M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník XII číslo 7–8

Milé řešitelky, milí řešitelé,

právě držíte v rukou poslední číslo dvanáctého ročníku vašeho, zaručeně nejoblíbenějšího, matematicko-fyzikálního časopisu `:-)`. Kromě vzorových řešení a komentářů k úlohám a tématům si v něm můžete prohlédnout i závěrečnou výsledkovou listinu. Nám nezbývá, než pogratulovat vítězům a poděkovat vám, že jste náš seminář řešili i v tomto roce, a popřát ty nejhezčí prázdniny. Pokud jste letos nematurovali, nezapomeňte v příštím roce opět pilně řešit, abychom se s vámi mohli setkat třeba na některém soustředění.

vaše redakce

Řešení témat

Téma 1 – Prozkoumejte vodu

Vraťme se ke článku Dr.[MM] Bětky Pechové o chemických vlastnostech vody. *Tomáš Zeman* nám napsal, že její popis modré skalice není přesný. Jde o to, že molekuly vody jsou v této molekule vázány koordinačně (vytvářejí tedy komplex), ale nejsou všechny navázány na jednom iontu. Čtyři jsou vázány na měď a poslední je připoutána k síranovému aniontu. Když modrou skalici zahříváte, připravíte ji o ty čtyři molekuly vody na mědi, ale ta na síranu zůstane nedotčená. „Anhydrid“ síranu měďnatého je tedy ve skutečnosti monohydrát. Odvodňování modré skalice vypadá následovně:

$$\mathrm{CuSO_4 \cdot 5H_2O \rightarrow CuSO_4 \cdot H_2O + 4\ H_2O}\,.$$

Pokud bychom bílou skalici zahřívali dál, rozpadne se

$$\mathrm{CuSO_4 \cdot H_2O \rightarrow CuO + SO_3 + H_2O}\,.$$

Je vidět, že vázaná voda se nakonec odpoutá, ale to způsobí rozpad molekuly síranu. V žíhacím kelímku vám tedy zůstane hnědý, ve vodě nerozpustný prášek CuO a laboratoř bude zamořená oxidem siřičitým, který při styku s vlhkou sliznicí vytváří kyselinu sírovou, což není zrovna příjemné. K tomuto ději dochází při dosažení teploty asi 250 °C.

Bzz

Téma 2 – Konstrukční úlohy v prostoru

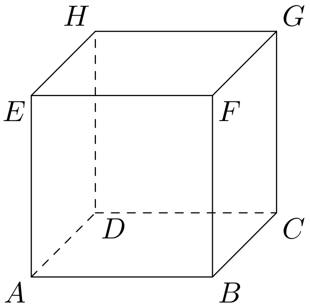
Pozn. red.: Článek Mgr.[MM] Terezy Pechové popisuje konstrukci opsaných a vepsaných koulí pravidelným tělesům. Vzhledem k tomu, že opsané a vepsané koule *čtyřstěnu jsme otiskli už v minulém čísle, otiskneme v následujícím článku jen to, co zatím nebylo publikováno.*

Opsané a vepsané koule pravidelných těles

Mgr.[MM] *Tereza Pechová*

Konstrukce opsané a vepsané koule krychli

Je zadána krychle, jejíž vrcholy si označíme standardně písmeny A, B, C, D, E, F, G, H.



Obr. t2.1

Koule opsaná této krychli bude mít střed tam, kde by se protnuly tělesové úhlopříčky krychle, a poloměr je vzdálenost tohoto bodu od kteréhokoli vrcholu krychle. Střed kružnice opsané najdeme tak, že body A, D, F, G proložíme rovinu, pak proložíme rovinu body B, C, E, H. Jejich průsečíkem získáme přímku, na níž leží střed kružnice. Dále proložíme rovinu body A, B, H, G, která protne vzniklou přímku v jednom bodě, což je hledaný střed kružnice opsané této krychli.

Střed vepsané koule najdeme stejně jako střed opsané (vidíme zde analogii se středy opsané a vepsané kružnice čtverci). Roviny $ADFG$, $EHBC$, $ABHG$ se protínají v bodě S, což je hledaný střed vepsané koule. Její poloměr je vzdálenost tohoto bodu S od průsečíku stěnových úhlopříček. Tento průsečík stačí najít jen u jedné z šesti stěn. Pro stěnu $ABCD$ to bude vypadat takto: Z bodu A a z bodu C sestrojíme koule o stejném poloměru. Jejich průnikem je kružnice, kterou proložíme rovinu. Stejně tak z bodů D a B sestrojíme koule o 0 poloměru. Jejich průnikem je taktéž kružnice, kterou proložíme rovinu. Tyto dvě roviny jsou na sebe kolmé a taky jsou kolmé na stěnu $ABCD$, Jejich průsečík s touto stěnou je hledaný bod, jehož vzdálenost od středu S je poloměr vepsané koule.

Konstrukce opsané a vepsané koule kvádru

Je dán kvádr $ABCDEFGH$.

