



Termín odeslání: 29. 5. 2006

Milé řešitelky, milí řešitelé,

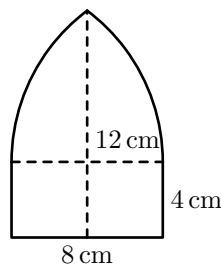
netrvalo dlouho a už se opět setkáváme na stránkách vašeho oblíbeného korespondenčního časopisu. Toto číslo je letošní předposlední, a to znamená, že máte jedinečnou a hlavně poslední šanci to někam dotáhnout – aspoň v rámci hodnocení tohoto ročníku. Nezapomínejte, že váš konečný výsledek vám (v případě, že letos ještě nematurujete) může zajistit účast na podzimním soustředění, kde navíc na ty úplně nejlepší z vás čekají krásné ceny. :- ) Takže neváhejte a řešte ostošest, bude to stát za to!

*Redakce*

## Zadání úloh

### Úloha 6.1 – Kapsa (5b)

Jako součást oděvu vyrábí textilní továrna kapsy ve tvaru jako na obrázku 1. Kapsy budou automaticky vystříhány strojem z dlouhého pásu látky. Navrhněte šířku pásu v rozmezí 40–60 cm a způsob vystříhování kapes tak, aby byl odpad látky co nejmenší (pás je velmi dlouhý, takže „režii“ na začátku a konci pásu lze zanedbat) a spočítejte, jakou část skutečně tvoří.



Obr. 1

### Úloha 6.2 – Základní otázka o podstatě všeho (5b)

Ve Stopařově průvodci galaxií se jedna rasa hyperinteligentních pandimenzionálních bytostí pokusila sestavit superpočítač, který konečně odpoví na tu základní otázku o podstatě vesmíru, života a vůbec. Když počítač jménem Hlubina myšlení sestavili, s hrůzou zjistili, že výpočet bude trvat 7,5 milionu let.

Představte si, že jste se ocitli v podobné situaci. Máte důležitou otázku, pro kterou současný nejvýkonnější počítač na Zemi najde odpověď za 7,5 milionu let. Protože však technický pokrok na Zemi postupuje mílovými kroky kupředu, může být výhodné počkat si, než bude k dispozici výkonnější počítač, a pak teprve spustit výpočet. Předpokládejte, že rychlost počítačů roste exponenciálně, a zdvojnásobí se každých 18 měsíců. Spočítejte, kdy bude nejvhodnější výpočet spustit, aby se obyvatelé Země dozvěděli výsledek co nejdříve. Než začnete počítat, zkuste si nejprve tipnout, zda se mohou odpověď dozvědět dříve než za 42 let?

## Úloha 6.3 – Rozpad (3b)

Jaderňák Láďa 12. září 2000 dostal k narozeninám nádherný kus smolince, který obsahoval 5 g  $^{236}_{92}\text{U}$  a zakopal si ho na zahrádce. Nyní si vzpomněl, že by se mu hodilo nějaké radium na ošoupané, už téměř nesvítící ručičky hodinek. Kolik ho tam najde, když bude kopat letos 29. května?

# Řešení témat

## Téma 4 – Generátory náhodných čísel

... aneb postavte si generátor náhodných čísel

*Dr.<sup>MM</sup> Radim Pechal*

Jako generátor náhodných čísel jsem si určitel zařízení, pomocí kterého jsem schopn vytvořit např. klíč pro šifrování ... Proto jsem při navrhování generátoru náhodných čísel určitel podmínky, které by měl daný generátor splňovat:

1. Výstup snadno zpracovatelný počítačem.
2. Minimální požadavky na obsluhu.
3. Využití dostupných součástek a přístrojů.

