M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XI číslo 7

Milí kamarádi,

již dlouho jistě netrpělivě očekáváte poslední číslo jedenáctého ročníku, ve kterém se dozvíte, jak to vlastně všechno dopadlo se střílečkou, slunečními plachetnicemi, keltskými uzly, ale také se špagetami nebo poskakujícími lidmi a spoustou dalšího. No a hlavně s vámi samotnými – jak jste se s úlohami vypořádali v porovnání s ostatními. Ale i kdyby se vám vaše umístění v závěrečné výsledkové listině nepozdávalo, nevěšte hlavu! Pro nás je vítězem každý, kdo se vůbec odhodlal a pustil se do řešení. A jestli je pro vás pohled na vaše jméno v čele výsledkové listiny nepřekonatelnou touhou, pak dvanáctý ročník je k tomu vynikající příležitostí. Tak příjemné počtení! :-)

Redakce

Řešení témat

Téma 4 – Střílečka

Po provedení turnaje jsme si mysleli, že je témátko již vyčerpáno, přesto však přišel Mgr.[MM] Marek Pecha s velmi zajímavým příspěvkem, který rozhodně stojí za otištění.

Střílečka aneb život je boj

Mgr.[MM] Marek Pecha

Řekněme si po pravdě, život je boj, jednou tě někdo potenciálně zastřelí, jindy máš na vrch ty, a právě to bylo motivací pro můj příspěvek. V tomto článku je popsaný způsob tvorby celého projektu, vyhodnocování a jiné důležité údaje.

Přípravné práce

Celý projekt spočívá v tom, že jsem převedl 3–5 denní životní režim do naší střílečky. Šesnácti lidem jsem rozdal papíry, do kterých podle určitého pravidla zapisovali svoje prožitky.

Aby se to mohlo převést, musel jsem vymyslet, co která položka ve střílečce znamená v reálu. Vycházel jsem z možných pocitů vojáků, kteří jsou v boji, a to jsem potom zakomponoval do života. Celý dotazník vypadal jako průzkum chování lidí a nikdo by si nepomyslel, k čemu to může doopravdy sloužit, což bylo samozřejmě účelem.

Co představovalo co:

Krytí: Byl(a) jsem v ústraní, skryt(a) všemu okolo mne, nebo alespoň tomu nejnebezpečnějšímu, co by mne mohlo v tuto třetinu dne potkat.

Nabíjení: Připravoval(a) jsem se na něco významného nebo potřebného. Též se sem hodí: chystal(a) jsem se na nějakou podlost či podraz.

Střílení: Dokázal(a) jsem, co jsem chtěl(a) a mám z toho radost. Splnil(a) jsem svou práci.

To vše se potom zapisovalo do tabulky, ve které byl den rozdělen na tři části po 8 hodinách.

Tyto možnosti mohl účastník zapsat hned třikrát za sebou, pokud si myslel, že se mu obzvlášť dařilo.

Rozdělení, převedení a vyhodnocení

Schválně jsem použil slovo rozdělení, protože počet lidí je značný, a abych dodržel zadání, musel bych určitému hráči vylosovat každé kolo spoluhráče. Jelikož by to bylo časově velmi náročné, zvolil jsem formu pavouka, kde se dvojice náhodně losovaly.

Aby měl pavouk nějaký význam, musí počet lidí být 4, 8 nebo 16. Osm se mi zdálo málo, a proto jsem přesáhl limit hráčů o jednoho.

Tvorba algoritmu

Aby se „surová data“ mohla použít, bylo zapotřebí je zpracovat, což nebylo nijak složité. Pod sebe se zapsaly výsledky, rozdělily se do sloupečků, a čeho bylo v určitém sloupečku nejvíce, to se zapsalo jako jedna akce algoritmu. Byl-li počet některých akcí stejný, napsalo se to jako více akcí za sebou v daném pořadí.

Vyhodnocení

Toto je časově nejnáročnější část celého příspěvku. Boj spoluhráčů probíhal v 15 tazích, tzn. algoritmus byl rozšířen na 15 kroků. Potom už probíhalo pozorování. (Pozn.: Pokud hráč neměl nabito a střílel, došlo ke střelbě naprázdno, ale to už tak v životě bývá.)

Další závažnou věcí je postup hráče – hráč, který má více bodů (body získává za trefení protihráče) postupuje. Při rovnosti bodů postupuje hráč s větší úspěšností střelby.

Dodatek na závěr

Všechny statistiky a vyhodnocení hráčů jsou na přiloženém CD. *Pozn. red.: Autor přiložil mnoho statistik a strom hráčů. Bez bližšího zpracování a zdůraznění zajímavých skutečností (které autor bohužel nepřiložil) by však jejich otištění nepřineslo příliš nového.*

Irigi

Téma 5 – Sluneční plachetnice

Historie slunečních plachetnic

Dr.^MM Josef Cmar

Existence tlaku slunečního záření byla poprvé naznačena Janem Keplerem v roce 1619. Kepler se tenkrát pokusil vysvětlit, proč je ohon komety při jejím průletu oblohou obvykle orientován od Slunce. Uvažoval, že světelné záření působí na chvost komety určitým tlakem. Teoretické vysvětlení tohoto efektu však bylo podáno až v rámci Maxwellovy elektromagnetické teorie v roce 1873. Z ní vyplývá, že libovolný typ záření působí na libovolné těleso (pohlcující a odrážející světlo), na které dopadá, určitým tlakem. Tento tlak je sice velice malý, ale je k dispozici nepřetržitě.

Některé známější pokusy a projekty

Během 70. let NASA uvažovala o konstrukci vesmírné sondy poháněné sluneční plachtou k výzkumu Halleyovy komety. Nedostatek financí způsobil, že NASA tento projekt v roce 1977 opustila. Tenkrát se ale mělo plachet použít ke stabilizaci sondy.

Počátkem 80. let byla myšlenka závodu slunečních plachetnic oživena nadšenci z Evropy a Ameriky. Začalo se s propagací závodu k Marsu, který se měl uskutečnit v roce 1992 při příležitosti 500. výročí objevení Ameriky Kryštofem Kolumbem. Brzy se ukázalo, že se tento závod neuskuteční. Důvody byly prozaické – nedostatek zájmu a především peněz. Začalo se tedy uvažovat nad jednodušším závodem na trase Země-Měsíc nazvaném Luna Cup. Vznikly tři různé projekty, které předpokládaly vynesení pomocí rakety Arianne 4. Ani tento projekt se však neuskutečnil.

Pro mě překvapující zjištění bylo, že se o realizaci pokoušela také pražská skupina LSG. Šlo o studentskou skupinu soustředěnou v pražském Planetáriu. Skupina diskutovala základní otázky funkce sluneční plachetnice a problematiku jejího manévrování v kosmickém prostoru. Projekt dokonce získal první cenu na astronomickém kongresu v Paříži. Na realizaci se ale nenašly prostředky.

V roce 1997 dostal rozvoj slunečních plachetnic nový impuls – ESA podpořila projekt UNESCO nazvaný Star of Tolerance. Cílem byla a je globální komunikace mezi národy. Návrh počítá s vypuštěním plachetnice o ploše 1 600 m^2, kterou by mohl pozorovat každý obyvatel Země. Po dvou letech by pak zamířila dále do kosmického prostoru. Na realizaci bylo vyčleněno tehdejších 1,5 milionu DEM (německých marek). Vypuštění proběhlo pomocí rakety Arianne 5.