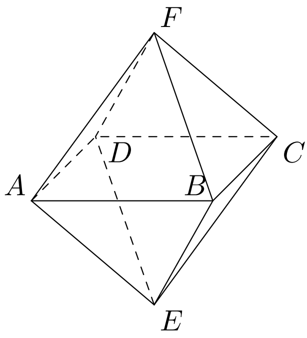
Při konstrukci opsané koule budeme postupovat úplně stejně jako při konstrukci opsané koule krychli. Najdeme střed této koule a to pomocí rovin

$ADFG$, $EHBC$, $ABHG$. Průsečík těchto tří rovin je hledaný střed koule opsané. Poloměr této koule je vzdálenost mezi středem a kterýmkoli vrcholem.

Domnívám se, že tak jako nelze vepsat kružnice do obdélníku, nelze ani vepsat kouli do obecného kvádru.

Konstrukce opsané koule pravidelnému osmistěnu

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Nechť vrcholy A, B, C, D leží v jedné rovině, vrchol E leží pod rovinou $ABCD$ a vrchol F nad rovinou $ABCD$.



Obr. t2.2

Střed koule opsané leží v rovině r určené vrcholy A, B, C, D. Sestrojíme dvě koule z bodů A a C o stejném poloměru. Jejich průnikem je kružnice, kterou proložíme rovinu p. Stejně tak z bodů B a C sestrojíme koule o stejném poloměru, jejich průsečík je kružnice, kterou proložíme rovinu q. Průsečík rovin p, q a r je hledaný střed koule opsané S. Poloměrem této koule je vzdálenost bodu S od kteréhokoliv vrcholu osmistěnu.

Angwin

Řešení úloh

Úloha 5.1 – Konference (5b)

Zadání:

Mezinárodní konference o ochraně světové populace lišek a lištiček se zúčastnilo 10 zemí: Argentina, Belgie, Česko, Dánsko, Egypt, Francie, Grónsko, Haiti, Indie a Japonsko. Každá země vyslala na konferenci právě čtyři účastníky. Každý účastník během konference jednou vystoupil se svým příspěvkem. Kolika způsoby bylo možné příspěvky účastníků uspořádat tak, aby se nestalo, že všichni účastníci z nějaké země budou vystupovat hned za sebou, a konference se tím stane jednotvárnou? Pokuste se úlohu řešit i pro obecný počet zemí a účastníků.

Řešení:

Nejprve vyřešme snazší příklad, na kterém můžeme nahlédnout princip a který nám pomůže při řešení obecném. Pokud bychom měli jen tři země (Albánii, Bulharsko a Česko), z nichž přijede po čtyřech účastnících, a nechceme, aby všichni účastníci z jedné země vystupovali po sobě, budeme postupovat takto:

Nejprve spočteme, kolika způsoby by bylo možné konferenci uspořádat, pokud bychom žádný takový požadavek neměli. Pak můžeme účastníky uspořádat 12! způsoby. Nyní uvažujme všechny takové způsoby (zakázané), kde např. Albánie má 4 účastníky těsně za sebou. Takových bude 4!9! a toto číslo tedy od celkového počtu možností odečteme. Totéž uděláme pro Bulharsko a Česko. Počet způsobů je tedy

$$12! - 3 \cdot 4! \cdot 9!\,.$$

Nyní si ale musíme uvědomit, že jsme „omylem“ odečetli vícekrát možnosti, kde účastníci dvou zemí, tedy např. Albánie i Bulharska, jsou každá země seřazeny po sobě. Takových uspořádání je

$$(4!)^2 \cdot 6! \binom{3}{2}$$

(4! za seřazení účastníků v každé z dvojce zemí Albánie, Bulharsko, 6! za seřazení všech ostatních, kde Albánii i Bulharsko považujeme za „jednoho účastníka“ a (3 nad 2) za prostřídání všech zemí v pozici nynější Albánie a Bulharska, tedy počet dvojic zemí, které takto jednotlivě řešíme), my jsme však odečetli

$$3 \cdot 2 \cdot (4!)^2 \cdot 6!\,,$$

takže je potřeba ještě přičíst člen

$$(4!)^2 \cdot 6! \binom{3}{2}$$

a získáváme

$$12! - 3 \cdot 4! \cdot 9! + (4!)^2 \cdot 6! \binom{3}{2}$$

způsobů. Obdobně, abychom opravili doposud nesprávně přičtený počet možností, kdy jsou všechny země uspořádány s účastníky těsně po sobě, odečteme člen

$$(4!)^3 \cdot 3! \binom{3}{3}$$

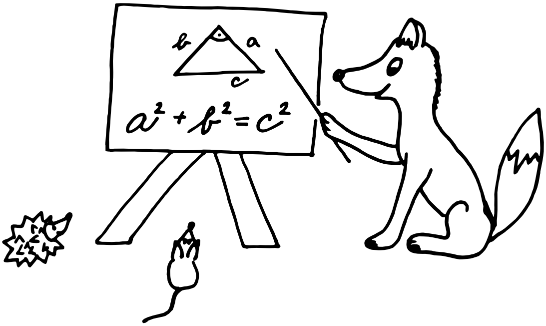
a získáme celkový počet možností jako

$$12! - 3 \cdot 4! \cdot 9! + (4!)^2 \cdot 6! \binom{3}{2} - (4!)^3 \cdot 3! \binom{3}{3}\,.$$

