Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XII číslo 3

Termín odeslání: 30. 1. 2006

Milí kamarádi,

rok se s rokem opět schází a v našich domovech začíná vonět cukroví, jehličí a vánoční pohoda. Jistě jste zvědaví, co vám letos Ježíšek pod stromeček nadělí. Zpytujete svědomí, zda jste byli opravdu hodní, a má-li proto smysl vůbec nějaké dárky očekávat. Nuže vězte, že drobný závdavek právě držíte ve svých rukou – ano, Ježíšek vám už naším prostřednictvím přináší nové úlohy a témata. :o) Takže až dozpíváte koledy, dojíte kapra a rozbalíte poslední dárek, neváhejte a začněte honem řešit! Jarní soustředění *bude*! Ale jenom pro ty nejlepší … Hlavně si nezapomeňte užít volno, zimní radovánky a čas strávený se svými blízkými.

Tak tedy *veselé Vánoce a šťastný nový rok*. :o)

Redakce

Zadání témat

Téma 5 – Postavte si rádio

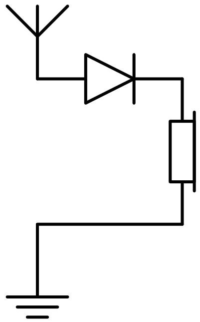
Rádio, to je taková krabička s několika ovládacími knoflíky a spoustou elektroniky uvnitř. Ale v tomto tématku se budeme zabývat poněkud jednoduššími konstrukcemi.

Ke stavbě úplně nejjednoduššího rádia, často označovaného jako krystalka, toho moc nepotřebujete. Stačí hodně dlouhý kus obyčejného drátu, vhodná dioda[1] a sluchátka. S takovýmto vybavením lze poslouchat AM[2] signál z nějakého dostatečně silného vysílače. Postup je poměrně jednoduchý – vhodným způsobem umístíme do prostoru několik metrů drátu (čím více, tím lépe :-)), na něj připojíme diodu, za diodu sluchátka a druhý drát od sluchátek dobře uzemníme. (Viz obrázek 1.) Žádná baterie, ani jiné napájení skutečně není potřeba.

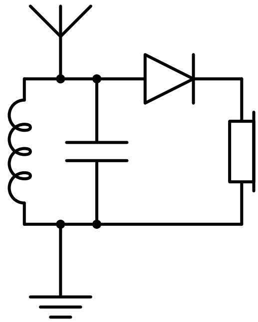
Takovéto zapojení má několik nedostatků. Potřebujeme velmi citlivá sluchátka, silný signál a dlouhou anténu. Pokud bychom navíc byli v místě, kde je

[1] To je polovodičová součástka, která (zjednodušeně řečeno) vede proud jen jedním směrem. Jako dioda může sloužit vhodný krystal, kterého se dotýká kousek drátu – odtud také název krystalka.

[2] AM je zkratka z „amplitudově modulovaný“. Vysílaný signál má stálou frekvenci (řádově stovky kHz až desítky MHz) a jeho amplituda se mění podle „okamžité hlasitosti“ zvuku, který chceme vysílat.



Obr. 1



Obr. 2

více silných stanic, nepůjde je od sebe oddělit a uslyšíme všechny dohromady. Částečným řešením je přidat do zapojení rezonanční obvod z cívky a kondenzátoru. Tento obvod musí mít stejnou rezonanční frekvenci jako je vysílací frekvence signálu, který chceme poslouchat, tedy musí být naladěn. Rezonanční frekvenci lze měnit změnou kapacity kondenzátoru nebo změnou indukčnosti cívky. V praxi se nejčastěji mění kapacita kondenzátoru – použije se laditelný kondenzátor, jehož kapacita se mění buďto přímo otáčením ovládací osičkou, nebo elektronicky pomocí přivedeného stejnosměrného napětí.[3] Změna indukčnosti cívky se v praxi příliš nepoužívá, ale lze ji jednoduše zajistit zasouváním a vysouváním jádra cívky (má-li jádro) anebo různou deformací závitů (roztahování a stlačování ve směru osy). Celé zapojení je na obrázku 2.

Pokud bychom chtěli zapojení dále vylepšit, bude potřeba přidat například tranzistorový zesilovač. Pak už se ale pomalu dostaneme ke známým krabičkám se spoustou elektroniky uvnitř, což není tak úplně cílem tohoto tématka.

Dále uvádíme několik motivačních otázek ke zkoumání. Můžete k nim přistupovat jak experimentálně, tak teoreticky anebo nejlépe kombinací obojího.

- Na jakém principu funguje rádiové vysílání (AM) a jak funguje anténa.
- Jaký je princip fungování obou uvedených zapojení?
- Jak by měla vypadat vhodná anténa (tvar, délka, …)?
- Jaké jsou vhodné parametry rezonančního obvodu (kapacita kondenzátoru, indukčnost cívky) pro příjem vysílání na určité frekvenci.
- Jak postupovat, abychom získali co nejlepší příjem? Dají se uvedená zapojení nějak jednoduše vylepšit?

Jinak samozřejmě můžete psát cokoliv dalšího, co s uvedeným tématem souvisí, popsat vaše úspěchy apod. Jen prosím nezapomínejte, že tvrzení uváděná ve vašich příspěvcích je dobré dostatečně zdůvodnit nebo odkázat na literaturu, ze které jste čerpali.

[3] Takovéto součástce, jejíž kapacitu lze nastavovat přivedeným napětím, se říká varicap.

Pokud si budete chtít hrát s rádiem prakticky, bude se vám možná hodit několik následujících rad.

- Anténa musí být skutečně dost dlouhá. Několik metrů je minimum.
- Důležité je kvalitní uzemnění. Buďto si jej vyrobte sami (vodivá tyč zaražená do země), anebo použijte něco, o čem víte, že je vodivé a někde uloženo v zemi. Např. vodovodní trubky (pokud nemáte plastové), roury ústředního topení (většinou jen v panelácích, kde není lokální kotel) apod. Zemnící kolík v zásuvce není vhodný, protože je na něm obvykle naindukováno značné rušení.
- Sluchátka musí být citlivá s vysokou impedancí. Nejlepší jsou stará radiotechnická s impedancí 2 až 4 kΩ. Malá sluchátka z walkmana apod. jsou nevhodná (mají impedanci většinou jen desítky Ohmů). Impedance sluchátek na nich bývá většinou uvedena, takže můžete zkusit hledat (čím vyšší hodnotu najdete, tím lépe). Rozumnou variantou může být telefonní sluchátko (za předpokladu, že máte nějaké staré nebo jde z telefonu reverzibilně odpojit `:-)`).
- Dioda musí mít nízký úbytek napětí v propustném směru. Běžné křemíkové diody jsou nevhodné. Nejlepší jsou germaniové diody (např. GAZ51, GA201, GA206 apod.) Pokud je neseženete, lze použít i Schottkyho diodu (např. BAT85 nebo obecně libovolnou BAT...), kterou seženete mnohem snadněji. (Zájemci si mohou zkusit vyrobit vlastní galenitový krystal.)

Téma 6 – Laplaceovská síť

Uvažujme mřížové body v rovině (tj. body s celočíselnými souřadnicemi). Sousedním mřížovým bodem budeme vždy mínit takový, který se liší o jedničku v jedné souřadnici (tj. ne „diagonální“ soused). Některé body označíme jako *hraniční* a jiné jako *aktivní*, přičemž budeme požadovat, aby všichni sousedé každého aktivního bodu byli buď aktivní, nebo hraniční. Označených bodů bude konečně mnoho.

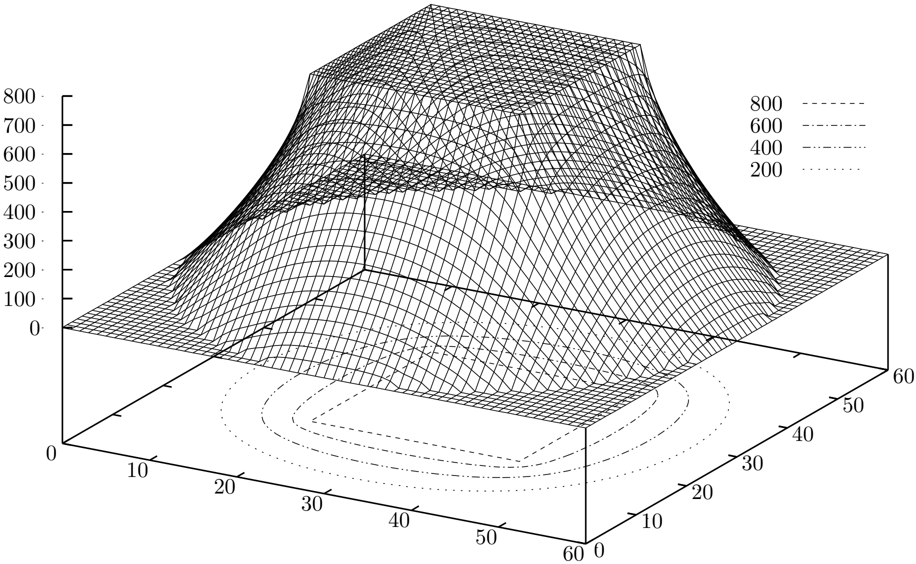
Budeme uvažovat následující úlohu: každému hraničnímu bodu H je přiřazeno reálné číslo $u(H)$. Přiřadíme reálné číslo též každému aktivnímu bodu A, tak, aby pro každý aktivní bod byla jeho hodnota aritmetickým průměrem hodnot sousedů. Tuto úlohu budeme nazývat *diskrétní Dirichletova-Laplaceova úloha*, zkráceně DDLÚ.

