



Termín odeslání: 27. 2. 2006

Milé řešitelky, milí řešitelé,

první měsíc nového roku se chýlí ke konci a to mimo jiné znamená, že se k vám dostává zbrusu nové vydání vašeho oblíbeného časopisu M&M. Protože už ale uplynulo mnoho vody od chvíle, kdy jste v rukou drželi první číslo současného ročníku, nastává čas na malé bilancování. Nemáme tím ovšem na mysli žádné zdlouhavé rozbory úspěchů či neúspěchů. Zkrátka sečteme body a – ano! Těm nejlepším z vás se brzy ve schránce objeví obálka s pozvánkou na naše jarní **soustředění**, které proběhne **od 4. do 12. 3. 2006** v Jeseníkách.

A protože objekt, ve kterém budeme společně trávit náš čas, je sice krásný, ale neveliký, bude soustředění odměnou jen pro přibližně 20 nejlepších. Ale nebojte se – máte ještě chvilku na to, abyste se mohli pokusit vyšvihnout se na čelní místa žebříčku, a tím si svou účast pojistit. Řešení úloh z 3. a 4. čísla (a všech letošních témat), která nám **přijdou do 9. 2. 2006**, vám v tom ještě mohou pomoci.

Pokud nám chcete trochu zjednodušit práci s vybíráním účastníků, připište ke svému řešení, jestli na soustředění chcete jet (resp. hlavně napište pokud jet nechcete).

vaši organizátoři

Zadání úloh

Úloha 4.1 – Trojúhelník (5b)

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníka, α, β, γ velikosti jeho vnitřních úhlů. Pro jaké trojúhelníky platí následující rovnost?

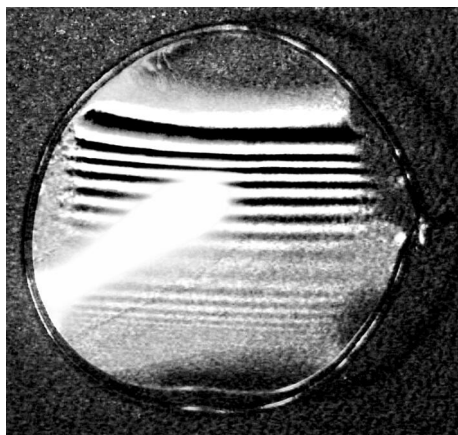
$$a(1 - 2 \cos \alpha) + b(1 - 2 \cos \beta) + c(1 - 2 \cos \gamma) = 0.$$

Úloha 4.2 – Bublifuk (5b)

Na obrázku vidíte fotografii blány vytvořené vodou s jarem. (Spolu s číslem byste měli dostat i barevný výtisk obrázku, který si také můžete stáhnout na adrese <http://mam.mff.cuni.cz/bublifuk.jpeg>.) Obrázek byl vyfocen prakticky ze stejného místa jako zdroj světla. (Úhel dopadu světla na blánu byl asi 10° .) Skutečný průměr smyčky je přibližně 5,5 cm.

Vysvětlete, proč obrázek vypadá tak, jak vypadá, a určete tloušťku jarové blány. Pokud není tloušťka konstantní, určete i její průběh.

Index lomu vody s jarem můžete považovat za shodný s indexem lomu vody. Toto tvrzení můžete případně zkusit potvrdit či vyvrátit na základě vlastních experimentů.



Úloha 4.3 – Věž z kostek (4b)

Lišáček Riki si staví věž z kostiček tak, že na rovnou desku položí jednu krychli, na ni další atd., aby postavil co nejvyšší věž (komín). Po chvíli snažení mu však věž spadne a začíná zase od začátku.

Když ho chudáka pozorujete, tak by vás určitě zajímalo, jaká je průměrná výška komínu, který postaví.

Riki má pravděpodobnost $1/3$, že kostičku položí přesně, $1/3$ že jí posune o polovinu délky hrany doleva a $1/3$ že jí posune o polovinu délky hrany doprava.

Řešení témat

Téma 2 – Konstrukční úlohy v prostoru

Pozn. red.: Za druhé číslo k tomuto tématu nedošly žádné příspěvky, můžete tedy pokračovat v tom, co bylo napsáno ve třetím čísle.

