



Termín odeslání: 6. 11. 2006

Ahoj kamarádky, ahoj kamarádi,

ještě jednou vás všechny vítáme v novém ročníku korespondenčního semináře a studentského časopisu M&M. Jsme rádi, že jsme mezi vámi opět našli nové příznivce, a věříme, že se vám úložky i témátka budou líbit. Ty nejšíkovnější z vás budeme mít možnost poznat osobně už zanedlouho na našem podzimním soustředění. A pokud by se vám náhodou nepoštěstilo se jej účastnit, nevzdávejte se a řešte o to pilněji! Zvýšíte tím svoji šanci na účast na dalším soustředění, které se bude konat opět na jaře. Tak tedy hodně zábavy nad novým zadáním!

*Vaši organizátoři*

## Zadání úloh

### Úloha 2.1 – Led a voda (2b)

Máme skleničku s vodou, ve které plovou kostky ledu. Hladina vody ve skleničce sahá na počátku až po okraj. Led se ve skleničce postupně rozpouští. Jak se mění hladina vody? Přeteče nějaká voda přes okraj?

Jak by se změnila situace, kdyby uvnitř kostek ledu byly zamrzlé malé vzduchové bublinky? Co by se stalo, kdyby uvnitř kostky ledu byla zamrzlá hliníková kulička (kostka ledu na začátku plave na hladině)?

V celém příkladu zanedbáváme jevy související s povrchovým napětím vody. Předpokládáme také, že hustota vody za daných podmínek nezávisí na teplotě.

### Úloha 2.2 – Matematici v letadle (4b)

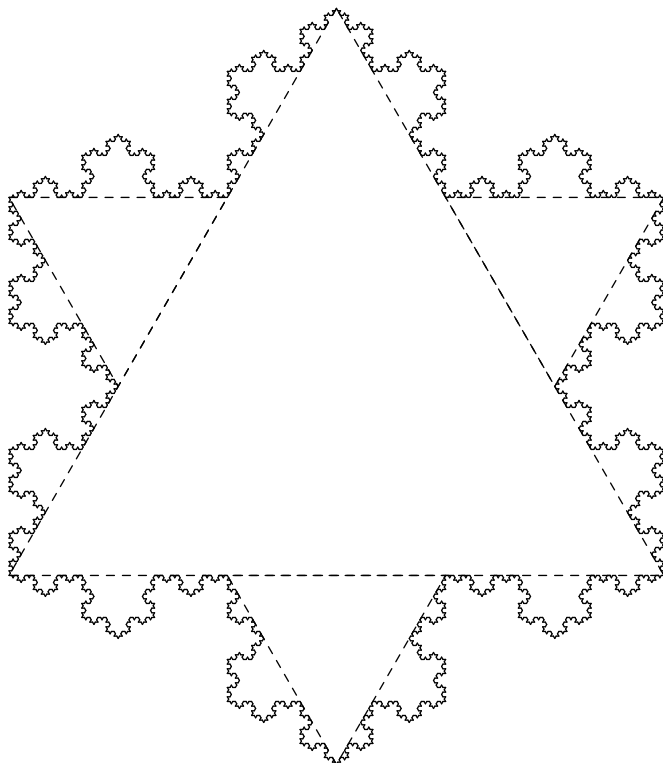
Na konferenci matematiků bylo z Matfyzu vypraveno celé *plné* letadlo s  $n$  matematiky. Každý dostal číslo svého sedadla, ale hned první nastupující se příliš zamyslel nad problémem, o kterém se mu dnes zdálo, a sedl si na náhodné místo. Další nastupující se na rozdíl od něj zabývali tím, kam si sednou, a všichni by nejraději seděli na *svém* místě. Matematici jsou ale mírumilovná stvoření a pokud zjistí, že je někdo podsedl, vyberou si náhodně jiné volné místo a neobtěžují už sedícího. Jakou šanci sednout si na své sedadlo (které má mimochodem číslo 42) máte jakožto poslední nastupující (v závislosti na  $n$ )? Matematici nastupují v nahodilém pořadí, uvažujte  $n \geq 42$ .

## Úloha 2.3 – Vločka Kochové

(6b)

Vločka Kochové je útvar, který vznikne tak, že vezmeme rovnostranný trojúhelník, rozdělíme každou jeho stranu na třetiny, a k prostřední třetině každé strany přilepíme rovnostranný trojúhelník s třetinovou délkou strany. Tím vznikne hvězdice se šesti cípy. Potom opět ke každé straně každého z cípů přilepíme v prostřední třetině trojúhelník, a to celé děláme do nekonečna (viz obrázek).