Nyní uvažujme, že je zemí obecně n a každá má účastníků obecně k. Bez jakýchkoliv omezení na pořadí účastníků tedy máme $(kn)!$ způsobů, jak účastníky uspořádat. Potom odečteme všechny takové způsoby, kde jedna země (BÚNO[1] Česko) má všechny své účastníky pohromadě – těch je $k!(kn-(k-1))!$. Proč

[1] bez újmy na obecnosti

právě $kn - (k-1)$ a ne $kn - k$? Protože zemi, která má zrovna všechny účastníky u sebe, nahradíme „jedním prvkem, který se nachází v $k!$ stavech“ (pokud řadíme účastníky mezi sebou za podmínky, že všichni Češi jsou vedle sebe, pohybujeme s českou reprezentací jako s jedním účastníkem, a pro každé nalezené uspořádání máme navíc $k!$ způsobů, jak mezi sebou uspořádat Čechy – tedy $k!(kn-(k-1))!$ způsobů). Tuto úvahu provedeme pro každou zemi, takže toto číslo odečteme celkem n-krát a máme $(kn)! - nk!(kn-(k-1))!$ způsobů.



Nyní jsme ale odečetli vícekrát takové uspořádání, v nichž jsou dvě země pohromadě – takových je v souladu s úvahami výše

$$(k!)^2 \, (kn - 2 \cdot (k-1))!$$

pro každou dvojici zemí. Takže po přičtení máme nyní

$$(kn)! - nk!(kn-(k-1))! + \binom{n}{2} (k!)^2 \, (kn - 2 \cdot (k-1))! \,.$$

Nyní snadno uhodneme, že jsme zase příliš mnohokrát přičetli kombinace, kdy právě tři země mají účastníky seřazené těsně za sebou. Kolikrát? Právě

$$\binom{n}{3} (k!)^3 \, (kn - 3 \cdot (k-1))!$$

krát! Takže nahlédneme, že celkový počet způsobů vznikne jako součet

$$(kn)! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (k!)^i \, (kn - i(k-1))! \,.$$

(Dosazením $n = 10$, $k = 4$ získáme řešení zadání.) Tato řada se významně zjednodušit nedá.

Úspěšně tuto úlohu vyřešil pouze Doc.$^{\mathrm{M}}$ Honza Musílek, ostatní víceméně chybovali v tom, že pro jednotlivé počty zemí (i), které mají účastníky seřazeny těsně za sebou, nezapočetli počet způsobů, jak lze tyto země vybrat (člen n nad i), nebo zapomněli na to, že je třeba účastníky také řadit mezi sebou (člen $(4!)^i$). Bc.$^{\mathrm{M}}$ Kristína Kovalčíková zkoušela řešit úlohu ještě jiným způsobem za použití rekurze, v čemž bohužel také úspěšná nebyla (udělil jsem bod navíc za pěkný nápad). Ve skutečnosti by bylo dovést tento způsob do úspěšného konce poměrně obtížné.

Irigi

Úloha 5.2 – Posloupnost (5b)

Zadání:

Sestavme si dvě posloupnosti přirozených čísel podle následujících pravidel:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1\,, \\ b_n &= 4n + a_n\,, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots \\ a_{n+1} &= \min\left\{\mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}\right\}\,. \end{aligned}$$

Zjistěte poslední číslici čísla $a_{10^{50}}$.

Zn.: důkaz výhodou.

Řešení:

Výsledek je 2. Politujme všechny, kdo si vsadili špatně, a oslavme výhru. Jak si však zajistit více než desetiprocentní šanci?

První, co asi každý udělá, je, že si napíše prvních pár členů a pokusí se z toho něco „vykoukat". Prvních 20 členů posloupnosti a_i vypadá na to, že jsou jen vynechány násobky pěti. Bohužel, $a_{21} = 25$. Generovat ručně i delší sekvence sice není až tak namáhavé, ale naše další myšlenky by měly směřovat spíš počítači. Matematičtí puristé by se sice mohli urazit, ale máme 21. století, a jen málo matematických objevů dnes vzniká bez počítačů.

Program, který spočte a_N a b_N pro „rozumná" N (řekněme do 10^7, aby se to pohodlně vešlo do paměti na běžném PC), by mohl vypadat například takto (rozmyslete si, proč funguje):

```
! Kód je v jazyce Fortran.
!Lze přeložit např. překladačem g95 (www.g95.org)
program posloupnost
integer,parameter:: N = 10000000
integer:: b(N),bp,a,i

a = 1; bp = 1; b(bp) = 1+4*1
do i=2,N
  a = a + 1
  if (a == b(bp)) then
    a = a + 1
    bp = bp + 1
  end if
  b(i) = a + 4*i
end do
print *,'a(N) =',a,'b(N) =',b(N)
end program
```

I tuto část je ovšem potřeba dobře promyslet. Výše uvedený program má lineární složitost a na běžném PC spočte výsledek za méně než sekundu. Pokud byste vyrobili něco s kvadratickou složitostí, experimentovalo by se vám podstatně hůře. Je ovšem jasné, že na přímé řešení našeho problému to použít nepůjde – takovou paměť nemá ani počítač Billa Gatese, nehledě na to, že by to pár miliard let trvalo.