Nabízíme vám tu však další téma k přemýšlení. Pokuste se zobecnit známé Apolloniovy úlohy. Zadání těchto úloh je následující: Máte v rovině zadány tři geometrické útvary (kružnice, přímky, body – nemusí to být nutně např. tři kružnice, trojici můžeme nakombinovat libovolně). Najděte všechny kružnice v rovině takové, že se dotýkají všech tří zadaných útvarů.

Úloh tohoto typu existuje spousta a řešení se dají snadno najít na internetu. Zkuste tyto úlohy zobecnit do prostoru.

Tedy máme zadané čtyři prostorové geometrické útvary (roviny, koule, přímky, body, ...). Najděte všechny koulice takové, že se dotýkají všech čtyř zadaných útvarů.

Angwin

Téma 3 – Hexagonální life

Doc.^{MM} Jan Musílek

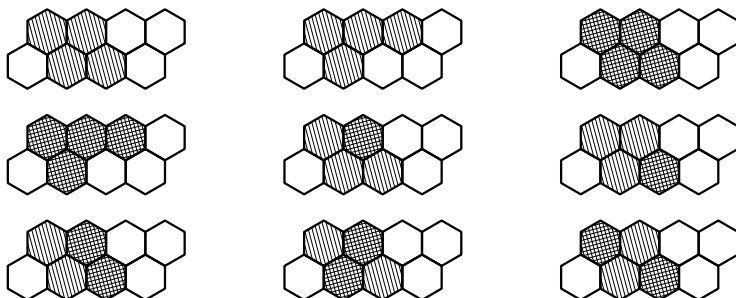
Nejjednodušší seskupení organismů

Izolované organismy typu 1 i 2 okamžitě zahynou. Stejně skončí i dvojice stejných organismů. Dvojice složená z různých typů organismů se nejprve rozroste, ale ve 3. generaci také zahyne. Trojice stejných organismů jsou stabilní – trvale přežívají, pokud nejsou zvenčí zasaženy jinou kolonií organismů. Smíšené trojice zahynou ve 3., nebo ve 2. generaci.

Čtveřice organismů¹

Na obrázku je několik možných uspořádání čtveřic organismů. Zkoumal jsem také další seskupení co do tvaru i barevnosti. Naprostá většina seskupení končí vyhynutím po několika generacích. Pouze vývoj druhého seskupení ve třetí řadě končí červenou² stabilní trojicí a úplně poslední seskupení (v poslední řadě) se promění na *maják* (pravidelný šestiúhelník z červených organismů, v jehož středu pravidelně bliká červený bod).

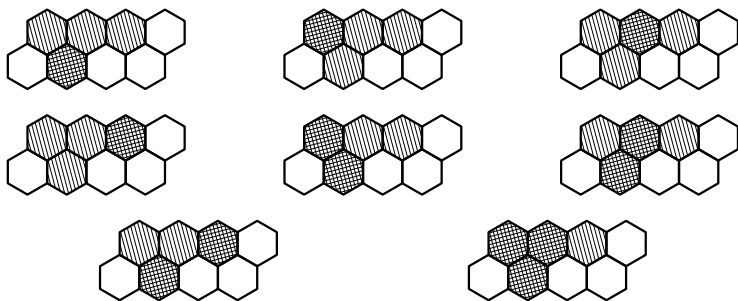
Vrtule je seskupení čtyř červených organismů, kde je jeden uprostřed a ostatní střídavě kolem něho (svírají spolu úhel 120°).³ Tento útvar se vrací do původního stavu s periodou 2.



¹ Pozn. red.: Pojmy *organismus* a *buňka* autor volně zaměňuje a znamenají jednu buňku celulárního automatu.

² Pozn. red.: Autor používá označení *červená buňka* pro buňku typu 1 (zde jednoduše šrafovaná) a *zelená buňka* pro buňku typu 2 (zde dvojitě šrafovaná).

³ Tento útvar neotiskujeme, protože byl v minulém čísle.



Pravidelné šestiúhelníky

(...)

