

Termín odeslání: 28. 4. 2006

Milé kamarádky, milí kamarádi,

zdá se, že dlouhá zima se konečně pomalu vzdává své vlády a místo ní přichází tolik vytoužené jaro. S ním vás čeká teplé, slunečné počasí (snad), plno pylu ve vzduchu (zcela jistě – což potěší všechny alergiky), velikonoční veselice (která potěší zejména pánskou část obyvatelstva) a hlavně a především k vám právě teď přichází nejnovější vydání vašeho nejoblíbenějšího časopisu – což zaručeně potěší úplně každého! A protože by byla škoda pro samou matematiku, fyziku a informatiku zapomenout na sluníčko, vezměte si nové číslo s sebou na zahradu nebo do parku (nebo do školy, když už tam musíte ...), udělejte si pohodlí a nezapomeňte – řešit, řešit, řešit!

*Vaši organizátoři*

## Zadání úloh

### Úloha 5.1 – Konference (5b)

Mezinárodní konference o ochraně světové populace lišek a lištiček se zúčastnilo 10 zemí: Argentina, Belgie, Česko, Dánsko, Egypt, Francie, Grónsko, Haiti, Indie a Japonsko. Každá země vyslala na konferenci právě čtyři účastníky. Každý účastník během konference jednou vystoupil se svým příspěvkem. Kolika způsoby bylo možné příspěvky účastníků uspořádat, tak aby se nestalo, že všichni účastníci z nějaké země budou přednášet hned za sebou, a konference se tím stane jednotvárnou? Pokuste se úlohu řešit i pro obecný počet zemí a účastníků.

### Úloha 5.2 – Posloupnost (5b)

Sestavme si dvě posloupnosti přirozených čísel podle následujících pravidel:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ b_n &= 4n + a_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots \\ a_{n+1} &= \min \{ \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\} \} .\end{aligned}$$

Zjistěte poslední číslici čísla  $a_{10^{50}}$ .

Zn.: důkaz výhodou.

## Úloha 5.3 – Lucie noci upije . . . (5b)

Jistě všichni znáte rčení: „Lucie noci upije, ale dne nepřidá“. Tato pranostika popisuje jeden astronomický jev, který každoročně nastává právě okolo 13. prosince. Dokážete zjistit jaký a vysvětlit jeho příčiny? Napovíme vám, že jde o délku dne a časy, kdy vychází a zapadá slunce.

# Řešení témat

## Téma 1 – Prozkoumejte vodu!

### Hustota vody a ľadu

*Bc.<sup>MM</sup> Beáta Hergelová, Mgr.<sup>MM</sup> Jakub Beran,  
Mgr.<sup>MM</sup> Alžběta Pechová, Mgr.<sup>MM</sup> Ondřej Rott,  
Dr.<sup>MM</sup> Tereza Beránková*

Väčšina z vás merala hustotu vody pri 20 °C. Najčastejším postupom bolo odmerať objem a následne hmotnosť vody. Pre výpočet hustoty využijeme vzťahu

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (\text{t1.1})$$

Problém merania je v presnosti. Vodu ste merali v odmernom valci a hmotnosť na kuchynských váhach, ktorých presnosť nie je najvyššia. Chyba odmerného valca sa pohybuje okolo 10 ml, chyba hmotnosti okolo 10 g. Ďalším problémom je, že voda v odmernom valci vďaka kapilarite vzlíná, čo môže do merania zaniest systematickú chybu.

Tí, ktorí merali hustotu vody, zároveň merali aj hustou ľadu. Najlepšou metódou sa ukazuje naplniť pohár vodou, do ktorého potom plne ponoríme kocky ľadu. Objem vody, ktorá nám vytečie z pohára von, je podľa Archimedovho zákona rovný objemu ľadu. Postupujeme rovnako ako pri meraní hustoty vody, ale je rozumné merať hmotnosť ľadu ako prvú a pracovať rýchlo, aby sa nám čo najmenej ľadu roztopilo.

Meno	hustota vody		hustota ľadu	
	vody	chyba	ľadu	chyba
	[kg · m <sup>-3</sup> ]		[kg · m <sup>-3</sup> ]	
Bc. <sup>MM</sup> Beáta Hergelová	950	–	909	–
Mgr. <sup>MM</sup> Jakub Beran	1 006	–	916	–
Mgr. <sup>MM</sup> Alžběta Pechová	960	–	912	–
Dr. <sup>MM</sup> Tereza Beránková	850	40	–	–
Mgr. <sup>MM</sup> Ondřej Rott	1 080	–	–	–

Presnosť merania nie je rozdiel medzi nameranou a tabuľkovou hodnotou, ako ste často uvádzali, ale číslo získané výpočtom z nameraných hodnôt – viď

článok v 3. tohtoročnom čísle. Načo by sme merali nejakú hodnotu, keď vieme, čo nám má vyjsť?

## Povrchové napätie vody – teória

*Bc.<sup>MM</sup> Beáta Hergelová*

Existuje viac metód, ako odmerať povrchové napätie vody.

1. Do vody ponoríme jednu stranu drôteného rámčeka, a aj to tesne pod hladinu. Odmeriame silu, ktorou musíme pôsobiť, aby sme vytiahli celý rámček von z vody. Sila bude veľmi malá, preto je potrebný veľmi jemný silomer alebo torzné váhy. Tento pokus je v domácich podmienkach nerealizovateľný.
2. Môžeme využiť skutočnosť, že drobné predmety, aj keď majú vyššiu hustotu ako voda, na nej plávajú práve vďaka povrchovému napätiu. Predmety by mali byť oblé na styčnej ponorenej časti a úzke. Toto spĺňajú vlasý, ktorých hustotu nepoznáme, a ani hrúbka nie je konštantná, alebo drôty. Položíme drôty na vodu a zohrievame ju. Pri určitej teplote sa drôtky začnú ponárať. Pokus je preto dobrý na určenie závislosti povrchového napätia na teplote. Je však potrebné vedieť hustotu drôtika  $\rho$  a jeho polomer  $r$ . Ťažná sila sa v hraničnom momente rovná sile povrchového napätia:

$$\begin{aligned} F_{\text{povrch}} &= F_g, \\ 2l\sigma &= \pi r^2 \rho_d g, \quad {}^1 \\ \sigma &= \frac{1}{2} \pi r^2 \rho_d g. \end{aligned} \quad (\text{t1.2})$$

3. Ďalším spôsobom, ako zmerať  $\sigma$ , je kapilárna elevácia. Je to dej na pohľad veľmi neprirodzený. Zoberieme si veľmi tenkú trubičku – kapiláru – o polomere  $r$  a vsuneme ju do vody. Voda v trubičke vystúpi do výšky  $h$  nad povrch voľnej hladiny vody. Je to spôsobené práve povrchovým napätím vody. Platí preň vzťah

$$\sigma = \frac{1}{2} r h \rho g. \quad (\text{t1.3})$$

## Povrchové napätie vody – prax

*Bc.<sup>MM</sup> Hanka Jirků*

Podľa metódy 3 zmerala *Bc.<sup>MM</sup> Hanka Jirků* povrchové napätie vody. Vnútorň priemer kapiláry zmerala pomocou ihly a mikrometra. Kapiláru upevnila po-

<sup>1</sup> Pozn. red.: Správne má byť  $2l\sigma \cos \vartheta = \pi r^2 \rho_d g$ , kde  $\vartheta$  je uhol zmáčavosti, ktorý sa meria pre trojicu povrchov, v našom prípade drôt, vodu a vzduch.

mocou stojanu a ponorila do vody, a následne zmerala výšku hladiny vody v kapiláre. Podľa vzťahu (t1.3) jej vyšla hodnota  $\sigma = 24 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## Merné skupenské teplo topenia

*Bc.<sup>MM</sup> Hanka Jirků*

Autorka vložila do kalorimetru vodu a ľad, ktorých teplotu zmerala. Rovnako zmerala teplotu po dosiahnutí rovnovážneho stavu. Výslednú tepelnú kapacitu určila podľa vzťahu

$$l_t = \frac{m_v c_v (t_v - t) - m_l c_v (t - t_l) - m_k c_{Al} (t - t_k)}{m_l} \quad (\text{t1.4})$$

Pri experimente autorka namerala tieto hodnoty:

	voda	ľad	kalorimeter
$m$ [g]	114,3 g	8,6 g	35 g
$t$ [°C]	43 °C	0 °C	20 °C

Teplota po dosiahnutí rovnovážneho stavu: 35 °C.