Použitá literatura

[1] H. M. Harris: Scientific American (1999)
[2] R. M. Wingler: Mini-magnetospheric Plasma Propulsion, Final Report, May 1999
[3] P. B. de Selding: Space News 11 (2000)
[4] LSG: Solar Sail as OTV
[5] R. Z. Staehle, J. M. Graham, J. Chanpa: Spaceflight (1992)
[6] F. Kurnik: Air & Space (1994)
[7] V3P: Solar Sail Moon Race (1982)

Bzučo

Téma 6 – Keltské uzly

Keltské uzly

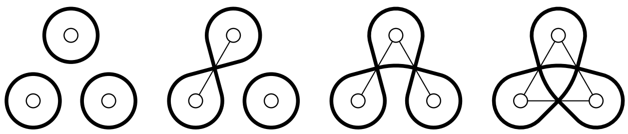
Doc.$^{\text{MM}}$ *Stanislav Basovník*

Rovinné grafy

Základem keltských uzlů jsou rovinné grafy. Řekneme si k nim tedy nějakou základní teorii. Každý graf je tvořen množinou vrcholů (bodů), z nichž některé jsou spojeny hranami (úsečkami nebo křivkami). Rovinný graf můžeme nakreslit do roviny tak, že se žádné jeho hrany nekříží mimo vrcholy. Navíc platí tvrzení, že každý rovinný graf lze nakreslit tak, aby všechny jeho hrany byly rovné úsečky. Kromě vrcholů a hran můžeme u rovinných grafů určit také stěny. Stěna grafu je část roviny, jejíž obvod tvoří hrany grafu a uvnitř této stěny se již nenachází žádný vrchol ani tudy neprochází žádná další hrana. Stěny grafu jsou tedy mnohoúhelníky bez úhlopříček. V dalším textu budeme na všech místech mluvit o rovinných grafech.

Důkaz nakreslení uzlu pro daný rovinný graf

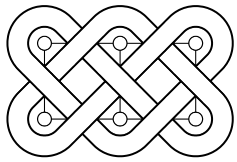
Nyní si dokážeme, že pro každý rovinný graf existuje nakreslení příslušného keltského uzlu. Tento důkaz provedeme postupnou výstavbou grafu a současně budeme upravovat uzel až se dostaneme k požadovanému výsledku. Předpokládejme, že máme v rovině nakreslený graf. Odebereme všechny jeho hrany a zůstanou nám pouze vrcholy. Kolem každého vrcholu nakreslíme kružnici s takovým poloměrem, že žádná kružnice není uvnitř jiné a žádné dvě kružnice nemají společný bod. To jsou základní podmínky pro poloměr, přesnou velikost si můžeme upravit podle vlastního estetického cítění. Teď budeme jednotlivé hrany vracet na původní místo. Pokud spojíme dva vrcholy hranou, musí tato hrana protnout obě kružnice kolem vrcholů. Obě kružnice v místě průniku rozstřihneme a spojíme dvojice konců mezi kružnicemi tak, že se budou křížit ve středu hrany. Toto můžeme provést pro každou hranu. Následuje příklad postupné výstavby grafu a uzlu:



Po přidání poslední hrany a aktualizaci uzlu jsme hotovi. Zbývá smazat zbylé kružnice, které se mohou vyskytovat u vrcholů, z nichž nevede žádná hrana. Podle definice tyto kružnice do uzlu nepatří. Zbývající křivky tvoří hledaný uzel, který splňuje všechny zadané vlastnosti. Takto můžeme postupovat pro libovolný rovinný graf.

Důkaz střídání křížení nahoře a dole

Teď, když máme uzel nakreslený, zavedeme si pravidlo pro křížení. Budeme postupně vyhledávat stěny grafu, a u každé stěny upravíme křížení na obvodo-



vých hranách. Nejprve se dohodneme na pevném směru, kterým budeme postupovat po obvodu. Nechť je to třeba kladný směr (proti směru hodinových ručiček). Platí, že každé dvě sousední hrany mají společný úsek uzlu, který vede vnitřkem zkoumané stěny. Tento úsek bude mít počáteční bod a koncový bod. Počáteční bod bude ležet ve středu jedné hrany a koncový ve středu vedlejší hrany v kladném směru (jak bylo dohodnuto). Všude bude platit, že počáteční bod se bude křížit nad a koncový pod. Díky tomuto pravidlu máme zaručené, že se bude křížení pravidelně střídat. Ukázka je na obrázku vpravo.

Algoritmus pro kreslení uzlů

Máme zadaný rovinný graf a chceme sestavit program, který vygeneruje keltský uzel pro tento graf. Graf bude zadán jako posloupnost souřadnic vrcholů a seznamem hran spojujících některé vrcholy. Jednotlivé úseky uzlu vedou vždy ze středu jedné hrany do středu jiné hrany. V důkazu střídání křížení výše jsme tyto úseky pozorovali na obvodu stěn grafu. Stejným způsobem bude pracovat i náš algoritmus. Popis postupu je následující:

Program zpracuje každou hranu zvlášť. U každé hrany budeme muset provést dva výpočty, protože hrana je vždy společná dvěma stěnám v grafu. Musíme umět najít sousední hranu v dohodnutém směru na obvodu stěny a tyto hrany spojíme. Pro efektivní (a zároveň jednodušší) vyhledávání vytvoříme pro každý vrchol seznam setříděných hran, které vedou do tohoto vrcholu. Třídit budeme podle úhlu, který svírají hrany s jednou společnou přímkou. Hrany, které se nacházejí vedle sebe v některé stěně grafu, jsou v setříděném seznamu také vedle sebe, resp. jedna je na konci a druhá na začátku seznamu. Během spojování hran můžeme současně určit křížení pomocí dohodnutého směru. Takto popsaný algoritmus zobrazí korektně libovolný keltský uzel.

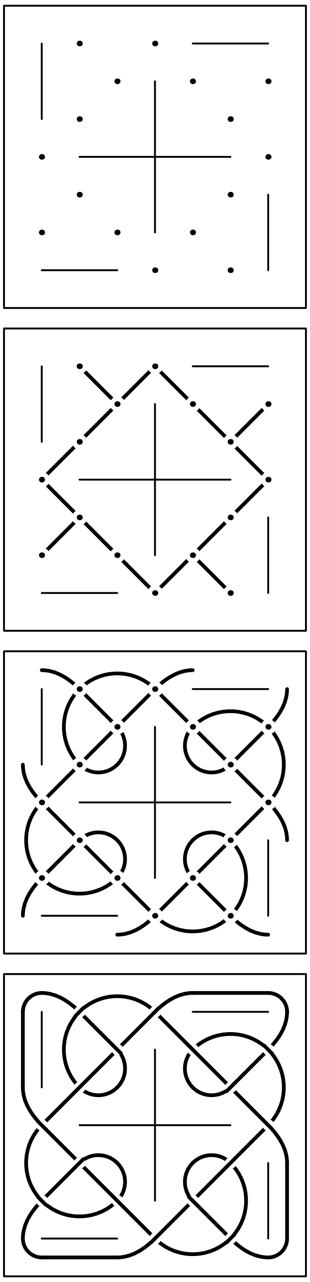
Délka uzlu pro čtvercové grafy

Nechť V je počet vrcholů a H je počet hran zadaného čtvercového grafu. Celkem tedy máme H křížení a $(4V - 2H)$ čtvrtkružnic. Z každého vrcholu mohou vést maximálně čtyři hrany a každá hrana je společná dvěma vrcholům, proto $(4V - 2H)$. Nechť délka hrany je jedna jednotka. Pak poloměr kružnic (resp. oblouků) je $\sqrt{2}/4$. Odvodili jsme to z toho, že uzel protíná hranu pod úhlem $45°$. Délka čtvrtoblouku je tedy $(1/4) \cdot 2\pi \cdot (\sqrt{2}/4) = \pi\sqrt{2}/8$. Dále dvě úsečky, které se kříží nad hranou, mají celkovou délku $4 \cdot (\sqrt{2}/4) = \sqrt{2}$. Celková délka smyček je tedy $(\pi\sqrt{2}/2) \cdot V + (\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}/4) \cdot H$.