Červené pravidelné šestiúhelníky se vyvíjejí takto:⁴

$a = 7$ – změní se na šest *majáků*.

$a = 6$ – vyhyne v 7. generaci.

$a = 5$ – vyhyne ve 4. generaci.

$a = 4$ – změní se na stabilní útvar.

$a = 3$ – vyhyne ve 3. generaci.

$a = 2$ – jedná se o tzv. *maják*.

Podobně jsem se zabýval zelenými pravidelnými šestiúhelníky pro $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Všechny kromě jednoho vyhynou. Pro $a = 5$ získáme šest stabilních červených trojic.

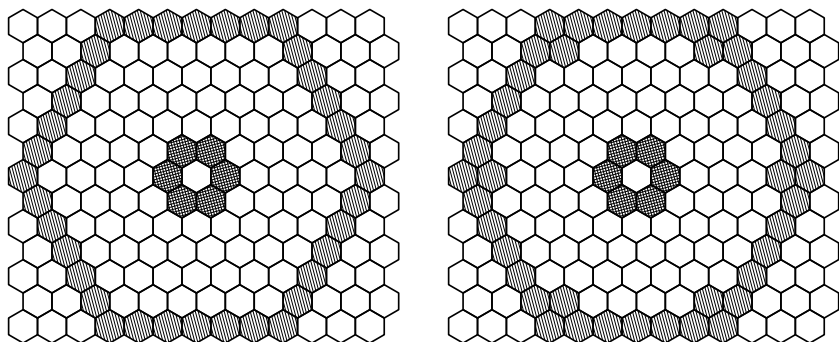
(...)

To co je zde uvedeno jsem zjistil za pomoci vlastního programu, který dám rád ostatním řešitelům k dispozici na adrese:

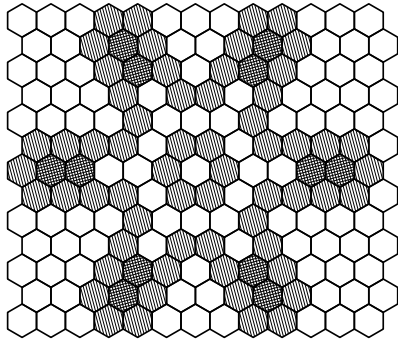
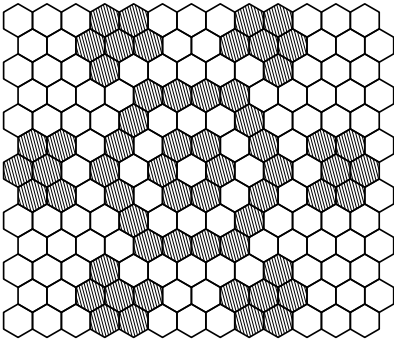
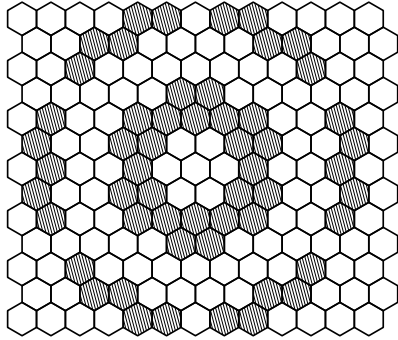
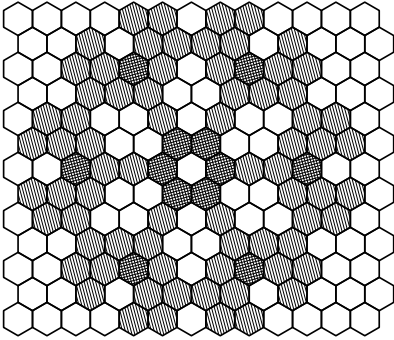
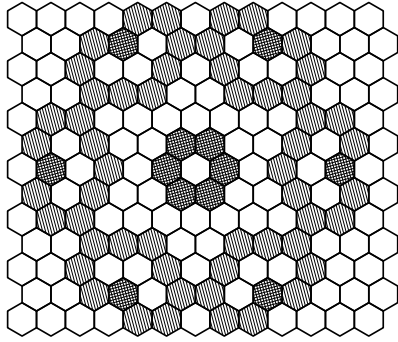
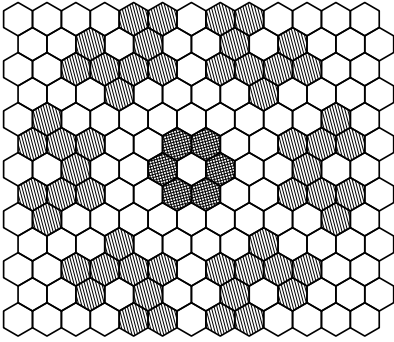
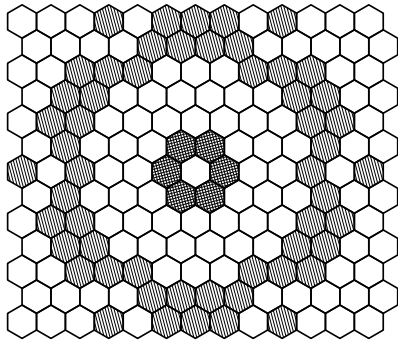
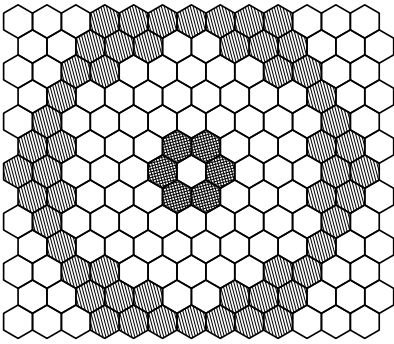
<http://www.sweb.cz/janmusilek/hexalife.html>