V tabuľkách našla autorka tieto konštanty:

$$c_{\text{voda}} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad c_{\text{hliník}} = 0,896 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Z týchto hodnôt dostávame výsledok:

$$l_t = 240 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Pre porovnanie, tabuľková hodnota je  $l_t = 332,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## Teplota topenia a varu vody – návrh

*Mgr.<sup>MM</sup> Jakub Beran*

Rád by som sa s vami podelil o dva popisy experimentov, ktoré som síce neuskutočnil, ale v praxi by sa dali určite použiť.

*Pozn. red.: Tieto experimenty Mgr.<sup>MM</sup> Jakub Beran nevykonával. Overíte, že pomocou týchto experimentov dostanete rozumné hodnoty?*

### Teplota topenia vody

Najskôr necháme v chladničke zmrznúť vodu a zároveň kvapalinu, ktorá má nižšiu teplotu topenia ako voda (napr. kuchynský olej). Schladíme obe látky pod teplotu tuhnutia vody. Počas chladnutia si pripravíme ďalšie pomôcky: veľkú nádobu, teplomer a nejakú varešku na premiešavanie. Premiešavame olej a čakáme, kedy sa začne ľad topiť. V okamihu, keď sa ľad začne topiť, zapíšeme si teplotu, ktorá je v danom okamihu na teplomere.

## Teplota varu vody

Tu som sa inšpiroval pánom Celsiom a jeho experimentom, ktorý použijem na iný účel ako on. Nedostupnosť teplomeru so stupnicou nad  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  mi znemožnila jeho vykonanie. Na experiment potrebujeme varič, hrniec, vodu a teplomer. Vodu v hrnci postavíme na varič a necháme zovrieť. V okamihu, keď začne voda vriieť, zapíšeme teplotu na teplomeru. Pokus niekoľkokrát opakujeme, aby sme zmenšili chybu merania.

## Merná tepelná kapacita vody a ľadu

*Mgr.<sup>MM</sup> Jakub Beran*

Pomôcky: kúsok kovu o známej mernej tepelnej kapacite, školský zmiešavací kalorimeter, váhy, závažia, voda.

Najskôr zvážíme kov – 11 g, vieme že je to kúsok medi s mernou tepelnou kapacitou  $c_{\text{Cu}} = 383\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Kov zahrejeme na niekoľko rôznych teplôt ( $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Vykonám práve tieto tri pokusy. Do kalorimetra dám 100 g vody s teplotou  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Do vody v každom pokuse vložíme zohriaty kov, zamiešame a chvíľku počkáme dokiaľ sa teploty nevyrovnejú. Podľa výslednej teploty určíme mernú tepelnú kapacitu vody. Nezabudneme pripočítať ani tepelnú kapacitu kalorimetra –  $C_k = 140\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Kov označme indexom 1, vodu indexom 2. Výsledné  $c_2$  vyrátame z kalorimetrickej rovnice:

$$c_2 = \frac{m_1 c_1 (t_1 - t) - C_k (t - t_2)}{m_2 (t - t_2)}, \quad (\text{t1.5})$$

kde  $t$  je výsledná teplota sústavy. Meraním som dostal hodnotu

$$c_2 = c_{\text{H}_2\text{O}} = 4\,400\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Pre porovnanie, tabuľková hodnota  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4\,200\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Experimentálne som mernú tepelnú kapacitu ľadu nemeral, ale ponúkam postup, ako si ju zmerať. Postup je skoro identický s postupom v predchádzajúcom experimente. Najskôr odvážíme 100 g vody s teplotou  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Necháme zmraziť isté množstvo ľadu na  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$  (bežne dosiahnuteľná teplota v mrazničkách). Po zmrazení ľad dáme do kalorimetra a počkáme kým sa teploty vyrovnajú. Výsledok získame obdobným postupom ako v (t1.5) s tým, že do výpočtu ešte zahrnieme merné tepelné skupenstvo ľadu.

## Merná tepelná kapacita vody – alternatívny postup

*Bc.<sup>MM</sup> Beáta Hergelová*

Na rozdiel od klasickej metódy merania mernej tepelnej kapacity vody pomocou kalorimetra použijem varič. Varič nám poskytuje teplo. Pri výkone  $P$ ,

účinnosti  $\eta$  (ktorú nepoznáme, ale odhadujem ju na 95 %) a čase  $t$  sa teplota zvýši o  $\Delta T$ .

$$P\eta t = cm\Delta T, \quad (t1.6)$$

$$c = \frac{p\eta t}{m\Delta T}.$$

Do konvice dám 1 liter vody (z vodovodu) a odmeriam jej teplotu. Zohrievam pri výkone 1 kW a zaznamenávam časy, kedy dosiahla teplota  $(25 + 5k)^\circ\text{C}$ , kde  $k \in 1, 2, 3, \dots, 11$ , lebo pri  $80^\circ\text{C}$  už dochádza k procesu varu.

Priemerná tepelná kapacita zmeraná touto metódou je  $4,3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Chyba merania je asi 5 %. Keď zoberieme do úvahy, že aj konvica má tepelnú kapacitu a jej účinnosť je tiež „odhadnutá“, chyba je dosť veľká. Ak poznáme účinnosť konvice, metóda je celkom presná, lebo materiál, z ktorého je konvica, veľa tepla nepohlí.<sup>2</sup>

Takýmto spôsobom sa dá zistiť aj merné skupenské teplo vyparovania, podľa vzorca

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{ml_v}{t}, \quad (t1.7)$$

$$l_v = \frac{Pt}{m}.$$

Čas meriame od okamihu, keď sa voda začne variť. Pri pokuse sa môžu vyskytnúť chyby merania spôsobené vyparovaním. Preto sa musíme snažiť, aby voda zovrela čím skôr. Ako som už spomenula, voda začína vriť a teda aj sa intenzívnejšie vyparovať už pri  $80^\circ\text{C}$ . Čo tak porovnať vyparovanie vody v hrnci s a bez pokrievky?

Pokus: Hrnec bez pokrievky som dala na najväčší plameň a nechala zovrieť 2 litre vody (z vodovodu). To isté som urobila aj s hrncom s pokrievkou. V hrnci bez pokrievky voda zovrela za 11 minút, v hrnci s pokrievkou za 9 minút. Keďže hrnce s vodou prijímajú teplo rovnako, pri varení ušetríme

$$\frac{11 - 9}{11} \cdot 100\% = 22\% \text{ energie.}$$

Hrnec bez pokrievky potrebuje prijať viac tepla, pretože teplo a vodná para unikajú z hrnca do okolia. S pokrievkou sa hrniec stáva izolovanejšou sústavou a k úniku tepla nedochádza v takej miere.<sup>3</sup>

K úniku tepla dochádza aj pri malom priereze hrnca. Plamene môžu šľahať pomimo hrnca (potom sa čudujeme, prečo sú horúce uchá) a teplo hrniec nestihne pohltiť. Pri veľkom priereze dno hrnca pohltí skoro všetko teplo.

<sup>2</sup> Pozn. red.: Tak ako to je s tou presnosťou? Je metóda presná alebo nie? Aký je váš názor na autorkine myšlienky, podľa môjho názoru sa navzájom vylučujúce?

<sup>3</sup> Pozn. red.: Ako závisí množstvo ušetrenej energie na počiatkovej teplote vody? Koľko ušetrenej energie ide na vrub tepla a koľko na vrub odparenej vody? Zmeria to niekto?

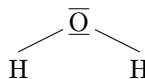
## Chemické vlastnosti

Mgr.<sup>MM</sup> Alžběta Pechová

Každá látka má vlastnosti nejen fyzikální, ale také chemické. Proto jsem se rozhodla, že některé chemické vlastnosti vody se pokusím popsat, experimentálně určit nebo ověřit.