Taková vločka má mnoho zajímavých vlastností – například má nekonečný obvod a konečný obsah (který je jistě menší než obsah kružnice opsané). Pokud vločku roztočíme kolem dokola, jakou bude mít rotující útvar kinetickou energii? (Třeba si můžete představit, že je vystřižená z plechu a otáčíme jí v rovině daného útvaru, zájemci mohou spočítat i kinetickou energii pro jiné osy rotace). K řešení Vám může pomoci Steinerova věta – zkuste ji např. použít na zjištění momentu setrvačnosti obyčejného trojúhelníka, abyste se vyhnuli složitému integrování.



## Úloha 2.4 – Rychlá množina (3b)

Navrhněte způsob, jak programově reprezentovat množinu nejvýše  $M$  celých čísel z rozsahu  $1 \dots N$  za splnění následujících požadavků: Kromě jednoho pole celých čísel o délce  $M + N$  smíte použít jen konstantní<sup>1</sup> počet celočíselných proměnných a celočíselných polí konstantní délky.

Musíte umět realizovat operace přidání prvku do množiny, test na přítomnost prvku v množině, odebrání prvku z množiny, dotaz na počet prvků v množině a vyprázdnění množiny. To vše v konstantním čase.<sup>2</sup>

Operace vyprázdnění by měla fungovat nezávisle na předchozím stavu (tedy pole i všechny pomocné proměnné mohou obsahovat *naprosto libovolná* data), a tak být použitelná i jako inicializace celé struktury.

## Zadání témat

### Téma 4 – Algebraické vyjádření hodnot trigonometrických funkcí

Jistě víte, že jsou hodnoty trigonometrických funkcí, které lze snadno vyjádřit jednoduchým způsobem – algebraicky, např.

$$\cos 90^\circ = 0,$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 12^\circ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{8}.$$

Tím, že jde o *algebraické vyjádření*, se myslí, že výraz je sestaven z algebraických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, odmocňování a umocňování) a celých čísel.

Pokuste se vyjádřit co nejvíce hodnot trigonometrických funkcí (tedy  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ , ...) algebraicky. Dají se takto vyjádřit všechny celočíselné úhly pro všechny tyto funkce? Pokud už umíte algebraicky vyjádřit jednu trigonometrickou funkci, umíte pro stejný úhel doplnit všechny zbývající?

Pokuste se všechny kroky důkladně odůvodnit, nebo použijte důkazy, které zaslali lidé před vámi (s uvedením či výsledek používáte).

<sup>1</sup> Konstantní zde znamená nezávislý na velikosti  $M$  a  $N$ . Musí tedy existovat konstanta omezující počet bytů, který vám s jedním polem délky  $M + N$  určitě bude stačit. (Tuto konstantu nepočítejte, uvádíme jen pro informaci.)

<sup>2</sup> Tedy tak, aby každá operace vždy zabrala nějakou konstantou omezený počet jednoduchých instrukcí nezávisle na  $M + N$  a na tom, jaké jiné operace již byly provedeny.

## Téma 5 – Volby

Jak jistě každý ví, letos v České republice proběhly volby do Poslanecké sněmovny. Dílčí výsledky (rozdělení mandátů) zná skoro každý, ty podrobné si můžete najít například na internetové stránce <http://www.volby.cz/pls/ps2006/ps9?xjazyk=CZ> (při řešení tohoto tématu je jistě upotřebíte). Hlasy voličů byli přepočítány na mandáty podle tzv. d'Hondtova systému:

Nejprve se sečtou platné hlasy odevzdané ve všech čtrnácti volebních krajích. Toto číslo se vydělí počtem obsazovaných mandátů (dvě stě). Výsledek se nazývá *republikové mandátové číslo*. Tímto číslem se vydělí počet hlasů v každém jednotlivém kraji, čímž zjistíme, kolik mandátů se bude kde přesně rozdělovat (zaokrouhluje se dolů). Zbylé nerozdělené mandáty se po jednom přidělí obvodům s největším zbytkem po dělení.

Následně se zjistí, které strany překročily volební *kvórum*, předepsané v zákoně o volbách na 5 % pro samostatně kandidující politickou stranu a násobek tohoto čísla pro koaliční uskupení (po dosažení hranice 20 % se kvórum dále nezvyšuje). Toto kvórum je počítáno na celostátní úrovni a kandidující subjekty (strany nebo koalice), které jej nepřekročily, jsou z rozdělení mandátů vyloučeny.