Konstrukce uzlů

Dr.^{MM} Zuzana Safernová

Zaměřím se na konstrukci takovýchto uzlů. Použiji čtverečkovaný papír, křížky nahradím tečkami, vrcholy vynechám úplně, celý graf ohraničím. Vnější ohraničení vytvoří něco jako obal, který žádná čára uzlu nepřesáhne, zatímco vnitřní určí výsledný tvar uzlu (přes toto ohraničení rovněž nevede žádná uzlová čára).



Příklad jedné takovéto sítě je na prvním obrázku – sudý počet čtverečků v obou směrech. Tečky jsou umístěny střídavě místo rohů ($2m \times 2n$ síť, tečky na x, y, kde $x + y$ je liché). Tečky značí místo křížení uzlů. Vnitřní ohraničení obsahuje tečku uprostřed.

1. krok

Všechny volné tečky spojíme diagonálními spojnicemi tak, aby spojnice neležely v segmentu sítě, kde je již vnitřní či vnější ohraničení (respektujeme ho). Segmenty nespojujeme úplně, budou se totiž křížit.

2. krok – krátké zatáčky

Zatáčky napojujeme na rovné části. U ohraničení vedeme zatáčku od ohraničení a paralelně na obou polovinách dělicího ohraničení vedeme zatáčky přímo k tečkám. Technicky vzato je zatáčka část (1/8) kružnice se středem na nejbližší tečce a poloměrem $\sqrt{2} \times$ délka segmentu sítě (1 čtvereček). Pokud se zatáčky spojí, je možno je nakreslit vcelku (1/4 obvodu kružnice).

3. krok – rohy

Vznikají kdekoli tam, kde tvoří ohraničení roh (často je kreslíme přímo – viz vnitřní na obrázku vpravo). Smyčky vzniknou v oblastech ohraničených třemi zdmi a tečkou.

4. krok – dlouhé spoje

Kdekoli je s venkovním ohraničením rovnoběžné i vnitřní ohraničení, je spoj dlouhý tak, aby spojil již nakreslené části.

5. krok – křížení

Kdekoli se čáry kříží, postupujeme následovně: V lichých řadách (řadou myslíme horizontální řadu teček) spojíme horní pravý se spodním levým okrajem, v sudých řadách spojíme horní levý se spodním pravým. Postupujeme-li po uzlu, spoje se střídají – nahoře, dole, . . .

A takhle vypadá konečná verze. :-)

Vzhledem k uvedenému postupu jsme vždy schopni nakreslit keltské uzly pro čtvercový graf (nikde nic chybět či přebývat nebude – vždy se to dá s něčím spojit, maximálně samo se sebou – viz smyčka u rohů). Stejně tak jsme vždy schopni střídat křížení.

Pozn. red.: Přiloženy byly i dva větší propletené uzly z bavlnky na tvrdém papíru. Díky.

Gavento

Řešení úloh

Úloha 5.1 – Vaření špaget (4b)

Zadání:

Praví italští kuchaři prý určují, jestli jsou špagety správně uvařené, jejich vržením na strop. Pokud špageta zůstane přilepená, je čas servírovat.

Prozkoumejte (teoreticky nebo experimentálně), je-li pravda, že špageta je uvařená právě tehdy, když drží přilepená na stropě. Nezapomeňte své závěry dostatečně zdůvodnit či podložit fakty.

Řešení:

V podstatě jednoduchá praktická úloha se ukázala být ve svých výsledcích nečekaně zavádějící. O co šlo? Základní otázka zněla, zda se uvařené špagety lepí na strop. Ti snaživější mohli i zdůvodnit proč, a zda platí i opačná implikace (lepící se špageta je již uvařená).

Ideální postup: Dát vařit vodu, osolit, a ve chvíli, kdy přejde do varu, do ní vhodit špagety. Pak je po cca jedné minutě vaření začít vytahovat (nejlépe po dvou) a zkoušet uvařenost a jedlost v co nejkratších intervalech (maximálně jedna minuta). No a nakonec nezbývá, než z výsledků něco odvodit, jde-li to.

Zde se asi vyskytovalo nejvíc chyb. Ne že by účastníci nezvládli dát vařit špagety a (ve většině případů) je i uvařit a zaznamenat výsledky, jen to byl případ hozené koruny a následného usouzení, že zřejmě ve všech případech padne orel. Nebo panna. Ovšem skutečnost je trošku jiná. Prostě a jednoduše, všichni řešitelé pracovali maximálně s jedním vzorkem. TO JE MÁLO! Netvrdím, že musíte uvařit 10 balíčků, ale tak 2–3, např. normální, celozrnné atd., a třeba i napsat typ špaget. (Dr.MM Zuzka Safernová poslala sice i vzorky, ale bohužel v době dodání byly již nejedlé, a tedy neurčitelné.)

Jak tedy dopadly výsledky? Půl napůl co se týče lepivosti a jedny dokonale rozvařené špagety (které se samozřejmě lepí naprosto ideálně). Z mých vlastních pokusů (5 druhů špaget) vyplývá přibližně totéž. Obzvláště celozrnné špagety mají poněkud horší přilnavost. A obecně neplatí, že lepící špageta je špageta uvařená! Špageta vám začne celkem slušně lepit již cca po polovině optimální doby vaření, a pak lepí prakticky až do úplného rozvaření. (Následně vytvořená hmota i po něm.)

Fyzikální vysvětlení na základě rozpouštění škrobu či lepku ve vodě je v pořádku. Jen bych mohl oprávněně namítat, proč se tak dobře nelepí ostatní těstoviny (kolínka, vřetena, …). Odpověď je ukryta v tabulce níže. Jednak jsou

Druh	Objem před vařením	Hmotnost před vařením	Objem po vaření	Hmotnost po vaření
nudle	2,5 dl	100 g	5 dl	300 g
široké nudle	2,5 dl	130 g	5 dl	450 g
flíčky, fleky	2,5 dl	130 g	5 dl	450 g
„rýže“ drobení	2,5 dl	190 g	1 l	800 g
kolínka	2,5 dl	130 g	7 dl	450 g
vřetena	2,5 dl	100 g	5 dl	300 g
špagety	2,5 dl	100 g	3,2 dl	250 g

tak nějak „převodnělá“ a navíc moc těžká, aby se poměrně malou plochou udržela na stropě.

Také podpůrná domněnka některých řešitelů o částečném vytlačení vody a následném vytvoření vrstvy mezi špagetou a stropem je správná. Udržení napomáhá částečně i to, že se rozmočí tenká vrstvička na stropě samém.

Zajímavosti: Dr.MM Zuzana Safernová vypozorovala, že se špagety lepí i obalené omáčkou. Otázka pak je, co vlastně lepí – s největší pravděpodobností lehce zaschlý kečup v omáčce. (Mohu potvrdit z vlastní zkušenost, stejně jako asi každý, kdo myl zaschlé okečupované zbytky špaget z talíře.)