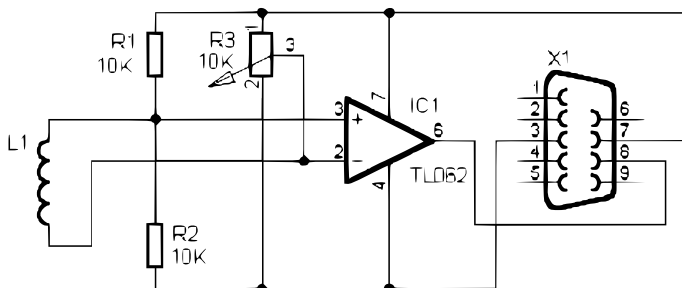
Dále jsem se pokusil vymyslet vhodný zdroj náhody:

1. Elektronický šum, který poletuje ve vzduchu kolem nás (projevuje se např. jako brum u nf zesilovačů) zpracovaný pomocí komparátoru.
2. Šumová dioda.
3. Lidský faktor (měření rychlosti internetu, počet lidí, kteří nastoupili do daného vlaku ...).

### Elektronický šum zpracovaný pomocí komparátoru aneb tudy cesta nevede

Nejdřív se pokusím osvětlit význam pojmu komparátor. Komparátor je elektronická součástka, která má dva vstupy, které jsou označeny + a -. Pokud je na vstupu + větší potenciál než na vstupu -, objeví se na výstupu komparátoru napětí. Pokud je na vstupu + menší napětí než na vstupu -, je na výstupu komparátoru nulové napětí. Jako komparátor jsem použil operační zesilovač *TL062*. Jeho výhoda je malý odběr a napájecí napětí  $\pm 18\text{ V}$ . Datasheet (technický popis zapojení a použití) této součástky je k mání na adrese: <http://www.ortodoxism.ro/datasheets/texasinstruments/tl061.pdf>.

Obvod jsem zapojil podle schématu na obrázku t4.1. Základem je již zmínovaný obvod *TL062*. Ten má na vstupy přivedené odporové děliče, které se mění v závislosti na elektrickém poli okolí. Nejdřív jsem obvod spájel bez cívky  $L_1$  a spustil program, který vypisuje stav vývodu *CTS* u paralelního portu.



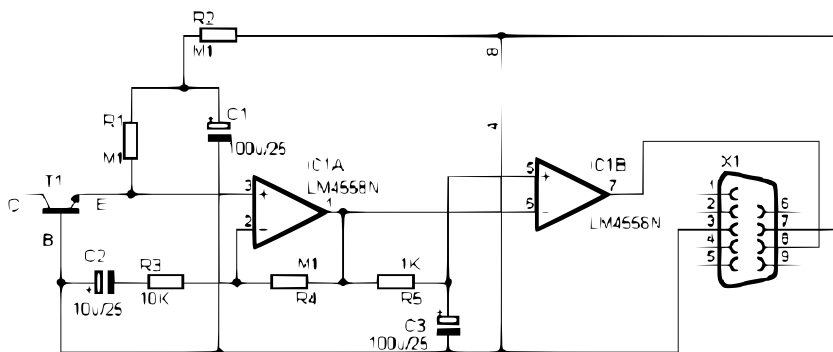
Obr. t4.1 – Zapojení s komparátorem

Potom jsem se snažil natočit trimr  $R_3$  tak, aby bylo napětí na obou vstupech  $TL062$  stejné. Připojil jsem cívku a zjistil, že obvod se nechová tak, jak má. Předpokládám, že je to dáno tím, že se na cívce neindukovalo dostatečně velké napětí. Proto jsem obvod trochu pozměnil, a místo cívky jsem na vstup obvodu připojil dostatečně dlouhý drát, dá se říct, že zastával funkci antény. Program *Terminál* pro sledování sériového portu naleznete na adrese (bohužel pro Windows): [http://gemtree.cz/prog\\_t.htm](http://gemtree.cz/prog_t.htm) Toto řešení mělo takřka vynikající výsledky, ovšem až na fakt, že většina impulzů měla frekvenci 50 Hz a tak jsem dostával signál v podobě 100100100... Pokud ovšem člověk vzal drát do ruky a začal si s ním hrát, začaly se na výstupu objevovat náhodnější signály. A tak jsem tuto metodu zavrhl.