Má několik zajímavých matematických vlastností, které se pokuste dokázat:

1. Uvažujme všechny dvojice sousedních bodů H, A takové, že bod H je hraniční a bod A aktivní. Pak součet rozdílů $u(H)-u(A)$ přes všechny tyto dvojice je roven nule.
2. Maximum (resp. minimum) z hodnot všech aktivních bodů je menší (resp. větší) nebo rovno maximu (resp. minimu) z hodnot všech hraničních bodů.

3. DDLÚ má nejvýše jedno řešení.

Nejde však o samoúčelnou hříčku, tato úloha má značný praktický význam: je to přibližné řešení tzv. Laplaceovy rovnice, která popisuje velké množství fyzikálních jevů. Např. elektrostatické pole v prostoru mezi elektrodami, difúzi v homogenním a izotropním prostředí, rozložení teploty v tělese aj. Obrázek 3 ukazuje rozložení teploty v pevném chladicím médiu ve válci kruhového průřezu, které je zvnějšku chlazeno na teplotu 0 stupňů, a obaluje jádro čtvercového průřezu o stálé teplotě 800 stupňů. Výpočet je proveden právě pomocí DDLÚ.



Obr. 3

Jak se DDLÚ řeší? Nejjednodušší je tzv. iterační metoda. Na začátku si předepíšeme v aktivních bodech nějaký přibližný odhad řešení (často prostě nulu). V jedné iteraci postupně procházíme všechny aktivní uzly a pro každý z nich spočítáme průměr hodnot jeho čtyř sousedů, a nahradíme stávající hodnoty v aktivních uzlech těmito průměry (vlastně tak „tlačíme“ hodnoty v mřížce k tomu, aby splňovaly požadované rovnosti). Iterace opakujeme a proces zastavíme, až budeme pokládat řešení za dostatečně přesné.

Výše uvedený postup je možné aplikovat dvěma způsoby (rozmyslete si rozdíl):

1. Spočítáme nejprve ze všech starých hodnot všechny nové a teprve potom nahradíme všechny staré hodnoty novými.
2. Jakmile spočítáme jakoukoliv novou hodnotu, starou ihned nahradíme, a dále již počítáme jen s novou.

Metoda 1 se nazývá metodou Jacobiovou, zatímco metoda 2 je tzv. metodou Gauss-Seidelovou.

Otázky a náměty:

- Zvolte si zadaní nějaké úlohy DDLÚ. Nejjednodušší je uvažovat body tvořící čtverec, a v hraničních bodech předepsat hodnoty dané nějakou spojitou funkcí (mohou být i náhodné, ale takový výpočet nemá praktický význam). Můžete však volit i komplikovanější úlohy jako výše.

  Pokuste se naprogramovat řešení úlohy a znázornit jej.
- Jak co nejsnáze kontrolovat dostatečnou přesnost řešení?
- Je efektivnější metoda Jacobiova, nebo Gauss-Seidelova? Efektivitu lze přitom měřit různě, např. počtem iterací, počtem aritmetických operací, časem výpočtu na stejném počítači apod.
- V případě Gauss-Seidelovy metody výsledek každé iterace závisí na pořadí, v němž aktivní uzly procházíme. Lze volbou uspořádání uzlů ovlivnit efektivitu výpočtu?
- Další možnost je tzv. relaxace. Kdykoliv dojde na nahrazování hodnot v bodech (ať už v případě Jacobiho, nebo Gauss-Seidelovy metody), pak místo přiřazení

  $$\text{stará} := \text{nová}$$

  provedeme

  $$\text{stará} := \omega \cdot \text{nová} + (1-\omega) \cdot \text{stará}\,,$$

  kde ω je předem zvolené pevné reálné číslo, tzv. relaxační parametr. Zkuste najít takový relaxační parametr, který zrychlí vaši úlohu co nejvíce.

Zadání úloh

Úloha 3.1 – Kombinatorická tabulka (5b)

Nechť je a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tabulka. Provedeme s ní takovouto transformaci:

$$a'_{uv} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \binom{u}{i} \cdot \binom{v}{j} \cdot (-1)^{(i+j)}\, a_{ij}$$

pro $u = 1, \ldots, m$, $v = 1, \ldots, n$ kde $\binom{a}{b}$ je kombinační číslo a nad b (klademe nula pro $a < b$). Dokažte, že tato transformace aplikovaná dvakrát na stejnou tabulku ji nezmění – jinými slovy, je sama k sobě inverzní. Můžete se pokusit tvrzení analogicky rozšířit i na vícedimenzionální tabulky.

Úloha 3.2 – Šachovnice (4b)

Je dána šachovnice 8×8. Zjistěte, zdali je možné tuto šachovnici vydláždit pomocí kostky ve tvaru čtverce 2×2 a patnácti kostek ve tvaru písmene „L“ (ze čtyř čtverců).

Úloha 3.3 – Skrz kvádr (3b)

Mějme kvádr složený ze 74 088 jednotkových krychliček, jehož rozměry jsou $63 \times 42 \times 28$. Uděláme do něj velmi tenkou díru přímo z jednoho vrcholu do protilehlého. Kolik malých krychliček bude provrtaných?

Řešení témat

Téma 1 – Rychlokurz spracovania fyzikálnych meraní

Pozn. red.: Toto téma má už zadaním experimentálnu povahu. Väčšina z vás ju správne pochopila, ale takmer každý urobil len polovicu práce – meraním určil nejakú konštantu vody, pričom chybu merania (čo je druhá polovica) ledabolo odbyl.

Presnost experimentu **nemožno** *posudzovať podľa toho, nakoľko sa líši nameraná hodnota voči tabuľkám. Ako boli potom zmerané úplne prvé hodnoty napr. hustoty? Následujúce riadky popisujú základy spracovania (ale skutočne iba základy) fyzikálnych meraní. Prosím, inšpirujte sa týmito riadkami a prepracujte svoje merania tak, aby ste dostali nielen vašu vytúženú hodnotu, ale aj chybu, s akou ste ju zmerali.*

Obodoval som to, že ste vykonali nejaké experimenty, ale zatiaľ som nebodoval ani spracovanie ani výsledky. Všetky body dostanete v ďalšom čísle, až pošlete správne spracované výsledky.

Presnosť meraní

```
motto: God is real;
       unless declared as integer;
```

Každé meranie, ktoré vykonáme, je nutne nepresné. Našou snahou je získať čo najpresnejšie meranie – pričom presnosť si musíme spočítať a nie zistiť porovnaním s tabuľkovými hodnotami. Alebo si myslíte že Matematicko-fyzikálne tabuľky sú odvekým darom božím?

Chyby merania delíme na

- systematické – chyby dané systematickou odchýlkou; napr. zle kalibrovanými prístrojmi (meter dlhý 1,005 metra; mierne posunutá stupnica teplomeru atď.), nepresnou metódou (použitý približný vzorec, použitie vzorca mimo rozsah jeho platnosti), použitie zlej hodnoty fyzikálnych konštánt a tabuľkových hodnôt (hodnota g závisí na zemepisnej šírke, viskozita na teplote, ...) zmena odrazivosti s casom; usadanie pristrojov atď.;
- náhodné – chyby dané nepresnosťou merania ako takého; dajú sa odstrániť väčším počtom meraní;
- hrubé – keď niekto napíše 10 metrov namiesto 10 centimetrov, poprípade meria dĺžku kyvadla v kilogramoch.

Spôsob výpočtu chyby merania

Pre jednoduchosť si ukážeme počítanie chyby na príklade. Vynecháme chyby systematické a hrubé a budeme sa venovať výlučne štatistickej chybe. Predpokladajme, že chyba merania je malá voči samotnej hodnote nameranej veličiny (menej ako 10 %) a že sa jedná o chybu náhodnú, ktorá sa riadi Gaussovým rozdelením. Za predpokladu, že chyba je spôsobena veľkým množstvom malých a náhodných vplyvov, potom má tvar Gaussovej krivky.

Stredná, tiež najpravdepodobnejšia hodnota je potom aritmetický priemer všetkých nameraných hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad \text{(t1.1)}$$

Ak sme namerali n hodnôt, tak $\langle x \rangle$ je najlepší možný odhad skutočnej hodnoty, ktorú by sme dostali, ak by naše meranie bolo bezchybné.