A poznámka na závěr: Neoficiálním cílem této úlohy bylo, aby se, jak to vypadá, špatně živení účastníci konečně mohli pořádně najíst. Dokonce i za nějaký ten bodík. Bohužel, toto splnila jen polovina z nich. Snad příště. :-)

Těstoviny vaříme ve velkém množství mírně osolené vody. Na každých 100 *g dáváme* 1 *l vody. Jakmile se voda v hrnci začne vařit, plamen snížíme, vhodíme těstoviny, plamen zvýšíme, protože těstoviny musí rychle přijít do varu, pak plamen opět snížíme a za občasného promíchání ode dna je dovaříme. Doba varu bude záležet na tloušťce těsta. Důležité je, aby se těstoviny nerozvařily. Rozvařené těstoviny jsou největším nešvarem našich restaurací. Těstoviny zásadně připravujeme těsně před konzumací a nikoli do zásoby.*

Vaříme je, jak říkají Italové, „al dente“, čili „na skus“ (nerozvařte, nepřevařte, dovařte jen tak, aby těstovina nebyla při skousnutí nepříjemně tuhá). Při vaření je proto občas ochutnáváme. Než uvařené těstoviny stáhneme z ohně, zalijeme je asi 2 *dl studené vody, abychom naráz zastavili var a při scezení se nám nudle neslepily. Abychom měli jistotu, že se nám těstoviny neslepí, stačí přidat do vody* 1 *lžíci oleje. Uvařené je scedíme, necháme okapat a ihned smícháme s připravenou omáčkou. Vodu z uvařených těstovin nevyléváme, můžeme ji využít do omáček, polévek a podobně.*

Atlantis

Úloha 5.2 – Děravý Měsíc (7b)

Zadání:

Kolonizátoři Měsíce dospěli k závěru, že je potřeba vytvořit nějaký (integrovaný) dopravní systém (pěšky je to i na Měsíci poněkud daleko). Ale nechtějí stavět dálnice, takže přišli s následujícím návrhem. Do Měsíce se vyvrtá k (řádově tisíc) svislých válcových šachet o průměru *r tak, že jejich ústí budou rozložena rovnoměrně po celém povrchu. Uprostřed bude umístěno kulové ústředí, které zachytí kabinky padající volným pádem a bez ztráty energie nasměruje do jiné šachty.*

Jaký objem horniny bude třeba při ražení šachet vytěžit (pozor na průnik šachet ve středu Měsíce)? Co si s ní pak kolonizátoři počnou? Jak velké může být ústředí, aby se vešlo do prostoru, který vznikl při ražení šachet?

Dále je tu několik fyzikálních otázek. Jak dlouho bude trvat cesta kabinky skrz Měsíc a jaké zrychlení bude na kabinku (a, možná nebohé, cestující v ní) působit při otáčce v centru? Samozřejmě je snaha toto zrychlení v rámci možností (velikost ústředí) minimalizovat. Jakým způsobem se dá cestovat v případě, že nejvyšší povolené zrychlení je a (když povolíme cestování na více průletů)? Jak dlouho pak bude trvat cesta v závislosti na vzájemné poloze výchozího a cílového místa?

Můžete předpokládat, že hustota Měsíce je v celém objemu konstantní.

Řešení:

Nejprve se zaměřím na centrum a jeho tvar, ten bude přibližně kulový, ale nejdále od vstupů šachet (o poloměru r_s) do dutiny budou trčet dovnitř jakési výčnělky. Teď můžu buď centrum zavěsit na konce výčnělků, ale lepší asi bude výčnělku odřezat a centrum vpasovat do větší dutiny. Její poloměr odhadnu pokrytím koule trojúhelníčky mezi středy šachet, plochu jednoho trojúhelníčku $S_\Delta = \sqrt{12} r_\mathrm{s}^2$ i jejich počet P (pozor, připadají dva na šachtu) znám, nepravidelnost při pokrývání pro velký počet trojúhelníčků zanedbám:

$$\pi R_\mathrm{c}^2 = 2PS_\Delta\,,$$

z čehož spočtu

$$R_\mathrm{c}^2 = r_\mathrm{s}^2 P \frac{\sqrt{12}}{\pi}\,.$$

Nyní objem vytěženého materiálu V_MHD [1] – ten odhadnu objemem centra a válců šachet

$$V_\mathrm{MHD} = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{c}^3 + \pi r_\mathrm{s}^2 (R_\mathrm{M} - R_\mathrm{c}) P\,,$$

kde r_M je poloměr měsíce. Kdybych rozprostřel horninu po povrchu měsíce, kulová vrstva by měla tloušťku d, kde

$$\frac{4}{3}\pi (R_\mathrm{M} + d)^3 = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{M}^3 + V_\mathrm{MHD}\,.$$

Gravitační zrychlení se zvyšuje lineárně se vzdáleností od středu (pozor, jsme uvnitř koule, takže na nás působí pouze hmota „pod námi“), potenciální energie tělesa na povrchu je tedy jen $E_\mathrm{p} = m_\mathrm{kab} R_\mathrm{M} g_\mathrm{M}/2$ (poloviční). Ta se celá přemění na energii kinetickou

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{kab} R_\mathrm{M} g_\mathrm{M} = \frac{1}{2} m_\mathrm{kab} v_\mathrm{kab}^2\,,$$

z čehož snadno zjistím rychlost kabinky v centru $v_\mathrm{kab} = \sqrt{R_\mathrm{M} g_\mathrm{M}}$. Čas pádu je celkem snadné zjistit, jen co si uvědomím, že síla lineárně závislá na vzdálenosti

[1] Měsíční Hromadná Doprava

se vyskytuje u harmonického oscilátoru. Kabinka by po průletu jádrem dolétla až k povrchu a odtud zase zpět, stačí tedy spočíst čtvrtinu periody. Rovnice oscilátoru je $r = r_0 \cos \sqrt{g_\mathrm{M}/r_0}\, t$, ve středu tedy budu za

$$t_\mathrm{kab} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0}{g_\mathrm{M}}}\,.$$

Poloměr otáčky je závislý na poloměru ústředí a úhlu α mezi šachtami

$$r_\mathrm{ot} = R_\mathrm{c} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\,.$$

Přibližnou velikost nejmenšího úhlu α (téměř protilehlé šachty) zjistím asi nejsnáze z rovnostranného trojúhelníku mezi středem koule a středy vstupů sousedních šachet do centra:

$$\sin\alpha = \frac{2r_\mathrm{s}}{R_\mathrm{c}}\,.$$

Dostředivé zrychlení v kabince je pak $a_\mathrm{ot} = v_\mathrm{kab}^2/r_\mathrm{ot}$.

Teď si ještě pro ilustraci zvolím pevné hodnoty $P = 2\,000$, $r_\mathrm{s} = 100\,\mathrm{m}$, $R_\mathrm{M} = 1\,738\,\mathrm{km}$, $g_\mathrm{M} = 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Z toho mi postupně vyjde, že $R_\mathrm{c} = 4\,700\,\mathrm{m}$, $V_\mathrm{MHD} = 109\cdot 10^{12}\,\mathrm{m^3}$, $d = 11{,}5\,\mathrm{m}$, $v_\mathrm{kab} = 1\,677\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $t_\mathrm{kab} = 27{,}11\,\mathrm{min}$, $\alpha = 15{,}32^\circ$, $r_\mathrm{ot} = 220\,\mathrm{km}$, $a_\mathrm{ot} = 12{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Toto jsou (snad až na množství horniny) celkem rozumná čísla, cestování se časově nejvíc vyplatí na protější stranu, jinak jsou přelety tam a zpět s vychýlením vždy jen o malý úhel velmi zdlouhavé a při zmenšování úhlu α prudce roste zrychlení ve středu.

Pro menší projekt $P = 1\,000$, $r_\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$ mi vyjde $R_\mathrm{c} = 332\,\mathrm{m}$, $V_\mathrm{MHD} = 0{,}5\cdot 10^{12}\,\mathrm{m^3}$, $d = 0{,}06\,\mathrm{m}$, $\alpha = 21{,}69^\circ$, $r_\mathrm{ot} = 11\,\mathrm{km}$, $a_\mathrm{ot} = 255{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, což už je zrychlení pro člověka neúnosné (ten bez následků snese jen několik g).

Gavento

Úloha 5.3 – Požár (5b)

Zadání:

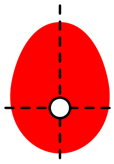
Jak rychle a jakým způsobem se bude šířit plamen po krychli ze zápalek?

Řešení:

Pozn. red.: Tu ponúknuté riešenie je len jeden z možných prístupov, ako k tejto, pravdepodobne analyticky neriešiteľnej, úlohe pristupovať. Nie je kompletné a ponúka len jeden pohľad na problém.