Voda se skládá z molekul  $\text{H}_2\text{O}$ , obsahujících vodík a kyslík.

Molekuly mají strukturovaný vzorec, jak je uveden na obrázku. Elektronový obal tvoří 2 volné a 2 vazebné páry elektronů. Tyto čtyři páry elektronů se vzájemně odpuzují a proto jsou orientovány tak, že je jejich energie co nejmenší, proto mají molekuly vody lomený tvar. Vazby mezi atomy O a H svírají úhel  $104,5^\circ$ .



Vazby ve sloučeninách mohou být nepolární, polární nebo iontové, toto záleží na rozdílu elektronegativit<sup>4</sup> atomů.

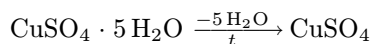
typ vazby	rozdíl elektronegativit
vazba nepolární	< 0,4
vazba polární	0,4–1,7
vazba iontová	> 1,7

Elektronegativita vodíku je 2,2, kyslíku 3,5, rozdíl 1,3 znamená, že vazby v molekulách vody jsou polární.

Molární hmotnost vodíku je 1 g/mol, kyslíku 16 g/mol. Molární hmotnost vody je potom 18 g/mol. Voda pak obsahuje  $16/18 \cdot 100\% = 89$  hmotnostních procent kyslíku a 11 hmotnostních procent vodíku.

Voda je obsažena ve sloučeninách zvaných hydráty. Prováděla jsem důkaz, že v modré skalici ( $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ) se nachází voda.

Na porcelánovou misku jsem nasypala  $1\frac{1}{2}$  lžičky krystalků modré skalice a dala zahřívát nad kahan. Pokud modrá skalice obsahuje vodu, měla by se teplem vypařit. Po 3 minutách bylo pozorováno blednutí modré barvy. Po 5 minutách byla barva zkoumané látky velmi slabě namodralá. Po 8 minutách byla látka bílá, byly to krystalky  $\text{CuSO}_4$ .



Po vychladnutí krystalické látky (asi 15 minut) jsem na ní kápala několik kapek destilované vody. Voda se síranem měďnatým reagovala okamžitě<sup>5</sup>, a barva krystalků se vrátila k původní jasně světle modré:



<sup>4</sup> Elektronegativita je schopnost přitahovat elektrony sdílené vazbou.

<sup>5</sup> Pozn. red.: Ako by ste dokázali, že pri tepelnom rozklade dochádza skutočne k dehydratácii (vypareniu vody) a nie k inej chemickej reakcii?

Dalším pokusem jsem zjišťovala, zda je voda polární nebo nepolární rozpouštědlo.

Nejdříve jsem si zjistila, že etanol je rozpouštědlo nepolární. Z toho jsem vycházela a pak ještě z toho, že látka se rozpouští buď v rozpouštědle polárním, nebo nepolárním. V celém experimentu jsem použila tři látky: modrou skalici, kuchyňskou sůl a jód.

V kádinkách jsem si připravila etanol a pak v něm rozpouštěla jednotlivé látky při pokojové teplotě. Vždy jsem rozpouštěla lžičku dané látky. Tento stejný postup jsem opakovala s vodou.

Výsledná zjištěná rozpustnost:

	etanol	voda
modrá skalice	nerozpouští se	rozpouští se
kuchyňská sůl	nerozpouští se	rozpouští se
jód	rozpouští se	nerozpouští se

Vzhledem k tomu, že se látky rozpustili vždy pouze v jednom z daných rozpouštědel došla jsem k závěru, že voda je *polárním rozpouštědlem*.

## Měření veličin vody

*Mgr.<sup>MM</sup> Radim Pechal*

Ve svém příspěvku se pokusím navrhnout možné postupy při měření různých fyzikálních veličin vody. Postupy jsem prakticky vyzkoušel, ovšem účelem nebylo určit konkrétní hodnotu dané veličiny, ale ověřit, zda je postup realizovatelný.

Většinou jsem se snažil používat digitální přístroje, které měří elektrické veličiny, jejich výhodou je relativní dostupnost a téměř nulová chyba při odečítání hodnot. Jedinou výjimkou byl osciloskop (viz dále).

Používal jsem jak jednoduchý multimetr Range RE830C, který zvládá měřit základní veličiny a jeho cena je úměrná kvalitě :-), a potom u některých měření i multimetr METEX M4650CR, který je mnohem luxusnější, jeho měření je přesnější a dokáže také přenést své měření do počítače. Dále jsem pro měření střídavého napětí používal analogový osciloskop BP 4641. Měření jsem prováděl v akváriu (bez rybiček) s destilovanou vodou pro technické účely (to je ta, co koupíte v drogerii).

### Měrný elektrický odpor a teplotní součinitel elektrického odporu

Měrný elektrický odpor je jednou z nejdůležitějších elektrických veličin. Obecně je definována jako elektrický odpor materiálu o průřezu jeden metr čtvereční a délce jeden metr. Rezistivita je závislá na teplotě, a proto se měří při dané teplotě, která je 20 °C. (Pro určení rezistivity při jiné teplotě se dá využít teplotní součinitel elektrického odporu.) Pomocí rezistivity můžeme také sestavit tabulku, kde můžeme určit zda daný materiál je vodič, polovodič nebo izolant.



Druh materiálu	Měrný elektrický odpor
vodič	$10^{-8}$ až $10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$
polovodič	$10^{-5}$ až $10^6 \Omega \cdot \text{m}$
izolant	$10^6$ až $10^{18} \Omega \cdot \text{m}$

Velikost elektrického odporu je dána vztahem

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \quad (\text{t1.8})$$

kde  $R$  je odpor materiálu,  $\varrho$  je měrný elektrický odpor (též se udává pod názvem rezistivita),  $l$  je délka materiálu a  $S$  je průřez materiálu.

Teplotní součinitel elektrického odporu udává závislost elektrického odporu materiálu v závislosti na teplotě. Je dán vztahem

$$R = R_0 (1 + \alpha_R \Delta T), \quad (\text{t1.9})$$

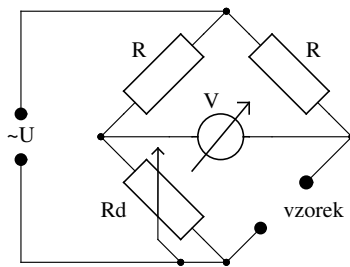
kde  $R_0$  je výchozí hodnota odporu materiálu,  $\alpha_R$  je teplotní součinitel elektrického odporu a  $\Delta T$  je rozdíl teplot. Teplotní součinitel je také závislý na teplotě. Pokud by tato veličina byla konstantní, tak by při ohřátí materiálu o  $\Delta T$  zvýšil odpor materiálu na  $R_x$ , při zpětném zchlazení o  $\Delta T$  by byl výsledný odpor nižší než původní, a takto bychom při ohřívání a zchlazování mohli dostat záporný odpor, což je v podstatě zdroj. Matematicky: nejdříve ohřejeme odpor, a jeho odpor stoupne na  $R_1$ , pak odpor ochladíme na původní teplotu, a dosáhneme odpor  $R_2$ :

$$R_1 = R_0(1 + \alpha_R \Delta T), \quad R_2 = R_1(1 - \alpha_R \Delta T),$$

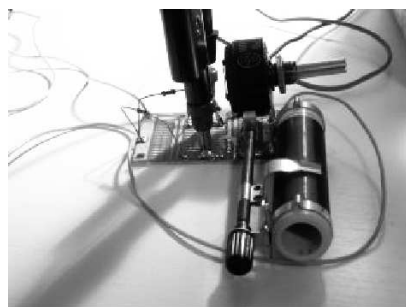
$$R_2 = R_0(1 - \alpha_R \Delta T) \cdot (1 + \alpha_R \Delta T) = R_0 (1 - (\alpha_R \Delta T)^2) < R_0.$$

Měření jsem prováděl v již zmíněném akváriu. Nejdříve jsem koupil v obchodě se součástkami dvě cuprexitové desky (ty se obvykle používají na výrobu plošných spojů, jedná se o plastovou destičku, na které je nanášena vrstva mědi), ty jsem seřízl na potřebnou velikost tak, aby mi desky zakryly dvě protilehlé strany akvária. Potom jsem k nim připájel přírodní vodiče a nalil do akvária vodu. Má představa byla taková, že nejdříve změřím odpor vody nalité v akváriu a potom ze známých rozměrů akvária vypočítám měrný elektrický odpor. Připojil jsem vodiče, které jsem měl vyvedené z akvária, na multimetr a očekával jsem, že odečtu odpor, ovšem po zapnutí se hodnota odporu začala měnit. Nakonec jsem usoudil, že vlivem nečistot dochází průchodem proudu k elektrolýze. Takže se tato metoda neukázala jako správná. Abych omezil elektrolýzu rozhodl jsem se, že budu měřit elektrický odpor ne průchodem stejnosměrného proudu, ale pomocí střídavého. To mě vedlo k myšlence využít upravený tzv. Wheatstonův můstek (viz obr. t1.1).