Chyba merania x (smerodatná odchylka aritmetického priemeru, prečítaj si poznámku pod čiarou) je daná vzťahom

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad \text{(t1.2)}$$

Majme vzorec pre výpočet napr. vodivosti θ daný vzorcom

$$\theta = gt\sqrt{A^2 + B^2}\,(1 - \exp(-\gamma t)) \,,$$

pričom poznáme veličiny A, B, g, t s chybami $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(g), \sigma(t)$. Viete teda, že veličina A leží so zhruba 70 % pravdepodobnosťou v intervale $(A - \sigma(A), A + \sigma(A))$[4].

Pre výpočet chyby merania predpokladajme, že žiadna z veličín A, B, g, t nezávisí na inej z týchto štyroch. Potom možno pre chybu merania písať

$$\Delta\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial g}\Delta g\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right)^2} \,, \qquad \text{(t1.3)}$$

kde ∂ je značka pre parciálnu deriváciu.[5]

---

[4] Veličina σ je *smerodatná odchylka*, alebo tiež *stredná kvadratická chyba*. Skutočná hodnota sa nachádza v rozmedzí $(-\sigma, +\sigma)$ s pravdepodobnosťou 68,3 %, v rozmedzí $(-2\sigma, +2\sigma)$ s pravdepodonosťou 95 % a v rozmedzí $(-3\sigma, +3\sigma)$ s pravdepodonosťou 99,7 %.

[5] Predstavme si, že máme funkciu $f = xy(x + y)$. Jej derivácia podľa x je $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = y(x + y) + xy$. Ak ale y závisí na x, povedzme že $y = x^2$, potom $f'(x) = \frac{\mathrm{d}(xx^2(x+x^2))}{\mathrm{d}x} = 4x^3(1 + x) + x^4$, čo je odlišný výsledok ako predchádzajúci. Parciálna (čiastočná) derivácia podľa nejakej premennej x urobí to, že danú funkciu derivuje len podľa premennej x a všetky ostatné premenné považuje za konštanty. Preto $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x + y) + xy$ je vždy rovnaká, bez ohľadu na závislosť y na x.

Dosadením dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial A} = gt \cdot \frac{2A}{2\sqrt{A^2+B^2}} \cdot (1-\exp(-\gamma t)) = \theta \cdot \frac{A}{A^2+B^2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial B} = gt \cdot \frac{2B}{2\sqrt{A^2+B^2}} \cdot (1-\exp(-\gamma t)) = \theta \cdot \frac{B}{A^2+B^2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial g} = t\sqrt{A^2+B^2}\,(1-\exp(-\gamma t)) = \frac{\theta}{g}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = g\sqrt{A^2+B^2}\,[(1-\exp(-\gamma t)) + \gamma t \cdot \exp(-\gamma t)] =$$
$$= \theta\left[1 + \frac{\gamma t\exp(-\gamma t)}{1-\exp(-\gamma t)}\right]\,.$$

Ak tieto výsledky dosadíme do rovnice (t1.3) spolu s chybami jednotlivých veličín, dostaneme výslednú chybu merania.

Určite sa vám budú hodiť zjednodušené vzorce pre výpočet chýb, ktoré dostanete dosadením do rovnice (t1.3). Zaveďme si ale najprv *relatívnu chybu* danú vzťahom

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\Delta\theta}{\theta}\,, \tag{t1.4}$$

potom pre závislosti θ na A, B platí

$$\theta = A + B \quad\longrightarrow\quad \varepsilon(\theta) = \sqrt{\varepsilon(A)^2 + \varepsilon(B)^2}$$
$$\theta = AB \quad\longrightarrow\quad \varepsilon(\theta) = \varepsilon(A) + \varepsilon(B)$$
$$\theta = \frac{A}{B} \quad\longrightarrow\quad \varepsilon(\theta) = \varepsilon(A) + \varepsilon(B)$$
$$\theta = \exp(\alpha t) \quad\longrightarrow\quad \varepsilon(\theta) = \frac{1}{\alpha t}\sqrt{\varepsilon(\alpha)^2 + \varepsilon(t)^2}$$

Ďalšie príklady si môžte spočítať sami na domácu úlohu.

Počet platných cifier

Veľmi častou chybou, ktorú robíte, je písanie výslednej hodnotu (a aj chyby) na hausnumero platných cifier. Je to zbytočné a často neprehľadné. Ak sme určili chybu merania, tak jej zaokrúhlenie prebieha nasledovne:

- Ak chyba merania σ začíná cifrou 1 (počiatočné nuly ignorujeme), zaokrúhlime ju na dve platné cifry, inak
- zaokrúhlime na jednu platnú cifru.

Príklady zaokrúhľovania:

0,4234354111	0,4
$12,4343$	12
$1,4 \cdot 10^{-12}$	$1,4 \cdot 10^{-12}$
1456	1500
2 435 757	2 000 000
0,000 007 5345	0,000 008

Následne meranú veličinu zaokrúhlime na takom mieste, aby posledná cifra chyby bola zároveň poslednou cifrou nameranej hodnoty:

veličina	chyba	zaokrúhlenie
458,2483	0,4	$458{,}2 \pm 0{,}4$
$0,4343$	12	0 ± 12
$3,4 \cdot 10^{-10}$	$1,4 \cdot 10^{-12}$	$(3400 \pm 14) \cdot 10^{-13}$
168 358	1500	$168\,400 \pm 1500$
$-257\,435\,757$	2 000 000	$(-257 \pm 2) \cdot 10^6$
12,558 385 258	0,000 008	$12{,}558\,385 \pm 0{,}000\,008$

Snáď vám tento malý úvod pomôže pri spracovaní vašich meraní.

Viacej informácií môžte získať napríklad zo stránok Fyzikálnej olympiády: `http://www.pef.zcu.cz/pef/kof/cz/fo/studmat/mereni.zip`.

Téma 2 – Konstrukční úlohy v prostoru

Základní konstrukce

Dr.^MM Kateřina Böhmová

Pomocí koulítka a rovinítka budeme konstruovat konstrukce v prostoru. Pro inspiraci jak při řešení daných úloh postupovat často pomáhá představit si je jako podobné úlohy v rovině s pravítkem a kružítkem v ruce.

1) Je zadána přímka p a bod B (ne nutně ležící na přímce). Sestrojte rovinu kolmou na tuto přímku procházející zadaným bodem.

   - Do bodu B zapíchneme koulítko a opíšeme povrch koule – koulici (poloměr si zvolíme tak, aby určitě protínala přímku p).
   - Tato koulice nám protne přímku ve dvou bodech.
   - Z obou bodů budeme vést koulice o stejném poloměru tak, aby se protnuly. Jejich průnikem je kružnice, která leží v rovině ρ, kolmé na danou přímku a bod $B \in \rho$.
   - Pomocí rovinítka tuto rovinu ρ zkonstruujeme. Tímto máme sestrojenu hledanou rovinu. (Mám-li kružnici v prostoru a chci sestrojit rovinu, ve které tato kružnice leží, zvolím si tři různé libovolné body, které leží na kružnici. Pomocí tří bodů a rovinítka už umím sestrojit rovinu.)

2) Je zadána rovina ρ a přímka p (ne nutně ležící v rovině). Sestrojte rovinu, která je kolmá na zadanou rovinu a současně obsahuje zadanou přímku.

   - Z libovolných dvou bodů na přímce p vedeme koulice s dostatečně velkým poloměrem tak, aby každá vyťala kružnici v rovině ρ a aby se tyto dvě kružnice navzájem protnuly. Získáme tak dva body. Z obou bodů opíšeme koulice o stejném poloměru tak, aby se protnuly. Jejich průnikem je kružnice.

- Na tuto kružnici položíme rovinítko a získáme rovinu π, která je kolmá na ρ a obsahuje přímku p.

3) Je zadána rovina ρ a bod B (ne nutně ležící v rovině). Sestrojte přímku, která je kolmá na zadanou rovinu a současně prochází zadaným bodem B.
   - Sestrojíme koulici se středem v bodě B tak, aby jejím průnikem s rovinou ρ byla kružnice.
   - Z libovolných tří různých bodů na této kružnici (M, N, O) sestrojíme koulice o stejném poloměru tak, aby se protnuly.
   - Jejich průnikem je jeden bod – označíme jej A.
   - Pomocí rovinítka získáme roviny MAB, NAB a OAB. Jejich průnikem je přímka AB, která je kolmá k rovině ρ.
4) Je zadána přímka p a bod B (mimo p). Sestrojte přímku, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem B.
   - Postupem 1) získáme kolmou rovinu ρ obsahující bod B. Průnikem roviny ρ a přímky p nechť je bod A.[6]
   - Sestrojíme koulici k se středem v bodě B a poloměrem $|BA|$.
   - Pomocí rovinítka sestrojíme rovinu π, která obsahuje přímku p a bod B.
   - Průnikem koulice k, roviny ρ a roviny π nechť je bod C.
   - Sestrojíme dvě koulice se středy v bodech A a C o stejném poloměru tak, aby se protnuly. Jejich průnikem je kružnice.
   - Na získanou kružnici položíme rovinítko a zkonstruujeme rovinu σ ($B \in \sigma$). (Tato rovina je rovnoběžná s danou přímkou.)
   - Průsečnice rovin π a σ je hledaná přímka rovnoběžná se zadanou přímkou.
5) Je zadána rovina ρ a bod B, který leží mimo rovinu. Sestrojte rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ρ a obsahuje bod B.
   - Postupem 3) získáme bod A, dvě roviny – NAB a OAB (jsou kolmé na ρ) – a následně přímku AB.
   - Průnikem přímky AB a roviny ρ nechť je bod C (platí $|NC| = |OC|$).
   - Sestrojíme koulici k se středem v bodě C a poloměrem $|NB|$.
   - Sestrojíme koulice n a o se středy v bodech N a O a poloměrem $|CB|$.
   - Průnikem koulice k, koulice n a roviny NAB nechť je N'.
   - Průnikem koulice k, koulice o a roviny OAB nechť je O'.
   - Rovinítkem sestrojíme rovinu $BO'N'$, což je hledaná rovina.
6) Je zadána koulice k se středem v bodě S a bod B, který na ní leží. Sestrojte tečnou rovinu procházející tímto bodem.