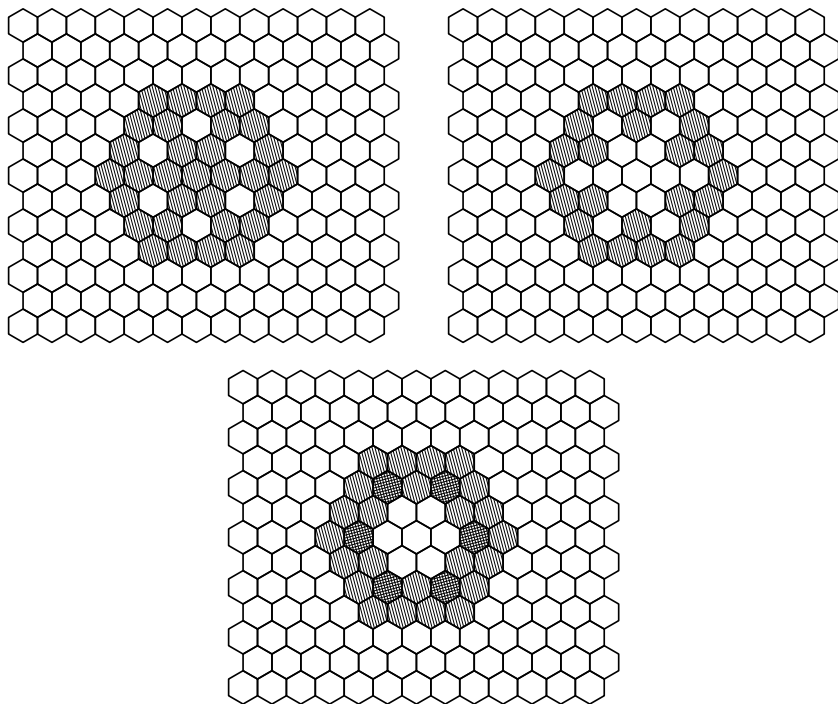
Pozn. red.: Na závěr otiskujeme esteticky velmi zajímavou „květinku“, kterou nám autor zaslal.

Poslal nám také povídání o „svícnech“ a rozbor přímých, klikatých a zubatých linií, které ale neotiskujeme.



⁴ Pozn. red.: Strana a je počet buněk které tvoří stranu šestiúhelníku. Ta má vždy tloušťku jedné buňky a vnitřek šestiúhelníku je prázdný.