## Šumová dioda aneb lepší, než byste čekali

Během druhé poloviny dvacátého století, se vyráběla šumová dioda. Jedná se o vakuovou diodu, která v podstatě náhodně vystřeluje elektrony. Vystřelování závisí na okolních podmínkách a na materiálu, ze kterého je katoda diody vyrobena. Ovšem v současné době, nelze tuto diodu sehnat, proto jsem hledal jině. V časopise *Praktická elektronika 1/2001* lze najít zapojení s názvem Generátor růžového šumu. Zde je místo šumové diody použit přechod BE u tranzistoru  $BC548$ . Autor zde vysvětluje, že šumová dioda lze nahradit buď přechodem BE, na kterém je závěrné napětí asi 7,5 V, nebo Zenerovu diodou. Zapojení jsem upravil tak, aby jako koncový stupeň byl zapojen komparátor, a já takto dostával na výstupu pouze hodnotu 1 nebo 0. Obvod je na obrázku t4.2.

Operační zesilovač označený  $IC_{1A}$  je zde použit jako zesilovač signálu. Operační zesilovač  $IC_{1B}$  je zde použitý jako komparátor. Pracovní bod komparátoru jsem nenastavoval pevně pomocí odporového děliče, ale pomocí RC členu složeného z  $R_5$  a  $C_3$ . To kvůli tomu, že port počítače, ze kterého беру elektrickou energii, je poměrně málo proudově zatížitelný, což má za následek, že kolísá velikost elektrického napětí. Typ tranzistoru není pevně dán. Ale použitý tranzistor by měl mít velké zesílení  $h_{21}$ . Obvod pracoval nakonec bezvadně. V případě, že by se častěji objevovaly nuly než jedničky, popřípadě naopak, lze rozhodovací úroveň poopravit RC článkem složeným z  $R_5$  a  $C_3$ .

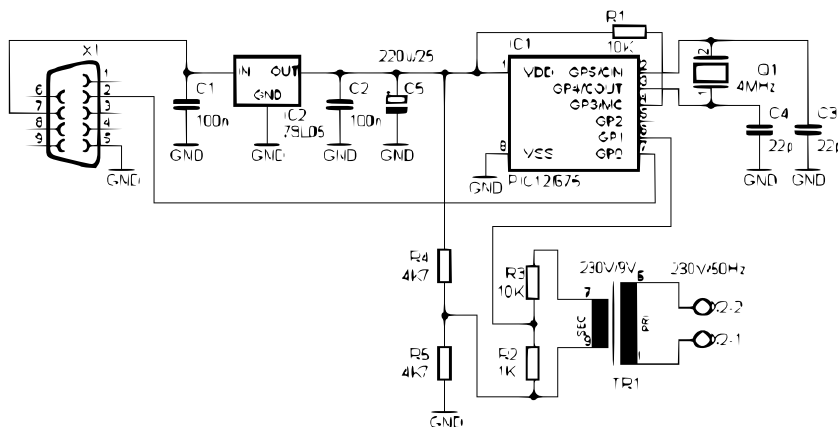


Obr. t4.2 – Zapojení s tranzistorem BC548

## Měření malých napětí aneb tady přestává veškerá legrace

Předem říkám, že tato konstrukce je poměrně náročná. Hlavní problém je AD převodník. Je to součástka, která převádí analogový signál do digitální podoby. Dá se říct, že je to jakýsi voltmetr. Přestože jdou nalézt obvody, které se skládají pouze z AD převodníku, volil jsem pro někoho možná obtížnější metodu.

Použil jsem mikroprocesor PIC 12F675. Jedná se o mikroprocesor, který má v sobě zabudovaný AD převodník. Jeho výhodou je fakt, že není až tak problematické posílat naměřená data sériově. Dále vyvstává otázka, co budu měřit. Nakonec jsem volil měření velikosti síťového napětí. Vycházím z názoru, že velikost napětí v síti kolísá asi o 10 %, proto si myslím, že pokud zmenším napětí pomocí transformátoru a zvednu jej (pokud bych poslal na vstup AD převodníku napětí bez zvednutí, objevilo by se zde záporné napětí, které by mohlo mikroprocesor zničit), najdu na nejnižším bitu AD převodníku náhodnou hodnotu. Zapojení je na obrázku t4.3.