Po troše hraní s programem zjistíme, že obě posloupnosti si zachovávají zhruba lineární růst. Takže si vyrobíme hypotézu

$$a_N \approx \alpha N, \quad b_N \approx \beta N\,.$$

Experimentálně zjišťujeme, že $\alpha \approx 1{,}236068$ a $\beta \approx 5{,}236068$. Kdybychom chtěli třetí či čtvrtou číslici $a_{10^{50}}$, tak nám to bohatě stačí – nepotřebujeme znát přesně α, β, ani vědět jak se zbavit $\approx$. Ovšem pro poslední číslici potřebujeme více. Takže zkusíme sestavit pro α, β nějaké rovnice a odtud je spočíst přesně. První rovnice je jasná:

$$\beta = 4 + \alpha\,.$$

Abychom získali druhou, uděláme následující úvahu: Vezmeme-li hodně velké N, pak počet členů posloupnosti a_i nepřevyšujících N bude přibližně roven N/α (až na nějaké plus mínus jedničky). Podobně počet členů posloupnosti b_i bude N/β. Jelikož však obě posloupnosti *pokrývají* přirozená čísla, musí být

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} \approx N$$

a odtud vydedukujeme druhou rovnici

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\,.$$

Máme dvě rovnice a řešením soustavy dostaneme $\alpha = \sqrt{5} - 1$, $\beta = \sqrt{5} + 3$. Snadno už experimentálně zpřesníme znaménko $\approx$:

$$a_N = [\alpha N]\,, \quad b_N = [\beta N]\,,$$

kde $[x]$ značí *dolní celou část* x. Odtud plyne, že poslední číslice $a_{10^{50}}$ je právě padesátá číslice za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji α, což, jak zjistíme nějakou šikovnou „kalkulačkou“, je skutečně dvojka.

Samozřejmě, pořád ještě nemáme důkaz pro naše tvrzení, ale teď už alespoň máme co dokazovat. Jelikož nebyl podmínkou úlohy, přenecháme jej čtenáři jako jednoduché cvičení.

Highegg

Úloha 5.3 – Lucie noci upije . . . (5b)

Zadání:

Jistě všichni znáte rčení: „Lucie noci upije, ale dne nepřidá“. Tato pranostika popisuje jeden astronomický jev, který každoročně nastává právě okolo 13. prosince. Dokážete zjistit jaký a vysvětlit jeho příčiny? Napovíme vám, že jde o délku dne a časy, kdy vychází a zapadá slunce.

Řešení:

Lucie slaví svátek 13. prosince. V tu dobu se délka dne zkracuje a noci prodlužuje, a to až do zimního slunovratu, který připadá většinou na 21. prosince.

Častý způsob, jak je toto rčení vysvětlováno, je přechod z Juliánského na Gregoriánský kalendář, který se udál na počátku novověku. Při tom se posunulo datum zimního slunovratu o 13 dní. Svátek Lucie by se před změnou kalendáře slavil až po slunovratu, kdy už se noc zkracuje a den prodlužuje. To však nevystihuje celé přísloví, konkrétně „...ale dne nepřidá“ určitě nesouhlasí.

den	východ slunce h min	jih h min s	západ slunce h min
1 S			
2 Č	7 38	11 49 33	16 00
3 P	7 40	11 49 56	16 00
4 S	7 41	11 50 20	16 00
5 N	7 42	11 50 45	15 59
6 P	7 43	11 51 11	15 59
7 Ú	7 44	11 51 36	15 59
8 S	7 46	11 52 03	15 58
9 Č	7 47	11 52 30	15 58
10 P	7 48	11 52 57	15 58
11 S	7 49	11 53 25	15 58
12 N	7 50	11 53 53	15 58
13 P	7 50	11 54 21	15 58
14 Ú	7 51	11 54 50	15 58
15 S	7 52	11 55 19	15 58
16 Č	7 53	11 55 48	15 59
17 P	7 54	11 56 18	15 59
18 S	7 54	11 56 47	15 59
19 N	7 55	11 57 17	16 00
20 P	7 56	11 57 46	16 00
21 Ú	7 56	11 58 16	16 00