Pozn. red.: Pokuste se nalézt útvar, který má co nejmenší poměr počátečního počtu buněk ku maximálnímu počtu buněk v jednom cyklu.

Irigi

Téma 4 – Generátory náhodných čísel

Pozn. red.: Pročpak jste nikdo neřešil tenhle problém?

Gavento

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Ruská ruleta

(4b)

Zadání:

Jako profesionální mafiáni máte jistě praxi ve hře „Ruská ruleta“. Pravidla jsou následující: Do zásobníku šestiranného revolveru se vloží jeden náboj a na začátku hry se zásobník protočí (jinými slovy, náboj se přesune na náhodné místo). Začíná hrát soupeř. Podrží si revolver u hlavy a stiskne spoušť. Poté (pokud stále ještě žije) podá pistoli vám. Je na vás, zda zásobník protočíte nebo ne, a poté stisknete spoušť vy. Hra pokračuje, dokud není jeden z hráčů po smrti.

- a) Pokud jste chytrí a protočíte zásobník vždy, když jste na tahu, a soupeř je hloupý a neprotočí zásobník nikdy, kolikrát za hru se průměrně stiskne spoušť?

- b) Pokud soupeř vždy zopakuje se zásobníkem to co vy (tj. protočí pokud jste protočili a neprotočí pokud jste neprotočili) a soupeř začíná (s protočeným zásobníkem samozřejmě), jak hrát, aby byla pravděpodobnost vaší smrti co nejmenší?

Řešení:

Nejprve si zkusíme spočítat, s jakou pravděpodobností zemře náš soupeř v případě a). Vypíšeme si postupně pravděpodobnosti, s jakými zemře v jednotlivých kolech:

1. kolo: $1/6$ (soupeř nepřežil).
2. kolo: $5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/5$ (soupeř přežije · já přežiju · soupeř nepřežije).
3. kolo: $5/6 \cdot 5/6 \cdot 4/5 \cdot 5/6 \cdot 1/5$ analogicky předchozímu.
- ...
- n . kolo: $5/6 \cdot 5/6 \cdot 4/5 \cdot 5/6 \cdot \dots \cdot 4/5 \cdot 5/6 \cdot 1/5$.

Celkovou pravděpodobnost získáme sečtením pravděpodobností v jednotlivých kolech. K tomu využijeme vzoreček pro součet geometrické řady.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Po dosazení získáme $a = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/5$ a $q = 4/5 \cdot 5/6$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5/36}{1-2/3} = \frac{5}{12}.$$

Ještě musíme připočítat odlišné 1. kolo, tedy celkově zemře s pravděpodobností $7/12$. Nyní bychom chtěli vědět, jak dlouho bude hra průměrně trvat. To zjistíme tak, že sečteme všechny možné délky hry přenásobené pravděpodobnostmi, s jakou se hra bude hrát tak dlouho. Neboli hra bude trvat 1 kolo s pravděpodobností $1/6$, 2 kola s pravděpodobností $1/6 \cdot 5/6$ atd. Na tento výpočet potřebujeme vzoreček

$$\sum_{n=1}^{\infty} anq^{n-1} = \frac{a}{(1-q)^2},$$

který získáme zderivováním obou stran vzorce pro součet geometrické řady. Ještě si ho upravíme do vhodnějšího tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} anq^n = \frac{aq}{(1-q)^2}.$$

Náš případ je ale složitější, jelikož výsledný součet se skládá ze dvou řad, jedné z lichých kol a druhé ze sudých kol, což se dá zapsat jako:

$$\frac{1}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} a_1(2n+2)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_2(2n+3)q^n$$

a protože v našem případě $a_1 = a_2$,

$$\frac{1}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} a_1(4n+5)q^n = \frac{1}{6} + 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_1 n q^n + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n.$$

Po dosazení zjistíme, že průměrná délka hry bude $25/4$ kol.

Nyní odpovíme na otázku b). V podstatě máme 3 možnosti:

- 1) Vždy protáčet.
- 2) Protáčet každé liché kolo.
- 3) Dvakrát neprotáčet a jednou protočit.