Obr. t4.3 – Zapojení měřící síťové napětí

Zapojení fungovalo bez problémů. A dá se použít i k měření jiných veličin než je síťové napětí.

### Pár slov závěrem

Popsané metody získávání náhodných dat jsou poněkud technicky náročnější. V popisu jsem se nesnažil popsat všechny detaily, protože by potom toto dílo mohlo narůst do oblundných rozměrů. Většinou jsem se snažil o to, aby výstup dosahoval podoby 1 nebo 0, aby se s ním dalo snadněji pracovat, popřípadě použít v kryptografii. Jedinou výjimkou je metoda s PICem, zde jsem hodnoty převáděl na písmena podle ASCII (znak „0“ reprezentuje nulu, ... „?“ reprezentuje patnáctku), zde lze brát nejnižší bit.

### Prameny

- Využití rozhraní PC, Kainka B., HEL, 1996
- Katalog elektronické součástky, stovebnice a moduly, Elektronika Zdeněk Krčmář, 2005
- <http://www.ortodoxism.ro/datasheets/texasinstruments/tl061.pdf>

## Řešení úloh

### Úloha 4.1 – Trojúhelník

(5b)

#### Zadání:

*Nechť  $a, b, c$  jsou délky stran trojúhelníka,  $\alpha, \beta, \gamma$  velikosti jeho vnitřních úhlů. Pro jaké trojúhelníky platí následující rovnost?*

$$a(1 - 2 \cos \alpha) + b(1 - 2 \cos \beta) + c(1 - \cos \gamma) = 0.$$

#### Řešení:

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$(a + b)^2 (a - b)^2 \geq c^2 (a - b)^2,$$

což po úpravě dá

$$a^4 + b^4 + 2abc^2 \geq c^2 a^2 + b^2 c^2 + 2a^2 b^2.$$

Stejně získáme další dvě nerovnosti cyklickou záměnou  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$ . Sečtením všech tří výsledných nerovností dostaneme

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 2abc(a + b + c) \geq 4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)$$

a po úpravě

$$a^2 (bc - (b^2 + c^2 - a^2)) + b^2 (ca - (c^2 + a^2 - b^2)) + \\ + c^2 (ab - (a^2 + b^2 - c^2)) \geq 0.$$

Na vnitřní závorky použijeme kosinovou větu  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha$  (plus cyklická záměna) a vydělíme kladným číslem  $abc$ :

$$a(1 - 2 \cos \alpha) + b(1 - 2 \cos \beta) + c(1 - 2 \cos \gamma) \geq 0.$$

Rovnost zřejmě platí, jen když platí ve všech třech výchozích nerovnostech, tedy jen když

$$a = b = c.$$

Jediným řešením je proto rovnostranný trojúhelník.

*HighEgg*

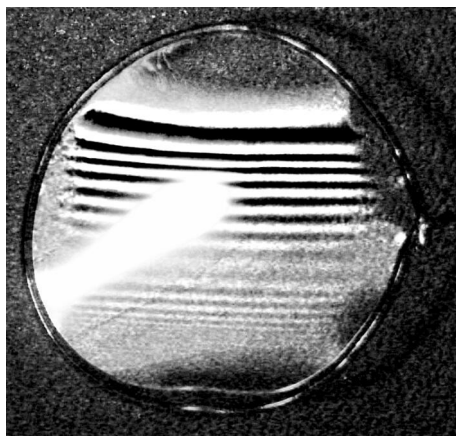
## Úloha 4.2 – Bublifuk (5b)

### Zadání:

Na obrázku vidíte fotografii blány vytvořené vodou s jarem. (Spolu s číslem byste měli dostat i barevný výtisk obrázku, který si také můžete stáhnout na adrese <http://mam.mff.cuni.cz/bublifuk.jpeg>.) Obrázek byl vyfocen prakticky ze stejného místa jako zdroj světla. (Úhel dopadu světla na blánu byl asi  $10^\circ$ .) Skutečný průměr smyčky je přibližně 5,5 cm.