Rozhodli sme sa pristúpiť k problému teoreticky. Teda hneď po úvodnom pokuse, pri ktorom sme overovali, ako rýchlo sa plameň prenáša medzi hlavičkami zápaliek v rôznych smeroch (nahor, nadol, diagonálne a vodorovne). To, že sme sa zamerali len na hlavičky, malo niekoľko dôvodov: hlavičky majú nižšiu zápalnú teplotu, takisto majú vyššiu teplotu horenia ako drevo, z ktorého je telo zápalky, a najmä, hlavičky sú prakticky jediné, čo narušuje povrch kocky – k drevu sa vzduch a plameň temer nedostanú. Výsledky experimentu dopadli čiastočne podľa očakávania. Čiastočne preto, lebo horenie smerom nahor bolo asi dvojnásobne rýchlejšie ako horenie smerom nadol. Neočakávané bolo, že smerom šikmo nadol, nadol a dokonca aj vodorovne sa plamene šírili v podstate rovnako rýchlo. Usudzujeme, že k tomuto javu došlo vďaka veľkej prudkosti horenia zápalky, pri ktorej horúce plyny tryskajú rovnomerne na všetky strany a naviac sú nahor urýchľované vztlakom. Tento mechanizmus prenosu tepla sa nazýva prúdenie. V tomto prípade sa ešte uplatňuje žiarenie (rovnomerne do všetkých smerov v podobe elektromagnetických vĺn). Tretí spôsob prenosu – vedenie – sa uplatňuje len v zanedbateľnej miere (plyny aj drevo sú zlé vodiče tepla).

Na základe výsledkov experimentu sme zostrojili obrázok r5.3.1, kde veľkosť „plameňa" je nepriamo úmerná času potrebnému na zapálenie susednej zápalky v tomto smere.


Obr. r5.3.1

Vyzbrojení takýmito údajmi sme sa pustili do konštrukcie počítačového modelu. Ten pre zjednodušenie ráta len s jednou stenou kocky (t.j. šachovnicou 10×10), na ktorej si môžeme vybrať zápalky zapálené na začiatku a jej orientáciu (vodorovne alebo zvislo, šikmá poloha by sa dala po drobnej úprave tiež vyskúšať). Po prebehnutí programu (rátajúc s univerzálnymi časovými jednotkami) sme dostali nasledovné výsledky:

prvá zápalka	vľavo dole	vpravo hore	v strede
zvislá stena	21	34	17
vodorovná stena	29	25	17

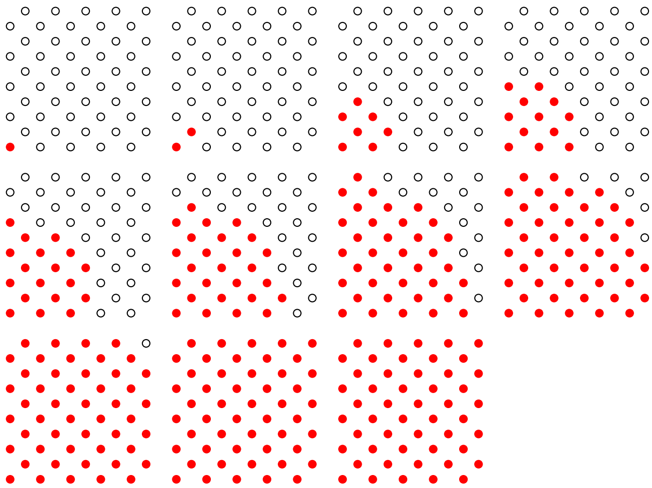
Tabuľka r5.3.1 – doba vzplanutia steny

Ako vidieť, časy vo vodorovnej polohe sa úplne nezhodujú, čo je asi spôsobené nepresnosťou algoritmu. Ten vezme všetky zapálené zápalky a zráta ich tepelný príspevok k ešte nezapálenej. Až príspevok dosiahne určitú (nastaviteľnú) hodnotu, dôjde k zapáleniu zápalky a táto sa stane ďalším tepelným zdrojom (s oneskorením niekoľko jednotiek). Výstup sme upravili do grafickej podoby, kde máme pre rôzne časy vyznačené horiace a nehoriace zápalky.

Zobrazená sekvencia ukazuje horenie vertikálnej steny. Plameň sa zhruba rovnako rýchlo širi nahor (vďaka stúpaniu plameňa) a zároveň po diagonále (vďaka menšej vzdialenosti zápaliek). Ako vidíme, plameň vyštartuje smerom nahor a potom sa postupne šíri až pohltí celú šírku steny. Obrázky zachytávajú stav kocky vždy po troch časových jednotkách.

Ďalšie podobné obrázky pre iné smery horenia nájdete na www stránke `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti`, keďže v časopise by zaberali priveľa miesta.

Podobnú analýzu môžeme previesť aj pre horenie opačným smerom (zhora nadol). Vzhľadom na to, že rýchlosť zapálenia je v dolnej pologuli všade zhruba rovnaká, plameň sa šíri viac po uhlopriečke, keďže na nej sú si zápalky najbližšie (vzdialenosť hlavičiek na uhlopriečke je $\sqrt{2}$ zápalky, kdežto v smere osí 2 zápalky. To isté ale platí aj pre šírenie po vodorovnej rovine, keďže jediný význačný smer je nahor. To znamená, že šírenie bude opäť najrýchlejšie po



Obr. r5.3.2 – Horenie bočnej strany kocky po zapálení z ľavého dolného rohu.

uhlopriečke. Už horiaca časť steny bude mierne vydutá. Presne k rovnakému výsledku dospel aj Doc.$^{\text{M}}$ Peter Perešíni vo svojich úvahách.

Keď teda máme spracované predpoklady pre horenie stien, môžeme ich vyskúšať v praxi. Ale ouha! Proces horenia kocky je príliš rýchly aj na bežnú videokameru. Preto dávame slovo niektorým riešiteľom:

- Dr.$^{\text{M}}$ Bedřich Roskovec: Stěna chytne během jedné sekundy, ale další stěny chytají s velkým zpožděním.[2] Jediné, co se potvrdilo, je šíření po uhlopříčkách.
- Mgr.$^{\text{M}}$ Marek Pecha: Plamen se pohyboval po obvodových stěnách krychle a zápalky, které již byly podpáleny, sžíraly krychli směrem ke středu.
- Doc.$^{\text{M}}$ Jan Musílek: Protože mezi krajními hlavičkami jednotlivých stěn pomyslné krychle je větší vzdálenost než mezi hlavičkami téže stěny, bude mezi vzplanutími jednotlivých stěn vždy určitá časová prodleva. Když vzplanou všechny hlavičky, požár samovolně zhasne. Těla zápalek přitom pouze ztmavnou (případně částečně ohoří), ale neshoří.
- Dr.$^{\text{M}}$ Zuzka Safernová a Mgr.$^{\text{M}}$ Cyril Hrubiš: Zjistili jsme, že oheň se po povrchu kostky šíří rapidně rychle. Další důležitý poznatek je, že kostka ohořela rovnoměrně po celém povrchu. Neméně důležitým faktem je neporušení celistvosti kostky ani po ustání ohně. Plameny se dle našeho pozorování šíří přibližně rovnoměrně rychle po povrchu kostky, do všech směrů od místa zapálení. Jedinou výjimkou je zapálení kostky ze spodní strany, kdy stoupajíci horké plyny přehřívají svislé

[2] *Pozn. red.: autor použil kocku menších rozmerov*

stěny, po kterých se pak oheň šíří rychleji, tedy svislé stěny vzplanou téměř najednou.