[6] *Pozn. red.: Jednodušší je po této konstrukci použít postup 3) na sestrojení kolmice na ρ procházející bodem B.*

- Vezmeme dva libovolné body v prostoru (M, N) tak, aby B, S, M a N neležely v jedné rovině. Rovinítkem sestrojíme roviny BSM a BSN. Jejich průsečnice je přímka AB.
- Postupem 1) sestrojíme rovinu kolmou k přímce AB obsahující bod B. Tato rovina je hledaná tečná rovina koulice k.

7) Je zadána koulice k se středem v bodě S a body B a X, které leží vně. Sestrojte tečnou rovinu procházející bodem B a bodem X.

- Stejně jako v předchozím případě nejprve vezmeme dva libovolné různé body v prostoru M, N. B, S, M a N neleží v jedné rovině. Sestrojíme roviny BSM a BSN a získáme přímku SB.
- Teď budeme hledat střed úsečky SB. Sestrojíme koulice o stejném poloměru z bodů S a B tak, aby se protnuly.
- Jejich průnikem je kružnice. Sestrojíme rovinu, ve které tato kružnice leží. Tato rovina je na SB kolmá a půlí ji. Střed úsečky SB si označíme O.
- Sestrojíme koulici se středem v bodě O a poloměrem OS.
- Tato koulice nám koulici k protne a jejich průnikem je kružnice l. Na kružnici l leží množina bodů, kterými můžeme vést k bodu B tečné roviny.
- Stejný postup provedeme pro bod X (tj. získáme SX, střed úsečky SX a kružnici m, na níž leží množina bodů, kterými můžeme vést z bodu X tečné roviny).
- Pokud bod X neleží na přímce SB, tak by se kružnice m mohla protnout s kružnicí l. Neprotnou-li se, řešení není. Protnou-li se, pak buď v jednom nebo ve dvou bodech (I, J).
- Rovinítkem sestrojíme rovinu IBX, popř. i JBX. Tato rovina, resp. tyto roviny, jsou tečnými rovinami koulice k.

Konstrukce pravidelných těles

Bc.^M^M Marie Dostálová

Konstrukce pravidelného čtyřstěnu

- Zvolíme si délku hrany d a bod A (jeden z vrcholů čtyřstěnu).
- Narýsujeme kouli $k(A; d)$. Na kouli k si zvolíme bod B.
- Opíšeme kouli $l(B; d)$. Na průniku l a k zvolíme libovolný bod C.
- Narýsujeme kouli $m(C; d)$.
- Koule k, l, m mají dva průsečíky, jeden z nich zvolíme za bod D a dostáváme pravidelný čtyřstěn $ABCD$.

Konstrukce pravidelného šestistěnu – krychle

- Narýsujeme tři na sebe kolmé roviny. (Zvolíme si rovinu ρ a přímku $\check{r}$, přímkou $\check{r}$ proložíme rovinu σ kolmou na ρ. Pak zvolíme bod P a narýsujeme rovinu φ kolmou na průsečnici rovin ρ a σ, která prochází bodem P.)

- Označíme p průsečnici rovin ρ a σ, q průsečnici rovin σ a φ a j průsečnici rovin ρ a φ.
- Průsečík rovin ρ, σ, φ označíme A.
- Zvolíme si délku hrany krychle d.
- Narýsujeme kouli $k(A; d)$, na každé z přímek p, q, j zvolíme jeden ze dvou průsečíků s koulí k.
- $B \in k \cap p$, $D \in k \cap q$, $E \in k \cap j$.
- Narýsujeme koule $b(B; d)$, $d(D; d)$ a $e(E; d)$.

F náleží průsečíku b, e a poloroviny ABE,
C náleží průsečíku b, d a poloroviny ADB,
H náleží průsečíku d, e a poloroviny AED.

- Nakonec narýsujeme koule $f(F; d)$, $c(C; d)$, $h(H; d)$, které mají společný bod G.
- Dostali jsme vrcholy krychle $ABCDEFGH$.

Konstrukce pravidelného osmistěnu

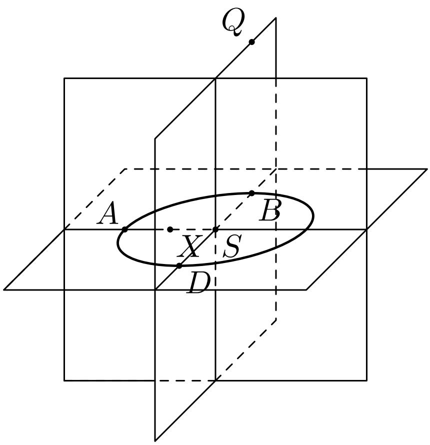
- Narýsujeme tři na sebe kolmé roviny jako při konstrukci krychle. Průsečík všech tří rovin označíme S.
- Zvolíme si délku r – poloměr kružnice opsané osmistěnu.
- Narýsujeme kouli $k(S; r)$, koule protne každou ze tří průsečnic rovin ve dvou bodech a těchto šest bodů označíme vrcholy osmistěnu.

Konstrukce pravidelných těles

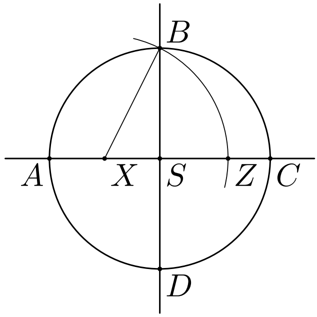
Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott

Konstrukce pravidelného dvanáctistěnu

- Zvolíme si tři body a nakreslíme rovinu. Nyní sestrojíme pětiúhelník. Budeme kreslit koule na rovině, ty se protnou s rovinou a bude to, jako kdybychom kreslili kružítkem na papíře.
- Pomocí dvou koulí sestrojíme soustavu tří rovin (kolmých). Ty nám rozdělí kružnici na čtvrtiny.



Obr. t2.1



Obr. t2.2

- Úsečku AS rozdělíme na polovinu pomocí dvou koulí o stejném poloměru a roviny. Dostaneme bod X.
- Zvolíme si bod Q (někde na svislé rovině) a sestrojíme rovinu XBQ. Ta nám vytne úsečku XB.
- Sestrojíme kouli se středem v X o poloměru XB a dostaneme bod Z. BZ je velikost strany pětiúhelníku.
- Nyní pomocí koulí o poloměru BZ sestrojíme pětiúhelník. Sestrojíme úsečku EB. Do koulítka vezmeme velikost AC a sestrojíme koule z bodů A, C. Průnikem proložíme rovinu. Z bodu B sestrojíme kouli o poloměru AB a dostaneme bod E. Tímto způsobem vytvoříme další úsečky.
- Po té sestrojíme roviny $ABJF$, $BFGH$ atd. Sestrojíme koule o poloměru AB z bodů G, H, I, J, které se nám protnou s rovinami. Získáme další body. Nyní pomocí dalších rovin a dalších koulí (budeme muset použít i o velikosti AC) sestrojíme další stěny. Tímto způsobem dokončíme dvanáctistěn.

Konstrukce pravidelného dvacetistěnu

- Stejně jako u dvanáctistěnu si sestrojíme pětiúhelník $ABCDE$.
- Každou stěnu si pomocí dvojkoule rozdělíme na polovinu a průnikem vedeme rovinu.
- Ve vrcholech sestrojíme koule o poloměru AB (délka hrany). Koule se protnou ve vrcholu F.
- Body E, F, B proložíme rovinu, koule z vrcholu A o poloměru AB se s ní protne a vytvoří kružnici. Na této kružnici vytvoříme pětiúhelník $EFBGH$.
- Takto vytvoříme další pětiúhelníky až dokončíme celý dvacetistěn.