Na napájecí svorky přivedu střídavé napětí o frekvenci např. 1 KHz, otáčím s potenciometrem  $R_d$  do té doby, než se mi podaří nastavit na voltmetru nulové napětí. Jakmile se mi to podaří, je velikost odporu proměnného rezistoru stejná jako velikost odporu měřeného materiálu. Vzhledem k tomu, že chování střídavého voltmetru v multimetrech při frekvencích kolem 1 KHz mi přišlo nestandardní, nahradil jsem voltmetr osciloskopem. Nevýhodou je fakt, že na osciloskopu můžeme měřit s přesností asi  $\pm 10\%$  a měření kolem 0 V zkrusuje rušení, ovšem výhodou je, že na obrazovce osciloskopu lze snadno rozpoznat, zda měřený prvek není fázově posunut (zda se nechová jako cívka nebo kondenzátor). To se u měření vody neprojevilo. Pokud se bude elektrický odpor měřit při různých teplotách, lze pomocí těchto měření a uvedených vztahů určit teplotní součinitel elektrického odporu.



Obr. t1.1 – Wheatstonův můstek



### Poměrná permitivita

Poměrná permitivita  $\epsilon_r$  udává, kolikrát je celková permitivita větší než je permitivita vakua ( $\epsilon_0 = 8,854\,187 \cdot 10^{-12}$  F/m). Na permitivitu se můžeme dívat jako na měrnou elektrickou vodivost izolačního materiálu:

$$C = \epsilon \frac{S}{l} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{l}. \quad (\text{t1.10})$$

Měření jsem prováděl opět v akváriu. Z již zmíněných cuprexitových desek jsem vytvořil kondenzátor tak, že je rovnoběžně spojil pomocí distančních sloupků. Desky jsem ponořil do destilované vody a měřil kapacitu vyrobeného kondenzátoru. K měření jsem využil přístroj METEX M4650CR, který má v sobě zabudovaný měřič kapacit. Pokud by někdo neměl měřič kapacit, lze jej nahradit Wheatstonovým můstkem.<sup>6</sup> Poměrná permitivita lze potom určit

<sup>6</sup> Pozn. red.: Ale místo nastavení nulového napětí na voltmetru musíme hledat takovou hodnotu  $R_d$ , kdy bude amplituda napětí na obou svorkách voltmetru

z následujících vztahů:

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{2RR_d + R_d^2}}, \quad (t1.11)$$

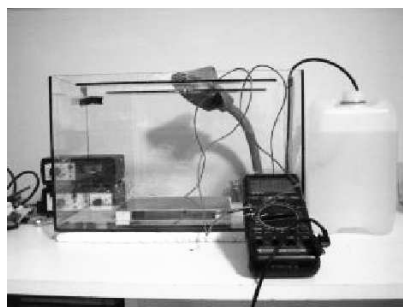
$$\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon = \frac{l}{CS} = \frac{l}{2\pi f S \sqrt{2RR_d + R_d^2}},$$

kde  $f$  je frekvence připojeného zdroje,  $R_d$  je elektrický odpor potenciometru,  $S$  je plocha cuprexitových desek,  $l$  je vzdálenost cuprexitových desek.

Toto měření se ovšem také neosvědčilo, neboť vzhledem k malému elektrickému odporu destilované vody, byly hodnoty hodně zkreslené. Použití Wheatstonova můstku je z důvodu fázového posunu velmi problematické.

Další možností bylo nejprve změřit kapacitu kondenzátoru ve vzduchu. Potom jsem jej položil do akvária (plochou desky na dno) a začal přilévat vodu, stále jsem sledoval hodnotu kapacity kondenzátoru. Ta postupně stoupala. Situaci si můžu představit tak, že jsem měl dva sériově zapojené kondenzátory, jeden měl vzduchové dielektrikum, vliv tohoto kondenzátoru se vzrůstající hladinou klesá, druhý měl vodní dielektrikum, vliv tohoto kondenzátoru naopak neustále roste. Počkal jsem tedy do chvíle, kdy mi hodnoty kapacity razantně klesly (to byl okamžik, kdy voda propojila obě desky kondenzátoru). Vzhledem k tomu, že vzduchový kondenzátor byl k vodnímu připojený sériově, zanedbal jsem jej, a jako kapacitu vodního kondenzátoru jsem vzal poslední „rozumnou“ naměřenou hodnotu. K tomuto měření se mi výborně osvědčil přístroj METEX, který má možnost výstupu do PC, kde jdou zaznamenávat naměřené hodnoty.

Nevýhodou této metody je poměrná nepřesnost a zdlouhavost metody.



### Měrná tepelná kapacita

Měrná tepelná kapacita udává množství tepla, které je třeba dodat 1 kg materiálu, aby se zahřál o jeden stupeň:

$$E = cm\Delta T. \quad (t1.12)$$

stejná (přičemž tato napětí nejsou ve fázi). To je prakticky dost obtížně změřitelné, takže pro měření kapacity se většinou používají trochu jiné můstky – místo odporu se ve větvi se vzorkem použije kondenzátor o známé kapacitě a potom se opět hledá nulové napětí změnou  $R_d$ .

Jako zdroj tepla jsem se rozhodl použít topné tělísko reprezentované výkonovým, teplotně stabilním rezistorem. Na něm se bude přeměňovat elektrická energie na tepelnou

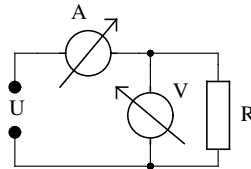
$$E = Pt, \quad E = UIt.$$

Takže můžu dostat vztah pro konečný výpočet měrné tepelné kapacity

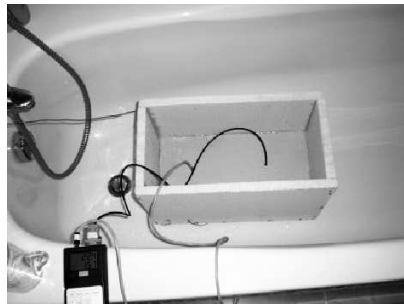
$$c = \frac{UIt}{m\Delta T}. \quad (\text{t1.13})$$

Vzhledem k tomu, že výkonový rezistor bude pravděpodobně v řádů desítek až stovek ohmů, mělo by se při zapojování voltmetru a ampérmetru volit zapojení pro malé hodnoty rezistorů (obr. t1.2).

Nejdříve jsem chtěl měřit v akváriu, to jsem později zavrhl, protože by se mi do měření vnášela chyba z důvodu ohřevu stěn. Volil jsem proto jinou cestu, z polystyrénových desek jsem za pomoci tavné pistole a lupénkové pilky vytvořil „polystyrenové akvárium“. Do této nádoby jsem umístil dva výkonové rezistory, které snesou výkon až 10 W. Potom jsem do „akvária“ nalil vodu z vodovodu. Vodu jsem přikryl deskou z polystyrénu, ve které byly dva otvory pro teplotní sondy digitálního teploměru. Desku jsem přilepil tavnou pistolí ke krabici. Tím byla technická část hotova. Nyní už jen stačilo připojit zdroj, voltmetr a ampérmetr a začít měřit. K měření jsem používal digitální teploměr Commeter, který má možnost ukládat hodnoty do paměti přístroje a potom je zobrazit na PC, takže se dalo měřit celé hodiny. :-)



Obr. t1.2



#### Použitá literatura:

- Elektrotechnologie I; Malý, Z. Simerský M., SNTL 1990;
- Elektrotechnická měření I; Fiala M., Vrožina M. Hercik J., SNTL 1981;
- Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy; Mikulčák J. a kolektiv, Prometheus 2003.