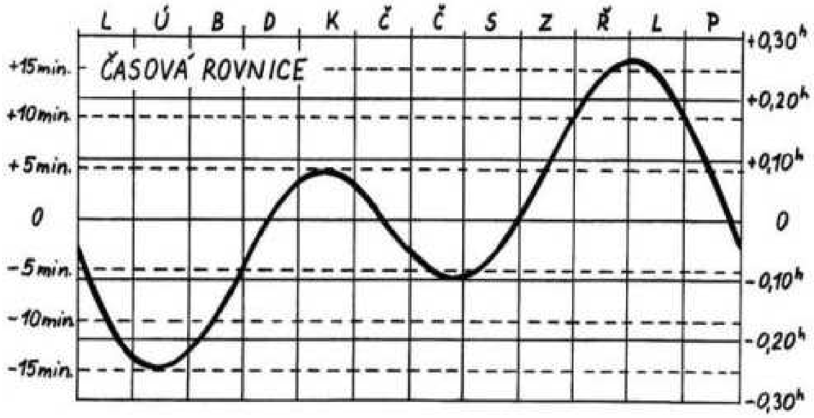
Slunce v prosinci

Vysvětlení tedy musíme hledat jinde. V tabulce jsou vypsané časy, kdy slunce vychází, zapadá, a také čas průchodu slunce místním poledníkem (tedy poledne). Nejprve si všimněme časů západu slunce. Vidíme, že od začátku prosince slunce zapadá čím dál tím dříve. To se děje až do 13. prosince. Po tomto datu však západ slunce nastává stále později (tím můžeme vysvětlit část „Lucie noci upije“). Při pohledu na východy slunce vidíme, že po celý prosinec slunce vychází stále později, svátek Lucie na tom nic nezmění (tedy ...ale dne nepřidá).

Pro vysvětlení jsou nejzajímavější časy průchodu slunce jihem (třetí sloupec). Ty právě způsobují námi zkoumaný jev. Podotýkám, že to, že se čas poledne mění, není chyba a má to své odůvodnění.

Je známo, že Země kolem Slunce neobíhá po dráze kruhové, ale po mírně eliptické. To plyne z astronomických měření, tvrdí to také 1. Keplerův zákon. Z 2. Keplerova zákona pak plyne, že Země (díky své eliptické dráze) kolem Slunce neobíhá pořád stejně rychle. Úhlová rychlost, která nás zajímá, závisí na vzdálenosti přibližně jako $1/R$, kde R je vzdálenost Země-Slunce.

Čas, který běžně používáme na hodinkách, (střední sluneční čas) tuto nepřesnost nezohledňuje. Předpokládá kruhovou dráhu Země a konstantní úhlovou rychlost oběhu. Času, který toto zohledňuje, říkáme pravý sluneční čas. Odvíjí se od pohybu slunce na obloze, liší se pro každou zeměpisnou délku. Podle něho je slunce na jihu vždy ve dvanáct hodin (takto je definován), ale ne už středního slunečního času.



Obr. r3.1

V zimě (začátkem ledna) je Země nejblíže Slunci. Úhlová rychlost oběhu je největší, a proto je i vzájemný posun časů největší. Vzájemný posun zobrazuje tzv. časová rovnice. Zajímavá je i tzv. analemma. Jedná se o smyčku ve tvaru osmičky, která vzniká při zaznamenávání polohy Slunce v průběhu roku vždy ve stejném časovém okamžiku. Můžete jej jednoduše najít na internetu, nepovažovali jsme proto za nutné jej přidávat i do čísla.

Když to shrneme, tak rčení „Lucie noci upije, ale dne nepřidá.“ platí hlavně díky tomu, že střední sluneční čas se v čase Vánoc výrazně posunuje vůči pravému slunečnímu času. Tento posun je dán nerovnoměrnou úhlovou rychlostí oběhu Země okolo Slunce, tedy tvarem dráhy, po které Země kolem Slunce obíhá.

K úvaze vám ponecháváme ještě dva problémy. Fungovalo by podobné rčení například v Austrálii? Existuje podobný jev i v létě okolo letního slunovratu?

Jindra

Úloha 6.1 – Kapsa (5b)

Zadání:

Jako součást oděvu vyrábí textilní továrna kapsy ve tvaru jako na obrázku r1.1. Kapsy budou automaticky vystřihovány strojem z dlouhého pásu látky. Navrhněte šířku pásu v rozmezí 40–60 cm *a způsob vystřihování kapes tak, aby byl odpad látky co nejmenší (pás je velmi dlouhý, takže „režii“ na začátku a konci pásu lze zanedbat) a spočtěte, jakou část skutečně tvoří.*

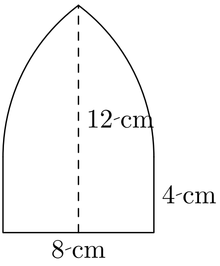
Řešení:

Popíšeme řešení navržené Hankou Jirků. Ta navrhla skládat kapsy do pásů jako na obrázku r1.2. Abychom zjistili efektivitu tohoto uspořádání, stačí počítat s řezem přes půl šířky kapsy podle obrázku r1.3. Chceme-li počítat analyticky, je vhodné si obrázek vhodně umístit do soustavy souřadnic, např. jako náš. Pro bod dotyku pak skutečně vychází souřadnice $(2, 2)$. Lze k tomu dojít tak, že si vyjádříme oblouk horní kapsy jako funkci

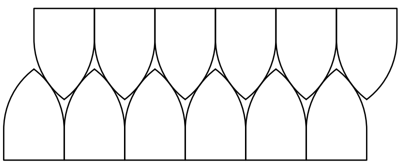
$$y = f(x) = \sqrt{x(20 - x)}$$

a hledáme maximum z výrazu $f(x) + f(4 - x)$ na intervalu $[0, 4]$. Ručně nebo pomocí nějaké chytré „kalkulačky“ pak spočítáme, že množství odpadu je přibližně 4 %. Jelikož šířka takového pásu je přesně 20 cm, lze je vedle sebe naskládat dva nebo tři podle libosti, a procento odpadu se nezmění. Není vysoké a výrobce by měl být spokojen.