Vysvětlete, proč obrázek vypadá tak, jak vypadá, a určete tloušťku jarové blány. Pokud není tloušťka konstantní, určete i její průběh.

Index lomu vody s jarem můžete považovat za shodný s indexem lomu vody. Toto tvrzení můžete případně zkusit potvrdit či vyvrátit na základě vlastních experimentů.



### Řešení:

To, že se bílé světlo odráží od mýdlové blány jako barevné proužky, ukazuje poměrně spolehlivě na fakt, že na bláně dochází k „interferenci“. Dopadající

světlo se odráží od obou stran mýdlové blány. To, které se odrazilo hned od rozhraní vzduch–(mýdlová) voda, se skládá se světlem, které dvakrát prošlo blánou, a odrazilo se od rozhraní voda–vzduch. Světlo, šířící se „delší“ cestou bude o něco zpožděno, a proto určitou barvu uvidíme nejvýrazněji tehdy, když zpoždění bude odpovídat celému násobku vlnové délky příslušné této barvě (resp. celému násobku periody kmitů vlny).

Pokud se nebojíte jednoduchých počtů, můžete předchozí odstavec vyjádřit poněkud exaktněji. Prozkoumejme, jaká vlnová délka  $\lambda$  se bude od vrstvičky tloušťky  $d$  odrážet nejvýrazněji. Světlo, které se odráží při dopadu na blánu, se při tomto odrazu „posune“ o půl fáze.<sup>1</sup> Ve vodě se světlo šíří  $n$ -krát pomaleji, než ve vzduchu (kde  $n$  je index lomu vody). Dráhu  $2d$  tedy urazí z čas  $2dn/c$ . Doba jednoho kmitu světla s vlnovou délkou  $\lambda$  (myšleno ve vzduchu, resp. vakuu) je  $\lambda/c$ . Než projde vrstvou vody tam a zpátky, trvá mu to tedy  $2dn/\lambda$  kmitů. K tomu přičteme půl kmitu při odrazu od prvního rozhraní a můžeme psát podmínku pro nejvýraznější vlnovou délku:

$$\frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2} = k, \quad \lambda = \frac{4dn}{2k-1}, \quad (\text{r2.1})$$

kde  $k$  je libovolné přirozené číslo. Pro určitou vlnovou délku  $\lambda_0$  platí

$$d = (2k-1) \frac{\lambda_0}{4n}. \quad (\text{r2.2})$$

Při osvětlení monochromatickým světlem o vlnové délce  $\lambda_0$  bychom tedy viděli jeden proužek na každý nárůst tloušťky o  $\lambda_0/2n$ . V případě bílého světla je situace složitější, protože výsledná odražená barva se skládá z více různých vlnových délek. Nicméně v prvním přiblížení můžeme počítat se střední vlnovou délkou viditelného světla 550 nm, z čehož vychází, že jedno zopakování barevných proužků by mělo odpovídat nárůstu tloušťky asi o 0,2  $\mu\text{m}$ . (Index lomu vody je přibližně 1,33.)

Vršek mýdlové blány je průhledný, protože je tam tenčí než asi 60 nm, takže ani fialové světlo (nejkratší viditelná vlnová délka) tam neinterferuje konstruktivně. Dále pak blána narůstá až po tloušťku kolem 4  $\mu\text{m}$  u dolního okraje (napočítal jsem přibližně 20 proužků). Tato hodnota je spíš řádovým odhadem. Pro přesné určení by bylo vhodné použít monochromatické světlo.