My len dodávame, že spomenuté zapálenie od spodnej steny obvykle znamená, že sa plameň prenesie na bočnú stenu naraz po celej dĺžke hrany. V takomto prípade bočná stena vzblĺkne (podľa modelu) do 14 jednotiek, pri opačnom postupe plameňa (zhora nadol) za 25 jednotiek. Pri pokuse nájsť podobný prípad v zázname sme našli, že podobné horenie trvá asi 12 filmových políčok smerom nahor a asi 25 filmových políčok smerom nadol. To je, čo sa týka pomeru, veľmi dobrá zhoda s teóriou. Podobne sa nám podarilo overiť (tiež na filmovom materiále, ktorý posledne menovaná dvojica poskytla) aj rýchlosť horenia vodorovnej steny. Teória predpovedala 29 krokov. Sledovanie filmu odhalilo reálnych 26 políčok. Zdá sa, že model pomerne dobre zodpovedá experimentálnym údajom, ale bolo by ho potrebné otestovať na väčšej vzorke.

Jeffer

Úloha 5.4 – Útvar (3b)

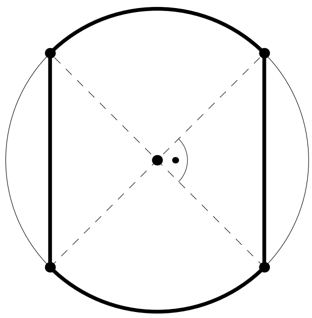
Zadání:

Najděte konvexní rovinný obrazec, kterým nelze zakrýt půlkruh, ale dvěma takovými obrazci lze zakrýt kruh stejného poloměru.

Řešení:

Nejdůležitější zřejmě bylo si uvědomit, že úloha neznemožňuje překrývání útvarů (pokud by se nesměly překrývat, záhy by se došlo k závěru, že takový útvar neexistuje). Pak si stačilo pohlídat konvexnost útvaru a nápady byly opravdu pestré. Uvádím nejjednodušší a nejčastější z nich.

Teka



Úloha 6.1 – Duha na Titanu (4b)

Zadání:

Poté, co sonda Huygens objevila pod atmosférou Titanu pevný povrch, není mise s lidskou posádkou směřující na tento Saturnův měsíc až tak nemyslitelná. Představme si teď, že by zmizelo zakalení atmosféry, a případný kosmonaut stojící na povrchu by se rozhlédl krátce po *vydatném dešti kapalného metanu. Zpoza mraků by se vynořilo Slunce, a kosmonaut by uviděl duhu. Anebo ne? Kdyby ji uviděl, kde by byla a jak by vypadala?*

Řešení:

Pozn. red.: Ako vzorové sme sa rozhodli – s menšími úpravami – uverejniť riešenie Doc.MM Jána Musílka.

Běžně na Zemi pozorujeme duhu prvního a druhého řádu. Duha prvního řádu znamená, že paprsky se uvnitř kapky jedenkrát odrazí (u duhy druhého řádu nastane odraz dvakrát).

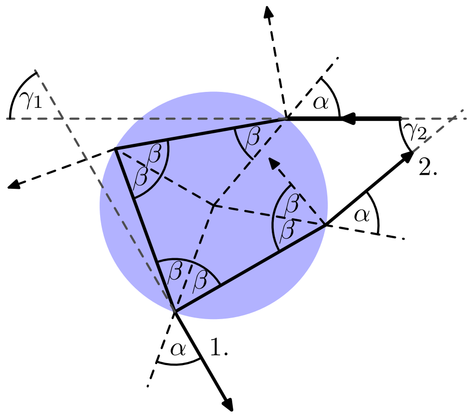
Pozn. red.: Používame trochu iný obrázok ako nám autor poslal. Svetelný lúč prichádza vpravo hore, máme vyznačené obe dúhy – dúhu prvého aj druhého rádu.

Dle obrázku tedy:

$$\gamma_1 + 2\alpha + 2 \cdot (\pi - 2\beta) = 2\pi\,,$$

co po úpravě dává:

$$\gamma_1 = 4\beta - 2\alpha\,. \qquad \text{(r6.1.1)}$$



Obr. r6.1.1 – Vznik duhy 1. a 2. řádu

Označíme-li poloměr kapky r a vzdálenost vstupujícího paprsku od osy procházející středem kulové kapky h, pak poměr těchto dvou vzdáleností $p = h/r$ nabývá hodnot od nuly do jedné a je roven sinu úhlu α:

$$\sin\alpha = \frac{h}{r} = p \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin p\,.$$

Podle zákona lomu pro poměr sinů úhlu dopadu a úhlu lomu platí:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{1} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} = \arcsin\frac{p}{n}\,,$$

kde n je relativní index lomu kapaliny (předpokládáme, že relativní index lomu atmosféry je roven jedné). Když teď do (r6.1.1) dosadím za α a β dostávám pro úhel γ_1 paprsku vráceného kapkou:

$$\gamma_1 = 4\beta - 2\alpha = 4\arcsin\frac{p}{n} - 2\arcsin p\,, \qquad \text{(r6.1.2)}$$

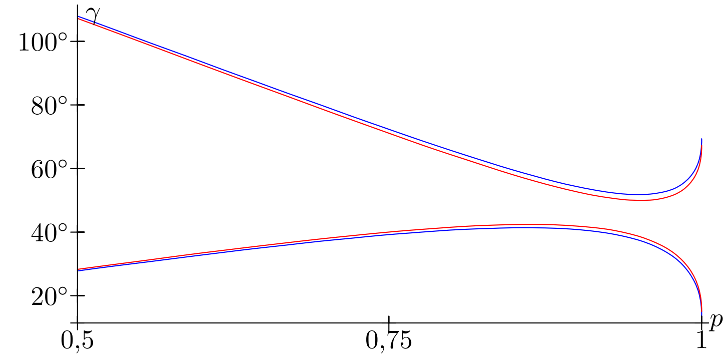
což je duhová funkce pro duhu prvního řádu.

Duha druhého řádu vzniká po dvou odrazech v kapce. Duhová funkce má pak tvar:

$$\gamma_2 = \pi - 6\beta + 2\alpha = \pi - 6\arcsin\frac{p}{n} + 2\arcsin p\,. \qquad \text{(r6.1.3)}$$

Pozn. red.: Výsledky pre dúhovú funkciu prvého rádu pre Titán sú: γ_1 *pre červenú farbu je* $50°8'$ *a pre modrú* $48°35'$. *Dúha je teda široká* $2{,}5°$, *pričom tá* *na Zemi je široká len jeden stupeň. Mohlo by sa teda zdať, že dúha na Titáne bude krajšia . . .*

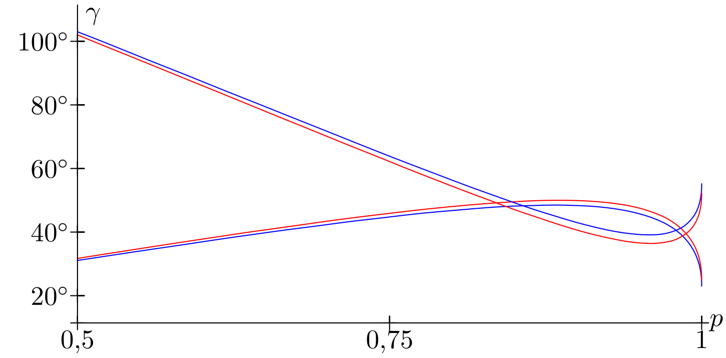
Obé duhové funkce γ_1 i γ_2 vyneseme do jednoho společného grafu, nejprve pro Zemi:



Obr. r6.1.2 – Duhové funkce pro kapky vody

Úhlový pás mezi 42,5° a 50,1° není pokryt žádným odraženým světlem, což odpovídá Alexandrovu oblouku. Grafy jsou zdvojeny – pro červenou a modrou barvu. V duze prvního řádu je nahoře červená, v duze druhého řádu je to naopak.