*Bzučo*

## Téma 2 – Konstrukční úlohy v prostoru

### Opsané a vepsané kulové plochy

Doc.<sup>MM</sup> Tereza Klímošová

#### Opsané kulové plochy

Kulová plocha neboli koule je jednoznačně určena čtyřmi body, které neleží v jedné rovině. Z toho plyne, že kouli můžeme opsat každému čtyřstěnu, a to následujícím způsobem:

- Střed koule  $S$  musí být ve stejné vzdálenosti od všech čtyř bodů ( $A, B, C, D$ ).
- Množinu bodů  $X$ , pro které platí  $|xA| = |xB|$ , je rovina  $\rho$ , pro níž  $|\rho A| = |\rho B|$  a  $\rho \perp \overline{AB}$  (rovina souměrnosti úsečky  $AB$ ).
- Najdeme-li tedy pro každou dvojici bodů rovinu souměrnosti, průsečík těchto rovin má od všech bodů stejnou vzdálenost, je tedy hledaným středem koule opsané  $ABCD$ .

Vlastní konstrukce

- 1)  $H_1; H_1(A, r), r > |AB|/2$
- 2)  $H_2; H_2(B, r)$
- 3)  $k; k = H_1 \cap H_2$
- 4)  $\rho; k \subset \rho$

Průsečík těchto rovin skutečně existuje, protože pro body průsečnice rovin souměrnosti  $AB$  a  $AC$  platí, že  $|XA| = |XB| = |XC| \Rightarrow$  jsou to tedy i body roviny souměrnosti  $BC$ . Pro průsečík  $S$  této průsečnice s rovinou souměrnosti  $AD$  pak platí, že  $|SD| = |SA| = |SB| = |SC|$ ,  $S$  je tedy rovněž bodem rovin souměrnosti  $BD$  a  $CD$  (a jelikož  $D \notin \overline{ABC}$ , rovina souměrnosti  $AD$  nemůže být rovnoběžná s průsečnicí, jejich průsečíkem je tedy právě jeden bod).

Konstrukce koule je pak zřejmá  $H(S, |AS|)$ .

Lze-li tělesu s více vrcholy opsat kouli, uděláme to jednoduše tak, že zkonstruujeme kouli opsanou pro libovolné čtyři z jeho vrcholů, jež neleží v jedné rovině. Pokud zbylé vrcholy na kouli neleží, tělesu se koule opsat nedá.

#### Vepsané kulové plochy čtyřstěnu

Střed koule vepsané musí mít stejnou vzdálenost od všech stěn tělesa.

Množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžných rovin  $\alpha$  a  $\beta$  jsou roviny  $\rho$  a  $\sigma$ , pro které platí  $(\alpha \cap \beta) \subset \rho$  (resp.  $\sigma$ ) a  $|\not\propto \alpha \rho| = |\not\propto \beta \rho|$  (resp.  $|\not\propto \alpha \sigma| = |\not\propto \beta \sigma|$ ) ( $\rho$  a  $\sigma$  jsou trojrozměrným ekvivalentem osy úhlu).

Vlastní konstrukce:

- 1)  $p; p \in \alpha \cap \beta$
- 2)  $\lambda; \lambda \perp p$
- 3)  $O; O \in p \cap \lambda$

- 4)  $H$ ;  $H(O, r)$ ,  $r$  je libovolný
- 5)  $A, A'$ ;  $A, A' \in H \cap \alpha \cap \lambda$
- 6)  $B, B'$ ;  $B, B' \in H \cap \beta \cap \lambda$
- 7)  $H_1, H'_1$ ;  $H_1(A, r')$ ,  $H_1(A', r')$ ,  $r' > r$
- 8)  $H_2, H'_2$ ;  $H_2(B, r')$ ,  $H_2(B', r')$
- 9)  $\rho$ ;  $(H_1 \cap H_2) \subset \rho$
- 10)  $\sigma$ ;  $(H_1 \cap H'_2) \subset \sigma$

Zkonstruujeme-li pro každé dvě stěny (roviny) tělesa tu z rovin  $\rho, \sigma$ , jejíž průnik s vnitřní částí tělesa není prázdný, získáme čtyři roviny, pro jejichž průsečík  $S$  platí  $|S\alpha| = |S\beta| = |S\gamma| = |S\delta|$ , je tedy od všech stěn stejně daleko. Našli jsme střed koule vepsané, její konstrukce je již jednoduchá  $H(S, |S\alpha|)$ .

Angwin

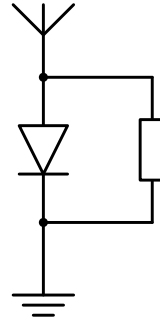
## Téma 5 – Postavte si rádio

K tomuto tématu zatím přišla dvě řešení. Bc.<sup>MM</sup> Kristínka Kovalčíková poslala popis jednoho zapojení a trochu teorie. Karolína Janíková nám poslal něco o historii rádia a trochu teorie.

### Praxe

Bc.<sup>MM</sup> Kristínka Kovalčíková popisuje přijímač zapojený podle schématu na obrázku t5.1. Sluchátko bylo z telefonu, k uzemnění byl využit radiátor a anténa měla délku asi 2 metry. S tímto zapojením bylo možné slyšet tiše nejsilnější stanice. (Autorka je ze Žiliny a uvedla, že přijímaná stanice vysílá na frekvenci 567 kHz.)

Jak se uvedené zapojení liší od zapojení v zadání? Je v něčem lepší?



Obr. t5.1

### Rozhlasové vysílání

Dále uvádíme souhrn toho, co nám poslala Bc.<sup>MM</sup> Kristínka Kovalčíková.

Autorka uvádí frekvenční rozsahy pro pásma, ve kterých se provozuje rozhlasové vysílání:

dlouhé vlny	střední vlny	krátké vlny	velmi krátké vlny
150–285 kHz	525–1605 kHz	5.95–26.1 MHz	66–107 MHz
2–1 km	570–190 m	50–11 m	4,5–2,8 m

Dlouhé a střední vlny se při šíření ohýbají podél zemského povrchu, takže je možné zachytit vysílání i na velké vzdálenosti. Navíc v noci se střední vlny odráží i od ionosféry, čímž se zvětší dosah (během dne je ionosféra pohlcuje). Krátké vlny se mohou na větší vzdálenosti šířit odrazem od ionosféry (i několikanásobným). VKV už ionosféra většinou neodráží.

V prvních třech pásmech se používá amplitudová modulace (AM), v pásmu velmi krátkých vln pak frekvenční modulace (FM).

*Amplitudová modulace* vznikne složením základního signálu (nosné), který má stálou frekvenci a amplitudu, se signálem, který chceme přenášet (vysílaná řeč, hudba, ...). Výsledný signál vznikne složením (součinem) nosné vlny a okamžité velikosti signálu, který chceme přenášet. Nosná vlna má mnohem větší frekvenci, než zvuky, které nás zajímají, takže výsledkem je, že přenášený signál tvoří „obálku“ nosné (upravuje její amplitudu).<sup>7</sup>

K „dekódování“ AM signálu potřebujeme detektor. Tím je v uváděných zapojeních dioda.

*Frekvenční modulace* nechává konstantní amplitudu a podle vysílaného signálu se upravuje frekvence nosné. Pro rozhlasové vysílání s FM modulací navíc existuje specifikace stereofonního vysílání. (V pásmech s AM modulací se vysílá pouze monofonní signál.)