Ostatní možnosti jsou jejich kombinacemi, a tak i výsledná pravděpodobnost bude něco mezi nimi. Možnost nikdy neprotáčet by nás musela zabít, pokud by na nás došla řada ve 3. kole. Spočítáme jednotlivé možnosti. První je jednoduchá, pravděpodobnost smrti hráče při každém pokusu je $1/6$. Máme $a = 1/6$ a $q = 25/36$ a soupeř zemře s pravděpodobností $6/11$. Pro druhou možnost si vypíšeme prvních pár kol:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \dots$$

Pokud si výraz upravíme na

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{36} \dots,$$

vidíme, že jde v podstatě o dvě stejné geometrické řady. Jejich sečtením zjistíme, že soupeř zemře s pravděpodobností $12/21$. Analogicky bychom zjistili, že při třetí možnosti zemře v $13/18$ případech. Nejvýhodnější je tedy pro nás 3. možnost.

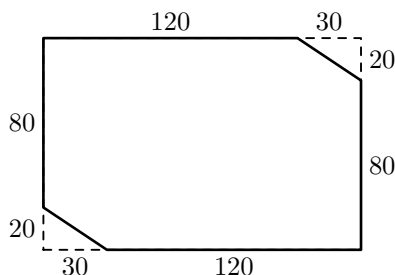
Jó, život mafiána holt někdy není tak jednoduchý.

Tibor

Úloha 2.2 – Rohož (4b)

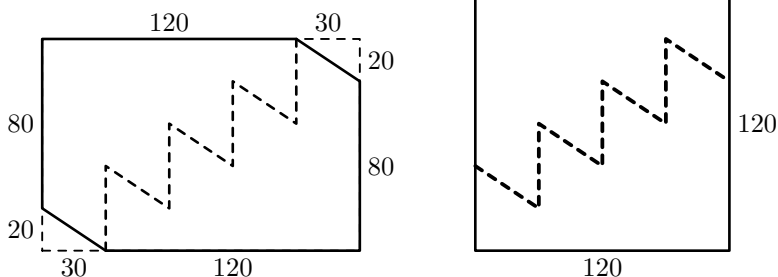
Zadání:

Při neopatrné manipulaci s ohněm shořely křivé rohoži dva rohy (viz obrázek). Vaším úkolem je rohož opravit rozstříháním na co nejméně kousků libovolného tvaru tak, aby se z nich dala beze zbytku sestavit čtvercová rohož. Nastříhané kousky nelze převracet. Pokuste se dokázat, že vaše řešení je optimální a řešení s menším počtem kousků nemůže existovat.



Řešení:

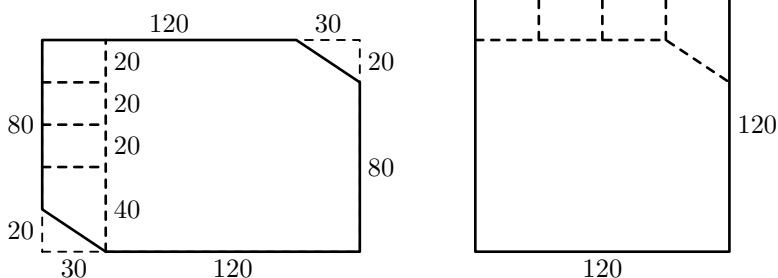
Všichni řešitelé správně a bez problémů spočítali obsah rohožky 1440. Z toho plyne, že strana výsledného čtverce musí být rovna 120. Nalezení správného rozstříhání ohořelé rohožky se ukázalo jako mnohem těžší. Řešení s nejmenším



Obr. r2.1

počtem dílků (konkrétně se dvěma) využívá důmyslného triku. Rohožku musíme rozstříhnout zubatou křivkou tak, aby vzniklo něco jako šikmé schodiště. Posunutím vystřižených dílků o jeden schod složíme výsledný čtverec. Na toto řešení přišli pouze Bc.^{MM} Tereza Pechová, Mgr.^{MM} Alžběta Pechová a Doc.^{MM} Honza Musílek (viz obr. r2.1).

Ostatní řešitelé našli řešení s větším počtem dílků, nejčastěji s pěti. Takto rohožku rozstříhala například Mgr.^{MM} Tereza Beránková (viz obr. r2.2).