Pokud budeme chtít zdůvodnit konkrétní barevný průběh, musíme se na intenzitu odraženého světla podívat trochu podrobněji. Samotné maximum už stačit nebude. Odražené světlo se skládá ze dvou vlnění, které mají mezi sebou fázový posun  $\delta$ , kde

$$\delta = 2\pi \left( \frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{r2.3})$$

Pokud budeme předpokládat, že intenzita vlny odražené od prvního rozhraní je stejná jako intenzita vlny odražené od druhého, máme výslednou vlnu s průběhem  $\sin x + \sin(x + \delta)$ . Její intenzita je  $(\sin x + \sin(x + \delta))^2 = \sin^2 x + \cos - \delta + \cos(2x + \delta) + \sin^2(x + \delta)$ . My ale nevidíme okamžitou hodnotu, nýbrž vyśredovanou hodnotu přes celou periodu, jinak řečeno integrál. Integrál druhé

<sup>1</sup> Tento posun fáze nastane vždy při odrazu od opticky hustšího prostředí.

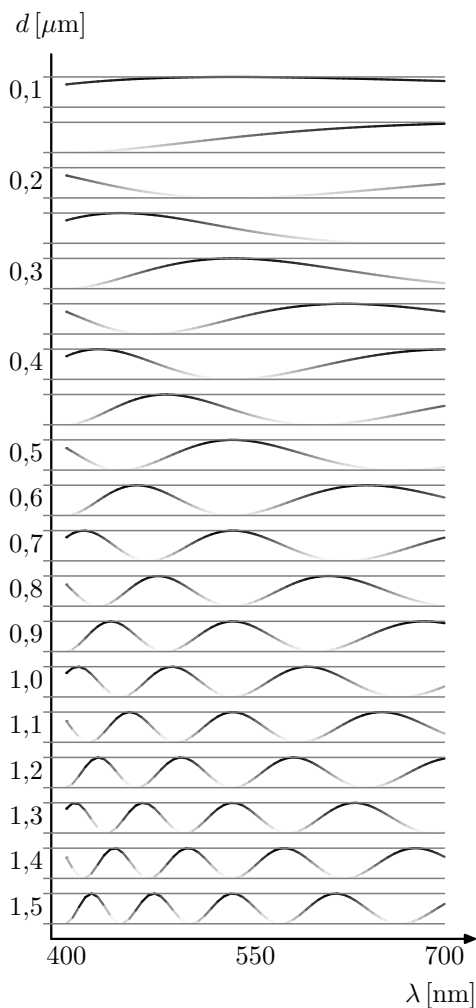
mocniny sinu přes celou periodu je  $\pi$ .  $\int \cos(2x + \delta) dx$  přes celou periodu je nula. Zbývá člen  $\cos -\delta$  a jeho integrál je  $2\pi \cos \delta$ . Relativní intenzita světla vlnové délky  $\lambda$  je tedy

$$1 - \cos\left(\frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2}\right). \quad (r2.4)$$

Vlnová délka splňující vztah (r2.1) dá relativní intenzitu rovnou dvěma. Průběh intenzity v závislosti na vlnové délce je pro některé hodnoty  $d$  nakreslen na obrázku r2.1. Nejmenší vlnová délka odpovídá fialovému světlu, delší modrému, pak přes zelené a žluté až po červené s největší vlnovou délkou.

Porovnáme-li obrázek r2.1 s fotografií mýdlové blány, vidíme toto: Po průhledné části následuje bílý proužek. Ten odpovídá tloušťce přibližně  $0,1 \mu\text{m}$ , kde je intenzita všech vlnových délek téměř stejná. Další řádek v grafu ukazuje posun k červené barvě a potom se naopak objevuje fialová z druhého konce spektra. Zatím je v celém viditelném oboru jen jedno maximum, a to přechází přes celé spektrum až opět k červené ( $d$  asi  $0,35 \mu\text{m}$ ). Totéž je vidět na fotografii. Dále už je i ve viditelném spektru více maxim a výslednou barvu není tak jednoduché určit.<sup>2</sup>

Barevné proužky jsou tedy způsobeny tím, že tloušťka blány se ve svislém směru mění. Jejich barva je dána interferencí dvou paprsků odražených od obou rozhraní voda–vzduch. V horní části je blána užší než asi  $60 \text{ nm}$ , protože na ní nedochází ke konstruktivní interferenci na žádné viditelné vlnové délce. Každý proužek odpovídá nárůstu blány o asi  $0,2 \mu\text{m}$ , takže na spodním konci je široká přibližně  $4 \mu\text{m}$ .