### Rezonanční obvod a anténa

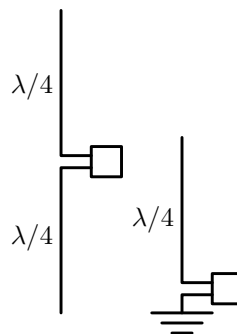
Jak píše Bc.<sup>MM</sup> Kristínka Kovalčíková, efektivní odpor cívky je přímo úměrný frekvenci procházejícího proudu. Naopak odpor kondenzátoru je frekvenci nepřímo úměrný. Signál příliš nízké frekvence tedy projde skrz cívku do země a signál příliš vysoké frekvence projde obdobně přes kondenzátor. Pro frekvenci, na kterou je obvod naladěn, je celkový odpor cívky a kondenzátoru největší a signál jde skrz sluchátka.<sup>8</sup>

Anténa je sama o sobě také rezonančním obvodem, chová se jako odpor, cívka a kondenzátor, zapojené v sérii. Odpor je přibližně tzv. *vyzařovací odpor*, na kterém v případě příjmu „vzniká“ napětí. Indukčnost a kapacita antény pak určují frekvenci, na které bude mít anténa minimální odpor a nejlepší příjem. Kombinace vlastností antény a rezonančního obvodu pak tvoří výslednou charakteristiku přijímače.

### Typy antén

Následující text vychází z příspěvků Bc.<sup>MM</sup> Kristínky Kovalčíkové a Karolíny Janíkové.

Jednou z typických antén je dipól (obr. t5.2,  $\lambda$  je vlnová délka signálu). Může mít podobu dvou tyčí, mezi kterými je umístěn přijímač, anebo lze jednu



Obr. t5.2

<sup>7</sup> Pozn. red.: Ačkoliv by se mohlo zdát, že v tomto případě vysíláme signál s jednou frekvencí, není tomu tak. Pokud bychom si jej rozložili do frekvenčního spektra, bude poněkud „roztáhlý“ na obě strany od frekvence nosné. To je způsobeno časově proměnnou modulací amplitudy nosné. Pokud se o tom chcete dozvědět více, najděte si něco o Fourierových řadách a Fourierově transformaci.

<sup>8</sup> Pozn. red.: Fakt, že jsou sluchátka zapojena paralelně k LC obvodu, znamená, že jej nevhodně zatěžují, a čím nižší je odpor sluchátek, tím hůře se obvod dostane do rezonance. Proto jsou vhodná vysokoimpedanční sluchátka, anebo je místo nich možno použít zesilovač s vysokým vstupním odporem.

tyč nahradit dostatečně velkou vodivou plochou (třeba zemí), čímž získáme anténu v podobě jednoho drátu a uzemnění.

Rezonanční frekvence dipólové antény je dána její délkou. Pro dipólovou anténu naladěnou na dlouhé nebo střední vlny bychom potřebovali několik stovek metrů drátu, což je poněkud nepohodlné. Anténa samozřejmě dokáže přijímat i jiné frekvence, než je její rezonanční (nakreslete si závislost impedance RLC obvodu na frekvenci), ale ne tak dobře. Proto platí, že čím delší anténa, tím lépe.

Dipólová anténa se v praxi často používá pro příjem VKV a televizního vysílání, kde je potřebná délka pod dva metry.

Pro příjem dlouhovlnného vysílání se většinou v praxi používají antény mající podobu uzavřené smyčky (buďto jako rám ve volném prostoru, anebo cívka s feromagnetickým jádrem). Pokud se k takovéto anténě připojí paralelně kondenzátor, můžeme získat rezonanci i pro dlouhé vlny při zachování rozumně malých rozměrů antény. Určitou nevýhodou takovýchto antén je poměrně vysoká selektivita, takže na ni lze zachytit jen vysílání na frekvencích blízkých její rezonanci, a anténu je tedy potřeba vyladit.

K těmto anténám nám zatím mimo zmínění jejich existence nic jiného nepřišlo, takže jejich problematiku ponecháme pro vaše další příspěvky.

### Trocha historie

Stručný historický přehled nám poslala Karolína Janíková.

První bezdrátový přenos uskutečnil roku 1895 italský elektroinženýr Guglielmo Marconi. V roce 1896 přenesl signály na vzdálenost 1,6 km. V roce 1896 si nechal svůj vynález patentovat a roku 1902 už se pravidelně posílaly zprávy přes Atlantický oceán.

První přenosy byly uskutečněny pomocí dlouhých vln. Po první světové válce se Marconi začal věnovat i výzkumu krátkovlnného vysílání, kde se mu především podařilo dosáhnout větší směrovosti vysílání. Kromě vynálezu a rozšíření rádiové komunikace zkoumal také šíření radiových vln a jejich odraz od ionosféry.

Některé zdroje uvádí jako vynálezce rádia ruského fyzika Alexandra Štěpanoviče Popova. Ten roku 1895 předvedl přístroj pro zachytávání atmosferických výbojů, což byl vlastně radiový přijímač. Postupným zdokonalováním dosáhl roku 1899 spojení na vzdálenost 46 kilometrů. Nicméně pokusy byly Ruskou vojenskou správou utajeny a o patent požádal až roku 1899.

Roku 1933 získal Edwin Howard Armstrong patent na systém frekvenční modulace. Ta umožnila vysílání s vyšší kvalitou a odolností proti rušení.

*Marble*

## Téma 6 – Laplaceovská síť

Tohoto tématka se zhostili dva řešitelé – jeden teoretické a jeden praktické části. Skoro jako by se domluvili.



## Teorie

Mgr.<sup>MM</sup> Ondřej Bílka správně rozřešil všechny tři teoretické otázky – první vlastnost získáme snadno počítáním rovnic které musejí hodnoty v aktivních bodech splňovat, druhá plyne z toho, že průměr nemůže být větší než všechny hodnoty, z nichž je vytvořen, a úvahy o souvislosti sítě, a třetí plyne z druhé sporem.

## Praxe

Peter Perešíni se naopak úlohy zhostil z praktického hlediska a vytvořil program v Delphi pro řešení a vizualizaci DDLÚ. Správně odpozoval, že metoda Gauss-Seidelova je rychlejší než metoda Jacobiova (asymptoticky někdy až dvakrát rychlejší) a že obě metody jsou poměrně pomalé. Pro experimentování s relaxačním parametrem si bohužel zvolil metodu Jacobiovu, která je pro tento účel zcela nevhodná. Gauss-Seidelova metoda s vhodným relaxačním parametrem (tzv. SOR) obyčejně zrychlí konvergenci velmi podstatně.

## Petrova metoda

Peter naopak navrhl vlastní metodu řešení DDLÚ vycházející z fyzikální představy, že každý bod bude mít kromě své hodnoty ještě i rychlost změny. Rozdíly mezi hodnotou v bodě a průměrem hodnot sousedů (které v přesném řešení vymizí) pak budou ovlivňovat tuto rychlost (tedy udělovat zrychlení). Metoda vyžaduje dva parametry: koeficient zrychlení  $c > 0$  a tření  $1 > f > 0$ . Při optimálním ručním nastavení těchto parametrů ( $c = 1$ ,  $f = 0,02$ ) byla tato metoda na Petrově úloze zhruba 22-krát, resp. 30-krát rychlejší než metoda Gauss-Seidelova, resp. Jacobiho. Mohla dokonce soupeřit se zmíněnou SOR s optimálním relaxačním parametrem (který se v Petrově úloze pohyboval okolo hodnoty  $\omega = 1,97$ , opět při ručním ladění) – ta je na této úloze jen asi 2,5-krát rychlejší, což je velmi pěkný výsledek. Na podporu Petrovy metody je také nutné poznamenat, že ačkoliv používá nezanedbatelné množství paměti a výpočtů navíc oproti SOR, podstatně snáze se paralelizuje. Nevýhodou je naopak zase nutnost vyladit dva parametry oproti jednomu. Ve skutečnosti není ruční ladění obyčejně moc reálné, postupuje se buď na základě předchozích zkušeností, nebo pomocí různých automatických postupů vycházejících opět z teorie (a ta není triviální).