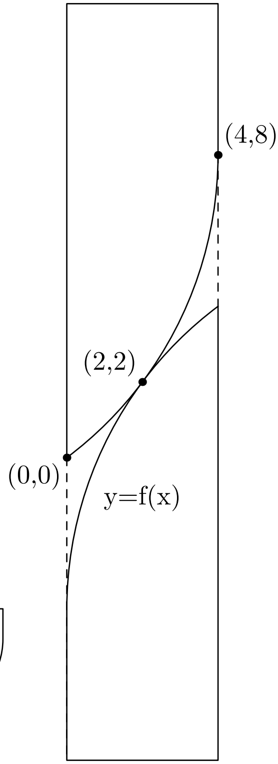
Highegg



Obr. r1.1



Obr. r1.2



Obr. r1.3

Úloha 6.2 – Základní otázka o podstatě všeho (5b)

Zadání:

Ve Stopařově průvodci galaxií se jedna rasa hyperinteligentních pandimenzionálních bytostí pokusila sestavit superpočítač, který konečně odpoví na tu základní otázku o podstatě vesmíru, života a vůbec. Když počítač jménem Hlubina myšlení sestavili, s hrůzou zjistili, že výpočet bude trvat 7,5 *milionu let.*

Představte si, že jste se ocitli v podobné situaci. Máte důležitou otázku, pro kterou současný nejvýkonnější počítač na Zemi najde odpověď za 7,5 *milionu let. Protože však technický pokrok na Zemi postupuje mílovými kroky kupředu, může být výhodné počkat si, než bude k dispozici* *výkonnější počítač, a pak teprve spustit výpočet. Předpokládejte, že rychlost počítačů roste exponenciálně, a zdvojnásobí se každých 18 měsíců. Spočítejte, kdy bude nejvhodnější výpočet spustit, aby se obyvatelé Země dozvěděli výsledek co nejdříve. Než začnete počítat, zkuste si nejprve tipnout, zda se mohou odpověď dozvědět dříve než za 42 let?*

Řešení:

Označíme si t_1 dobu v letech, po kterou budeme čekat, než zahájíme výpočet. Dobu výpočtu v letech si označíme t_2. Podle informací v zadání odvodíme vztah mezi těmito proměnnými.

Celkový čas t vypočteme jako součet obou dílčích časů.

Nyní musíme zjistit, kdy tato funkce nabývá minima. Provedeme první derivaci funkce. V místech lokálních extrémů je první derivace nulová, pokud je definována.

První derivace je nulová a pro t_1 rovno 32,587. Pomocí druhé derivace můžeme ověřit, že se jedná skutečně o minimum. Po dosazení zjistíme, že výsledek výpočtu se pozemšťané dozvědí za 4,751 let. Celkový čas je kratší než 42 let.

Jirka

Úloha 6.3 – Rozpad (3b)

Zadání:

Jaderňák Láďa 12. září 2000 dostal k narozeninám nádherný kus smolince, který obsahoval 5 g $^{236}_{92}$U *a zakopal si ho na zahrádce. Nyní si vzpomněl, že by se mu hodilo nějaké radium na ošoupané, už téměř nesvítící ručičky hodinek. Kolik ho tam najde, když bude kopat letos 29. května?*

Řešení:

Jistě jste si v tabulkách našli příslušnou rozpadovou řadu. (U toho jste pravděpodobně všichni skončili.)

$$^{236}_{92}\mathrm{U} \to {}^{232}_{90}\mathrm{Th} \to {}^{228}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{228}_{89}\mathrm{Ac}$$

Radium se tedy nerozpadá z uranu přímo, ale přes thorium, a navíc se samo rozpadá dál, to nevypadá moc jednoduše … Pokud jste se ale podívali i na jednotlivé poločasy rozpadu:

$^{236}_{92}\mathrm{U} \to {}^{232}_{90}\mathrm{Th}$	T_{U}	$2{,}4 \cdot 10^7$ let
$^{232}_{90}\mathrm{Th} \to {}^{228}_{88}\mathrm{Ra}$	T_{Th}	$1{,}4 \cdot 10^{10}$ let
$^{228}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{228}_{89}\mathrm{Ac}$	T_{Ra}	6,7 let

mohlo vás napadnout, že jsou o mnoho řádů větší, než naše doba zakopání, a tak by bylo možné výsledek nějak odhadnout.