Obr. r2.1

*Marble*

<sup>2</sup> V tuto chvíli už není výsledná viditelná barva dána fyzikou mýdlové blány, ale tím, jak se v našem oku složí jednotlivé vlnové délky do celkového vjemu jedné barvy.



## Úloha 4.3 – Věž z kostek (4b)

### Zadání:

*Lišáček Riki si staví věž z kostiček tak, že na rovnou desku položí jednu krychli, na ni další atd. aby postavil co nejvyšší věž (komín). Po chvíli snažení mu však věž spadne a začíná zase od začátku.*

*Když ho chudáka pozorujete, tak by vás určitě zajímalo, jaká je průměrná výška komínu, který postaví.*

*Pro zjednodušení uvažujte místo krychlí čtverce. Riki má pravděpodobnost 1/3, že kostičku položí přesně, 1/3 že jí posune o polovinu strany čtverce doleva a 1/3 že jí posune o polovinu strany doprava.*

### Řešení:

*Pozn. red.: Jako autorské řešení bych uvedl řešení Mgr.<sup>MM</sup> Marka Basovníka, neboť je jednoduché a využívá pár pěkných triků.*

Nejdříve uvažujme, že krychličku lze položit pouze posunutě. Věž padá právě tehdy, když Riki položí krychličku posunutou dvakrát po sobě na stejnou stranu. U první krychličky neuvažujeme žádnou odchylku. Při přidání dalších dvou krychliček je pravděpodobnost právě 1/2, že věž spadne. Jsou totiž dva případy, kdy se udrží (1× doleva a 1× doprava; 1× doprava a 1× doleva) a dva případy, kdy se věž zřítí (2× doleva nebo 2× doprava). Dejme tomu, že věž stále stojí. Co se stane přidáním další krychličky? S pravděpodobností 1/2 krychličku položíme se stejnou odchylkou jako tu před ní a s pravděpodobností 1/2 krychličku položíme s odchylkou opačnou. Po přidání jedné krychličky tedy opět spadne polovina věží, které ještě nespady. Takže můžeme říci, že polovina věžiček vydrží přidání dvou kostek, 1/4 přidání třetí kostky, 1/8 přidání čtvrté, a tak dále. Průměrná délka věže je tedy rovna:

$$h = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n+1}{2^n}.$$

Vychází nám řada, jejíž součet, pokud  $n$  jde k nekonečnu, je roven číslu 3. Průměrný počet přidávaných krychliček je tedy roven hodnotě 3. Nepočítali jsme ale případy, kdy krychličku postavíme „normálně“. Tento stav nastane s pravděpodobností 1/3 a nijak neovlivní stabilitu věže. Výsledek tedy budeme muset zvětšit o tuto jednu třetinu. Výsledný počet tedy bude 4,5. pokud k tomuto číslu připočteme jednu kostičku (tu první), kterou lze položit jen jedním způsobem, dostáváme se k průměrné výšce věže 5,5 kostičky (pokud počítáme i tu kostičku, po které věž padá).

*Angwin*



Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy						$\sum_0$	$\sum_1$
			r1	r2	r3	t1	t4	t6		
32–33.	Lucie Mohelníková	3							3	
	Jan Vaňhara	3							3	
34.	Mgr. <sup>MM</sup> Dárius Gál	20							2	
35.	Lenka Švidrnochová	1							1	

Sloupeček  $\sum_{-1}$  je součet všech bodů získaných v našem semináři,  $\sum_0$  je součet bodů v aktuální sérii a  $\sum_1$  součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být  $\sum_0 = \sum_1$ ).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

---

## Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

*Telefon:* +420 221 911 235

*E-mail:* MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

*WWW:* <http://mam.mff.cuni.cz>

---

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory střeďočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.