Podobný graf pro Titan pak vypadá takhle:



Obr. r6.1.3 – Duhové funkce pro kapky metanu

Jak je vidět pro kapalný metan, na Titanu by se obě duhové funkce překřížily. Žádný tmavý pás mezi oběma oblouky duhy nevznikne, všechny barvy spektra se smíchají dohromady a duha vůbec nevznikne. Pro uspořádaní barev platí to samé co na Zemi.

Pozn. red.: Ďalej Doc.MM Musílek pripúšťa vznik slabej dúhy 1. rádu vďaka tomu, že dúha 2. rádu je viac oslabená svetlom, ktoré sa neodrazí, ale prechádza von z kvapky. Ako použitú literatúru uvádza nasledovné www stránky:

[1] `http://ukazy.astro.cz/duha-vznik.php`

[2] `http://kekule.science.upjs.sk/fyzika/ucebnetexty/doplnkove/lucovaoptika/02.htm`

Poznámky redakcie

Pozrime sa na problém prekríženia dúhových funkcií. Najprv si vysvetlíme graf pre Zem. V spodnej časti je funkcia primárnej dúhy (γ_1). Skutočná (viditeľná) dúha vzniká v mieste, kde graf dosahuje maximum (tu sa najviac lúčov láme približne k pozorovateľovi, svetlo je najsilnejšie). Časti funkcie, ktoré sú pod maximom, vytvárajú zjasnenie priestoru pod dúhou – láme sa sem menej lúčov s menším rozptylom farieb. Nasleduje Alexandrov pás, kam sa neláme svetlo ani z primárnej, ani zo sekundárnej dúhy. V tomto priestore vidíme iba bežný jas svetla rozptýleného na oblohe. A už sme pri funkcii sekundárnej dúhy (γ_2). Poloha jej minima vymedzuje miesto vzniku sekundárnej dúhy. Tá ale vznikne pokiaľ v takom uhle sú ešte nejaké kvapky vody, teda miesto, kde dúha „vzniká", musí byť buď dostatočne blízko, alebo dostatočne vysoko. Zvyšky dúhovej funkcie potom vytvárajú zjasnenie oblohy nad sekundárnou dúhou.

Keď sa teraz pozrieme na graf pre Titán, na základe predchádzajúcich úvah vidíme, že vzniknú dve dúhy ako je obvyklé a naviac vznikne mohutný svetlý pás medzi nimi, v ktorom sa môže svetlo oboch dúh strácať. Rovnako budú dúhy obklopené svetlou plochou aj z vonkajšej strany. Farby dúh budú bledšie, keďže sa budú navzájom miešať (čo môže viesť až do stavu, že žiadna dúha nebude pozorovateľná). Otázkou je, či naozaj platia udané indexy lomu kvapalného metánu. Tie sú predsa udávané voči vákuu, ale my budeme pozorovať dúhu v atmosfére. Našťastie má väčšina plynov index lomu blízky jednej.

Ostáva nám len zodpovedať otázku, kde sa dúha bude nachádzať. Poznajúc uhly γ ju už máme vlastne zodpovedanú: dúha bude vo výške $\gamma - h_\odot$, kde $h_\odot$ je výška Slnka. Ak teda Slnko bude vyššie ako je hodnota γ, dúha nevznikne vôbec – odrazené lúče budú smerovať od povrchu. V takomto prípade by sme dúhu mohli pozorovať napríklad z lietadla (pri dostatočne veľkom zrážkovom poli by vytvárala medzikružie).

Jeffer

Úloha 6.2 – Poskakující lidé (3b)

Zadání:

Jistá organizace (`http://www.worldjumpday.org/`*) tvrdí, že pokud bude velký počet lidí synchronizovaně skákat, tak dokážou změnit oběžnou dráhu Země, a zamezit tak globálnímu oteplování. Spočtěte, kolik lidí a jak dlouho by muselo skákat, aby ovlivnili oběžnou dráhu Země natolik, aby poloměr dráhy vzrostl o vzdálenost* Δr.

Řešení:

Tuto úlohu jsme popravdě zadali abychom vás zmátli – při použití správného argumentu se řešení vejde do jediné věty: Zachovává se vektor hybnosti. (Tento zákon zachování doufám znáte!) Pokud si toto uvědomíme, je zřejmé, že ať se v soustavě Země-lidé děje cokoliv, tak pokud tuto soustavu neopouští žádná hmota, vektor hybnosti těžiště této soustavy se během procesu nikdy nezmění. Na situaci nic nemění libovolný způsob, jakým by lidé poskakovali (synchronně, asynchronně, ani kdyby např. během výskoku lezli pomalu na strom a pak při seskoku skočili co nejrychleji, aby při cestě nahoru vykonaly třecí síly menší práci :-), apod.) O energii není potřeba vůbec uvažovat!

Prémiový bod jsme udělili Mgr.[M] Marku Basovníkovi, který si povšiml (a správně matematicky odvodil), že když člověk vyskočí, Země se pod ním nepatrně zpomalí.

Irigi

Úloha 6.3 – Musí to být tolik, ale proč? (6b)

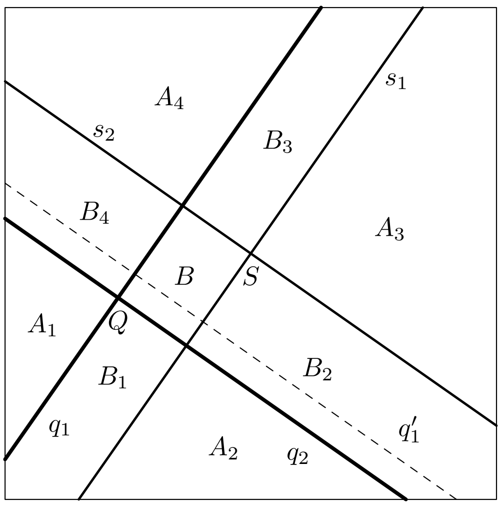
Zadání:

Dvě navzájem kolmé přímky rozdělují čtverec na čtyři části, z nichž tři mají obsah 1. Jaký obsah může mít čtvrtá část?

A aby to nebylo tak jednoduché, odpověď dokažte.

Řešení:

Každého asi napadne, že i čtvrtá část musí mít obsah 1. Pokusíme se toto tvrzení dokázat. Zřejmým a jednoduše zdůvodnitelným faktem je, že dvojice kolmic protínající se ve středu čtverce jej skutečně rozděluje na čtyři shodné části (tj. nejen se shodným obsahem). Uvažujme tedy libovolné dvě kolmice q_1, q_2, protínající se v bodě Q, a středem S čtverce veďme s nimi rovnoběžné přímky s_1, s_2. Tím se čtverec rozdělí obecně na 9 částí, A_i, B_i, B jak je naznačeno na obrázku. A_i, B_i jsou číslovány v kladném směru, A_1 je ta část, která obsahuje bod Q. (Neříkáme a priori nic o jejich tvaru, přímky nemusí být umístěny způsobem na obrázku, některé části mohou mít dokonce nulový obsah. Takováto devítice částí je však *vždy* vytvořena.) Konvence: budeme-li psát A_i, B_i, B v množinových výrazech, míníme tím oblasti jako množiny. V aritmetických výrazech máme vždy na mysli obsahy těchto oblastí.