## Optimální parametry

Zpravidla se to dělá tak, že se začíná počítat Jacobiho metodou, a podle rychlosti její konvergence se odhadne tzv. *spektrální poloměr konvergenční matice*  $\rho(B)$ , který udává rychlost konvergence (je vždy kladný, a čím menší, tím lépe). Často lze (za určitých předpokladů) odvodit analytický vztah mezi  $\rho(B)$  a  $\rho(L)$ , spektrálním poloměrem konvergenční matice skutečně použité metody – pak se parametry stanoví tak, aby bylo  $\rho(L)$  co nejmenší. Poměrně komplikovanou analýzou by bylo možné odvodit, že pro Petrovu metodu platí, že její spektrální poloměr  $\rho(P)$  je řešením kvadratické rovnice

$$\rho(P)^2 - \rho(P)[2 - f - c(1 - f)\rho(B)] + (1 - f) = 0$$

a bylo by potřeba optimalizovat koeficienty tak, aby absolutní hodnota řešení byla minimální (jsou dvě, a jako na potvoru to bude zrovna to s větší absolutní hodnotou). Tento vztah platí ovšem jenom pro určité „rozumné“ hodnoty  $f, c$  (např. ty, které Petr našel), obecně bude situace ještě složitější (přesně se dá říci, že uvedená rovnice je transformační vztah pro celé spektrum matice  $B$ ). I v tomto případě však optimalizace parametrů  $f$  a  $c$  je velmi komplikovaná záležitost – minimum by asi bylo lépe hledat numericky. Pro srovnání, optimální parametr  $\omega$  pro SOR je za určitých předpokladů dán přesně vztahem

$$\omega_o = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

a spektrální poloměr matice je pak roven

$$\rho(L_{\omega_o}) = \left( \frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}} \right)^2.$$

### Několik poznámek závěrem

Asymptoticky optimální parametr nemusí být nejlepší zpočátku a může konvergenci dokonce velmi zpomalit. Jeden z postupů, které to řeší je tzv. Čebyševova akcelerace. Stacionární lineární metody (všechny výše uvedené) jsou postupně zcela vytlačovány nelineárními a nestacionárními metodami. Přesto mají stále význam zejména jako tzv. předpokládače a také pro nesymetrické systémy (systém rovnic DDLÚ je symetrický).

## Řešení úloh

### Úloha 3.1 – Kombinatorická tabulka (5b)

#### Zadání:

Nechť je  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  tabulka. Provedeme s ní takovouto transformaci:

$$a'_{uv} = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \binom{u}{i} \cdot \binom{v}{j} \cdot (-1)^{(i+j)} a_{ij} \quad (r1.1)$$

pro  $u = 1, \dots, m$ ,  $v = 1, \dots, n$  kde  $\binom{a}{b}$  je kombinační číslo  $a$  nad  $b$  (klademe nula pro  $a < b$ ). Dokažte, že tato transformace aplikovaná dvakrát na stejnou tabulku ji nezmění – jinými slovy, je sama k sobě inverzní. Můžete se pokusit tvrzení analogicky rozšířit i na vícedimenzionální tabulky.

#### Řešení:

Řešení, které si ukážeme, je docela jednoduché, ale vyžaduje určitý „vědecký“ náhled na věc – je to typická ukáзка způsobu, jakým je matfyzák učen přemýšlet o problémech. Mějme naši tabulku  $m \times n$  reálných čísel. (V zadání toto

nebylo specifikováno, a pro řešení úlohy to není podstatné. Důkaz bude stejně nebo velmi podobně fungovat pro čísla celá, racionální, nebo komplexní, příp. i polynomy, zkrátka libovolný *okruh*.)

Máme zadán určitý předpis, který nám z této tabulky vyrobí jinou tabulku  $m \times n$  reálných čísel. Odborně se říká, že máme *zobrazení*. Označíme si ho  $F$  a dále si označíme  $T$  množinu všech tabulek  $m \times n$  reálných čísel. Máme zobrazení na množině  $T$ , což se zpravidla značí  $F: T \rightarrow T$ . První věc, které je třeba si všimnout, je, zda zobrazení není *lineární*. Co to znamená? Všimněte si, že na množině  $T$  lze přirozeným způsobem zavést *sčítání tabulek* a *násobení tabulky reálným číslem*. Tabulky sečteme prostě tak, že sečteme odpovídající si políčka, a vynásobíme ji reálným číslem tak, že vynásobíme jím každé políčko. Navíc takto zavedené sčítání a násobení splňuje spoustu pěkných, přirozených vlastností, které bychom od sčítání a násobení očekávali (nebudeme si je vyjmenovávat, není to nutné). Odborně se říká, že množina  $T$  s těmito dvěma operacemi tvoří *vektorový prostor* (též *lineární prostor*) *nad tělesem reálných čísel*. Když tedy máme sčítání a násobení reálným číslem, pak o zobrazení  $F$  říkáme, že je *lineární*, když splňuje pro každé dvě tabulky  $A, B \in T$

$$F(A + B) = F(A) + F(B),$$

a dále pro každou tabulku  $A$  a reálné číslo  $r$

$$F(r \cdot A) = r \cdot F(A).$$

Jinými slovy, když nejprve sečteme tabulky, a pak provedeme na výsledek naši transformaci, dostaneme totéž, jako když nejprve obě tabulky ztransformujeme a pak teprve sečteme. Podobně s násobením. Tyto vlastnosti jsou v zásadě triviální, ale dá se na nich vybudovat neuvěřitelně (tedy, pro nezkušeného) rozsáhlá teorie.

Co bychom chtěli vlastně dokázat? Máme dokázat, že pro každou tabulku  $A \in T$  platí  $F(F(A)) = A$ . Můžeme značit  $G(x) = F(F(x))$ , kde opět  $G: T \rightarrow T$  je zobrazení na  $T$ . To ale není všechno. Snadno je podle výše uvedených vlastností lineárního zobrazení vidět, že  $G$  je opět lineární (toto platí obecně – složení lineárních zobrazení je lineární). Chceme tedy dokázat, že  $G(A) = A$  pro každou tabulku  $A \in T$ . Představme si, že jsme toto tvrzení dokázali pro tabulku  $X$ . Snadno si rozmyslíte, že pro tabulky tvaru  $r \cdot X$ , kde  $r \in \mathbb{R}$ , už pak odtud plyne. Pokud jej dokážeme ještě pro tabulku  $Y$ , pak již platí i pro  $X + Y$ , a dokonce pro  $r \cdot X + s \cdot Y$ , kde  $r, s \in \mathbb{R}$ .

Dovedeme tuto myšlenku do důsledku a vybereme si takový systém co nej-jednodušších tabulek, aby se z nich postupným sčítáním a násobením reálnými čísly (odborně se říká *lineárními kombinacemi*) daly vygenerovat všechny tabulky z  $T$ . Učeně se říká *množinu generátorů*. Snadno nakoukneme, že taková přirozená množina generátorů jsou ty tabulky, které mají v jediném políčku jedničku a v ostatních nuly. Vezměme tedy tabulku, která má jedinou jedničku v  $k$ -tém řádku a  $l$ -tém sloupci, čili  $A$  s prvky  $a_{ij}$ , kde  $a_{ij} = 1$  pro  $i = k, j = l$ ,

jinak  $a_{ij} = 0$ , kde  $k, l$  jsou libovolná čísla,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ . Snadno nahlédneme, že tabulka  $B = F(A)$  (tedy po první transformaci) má pak velmi jednoduchý tvar, neboť všechny členy v sumě na pravé straně (r1.1) jsou nulové, až na jediný. Bude

$$b_{ij} = \binom{i}{k} \cdot \binom{j}{l} \cdot (-1)^{(k+l)},$$

a pro tabulku  $C = F(B)$  tedy vychází

$$c_{uv} = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \binom{u}{i} \cdot \binom{v}{j} \cdot (-1)^{(i+j)} \binom{i}{k} \cdot \binom{j}{l} \cdot (-1)^{(k+l)},$$

což lze přepsat jako

$$c_{uv} = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \left[ \binom{u}{i} \cdot \binom{i}{k} \cdot (-1)^{(i+k)} \right] \cdot \left[ \binom{v}{j} \cdot \binom{j}{l} \cdot (-1)^{(j+l)} \right],$$

a tudíž s využitím distributivity násobení (první závorka závisí jen na indexu  $i$  a druhá jen na  $j$ )

$$c_{uv} = \left[ \sum_{i=1, \dots, m} \binom{u}{i} \cdot \binom{i}{k} \cdot (-1)^{(i+k)} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1, \dots, n} \binom{v}{j} \cdot \binom{j}{l} \cdot (-1)^{(j+l)} \right].$$