Obr. r2.2

Na méně než dva dílky rohožku rozstříhat nelze, protože by to znamenalo nestříhat ji vůbec. A z původního tvaru rohožky bychom čtverec určitě nesestavili.

Jirka

Úloha 2.3 – Cyklista na kolotoči (4b)

Zadání:

Představte si cyklistu, který jede na kolotoči po obvodu tak, že v inerciální soustavě se nepohybuje (jede obvodovou rychlostí opačným směrem, než se pohybuje kolotoč). Z pohledu inerciální soustavy na něj nepůsobí žádná síla (takže se nemusí nijak naklánět, aby ji vyrovnával). Podívejme se však na stejný děj z pohledu soustavy spojené s kolotočem: Na cyklistu působí síla odstředivá, takže se musí naklonit, aby ji kompenzoval.

Jak je možné, že popis tohoto děje ve dvou různých vztažných soustavách dává různé výsledky?

Řešení:

Nejprve nastíníme několik omylů, kterých jste se dopustili, a uvedeme proč jsou špatné:

Odstředivá síla se kompenzuje s dostředivou. Podobná tvrzení lze občas slyšet, ale ukazují na nepochopení toho, co je odstředivá a co dostředivá síla. *Odstředivá síla* je zdánlivou silou, která působí (při pozorování z rotující neinerciální vztažné soustavy) neustále na každé těleso. Naopak *dostředivá síla* nemá s neinerciálními soustavami nic společného. Je to síla, která v dané vztažné soustavě *musí působit* na těleso, které se z pohledu této soustavy má pohybovat po kruhové dráze. Přitom není podstatné, jestli je tato soustava inerciální, nebo neinerciální.

Síla, která působí, se samozřejmě nemůže „kompenzovat“ se silou, kterou potřebujeme (cyklista se z pohledu kolotoče pohybuje po kruhové dráze). Odstředivá síla může maximálně být dostředivou silou pro nějaký pohyb. V našem případě má ale opačný směr, takže ani toto nepřipadá v úvahu.

Neinerciální soustavy nemůžeme použít, protože „něco“ zanedbávají. Nevíme přesně co tím bylo myšleno, ale není to pravda. Neinerciální soustavy (pokud započteme příslušné zdánlivé síly) jsou naprosto ekvivalentní inerciálním soustavám. „Něco zanedbávají“ jen pokud na tyto zdánlivé síly zapomeneme.

Situace je analogická situaci, kdy cyklista vjíždí do zatáčky a naklání se. Zde jste předpokládali, že na kolotoči cyklista „stále zatáčí“, a tedy musí být nakloněný. To ale není pravda. Při běžném zatáčení na kolo působí třecí síla, která mění jeho směr. Takováto síla ale v našem případě nepůsobí. Nejjednodušším protipříkladem je následující pokus. Představte si, že cyklista upustí kámen. Ten je vůči němu na počátku v klidu. Při pohledu z inerciální soustavy je cyklista i kámen v klidu, a kámen tedy padá „rovně dolů“ vedle cyklisty. Totéž samozřejmě uvidí i pozorovatel na kolotoči. Pokud by cyklista „zatáčel“ díky síle působící mezi podlahou kolotoče a kolem, musel by se kámen, nedotýkající se podlahy, pohybovat jinak než cyklista.

Správné řešení vyžadovalo, abyste započítali i tzv. coriolisovu sílu. Je to zdánlivá síla, která působí na každé těleso, které se v rotující neinerciální soustavě pohybuje. Její vliv je názorně vidět v případě pohybu směrem ke středu otáčení. Když uděláme krok směrem ke středu, máme z pohledu inerciální soustavy příliš velkou obvodovou rychlost. (Obvodová rychlost roste se vzdáleností od středu, protože určitý bod musí během jedné otočky trvat stále stejnou dobu „oběhnout delší dráhu“.) Budeme tedy strháváni ve směru otáčení, což si při pozorování z neinerciální soustavy (kde žádná obvodová rychlost nefiguruje) vysvětlíme působením síly – právě coriolisovy.