Poté se přikročí k samotnému přepočtu hlasů na mandáty, k tzv. *skrutinii*. Pro parlamentní volby 2006 se uskutečnilo na základě metody tzv. d'Hondtova dělitele. Počet hlasů, které každý kandidující subjekt získá v daném volebním kraji, je podle této metody dělen řadou přirozených čísel začínající od jedné ( $1, 2, 3, \dots, n$ ), kde  $n$  je počet kandidátů na volebním lístku daného subjektu. Zaokrouhluje se na dvě desetinná místa a nahoru. Vypočtené podíly všech kandidujících subjektů jsou následně seřazeny do jedné řady od nejvyšších – vedle podílu bude vždy uvedeno, které politické straně náleží. Nejvyšším podílem, resp. kandidujícím subjektům, jimž náleží, jsou přidělovány mandáty až do počtu rozdělených mandátů v daném volebním kraji.

Po seznámením s tímto systémem se již nabízí první otázka:

- Je tento systém spravedlivý? Nepreferuje menší nebo větší strany?
- Jak by dopadly volby, kdyby se získané hlasy nedělily řadou přirozených čísel od 1 do  $n$ , ale například jen lichými čísly (Systém Saint Lague) nebo řadou čísel  $1, 4, 7, 10, 13, \dots$  (Dánský systém) či řadou přirozených čísel od 2 do  $n$  (Systém Imperali)?

Při analýze výsledků voleb zjistíme další zajímavou věc. Zatímco Strana zelených získala za 6,29 % voličských hlasů 6 mandátů, KDU-ČSL získala za 7,22 % hlasů 13 mandátů. Čím je dán tento nepoměr? Volebním systémem? Rozložením příznivců těchto stran v jednotlivých krajích? Ještě něčím jiným?

Jak by dopadly volby, kdyby některé ze stran vstupovaly do voleb společně jako měla kdysi v úmyslu 4-koalice? Předpokládejte, že všichni lidé, kteří původně hlasovali pro dané dvě strany, by nyní hlasovali pro tuto koalici. Polepšily by si tyto strany společnou kandidaturou, nebo by si pohoršily? Pro jaké dvě strany by to bylo nejvýhodnější, resp. nejméně výhodné (bez ohledu na jejich politické zaměření)?

V současné době se uvažuje o změně počtu poslanců na lichý počet (199 nebo 201). Jaká politická strana by v těchto volbách ztratila resp. získala navíc mandát? V jakém kraji by to bylo?

Kdysi se říkalo, že „ten, kdo nevolí, podporuje komunisty“. Je toto tvrzení oprávněné?

Pokud vás zaujme něco dalšího souvisejícího s letošními volbami, klidně nám to pošlete, budeme jenom rádi. Všechny své výsledky a tvrzení ale opírejte o konkrétní výpočty a data.

Na internetu určitě najdete spoustu komentářů a analýz těchto voleb. Cílem tématu není kopírovat a posílat tyto výsledky. Proto pokud takovéto zdroje využijete (a například lépe rozvedete a propočítáte), napište nám zdroj těchto dat a jasně oddělte, co je vaše vlastní práce a co jste převzali.

Přejeme hodně štěstí při bádání.

## Téma 6 – Slunce

Zkuste ještě využít podzimních slunečních paprsků k bádání nad následujícím tématem.

Změřte, jaký výkon ze Slunce dopadá na určitou plochu na povrchu Země. (Tedy navrhnete experiment, provedte jej a zpracujte získané výsledky do vhodné formy.) Jak tato hodnota závisí na denní době? Jaký výkon dopadá přímo ze Slunce, a jaký je obsažen v rozptýleném světle z oblohy?

Kromě měření dopadajícího výkonu můžete také zkoumat různé způsoby využití slunečního záření ke konání práce. Změřte (anebo zkuste teoreticky odvodit), jaký výkon ze Slunce jde takto využít (při zabrání určité plochy).

Toto téma by mělo být hlavně experimentální, takže zkuste navrhnout a provést pokud možno více různých experimentů, odhadněte jejich přesnost a porovnejte výsledky. Pokud vám přijde měření celkového výkonu příliš jednoduché :-), zkuste navrhnout a zrealizovat ještě jiné experimenty týkající se slunečního záření. Například určete rozdělení dopadajícího výkonu do různých částí spektra.

### Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF

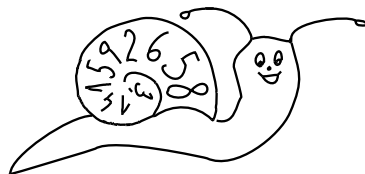
Ke Karlovu 3

121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