Nyní stačí nahlédnout, že výraz v první závorce je roven jedné pro  $u = k$ , jinak nule. (Výraz v druhé závorce je totéž v jiných proměnných. Všimněte si, že je to vlastně tvrzení analogické původní úloze, jen pro jednodimenzionální tabulku, tedy posloupnost. Stejným způsobem by se důkaz zredukoval na 1D případ i pro vícedimenzionální tabulky.) To je zřejmé pro  $u \leq k$  (vzpomeňte si, jak jsme rozšířili definici kombinačního čísla v zadání úlohy). V opačném případě, jak asi tušíte, použijeme binomickou větu, k čemuž potřebujeme vztah

$$\binom{u}{i} \cdot \binom{i}{k} = \binom{u-k}{i-k} \cdot \binom{u}{k},$$

který si snadno ověříte rozepsáním příslušných kombinačních čísel pomocí faktoriálů (a platí triviálně i pro  $u \leq k$ ). Takže máme (index  $i$  stačí projít od  $k$  do  $u$ , ostatní členy jsou nula).

$$\begin{aligned} \sum_{i=k, \dots, u} \binom{u}{i} \cdot \binom{i}{k} \cdot (-1)^{(i+k)} &= \binom{u}{k} \sum_{i=k, \dots, u} \binom{u-k}{i-k} \cdot (-1)^{(i-k)} = \\ &= \binom{u}{k} (1-1)^{u-k} = 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že  $c_{uv} = 1$  pro  $u = k$ ,  $v = l$ , jinak  $c_{uv} = 0$ , což je přesně vyjádření naší původní elementární tabulky s jedinou jedničkou. Tím, jak již

víme, je důkaz zakončen. Všimněte si, jak nám linearita  $F$  umožnila řešit úlohu jen pro jednoduché případy a z nich „poskládat“ obecné řešení, zatímco vztah v plné obecnosti by bylo těžké i jenom napsat. Lineární zobrazení (a lineární prostory) se vyskytují velmi často a využití jejich obecných vlastností vám může ušetřit dost práce. S trochou cviku stačí jen „mrknout“, zda není daná vlastnost, úprava atd. lineární, a tedy zda se s ní nedá vypořádat tímto obecným způsobem.

*HighEgg*

### Úloha 3.2 – Šachovnice (4b)

#### Zadání:

Je dána šachovnice  $8 \times 8$ . Zjistěte, zdali je možné tuto šachovnici vydláždit pomocí kostky ve tvaru čtverce  $2 \times 2$  a patnácti kostek ve tvaru písmene „L“ (ze čtyř čtverců).

#### Řešení:

Trik, kterým bylo možné vyřešit tuto úlohu, spočíval ve vhodném obarvení šachovnice.

Pole šachovnice obravíme červeně a zeleně (barvy). Červená pole rozdělíme na karmínově červená a vínově červená, zelená na limetkově zelená a olivově zelená (odstíny) tak, že odstíny v lichých sloupcích budou karmínové a limetkové a v sudých sloupcích budou vínové a olivové.

Čtverec  $2 \times 2$  zabere od každého odstínu právě jedno políčko a položená „L“ kostička zabere dvě červené a dvě zelené, přičemž v jedné barvě jsou odstíny různé a ve druhé stejné.

Kostičku typu „L“, která pokrývá dva různé odstíny zelené barvy, budeme nazývat zelenou, a kostička, která pokrývá dva různé odstíny červené barvy, bude červená. Počet kostiček ve tvaru „L“ je lichý, proto musí existovat lichý počet kostiček jedné barvy a sudý počet kostiček druhé barvy. Z toho plyne, že i počet zastoupení každého odstínu jedné barvy je lichý, a opačné barvy sudý, což je spor, protože všechny odstíny jsou na šachovnici zastoupeny stejně.

*Angwin*

### Úloha 3.3 – Skrz kvádr (3b)

#### Zadání:

Mějme kvádr složený ze 74 088 jednotkových krychliček, jehož rozměry jsou  $63 \times 42 \times 28$ . Uděláme do něj velmi tenkou díru přímo z jednoho vrcholu do protilehlého. Kolik malých krychliček bude provrtaných?

#### Řešení:

Úlohu šlo bohužel pochopit dvěma způsoby – je kostička provrtaná, prochází-li dírka jen jejím rohem (či hranou)? Vyřešíme obě varianty, nejprve tu, že není.

Nejprve si je třeba všimnout, že když jsou všechny rozměry  $(a, b, c)$  dělitelné číslem  $k$ , lze toto řešit jako  $k$  oddělených (shodných) úloh s rozměry  $(a/k, b/k, c/k)$ .

Nejsou-li, pak jsou buď po dvou nesoudělná – tehdy bude provrtáno právě  $a + b + c - 2$  kostiček, při vrtání se totiž při přechodu do jiné kostičky změní jen jediná souřadnice, a tyto se mění od  $(1, 1, 1)$  do  $(a, b, c)$ , toto plyne z nesoudělnosti – aby  $t \cdot a \in \mathbb{N} \wedge t \cdot b \in \mathbb{N}; t \in (0, 1)$ , musí  $a$  a  $b$  být soudělná.

Jsou-li nějak po dvou soudělná, můžeme použít podobnou úvahu, ale musíme odečíst změny souřadnic, ke kterým došlo zároveň (a proto projdu méně kostiček). Zároveň se souřadnice mění jen po dvou, po třech už nemohou,  $a$  a  $b$  se současně změní  $[\text{NSD}(a, b) - 1]$ -krát, podobně pro  $a, c$  a  $b, c$ . Dohromady

$$\begin{aligned} a + b + c - 2 - [\text{NSD}(a, b) - 1] - [\text{NSD}(b, c) - 1] - [\text{NSD}(a, c) - 1] = \\ = a + b + c - \text{NSD}(a, b) - \text{NSD}(a, c) - \text{NSD}(b, c) + 1, \end{aligned}$$

což odpovídá i případu, že jsou všechna nesoudělná.

Ještě složíme s  $k$ :

$$\begin{aligned} k [a/k + b/k + c/k + 1 - \text{NSD}(a/k, b/k) - \text{NSD}(a/k, c/k) - \text{NSD}(b/k, c/k)] = \\ = a + b + c + k - \text{NSD}(a, b) - \text{NSD}(a, c) - \text{NSD}(b, c), \end{aligned}$$

kde  $k = \text{NSD}(a, b, c)$ . Vlastně jsme se na to mohli od začátku dívat jako na  $a + b + c - 2$  provrtaných kostek a odečíst ty provrtané dvojměnou, ale pak ještě znovu přičíst trojměny, které jsme odečetli i za každou dvojměnu, to ale není na první pohled tak průhledné. Toto po dosazení vyjde

$$42 + 28 + 63 + 7 - 21 - 7 - 14 = 98.$$

Budeme-li počítat i jen „poškrábané“ kostičky, musíme v prvním kroku při dělení  $k$  připočíst  $6(k - 1)$ , protože z okolních 8 kostiček vrcholu jsme zatím započítali jen 2. I za každou dvojměnu je třeba připočíst 2 kostičky, neboť ze čtyř okolo hrany jsme započítali jen 2.

Tedy vyjde

$$\begin{aligned} a + b + c + k - \text{NSD}(a, b) - \text{NSD}(a, c) - \text{NSD}(b, c) + 6(k - 1) + \\ + 2k [\text{NSD}(a/k, b/k) - 1 + \text{NSD}(a/k, c/k) - 1 + \text{NSD}(b/k, c/k) - 1] = \\ = a + b + c + k - 6 + \text{NSD}(a, b) + \text{NSD}(a, c) + \text{NSD}(b, c). \end{aligned}$$

Toto po dosazení vyjde 176 provrtaných a poškrábaných kostiček.

*Gavento*





---

**Adresa redakce:**

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

*Telefon:* +420 221 911 235

*E-mail:* [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

*WWW:* <http://mam.mff.cuni.cz>

---

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory střeodočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.