Spočítáme si, kolik že to máme výchozích atomů uranu:

$$N_0 = \frac{m}{uM} = 1{,}28 \cdot 10^{22},$$

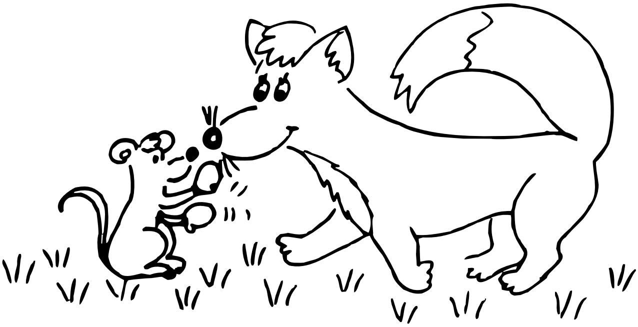
kde $m = 5\,\mathrm{g}$ je hmotnost, $u = 1{,}66{\cdot}10^{-24}$ g je atomová hmotnostní jednotka a M je nukleonové číslo nuklidu. Čas mezi zakopáním z vykopáním je $t_1 = 5{,}67$ roku. Za tu dobu se rozpadne následující množství uranu:

$$N_\mathrm{U} = N_0 \cdot \left(1 - 2^{-t_1/T_\mathrm{U}}\right) = 2{,}1 \cdot 10^{15}\,,$$

což je sice hodně, ale oproti výchozímu množství je to naprosto zanedbatelné. Takže můžeme prohlásit, že se za tuto dobu výchozí množství uranu prakticky nezmění a že v daném časovém intervalu závisí počet rozpadlých atomů na čase přibližně lineárně[2] (za každý rok se ho rozpadne stejně). Uran se rozpadá na thorium, takže množství vzniklého thoria je

$$N_\mathrm{Th} = k \cdot t = N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{U}}\right) \cdot t\,.$$

Thorium se rozpadá ještě pomaleji, takže použijeme stejné zjednodušení. Množství thoria, které do času t vzniklo, můžeme také považovat za množství thoria v čase t, protože se ho rozpadne zanedbatelné množství.



V nějaký čas t se za chvilku $\mathrm{d}t$ na radium rozpadne

$$\mathrm{d}N_\mathrm{Ra}(t) = N_\mathrm{Th}(t)\left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{Th}}\right) \cdot 2^{-(t_1-t)/T_\mathrm{Ra}}\mathrm{d}t$$

thoria a za celou dobu, kdy byl poklad zakopán, tak vznikne

$$\begin{aligned} N_\mathrm{Ra}(t_1) &= \int_0^{t_1} N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{U}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{Th}}\right) \cdot t \cdot 2^{(t-t_1)/T_\mathrm{Ra}}\mathrm{d}t \\ &= N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{U}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_\mathrm{Th}}\right) \cdot 2^{-t_1/T_\mathrm{Ra}} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^{t_1} t \cdot 2^{t/T_\mathrm{Ra}}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

[2] Spousta vzorečků, které jste se ve fyzice učili, jsou ve skutečnosti exponenciální závislosti (teplotní roztažnost, závislost odporu na teplotě, …). My je ale většinou potřebujeme používat jen na malých rozsazích veličin.

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{Ra}}(t_1) &= N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{U}}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{Th}}}\right) \cdot 2^{-t_1/T_{\mathrm{Ra}}} \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{Ra}}}{\ln 2}\right)^2 \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{\frac{t_1 \cdot \ln 2}{T_{\mathrm{Ra}}}} x \cdot e^x \mathrm{d}x \\
&= N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{U}}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{Th}}}\right) \cdot 2^{-t_1/T_{\mathrm{Ra}}} \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{Ra}}}{\ln 2}\right)^2 \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \left[x \cdot e^x\right]_0^{\frac{t_1 \cdot \ln 2}{T_{\mathrm{Ra}}}} - \int_0^{\frac{t_1 \cdot \ln 2}{T_{\mathrm{Ra}}}} e^x \mathrm{d}x \right\} \\
&= N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{U}}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{Th}}}\right) \cdot 2^{-t_1/T_{\mathrm{Ra}}} \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{Ra}}}{\ln 2}\right)^2 \cdot \\
&\quad \cdot \left[e^x \cdot (x-1)\right]_0^{\frac{t_1 \cdot \ln 2}{T_{\mathrm{Ra}}}} \\
&= N_0 \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{U}}}\right) \cdot \left(1 - 2^{-1/T_{\mathrm{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{Ra}}}{\ln 2}\right)^2 \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{t_1 \cdot \ln 2}{T_{\mathrm{Ra}}} + 2^{-t_1/T_{\mathrm{Ra}}} - 1\right) \\
&= 2{,}44 \cdot 10^5
\end{aligned}
$$

atomů radia, tedy asi $9{,}30 \cdot 10^{-17}$ g. To není mnoho, hodinky si Láďa asi nespraví … Pokud by nám jen o odhad, mohli bychom spočítat množství celkově vzniklého radia a, protože doba zakopání přibližně poločas rozpadu, vydělit výsledek dvěma.