Obecný vzorec pro tuto sílu ve vektorovém tvaru je:

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

kde ω je úhlová rychlost rotace neinerciální soustavy a v rychlost pohybu z hlediska neinerciální soustavy. Tato síla tedy nemusí působit jen při pohybu ke středu otáčení. Působí i na našeho cyklistu, který se pohybuje rychlostí v proti směru otáčení kolotoče. ($v = \omega r$, kde r je poloměr kolotoče, resp. dráhy cyklisty.)

Z pohledu neinerciální soustavy tedy na cyklistu působí odstředivá síla

$$F_o = m\omega^2 r$$

směrem „ven“ a coriolisova síla

$$F_c = 2m\omega^2 r$$

směrem „dovnitř“.⁵ Výslednice těchto sil je

$$F = m\omega^2 r$$

směrem dovnitř. Tato síla ale přesně odpovídá potřebné dostředivé síle, která bude cyklistu udržovat na kruhové dráze o poloměru r .

Můžeme tedy říct, že

- z pohledu inerciální soustavy je cyklista v klidu a výslednice sil na něj působících je nulová;
- z pohledu neinerciální soustavy se cyklista pohybuje po kruhové dráze o poloměru r (objíždí kolotoč) a výslednice sil na něj působících je dostředivá síla, která pohyb po této dráze umožňuje (kdyby byla výslednice nulová, musel by se pohybovat přímočaře).

Po započítání coriolisovy síly tedy veškeré zdánlivé rozpory vymizí.

Irigi a kolektiv

⁵ Směr vektoru ω je nad, resp. pod kolotoč (podle směru otáčení). Směr výsledku vektorového součinu určíme pravidlem pravé ruky. (Znáte jej asi z určování síly působící na náboj pohybující se v magnetickém poli, ale platí obecně pro každý vektorový součin.) Velikost vektorového součinu dvou kolmých vektorů je součin jejich velikostí.

Výsledková listina

Poř.	Jméno	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
			r1	r2	r3	t1	t3		
1.	Mgr. ^{MM} Ondřej Rott	30						30	
2.	Doc. ^{MM} Jan Musílek	161	3	5			9	17 28	
3.	Mgr. ^{MM} Jakub Beran	31						24	
4–5.	Dr. ^{MM} Kateřina Böhmová	57						23	
	Mgr. ^{MM} Ondřej Bílka	26						23	
6–7.	Mgr. ^{MM} Tomáš Javůrek	45						18	
	Mgr. ^{MM} Alžběta Pechová	45		4	1	5		10 18	
8.	Bc. ^{MM} Hana Jirků	15	4	2	1			7 15	
9–10.	Dr. ^{MM} Matěj Korvas	58						14	
	Mgr. ^{MM} Radim Vansa	40						14	
11–13.	Mgr. ^{MM} Jakub Opršal	46						13	
	Mgr. ^{MM} Jaroslav Hančl	40						13	
	Bc. ^{MM} Miroslav Klimoš	13						13	
14–15.	Mgr. ^{MM} Marek Scholz	45						12	
	Bc. ^{MM} Marie Dostálová	12						12	
16.	Bc. ^{MM} Beáta Hergelová	10						10	
17.	Bc. ^{MM} Martin Křivánek	13						9	
18.	Mgr. ^{MM} Marek Pecha	39	3	3				6 8	
19–20.	Dr. ^{MM} Eva Černohorská	89						7	
	Mgr. ^{MM} Marek Basovnik	28						7	
21–23.	Dr. ^{MM} Jozef Cmar	90						6	
	Mgr. ^{MM} Tereza Beránková	45	3	3				6 6	
	Martin Alan	6						6	
24–25.	Doc. ^{MM} Tereza Klimošová	131						5	
	Bc. ^{MM} Tereza Pechová	16		4	1			5 5	
26.	Michal Bezvoda	4						4	
27–29.	Mgr. ^{MM} Radim Pechal	33						3	
	Lucie Mohelníková	3						3	
	Jan Vaňhara	3						3	
30–31.	Mgr. ^{MM} Dárius Gál	20						2	
	Jiří Martišek	2						2	
32.	Lenka Švidrnochová	1						1	

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.