Pozn. red.: Ve svých příštích příspěvcích můžete bez důkazu používat výše popsané konstrukce. Klidně můžete posílat i další základní konstrukce, které tu ještě nebyly popsány. Všechny tyto postupy zkuste dále aplikovat na složitější konstrukce – např. konstrukce opsaných a vepsaných koulí různým tělesům, konstrukce pravoúhlého čtyřstěnu (může být zadán různými způsoby) atd.

Už se objevily i některé pokusy o zobecnění věty o obvodových úhlech, mocnosti bodu ke kružnici atd., ale bohužel tato zobecnění nemohla být považována za plnohodnotná pro trojrozměrný prostor. Většina příspěvků se snažila ukázat, že vlastnosti v rovině platí i v rovinách různých poloh v prostoru, což není úplné zobecnění. Chceme-li zobecnit např. větu o obvodových úhlech, musíme použít správnou analogii: tak tedy místo kružnice budeme brát v úvahu povrch koule, místo tětivy budeme uvažovat průnik sečné roviny s danou koulí, a ještě budeme muset zobecnit rovinný úhel na prostorový. Pomocí těchto nových pojmů zkuste formulovat a dokázat nové věty.

Angwin

Téma 3 – Hexagonální life

V první řadě se tímto chceme omluvit některým řešitelům, jejichž řešení bylo neopatrnou manipulací redakce poškozeno. To samozřejmě nic nemění na tom, že (ač to někdy vzhledem k poškození bylo problematické) jsme přečetli vše, co jste nám poslali, a příslušně opravili. Velmi se touto cestou omlouváme.

A teď už tedy k samotným řešením: Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Klimoš a Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek nám poslali generátory hexalife, ale z poznámek v řešení soudím, že i jiní z vás generátory používali, i když jste nám je neposlali (např. Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa). Rozhodl jsem se tedy příliš nehodnotit generátory lifu jako takové, ale až objevy, které jste pomocí nich učinili (ony se určitě zhodnotily už jen tím, že jste pomocí nich našli spoustu oscilátorů, bloků a vůbec nahlédli, jak se tento celulární automat chová).

Také jsem se rozhodl rozdělit toto řešení na dvě části: nejprve napíši něco k obecným zjištěním, eventuálně k jiným příspěvkům, které od vás přišly, a v části druhé vypíši seznam tvarů, které jste objevili (samozřejmě se jmény objevitelů `:-)`).

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondru Bílkovi se podařilo dokázat, že pokud v hexalife existuje nekonečně expandující oblast, pak nutně na svých krajích musí obsahovat buňky s hodnotou 2. Rovněž upozornil na to, že to znamená, že také každá loď (pokud existuje) musí obsahovat buňku hodnoty 2. Zabýval se i tím, jak v hexalife realizovat některé logické operace (nand) a udělat tak krok k realizaci Turingova stroje. Odvodil některá pomocná kritéria (mezi jinými např. faktory ovlivňující prostorové rozložení pro některé logické operace), konkrétní realizaci v rámci hexalife však nenašel.

Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas upozornil na podmínky postačující k tomu, aby daná struktura byla blokem. Tím samým problémem se zabýval také Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran, který na to šel spíše algebraickou cestou.

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa analyzoval rychlost úbytku nenulových buněk při počáteční náhodné inicializaci:

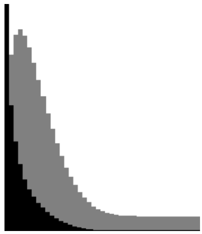
(...)

Jak známo, exponenciální funkce se promítá do mnoha závislostí ve světě – klesá podle ní tlak v gravitačním poli, množí se podle ní králíci atd. Jak vidíme v grafu níže, nejinak tomu je i u našeho celulárního automatu – v závislosti na čase podle ní klesá i počet buněk v systému. V modelovém případu, který jsem používal, se náhodně rozmístilo po přibližně čtvercové ploše s 20 000 hexy přibližně 5 000 jedničkových buněk (dále jen jedniček) a 5 000 dvojkových buněk (dále dvojek). Píšu přibližně, protože tyto faktory jsou dosti náhodné. Statistickým zprůměrováním výsledků součtů z každého kola z deseti zkoušek jsem došel k tomuto grafu úbytku počtu buněk (viz obrázek t3.1).

Šedou jsou značeny jedničky, černou dvojky, výška sloupce v daný čas značí jejich počet v daném čase.

Vidíme, že z evolučního hlediska se dvojky v pozdějších fázích neuplatnily tak jako jedničky a jejich výskyt je oproti jedničkám mnohonásobně řidší.

(...)



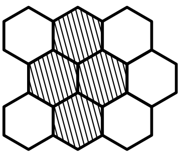
Obr. t3.1

Společně s Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondrou Rottem se domnívá, že v zadaných pravidlech se lodě nevyskytují, ani jeden však toto tvrzení nedokázal.

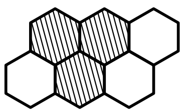
Nejúspěšnějšími lovci útvarů byli Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš a Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš kromě mnoha základních útvarů, u kterých ukazuje, jak je lze prodlužovat (a které všechny ani neuvádíme – dají se totiž snadno vygenerovat za dodržení jistých pravidel) si (jako jediný) všiml objektů, které se sunou vpřed podél nějaké struktury bloků, kterou svým pohybem „rozplétají“. Nejedná se sice o lodě („spaceships“), ale mají k nim poměrně blízko. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek se kromě jiných objektů zabýval „vláčky“, jak nazývá objekty, které se posouvají vpřed, pokud před ně v každém tahu umístíme buňku hodnoty 2.

Galerie tvarů

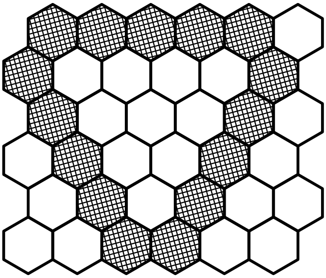
Bloky



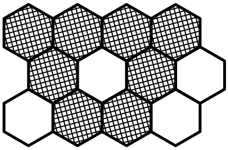
Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Bílka, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa



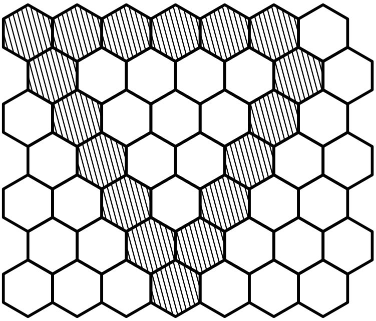
Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas, Hana Jirků, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Bílka, Martin Alan, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa



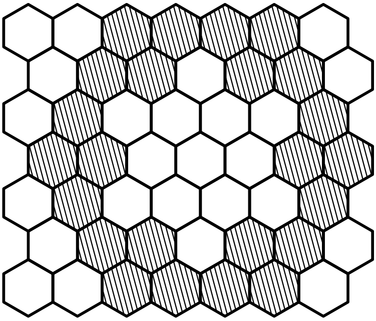
Bc.[MM] Mirek Klimoš



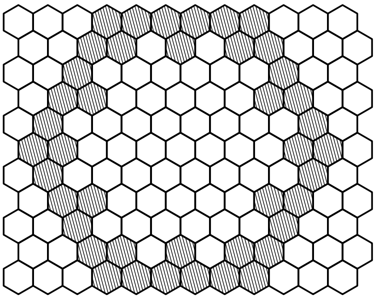
Bc.[MM] Mirek Klimoš



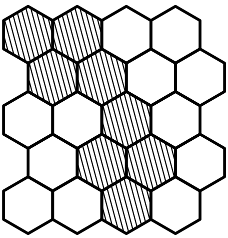
Bc.[MM] Mirek Klimoš, Dr.[MM] Eva Černohorská, Dr.[MM] Matěj Korvas, Bc.[MM] Martin Křivánek, Mgr.[MM] Radim Vansa



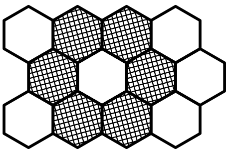
Bc.[MM] Mirek Klimoš, Mgr.[MM] Radim Vansa



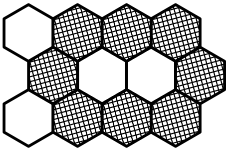
Bc.[MM] Mirek Klimoš



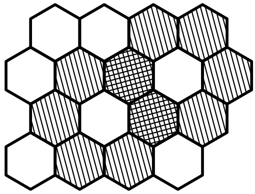
Martin Alan



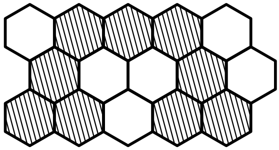
Mgr.[MM] Ondřej Rott, Bc.[MM] Mirek Klimoš, Dr.[MM] Matěj Korvas, Mgr.[MM] Jakub Beran



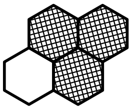
Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas (s libovolným prodloužením), Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran



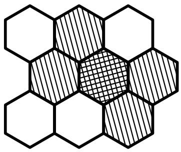
Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran



Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek

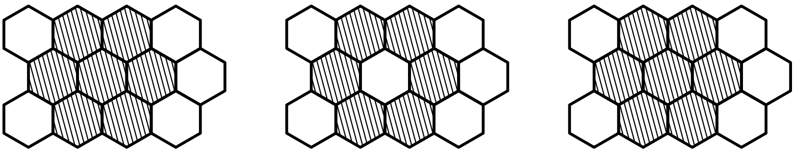


Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Hana Jirků, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Bílka, Martin Alan, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran

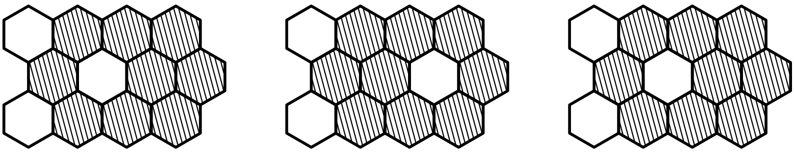


Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Beran, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa

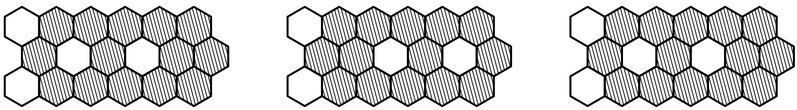
Oscilátory



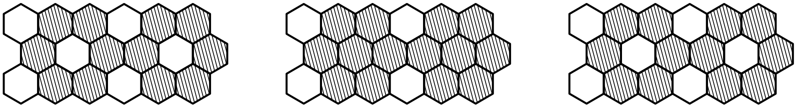
Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Martin Alan, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa



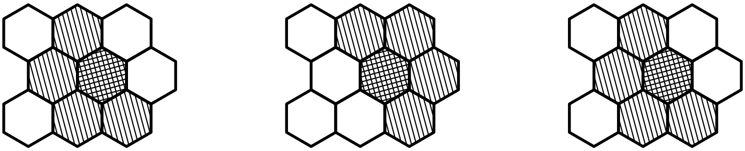
Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Martin Alan, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa



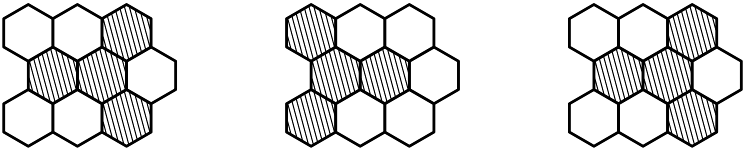
Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa (tito podotkli, že libovolné prodloužení je oscilátor P2)



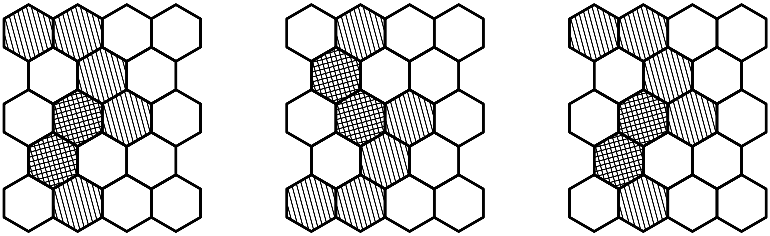
Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott (+ libovolné vhodné napojení)



Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek

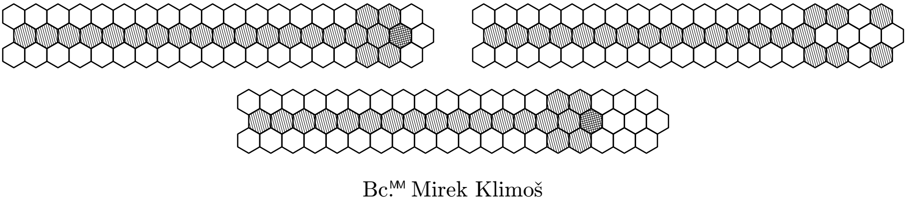


Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Rott, Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek, Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa

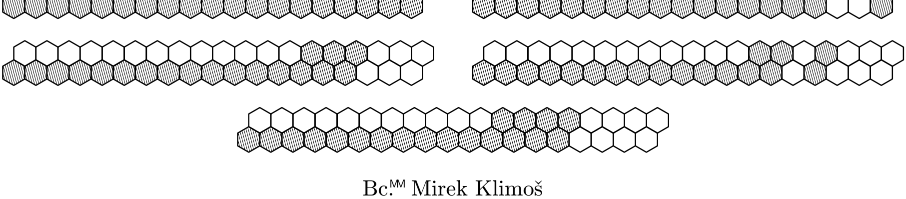


Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Křivánek

Vláčky



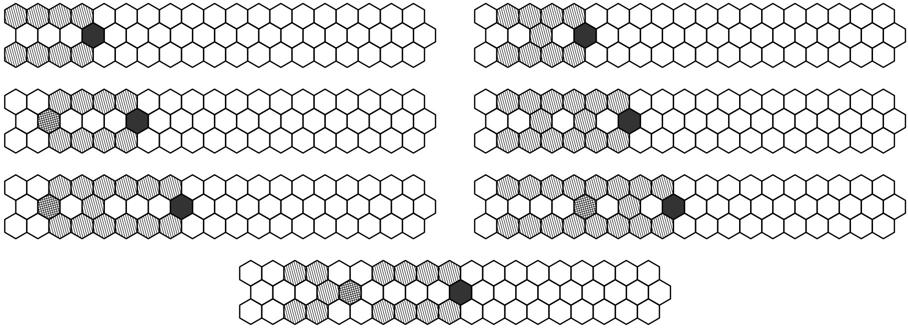
Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš



Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mirek Klimoš

Pseudovláčky

Tj. takové, kde je třeba některou buňku uměle měnit každý tah.



Bc.MM Martin Křivánek – zadní část neovlivní část přední, která dále pokračuje podle uvedeného schématu.

Zkuste se zamyslet nad následujícími věcmi:

- *Existují oscilátory s delší periodou než 3?*
- *Existují lodě? Pro tento náročný úkol můžete zkusit sestavit speciální program, který např. hledá jen lodě o periodě p a maximálním rozměru $m \times n$ o podle různých kritérií. Možnost vyloučí, jakmile je jasné, že daný útvar lodí není. Obdobným způsobem se dají hledat i složitější oscilátory.*
- *Jaké je zastoupení nejčastějších objektů v „náhodné polévce“? Tj. inicializujeme-li dostatečně velké pole hexů zpočátku náhodně, které objekty budou nejčastější?*

Irigi

Řešení úloh

Úloha 1.1 – Mokrý míček (4b)

Zadání:

Na rovné ploše leží míček o poloměru r. V tom náhle začne pršet a míček se chce schovat. Přístřešek je ve vzdálenosti d od míčku. Dešťové kapky mají rychlost v, a protože fouká vítr směrem k úkrytu, nedopadají kolmo, ale pod úhlem α vůči svislému směru. Poraďte míčku, jak rychle se má koulet do úkrytu, aby co nejméně zmokl! Předpokládejte, že míra zmoknutí míčku je dána tím, kolik kapek na něj dopadne.

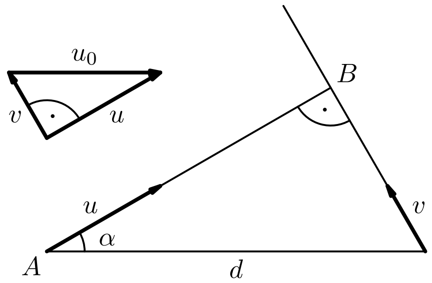
Pokud čekáte na konkrétní hodnoty, můžete počítat $r = 10\,\mathrm{cm}$, $d = 100\,\mathrm{m}$, $v = 10\,\mathrm{m/s}$ a $\alpha = 40^\circ$. Ale nezapomeňte i na obecné řešení.

Řešení:

Na začiatok si povedzme, s akými predpokladmi budeme príklad riešiť.

1. Predpokladajme, že priestor je vyplnený kvapkami tak, že kvapky vždy dopadajú presne na jednu polovinu guličky.

2. Neuvažujme, že loptička si chvíľu počká a začne sa pohybovať až keď sa pred ňou vytvorí tieň – oblasť, kde sa dážď nenachádza.
3. Priemer loptičky je omnoho menší ako vzdialenosť loptičky od domčeka.



Obr. r1.1

Na vyriešenie príkladu použime fintu – pozrime sa na pohyb loptičky aj domčeka v súradnej sústave spojenej s dažďovou kvapkou – viď obrázok. V tejto sústave sa dažďové kvapky nepohybujú, pohybuje sa iba domček a loptička. Je zrejmé, že dĺžka dráhy, ktorú prejde loptička v tejto sústave, bude priamo úmerná počtu kvapiek, ktoré na loptičku spadnú. Preto budeme v tejto sústave hľadať najkratšiu dráhu. Je zrejmé, že to bude kolmica z počiatočného bodu A na priamku pohybu domčeka. (Rozmyslite si, prečo sa musia domček a loptička stretnúť v bode B v tom istom čase.)