Numerické řešení

Systém, kdy se jeden nuklid rozpadá na druhý, druhý na třetí atd., lze velmi snadno nasimulovat na počítači. Zvolíte si nějaký rozumně dlouhý časový krok (řádově menší než všechny poločasy v rozpadové řadě), a v jednotlivých cyklech počítáte postupně množství jednotlivých nuklidů. Nejprve přibude rozpadem předchozího, a pak se sám rozpadne. Následuje program v Pascalu:

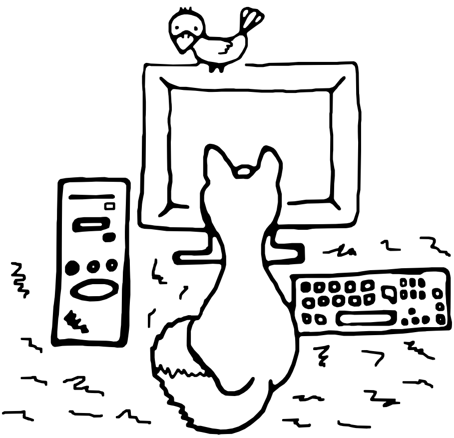
```
program rozpad;

type  pole=array[0..3] of real;
const Cas=5.67; {doba zakopání}
      cykl=150; {počet iterací}
      T:pole=(1,2.4E+7,1.4E+10,6.7); {poločasy rozpadu}
var   i,j:integer;
      N:array[0..3] of real; {množství atomů}
      dt:real; {interval iterace vydělený ln(2)}

begin
dt:=Cas/cykl*ln(2);
N[0]:=0; N[1]:=1.28E+22; N[2]:=0; N[3]:=0;
```

```
for i:=1 to cykl do {několikrát}
        for j:=1 to 3 do {částic každého izotopu}
              N[j]:=(N[j]+N[j-1]*(1-exp(-dt/T[j-1]))) {přibyde}
              *exp(-dt/T[j]); {a ubyde}
for i:=1 to 3 do writeln('N\_',i,'=',N[i]);
end.
```

To přeci nevypadá jako nějaké drsné programování ;-). Program mi spočítal, že vznikne $2{,}46 \cdot 10^5$ atomů radia, což se dobře shoduje s vypočteným výsledkem.



Ale šlo to i drsněji

Uran se rozpadá podle vztahu

$$\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{U}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_\mathrm{U} N_\mathrm{U} \qquad \Rightarrow \qquad N_\mathrm{U}(t) = N_0 e^{-\lambda_\mathrm{U} t}\,.$$

Tím přibývá thorium, které se pak samo rozpadá. Jeho celková bilance je

$$\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{Th}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_\mathrm{Th} N_\mathrm{Th} + \lambda_\mathrm{U} N_\mathrm{U}\,,$$

kam za N_U musíme dosadit z předchozí rovnice. Diferenciální rovnici, která tam vznikne, musíme vyřešit (jde to metodou integračního faktoru). Podobně bilance radia

$$\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{Ra}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_\mathrm{Ra} N_\mathrm{Ra} + \lambda_\mathrm{Th} N_\mathrm{Th}\,.$$

Zuzka

Výsledková listina za 5. číslo

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Bílka	43							40
2.	Doc.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek	169	5	0				5	36
3.	Dr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	62	1		3	9		13	35
4.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Rott	30							30
5.	Dr.$^{\text{MM}}$ Radim Pechal	59							29
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Pechová	36				9	7	16	25
7–8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Beran	31							24
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	24							24
9–10.	Dr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Böhmová	57							23
	Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Javůrek	50							23
11.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radim Vansa	48							22
12–13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Peter Perešíni	121							20
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jaroslav Hančl	47							20
14.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Hana Jirků	19							19
15–16.	Doc.$^{\text{MM}}$ Tereza Klimošová	143							17
	Dr.$^{\text{MM}}$ Tereza Beránková	56							17
17–18.	Dr.$^{\text{MM}}$ Matěj Korvas	59	1					1	15
	Bc.$^{\text{MM}}$ Kristína Kovalčíková	15	2					2	15
19.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Basovník	35							14
20–21.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Opršal	46							13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Beáta Hergelová	13							13
22–23.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Scholz	45							12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Marie Dostálová	12							12
24.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jozef Cmar	94							10
25–26.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martin Křivánek	13							9
	Jiří Martišek	9							9
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Pecha	39							8
28–29.	Dr.$^{\text{MM}}$ Eva Černohorská	89							7
	Karolína Janíková	7							7
30.	Martin Alan	6							6
31.	Michal Bezvoda	4							4
32–33.	Lucie Mohelníková	3							3
	Jan Vaňhara	3							3
34.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Dárius Gál	20							2
35.	Lenka Švidrnochová	1							1

Výsledková listina za 6. číslo

			Úlohy			
Poř.	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	174		5	5	41
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Bílka	43				40
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	65		3	3	38
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott	30				30
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	59				29
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	39		3	3	28
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Hana Jirků	26	3	4	7	26
8–9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran	31				24
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš	24				24
10–11.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Böhmová	57				23
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Javůrek	50				23
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa	48				22
13–14.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Perešíni	121				20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jaroslav Hančl	47				20
15–16.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	143				17
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Beránková	56				17
17–18.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	59				15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Kristína Kovalčíková	15				15
19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	35				14
20–21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Opršal	46				13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Beáta Hergelová	13				13
22–23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Scholz	45				12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Marie Dostálová	12				12
24.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	94				10
25–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek	13				9
	Jiří Martišek	9				9
27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	39				8
28–29.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská	89				7
	Karolína Janíková	7				7
30.	Martin Alan	6				6
31.	Michal Bezvoda	4				4
32–33.	Lucie Mohelníková	3				3
	Jan Vaňhara	3				3
34.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Dárius Gál	20				2
35.	Lenka Švidrnochová	1				1