (označím x) a ve směru kolmém (označím y).

$$mv_0 = mv_{1x} + \frac{1}{2}\, m_\mathrm{v} v_\mathrm{v}\,, \qquad 0 = mv_{1y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, m_\mathrm{v} v_\mathrm{v}\,,$$

$$v_{1x} = v_0 - \frac{m_\mathrm{v}}{2m}\, v_\mathrm{v}\,, \qquad v_{1y} = -\frac{\sqrt{3} m_\mathrm{v}}{2m}\, v_\mathrm{v}\,.$$

Z toho po dosazení $v_{1x} = 187\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_{1y} = -91\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Tedy kulka se odrazila rychlostí $210\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod úhlem 30° na opačnou stranu než váleček.

Při nárazu se asi 23 % původní kinetické energie ztratilo jako teplo a deformace. To není mnoho, ale vzhledem k poměrně malému úhlu odrazu by se tomu snad dalo věřit i pro olověnou kulku.

Řešení pro běžný kolt s hmotností kulky 7,9 g

Úvahy o možnosti odrazu kulky přímo na bankéře budou obdobné jako výše. Menší hmotnost kulky způsobí, že v případě ideálně pružného odrazu by si zachovala dokonce 97 % rychlosti. Ovšem i tak by po cestě zpět klesla o dalších minimálně 60 cm a těžko by bankéře strefila do prsou.

Zajímavější je situace s válečkem. Střela nemůže žádným způsobem udělit válečku po nárazu rychlost $13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Šerif by si v tomto případě těžko mohl být jistý, kam přesně se kulka odrazila, ale mohl zkusit uvažovat například následovně: Váleček se ještě kus po zemi kutálel, anebo jej někdo trochu odkopl. Budu ale předpokládat, že skutečně odletěl pod úhlem přibližně 60°. Ze zachování energie a hybnosti plyne, že střela mohla válečku v tomto směru udělit rychlost maximálně $3{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ve skutečnosti to bylo určitě o něco méně kvůli ztrátám kinetické energie.

Pokud skutečnou rychlost válečku označím v_v, mohu pro složky rychlosti střely po nárazu napsat

$$v_{1x} = v_0 - \frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{v}}{m}v_\mathrm{v}\,, \qquad v_{1y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_\mathrm{v}}{m}v_\mathrm{v}\,.$$

Úhel odrazu střely je

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}v_\mathrm{v}}{2v_0 m/m_\mathrm{v} - v_\mathrm{v}}\,.$$

To dává pro možné rychlosti válečku hodnoty mezi nulou (nulová rychlost válečku, nedošlo k žádnému nárazu) a 60° (maximální možná rychlost válečku, žádné ztráty kinetické energie). Největší ztráty kinetické energie jsou asi $23\,\%$ pro úhel odrazu přibližně 30° (rychlost válečku je v tomto případě $1{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). Oba mezní případy ($0^\circ$ a 60°) jsou nereálné kvůli nulové ztrátě energie. Realitě se bude spíše blížit maximální ztráta energie. Navíc by bylo dobré, kdyby váleček získal co největší počáteční rychlost, aby měl alespoň nějakou šanci dostatečně se vzdálit od kůlu. Šerif tedy mohl ukázat přibližně pod úhlem 45° (ztráty energie asi $20\,\%$ a rychlost válečku $2{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) a doufat, že je jeho odhad správný a přibližně v tom místě střela skutečně bude.

Poznámka na závěr: Ve velkém množství řešení se operovalo s odrazem kulky podle pravidla, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, a váleček získá hybnost ve směru kolmém na rovinu dopadu. Takováto úvaha je ale chybná. Podívejte se na to z pohledu vektorů hybnosti (anebo si rovnou kreslete). Máme vektor hybnosti dopadajícího projektilu a vektor hybnosti odraženého projektilu. Ty spolu svírají obecný úhel. Hybnost předaná válečku je jejich rozdíl. Ale vektor rozdílu bude s oběma svírat stejný úhel jen tehdy, pokud bude velikost hybnosti před dopadem a po dopadu stejná. Tedy navrhovaný zákon odrazu platí pouze pro projektily, které během srážky nezmění svou hybnost. To je třeba případ světla a zrcadla, ale už ne střely.

Marble

Výsledková listina

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	r5	t1	t2	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	89	2	5	1		2	3	10	1	24	24
2.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Výška	19	2	5	2	4	3			3	19	19
3–7.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	187	2	3	0			8		0	13	13
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	72	2	5	3		3			0	13	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dlabaja	13	2	5	2	2	2			0	13	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Florianová	13	2	5	0	4	1			1	13	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Halaga	13	2	5	3	3				0	13	13
8.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Pecha	12	2		3				6	1	12	12
9–10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	69	2	5	3					0	10	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Marian	10	2	2	3		3			0	10	10
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	33	2	5		1				1	9	9
12–13.	Lenka Švidrnochová	9	2		0	0			6	0	8	8
	Michal Rolínek	8	1	5	1		1			0	8	8
14–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	33	2	5						0	7	7
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Vaňhara	10		5	2	0	0			0	7	7
	Jana Fojtová	7	2	5	0		0			0	7	7
	David Navrkal	7	2	5	0					0	7	7
18.	Kryštof Touška	6	2	2	2					0	6	6
19.	Martin Volf	5	2		0		2			1	5	5
20–21.	Michal Petrucha	4			3		1			0	4	4
	Dušan Rychnovský	4	2	2	0		0			0	4	4
22.	Klára Krejčíčková	3							3	0	3	3
23–28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	41	2							0	2	2
	Anita Gregorová	2	2							0	2	2
	Pavel Makovec	2	2		0					0	2	2
	Julie Musilová	2	2							0	2	2
	Irena Pavlíčková	2	2							0	2	2
	Pavla Zárubová	2	2		0	0	0			0	2	2
29–30.	Juraj Hartman	1				1				0	1	1
	Zbyněk Klikoš	1			1					0	1	1
31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	39	0		0		0			0	0	0

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`