Z geometrie problému dostaneme rovnice pro rychlost loptičky v sústave spojenej s kvapkami (u) a v sústave spojené se zemou (u_0):

$$u = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha}\,,$$
$$u_0 = \sqrt{v^2 + u^2} = v\sqrt{1 + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{v}{\sin\alpha}\,,$$

z ktorých po dosadení dostaneme výsledok

$$u_0 = \frac{v}{\sin\alpha} = 15{,}6\,\mathrm{m/s}\,.$$

Bzučo

Úloha 1.2 – Diofantická rovnice (4b)

Zadání:
Řešte rovnici

$$m^n = n^{(m-n)}$$

v oboru přirozených čísel.

Řešení:
Snadno nahlédneme, že pokud $m = 1$ nebo $n = 1$, je nutně $m = n = 1$. V dalším tedy předpokládejme $m, n > 1$. Buď d největší společný dělitel čísel n a $m - n$.

Pak $m - n = ad$ a $n = bd$, kde a, b jsou nesoudělná. Rovnice se pak přepíše na tvar

$$(ad + bd)^b = (bd)^a \,. \tag{r2.1}$$

Pravá strana tedy musí být b-tou mocninou – to znamená, že v jejím prvočíselném rozkladu musí být exponenty u všech prvočísel dělitelné b. *Jelikož a, b jsou nesoudělná*, znamená to, že i v rozkladu samotného bd musí být všechny exponenty dělitelné b, tedy $bd = f^b$, kde b je přirozené. Po dosazení do rovnice (r2.1) dostaneme

$$\begin{aligned} ((a+b)d)^b &= f^{ab} \,, \\ (a+b)d &= f^a \,, \\ (a+b)bd &= bf^a \,, \\ (a+b)f^b &= bf^a \,, \\ 2 + \frac{a-b}{b} = 1 + \frac{a}{b} &= f^{a-b} \,. \end{aligned}$$

Protože je $1 + \frac{a}{b} > 1$, musí být $f > 1$ a $a > b$. Odhadneme

$$2 + (a - b) \geq 2 + \frac{a-b}{b} = f^{a-b} \geq 2^{a-b} \,.$$

Odtud už snadno plyne, že $a - b \in \{1, 2\}$. Pro $a - b = 1$ vyjde

$$f = 3 \wedge b = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 9 \,,$$

pro $a - b = 2$ vyjde

$$f = 2 \wedge b = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m = 8 \,.$$

Celkem tedy máme 3 řešení $m = n = 1$, $m = 9, n = 3$ a $m = 8, n = 2$.

HighEgg

Úloha 1.3 – Vesmírná přestřelka (4b)

Zadání:

Profesor Olovius proslul na celé planetě Plumbia svým důkazem, že na Slunci nemůže nikdy existovat život (o použitých důkazových metodách se bohužel prameny nezmiňují; vedou se spory o to, zda mohl být použit důkaz sporem). Sláva mu samozřejmě přinesla i nemalé peníze (odhadem asi pět miliard olověňáků), které mu umožnily zakoupit plně vybavenou vesmírnou výletní loď. V jednom ze dní zaslouženého volna se v ní prof. Olovius vydal na vyhlídkovou jízdu, prohlížel si teleskopem (olověným) epsilonové okolí Slunce a cítil se šťastný.

Než se však vůbec stačil náležitě pokochat, spatřil něco, co mu vyrazilo dech: po Slunci se prohání drobný šestinohý tvor, a mává mu do objektivu! Dřív než stačil profesor začít rozmýšlet, kde udělal chybu, došlo mu velmi rychle, že buď on, nebo on. Po Plumbii by se zpráva jistě roznesla velmi rychle a profesor by byl společensky znemožněn. Proto se sám se sebou usnesl, že nemá jinou možnost, než toho zatraceného (po)tvora zlikvidovat. Přehlédl své zásoby munice a vybral z nich tu největší olověnou kouli, která měla poloměr $r = 10\,\mathrm{cm}$. Namířil, vystřelil – a zjistil, že udělal další chybu v úvaze …

Určete, jak se bude záviset teplota střely na její vzdálenosti od Slunce. V jaké vzdálenosti se roztaví? Předpokládejte, že je dokonale šedá (tedy že se odráží světlo všech vlnových délek stejně). Můžete také předpokládat, že Slunce Plumbie září stejně jako naše pozemské Slunce.

Řešení:
Kromě otázky, jak se bude měnit teplota kuličky cestou ke Slunci, je potřeba vyřešit, za jakých podmínek se vůbec roztaví. Za normálních pozemských podmínek olovo taje při teplotě $T_\mathrm{t} = 601\,\mathrm{K}$. Olověná kulička o průměru $d = 10\,\mathrm{cm}$ má hmotnost $m = 5{,}9\,\mathrm{kg}$. Skupenské teplo tání je $l_t = 23 \cdot 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$, takže na samotné roztavení kuličky je potřeba dodat $140\,\mathrm{kJ}$.

Dále budu předpokládat, že tyto hodnoty se prakticky nezmění i v případě, že se kulička vyskytuje ve vesmíru. To, že se za takto nízkého tlaku může olovo vyskytovat v kapalném stavu, sice neumím dokázat, ale vycházím z toho, že v pozemských vakuových aparaturách se kapalné kovy vyskytovat mohou. Změna teploty tání s tlakem souvisí podle literatury[7] s tím, že kapalná a pevná fáze má jinou hustotu, a hustota se mění i působením vnějšího tlaku. Vzhledem k zanedbatelnému stlačení olova při atmosferickém tlaku lze tuto závislost zanedbat.

Nyní se budu zabývat změnou teploty kuličky cestou ke Slunci. Z tohoto hlediska jsou důležité dva děje – kulička dostává jistou energii v podobě záření od Slunce a kulička sama září, a tím se ochlazuje. Nejprve vyřeším rovnovážný stav – tj. budu hledat takovou teplotu kuličky, aby v dané vzdálenosti od Slunce byla v tepelné rovnováze.

Každé těleso vyzařuje nějakou energii jako tepelné záření. Vyzářený výkon závisí na barvě tělesa a na teplotě, a platí pro něj Stefan-Boltzmannův zákon

$$P = \alpha\sigma S T^4\,, \tag{r3.1}$$

kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$, S je povrch tělesa a α je koeficient obecně závislý na spektru („barvě“) vyzařovaného světla. Pro nás důležitých je několik speciálních případů. Pro dokonale černé těleso platí $\alpha = 1$.[8] Pro dokonale šedé těleso je to konstanta v rozsahu $(0, 1)$ a nezávisí na vlnové délce.

Konstanta α má kromě výše uvedeného ještě jeden význam. Určuje, jakou část dopadajícího záření dané vlnové délky těleso pohltí.[9] Dalo by se tedy říct, že čím více těleso tepelně září, tím více také záření pohlcuje. To ale obecně platí jen tehdy, když na těleso dopadá záření se stejným spektrem, jaké samo vyzařuje (nezapomínejte, že α nemusí být konstanta).[10] My ale máme situaci

[7] Kolektiv autorů: Fyzika pro pedagogické fakulty, 1. díl, Praha 1971.

[8] Hodnota α je vždy menší nebo rovna jedné, takže, ač se to možná někomu bude zdát zvláštní, září dokonale černé těleso ze všech těles nejvíce.

[9] Dokonale černé těleso tedy pohltí naprosto všechno dopadající záření.

[10] Typickým příkladem situace, kdy α závisí na vlnové délce, je atmosferický skleníkový efekt. Na Zemi dopadá světlo ze Slunce, které má maximum ve viditelném oboru. Pro tyto vlnové délky většina světla projde atmosférou, nic

zjednodušenou tím, že kulička je dokonale šedé těleso a α konstantní, takže problémem vlnových délek se už dále nebudu zabývat.

Výkon, který vyzařuje Slunce je $P_\odot = 3{,}826 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. Kulička má plochu příčného řezu $S_\mathrm{k} = \pi \cdot d^2/4$ a pokud je ve vzdálenosti r od Slunce, dopadá na ni výkon

$$P_\mathrm{dop} = P_\odot \cdot \frac{S_\mathrm{k}}{4\pi r^2} = P_\odot \cdot \frac{d^2}{16r^2}\,. \tag{r3.2}$$

Tento vztah plyne z triviální geometrické úvahy – na kuličku dopadá taková část, jakou část kulové plochy opsané kolem Slunce kulička zabírá. Kulička o teplotě T vyzařuje výkon

$$P_\mathrm{vyz} = \alpha\sigma\pi d^2 T^4\,. \tag{r3.3}$$

Aby byla dosažena rovnováha, musí platit, že pohlcený výkon (αP_dop) je roven vyzařovanému výkonu:

$$\begin{aligned}\alpha P_\odot \cdot \frac{d^2}{16r^2} &= \alpha\sigma\pi d^2 T^4\,,\\ \frac{P_\odot}{16r^2} &= \pi\sigma T^4\,,\\ T &= \sqrt[4]{\frac{P_\odot}{16\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}\,,\\ T &= \frac{1{,}08 \cdot 10^8\,\mathrm{K\,m^{1/2}}}{\sqrt{r}}\,. \end{aligned} \tag{r3.4}$$

Druhá mocnina rovnovážné teploty je tedy nepřímo úměrná vzdálenosti od (středu) Slunce. Teplota tání olova je pak rovnovážnou teplotou ve vzdálenosti

$$r_{601} = 32 \cdot 10^6\,\mathrm{km}\,.$$

Rovnovážnou teplotu bude kulička mít za předpokladu, že se pohybuje dostatečně pomalu (co je to „dostatečně" je rozebráno níže). Aby se roztavila, potřebuje navíc získat skupenské teplo, asi 140 kJ. Ve vzdálenosti $31 \cdot 10^6$ km bude kulička o teplotě 600 K a koeficientu $\alpha = 0{,}5$ dostávat „navíc" výkon asi 10 W ($\alpha P_\mathrm{dop} - P_\mathrm{vyz}$). Takový výkon kuličku roztaví za necelé 4 hodiny. Jak daleko se během této doby dostane, závisí na rychlosti. Tu ale zatím neznám, takže se k tomuto problému vrátím později.