Uvažujme $Q \neq S$, jinak už jsme hotovi. Pak evidentně

$$A_1 < B + B_2 + B_3 + A_3 \,,$$

a protože víme, že tři z částí čtverce vyťatých přímkami q_i dávají obsah 1, je buďto

$$B_1 + A_2 = B_4 + A_4 = A_1 \,, \qquad \text{(r6.3.1)}$$

nebo

$$B_1 + A_2 = B_4 + A_4 = B + B_2 + B_3 + A_3 \,; \qquad \text{(r6.3.2)}$$

v každém případě ale

$$B_1 + A_2 = B_4 + A_4 \,.$$

Dále zřejmě platí

$$A_2 + B_2 = A_4 + B_3 \,,$$

a kombinací posledních dvou vztahů dostáváme

$$B + B_1 + B_3 = B + B_2 + B_4 \,,$$

čili oba „pásy“ mají stejný obsah. Nyní přichází nejdůležitější úvaha důkazu, přechod od obsahů ke shodnostem: Části čtverce $U = A_1 \cup A_2 \cup B \cup B_1 \cup B_2 \cup B_4$ a $V = A_1 \cup A_4 \cup B \cup B_1 \cup B_3 \cup B_4$ jsou *shodné*, otočené o 90° okolo S. Toto otočení převede přímku q_1 na přímku q_1'. Z výše uvedeného dohromady víme, že přímky q_1' a q_2 *jsou rovnoběžné a zároveň dělí útvar U ve stejném (obsahovém) poměru.* To je však možné jen tehdy, pokud tyto přímky splývají. (Představte si útvar U dělený různými přímkami rovnoběžnými s q_2. Co se děje s obsahy?). Dále už je všechno celkem snadné. Ze shodnosti (otočení o 90°) dostáváme $B_3 = B + B_4$. Odtud

$$A_4 + B_4 = A_4 + B_3 - B = A_3 - B \,.$$

Podle toho, která z rovnic (r6.3.1), (r6.3.2), platí, dostáváme buďto

$$A_1 = A_3 - B \,,$$

nebo

$$B + B_2 + B_3 + A_3 = A_3 - B \,.$$

Z první rovnice pak plyne

$$B_4 = B_1 = 0 \,,$$

z druhé

$$B = B_2 = B_3 = 0 \,,$$

což obojí znamená, že $Q = S$.

Poznámky k došlým řešením: Úloha svádí k řešení diskuzí pohým porovnáváním obsahů. Do tohoto kyselého jablka kousli Mgr.[MM] Marek Basovník a Doc.[MM] Jan Musílek. Zcela jiný přístup zvolil Doc.[MM] Zbyněk Konečný a i když rovněž potřeboval diskuzi, narozdíl od dvou výše zmíněných pánů ji měl přehledně a správně, takže si zcela zasloužil 6 bodů. Ostatní došlá řešení byly více či méně úsměvné pokusy.

Teka

Výsledková listina za 5. číslo

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t5	t6	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Safernová	91	5		3	3			11	75
2.	Doc.$^{\text{MM}}$ Jan Musílek	121		8	3				11	61
3.	Doc.$^{\text{MM}}$ Peter Perešíni	101			5				5	57
4.	Doc.$^{\text{MM}}$ Zbyněk Konečný	128				3			3	51
5–6.	Dr.$^{\text{MM}}$ Bedřich Roskovec	68		7	4	0			11	44
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Matěj Korvas	44								44
7–9.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Veronika Bachratá	39								39
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Beránková	39	3	4		3			10	39
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Rygl	39		3		3			6	39
10.	Doc.$^{\text{MM}}$ Tereza Klimošová	126								35
11–12.	Dr.$^{\text{MM}}$ František Konopecký	60								33
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jakub Opršal	33								33
13.	Doc.$^{\text{MM}}$ Stanislav Basovník	157								32
14–15.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zdeněk Jaroň	30								30
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radim Pechal	30								30
16–18.	Doc.$^{\text{MM}}$ Lenka Studničná	135								29
	Dr.$^{\text{MM}}$ Eva Černohorská	82								29
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Hlavatý	29								29
19.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Takács	37								28
20–21.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jaroslav Hančl	27				3			3	27
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Alžběta Pechová	27			2	1	1	4	8	27
22.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Radim Vansa	26								26
23.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Scholz	33								25
24–25.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Cyril Hrubiš	21	5		3				8	21
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Marek Pecha	21	3	1	2				6	21
26–28.	Dr.$^{\text{MM}}$ Jindřich Soukup	69								20
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ondřej Tkáč	37								20
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Ján Pich	20								20
29–30.	Bc.$^{\text{MM}}$ Mája Kolovratníková	19								19
	Bc.$^{\text{MM}}$ Petr Smital	19								19
31.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Petra Malá	47								18
32.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Kateřina Böhmová	34								17
33–35.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Štěpánka Mohylová	41								15
	Bc.$^{\text{MM}}$ Dárius Gál	15								15
	Bc.$^{\text{MM}}$ Vlado Virčík	15								15

Poř.	Jméno	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	t5	t6	$\sum_0$	$\sum_1$
			Úlohy							
36–37.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	72								14
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Javůrek	27		4		2			6	14
38.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	13		6		3			9	13
39–40.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	84								11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Roman Derco	11								11
41.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kubáň	43								9
42–43.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Monika Martinisková	24								8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	11								8
44–47.	Radek Beňo	7								7
	Jakub Beran	7								7
	Marie Kolářová	7								7
	Robert Roreitner	7								7
48.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Greškovič	39								6
49–50.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	20								5
	Marian Vráblik	5								5
51–57.	Martin Berka	4								4
	Jan Konopásek	4								4
	Martin Křivánek	4								4
	Aleš Podolník	4								4
	Kristýna Stodolová	4								4
	Martin Všetička	4								4
	Jaroslav Žák	4								4
58–59.	Ondřej Bílka	3		2		1			3	3
	Kateřina Zuzaňáková	3								3
60.	Lucie Mikšíková	2								2
61.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	36								1

Výsledková listina za 6. číslo

Poř.	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t6**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Safernová	99				8					8	83
2.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	133	4	3	3					2	12	73
3–4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Zbyněk Konečný	134			6						6	57
	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Perešíni	101										57
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Bedřich Roskovec	74	3	3	0						6	50
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Matěj Korvas	44										44
7–9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Veronika Bachratá	39										39
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Beránková	39										39
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Rygl	39			0						0	39
10.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	126										35
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Takács	43					6				6	34
12–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ František Konopecký	60										33
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jakub Opršal	33										33
14.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	157										32
15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Pecha	31						1	9		10	31
16–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zdeněk Jaroň	30										30
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	30										30
18–20.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	135										29
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská	82										29
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Hlavatý	29										29
21–22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jaroslav Hančl	27										27
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Alžběta Pechová	27										27
23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Vansa	26										26
24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Scholz	33										25
25–26.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Basovník	21		4	4						8	21
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Cyril Hrubiš	21										21
27–29.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jindřich Soukup	69										20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Tkáč	37										20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Pich	20										20
30–31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Mája Kolovratníková	19										19
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Smital	19										19
32–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Malá	47										18
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Dárius Gál	18	0	3	0						3	18
34.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Böhmová	34										17

			Úlohy									
Poř.	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t6**	$\sum_0$	$\sum_1$
35–36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpánka Mohylová	41										15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlado Virčík	15										15
37–38.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	72										14
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Javůrek	27			0						0	14
39–40.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	84										11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Roman Derco	11										11
41.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kubáň	43										9
42–43.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Monika Martinisková	24										8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Pechová	11										8
44–47.	Radek Beňo	7										7
	Jakub Beran	7										7
	Marie Kolářová	7										7
	Robert Roreitner	7										7
48.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Greškovič	39										6
49–50.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	20										5
	Marian Vráblik	5										5
51–57.	Martin Berka	4										4
	Jan Konopásek	4										4
	Martin Křivánek	4										4
	Aleš Podolník	4										4
	Kristýna Stodolová	4										4
	Martin Všetička	4										4
	Jaroslav Žák	4										4
58–59.	Ondřej Bílka	3										3
	Kateřina Zuzaňáková	3										3
60.	Lucie Mikšíková	2										2
61.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	36										1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$). Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.