---

moc se neodráží, a konstanta α je poměrně vysoká. Kdyby Země vyzařovala tepelné záření na stejných vlnových délkách, tak by měla podle (r3.1) vyzařovat poměrně vysoký výkon (velké α), a teplota na povrchu by nám nebyla moc příjemná. Země je ale mnohem chladnější než Slunce, takže se snaží vyzařovat na větších vlnových délkách (vzpomeňte si, jak se mění barva zahřívaného tělesa), konkrétně v infračervené oblasti. Pro tyto vlnové délky je ale v případě Země α menší, tím by při stejné teplotě byl menší i vyzářený výkon, a povrch se tedy trochu více ohřeje.

Teď se tedy podívám na situaci z dynamického hlediska. K tomu potřebuji trochu více údajů, než bylo zadáno. Budu předpokládat, že profesor Olovius vystřelil takovým způsobem, že kulička ztratila celou orbitální rychlost vůči Slunci a začala padat volným pádem. Dále předpokládám, že střílel ze vzdálenosti $r_0 = 150 \cdot 10^6$ km. (Vzhledem k tomu, že řešení se pravděpodobně nebude příliš lišit od rovnovážného, nemusí být tyto počáteční podmínky příliš přesně dodrženy). Ze zákona zachování energie mohu odhadnout rychlost kuličky ve vzdálenosti r od Slunce.

Počáteční energie v gravitačním poli Slunce je

$$E_0 = -\kappa \frac{M_\odot m}{r_0} \,.$$

Rychlost v obecné vzdálenosti pak zjistím podle vztahu

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \kappa \frac{M_\odot m}{r} \,, \qquad v = \sqrt{2\kappa M_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \,. \tag{r3.5}$$

Ve vzdálenosti $32 \cdot 10^6$ km bude rychlost $v = 81\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

V tuto chvíli se mohu podívat na oprávněnost předpokladu rovnovážné teploty. Pomocí vztahů (r3.4) a (r3.5) vyjádřím změnu tepoty kuličky za čas. Vím, že platí:[11]

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} &= -\frac{1}{2} \cdot 1{,}08 \cdot 10^8\,\mathrm{K\,m^{1/2}} \cdot r^{-3/2} \,, \\
-v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= -\sqrt{2\kappa M_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \,, \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2} \cdot 1{,}08 \cdot 10^8\,\mathrm{K\,m^{1/2}} \cdot r^{-3/2} \cdot \sqrt{2\kappa M_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \,.
\end{aligned}$$

Dále vím, že změna teploty souvisí s dodanou energií podle vztahu $\mathrm{d}E = mc\,\mathrm{d}T$ (c je měrná tepelná kapacita, $c_{\mathrm{Pb}} = 129\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$). Ve výsledku tedy pro potřebný výkon, který musím dodávat kuličce, platí

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 4{,}12 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J\,m^{1/2}} \cdot r^{-3/2} \cdot \sqrt{2\kappa M_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \,. \tag{r3.6}$$

Kulička tento výkon může dostat pouze tím způsobem, že její skutečná teplota bude o něco nižší, než rovnovážná teplota v daném místě. Pokud připustím teplotu kuličky nižší o ΔT, bude získaný výkon

$$P_{\mathrm{zisk}} = \alpha\sigma S \left(T^4 - (T - \Delta T)^4\right) \,.$$

[11] Nemáte-li rádi derivace, můžete prvnímu vztahu prostě věřit a jinak klidně chápat písmenka „d“ jako malou změnu.

V prvním přiblížení závisí na třetí mocnině rovnovážné teploty (čtvrté mocniny se odečtou). Teplota závisí na převrácené hodnotě odmocniny ze vzdálenosti (r3.4), takže získaný výkon při konstantním rozdílu teplot roste jako $1/r^{3/2}$. Naopak potřebný výkon (r3.6) roste v prvním přiblížení podle $1/r^2$. Tedy čím dále od Slunce, tím jednodušeji lze potřebnou energii dodat. Omezím se proto na situaci ve vzdálenosti $32 \cdot 10^6$ km. Tam je potřebný výkon asi 0,5 W.

Po dosazení a zavedení předpokladu $\alpha = 0{,}5$ zjistím, že stačí $\Delta T = 0{,}7\,\mathrm{K}$. Kulička by tedy teploty tání dosáhla asi o $0{,}06 \cdot 10^6$ km blíže ke Slunci. Tento rozdíl mohu vzhledem k přesnosti používané výše s klidem zanedbat a rovnovážné přiblížení považovat za dostatečné.

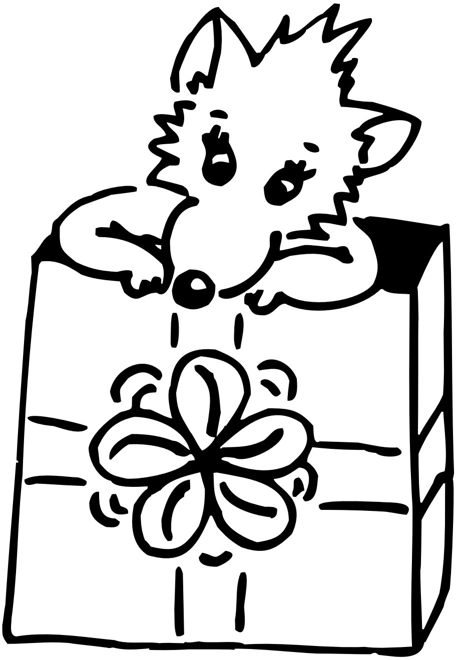
Ještě se vrátím k samotnému tání a skupenskému teplu. Určitý odhad rychlosti kuličky už mám. V kritické vzdálenosti od Slunce urazí jeden milion kilometrů za 3,4 hodiny. Vzhledem k závěrům výše lze říct, že kulička za této situace skutečně roztaje asi o $1{,}5 \cdot 10^6$ km blíže ke Slunci, než je místo, kde získá teplotu tání. S přesností na miliony kilometrů je tedy vzdálenost, ve které kulička roztaje

$$r = 31 \cdot 10^6\,\mathrm{km}\,.$$

Marble

Výsledková listina

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	$\sum_{0}$	$\sum_{1}$
1.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Rott	30	1	0	1	4	19	5	30	30
2.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Beran	31		4	3	8	3	6	24	24
3–4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Böhmová	57					23		23	23
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Bílka	26	4	3	4		5	7	23	23
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Javůrek	45	3				15		18	18
6–7.	Dr.$^{\text{MM}}$ Matěj Korvas	58	1				11	2	14	14
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radim Vansa	40	4	2				8	14	14
8–10.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Opršal	46		4			9		13	13
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jaroslav Hančl	40		4			9		13	13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Miroslav Klimoš	13	2	2				9	13	13
11–12.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Scholz	45					12		12	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Marie Dostálová	12					12		12	12
13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek	144		4			7		11	11
14.	Bc.$^{\text{MM}}$ Beáta Hergelová	10		4		6			10	10
15.	Bc.$^{\text{MM}}$ Martin Křivánek	13		2				7	9	9
16–17.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	35		1		4		3	8	8
	Hana Jirků	8		0		4	3	1	8	8
18–19.	Dr.$^{\text{MM}}$ Eva Černohorská	89		4				3	7	7
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Basovník	28	5	2					7	7
20–21.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jozef Cmar	90	0	0			6		6	6
	Martin Alan	6		1				5	6	6
22.	Doc.$^{\text{MM}}$ Tereza Klimošová	131	1	4					5	5
23.	Michal Bezvoda	4				4			4	4
24–26.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radim Pechal	33	3						3	3
	Lucie Mohelníková	3		3					3	3
	Jan Vaňhara	3	0	2	1				3	3
27–29.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Pecha	33	1		1				2	2
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Dárius Gál	20					2		2	2
	Jiří Martišek	2		2					2	2
30.	Lenka Švidrnochová	1	0	1					1	1



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.